Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen
Faculté des sciences
Département des Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etudes

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Numérique Des Equations Aux Dérivées Partielles

Thème

Approximation Variationnnelle et Applications à des problèmes Elliptiques et Paraboliques

Présenté le 04 Juillet 2016 par
Bercisse soumia

Devant le jury composé de

M. B. Abdellaoui	Professeur	Président	Université de Tlemcen
Mme S. Benmansour	MCB	Examinatrice	Université de Tlemcen
M. M. Derhab	Professeur	Examinateur	Université de Tlemcen
M. A. Bensedik	MCB	Encadrant	Université de Tlemcen

Année Universitaire 2016-2017

Remerciement

Mon premier remerciement va à Allah Soubhanou Wa Taala .

J'adresse mes chaleureux remerciements à mon encadrant Monsieur A. Bensedik, pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa disponibilité et la qualité de son écoute et ses remarques durant notre préparation de ce mémoire. J'ai pris un grand plaisir de travailler avec lui.

Je remercie Monsieur le professeur B. Abdellaoui de bien vouloir accepter de présider le jury d'examen de mon travail.

Je remercie aussi, les professeurs M. Derhab **et** Mme. S. Benmansour d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier également tout mes professeurs des mathématiques de la faculté de sciences.

Je terminerai en remerciant tous mes collègues de master 2 Option Analyse Numérique. Nous avons partagé des bons moments.

Enfin je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents pour leur amour et leur sacrifice. Que dieu leur procure une bonne santé et une longue vie.

A toute ma famille et à ma fidèle amie Sanaa.

Table des Matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles de type elliptiques interviennent dans les études scientifiques ou techniques : Transfert thermique, Ecoulement irrotationnel d'un fluide parfait, Ecoulement dans un milieu poreux.....

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique où le temps est une variable. Elle décrit des phénomènes physiques de conduction thermique, introduite initialement en 1811 par Jean Baptiste Joseph Fourier, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier, permettant une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes physiques, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entrainé aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses.

Il est souvent difficile de démontrer l'existence d′une solution du problème original d'équations aux dérivées partielles, pour cela la formulation variationnelle, qui est une autre manière d'énoncer ce problème, permet de définir une solution du problème original mais avec une régularité plus faible. L'un des intérêts de cette formulation est de pouvoir disposer de concepts et de propriétés de l'analyse fonctionnelle, en particulier, ceux des espaces de Hilbert et de Sobolev. La formulation variationnelle prend son sens dans le théorème de Lax-Milgram.

Le théorème de Lax-Milgram des noms de Peter Lax et Arthur Milgram, auxquels on adjoint parfois celui de Jaques-Louis Lions, ce théorème s'appliquant à certains problèmes aux dérivées partielles exprimées sous une formulation variationnelle (appelée également une formulation faible) qui permet ensuite de conclure l'existence et l'unicité d'une solution de cette formulation. Il est l'un des fondements de la méthode de Galerkin.

La méthode de Galerkin est devenue l'outil de base dans la résolution des équation aux dérivées partielles depuis son introduction au $XX^{ième}$ siècle. cette méthode a été développée dans les années 1970, comme en 1973, où Reed et Hill ont utilisé la méthode de

Galerkin pour résoudre les équations de Transport du neutron (systèmes hyperboliques). Toutefois, l'application aux systèmes elliptiques a été étudié par de nombreuses personnes à la même époque, dont on retiendra Ivo Babuska, Jacques-Louis Lions et J. A. Nitshe, ainsi que Baker qui l'appliqua à des systèmes du 4^{eme} ordre en 1977.
Par la suite, l'étude et le développement de la méthode de Galerkin pour les systèmes elliptiques ont été donnés par Arnold, Brezzi, Cohburn et Marini.

• le but de ce travail est de voir la robustesse de la méthode d'approximation variationnelle en particulier celle de Galerkin dans la résolution des équations aux dérivées partielles de type elliptique et parabolique

Dans le chapitre 1: On rappelle quelques espaces de Sobolev car ils jouent un rôle fondamental dans la théorie variationnelle des équations aux dérivées partielles, ainsi que dans la méthode de Galerkin, et on donne aussi la formulation variationnelle qui permet d'établir rigoureusement un résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Dans le chapitre 2: On définit la notion de la méthode d'approximation interne pour les Equations aux Dérivées Partielles.

Dans le chapitre 3: On applique la méthode de Galerkin à un problème elliptique non local.

Le chapitre 4: Concerne l'étude de l'équation de la chaleur qui revient d'introduire les espaces de Sobolev paraboliques.

Chapitre 1

Préliminaires et Notions fondamentales

Nous allons rappeler brièvement les outils de base d'analyse fonctionnelle, ainsi que quelques résultats connus pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

1.1 Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe, de bord $\partial\Omega := \Gamma$.

Définition 1.1 *On définit l'espace de Sobolev d'ordre* 1 *comme suit*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., N \right\},$$

où les dérivées partielles sont prises au sens faible.

•*Le produit scalaire sur* $H^1(\Omega)$ *est défini par*

$$(u, v) = \int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx \ , \forall (u, v) \in H^1(\Omega),$$

La norme induite est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u,u)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_\Omega u^2 dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Elle est équivalente à la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^N \left(\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.1 *L'espace $H^1(\Omega)$, muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Preuve: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et $(L^2(\Omega))^N$ respectivement. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, ces suites convergent. Notons u et $(v_1, ..., v_N)$ leurs limites respectives. Pour conclure que $u \in H^1(\Omega)$, nous allons montrer que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$,$\forall i = 1, ..., N$.

Fixons $\rho \in C_c^1(\Omega)$. Comme chaque u_n est dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\int\limits_\Omega u_n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dx = -\int\limits_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rho dx.$$

Lorsque n tend vers l'infini

$$\int\limits_\Omega u_n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dx \to \int\limits_\Omega u \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dx,$$

et

$$-\int\limits_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rho dx \to -\int\limits_\Omega v_i \rho dx,$$

par continuité du produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ on en déduit que, pour tout $\rho \in C_c^1(\Omega)$,

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial \rho}{\partial x_i}dx = -\int\limits_{\Omega} v_i \rho dx.$$

par conséquent $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, et $u_n \to u$ quand $n \to \infty$ dans $H^1(\Omega)$. ■

Définition 1.2 *On dit qu'un ouvert Ω est régulier ou que sa frontière Γ est une variété de classe C^1 de dimension $N-1$ (Ω étant d'un seul côté de Γ) si pour tout point $x \in \partial\Omega$, il existe une fonction ρ de classe C^1 bijective entre un voisinage V_x de x et Q dont la réciproque ρ^{-1} est de classe C^1 et qui envoie $\Omega \cap V_x$ sur Q^+et $\partial\Omega \cap V_x$ sur Q^0 où:*

$$\begin{aligned}
Q &= \left\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^N, |x'| < 1, -1 < x_n < 1\right\}, \\
Q^+ &= \left\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^N, |x'| < 1, 0 < x_n < 1\right\}, \\
Q^0 &= \left\{(x', 0) \in \mathbb{R}^N, |x'| < 1\right\}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.2 *(Théorème de Trace). Si Ω un ouvert régulier (dont la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de $\mathbb{R}^N$ est de classe C^1 par morceaux), alors $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ $\left(\overline{D(\bar{\Omega})}^{H^1(\Omega)} = H^1(\Omega)\right)$ et l'application*

$$\begin{aligned}
\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\Gamma) \\
v &\mapsto \gamma_0(v) = v_{|\Gamma}
\end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ encore notée γ_0 c-à-d,

$$\exists C_{\gamma_0} > 0/\ \forall u \in H^1(\Omega),\ \ \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\gamma_0} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Définition 1.3 *On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$comme étant la fermeture de $D(\Omega)$(espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω) pour la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$.*

Ainsi, pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite (v_n) de fonctions de $D(\Omega)$ telle que:

$$\lim_{n\to\infty} \|v - v_n\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent donc au bord et on peut écrire

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega);\ \gamma_0(v) = 0 \ \right\}.$$

Théorème 1.3 *(Inégalité dePoincaré). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné au moins dans une direction. Alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$ qui ne dépend que du domaine Ω telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.2 Formules de Green

Première formule de Green

Nous considérons un ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de bord Γ. Alors si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a la formule d'intégration par parties (appelée aussi la première formule de Green)

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Gamma} uv\ cos(\vec{n}, e_i) d\sigma,\ 1 \leq i \leq N,$$

où $\vec{n}$ est un vecteur normal (de module 1) à Γ et e_i le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

Cette formule résulte d'abord de la formule de Gauss pour les fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$:

$$\text{Si } u \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ alors } \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\Gamma} u\ cos(\vec{n}, e_i) d\sigma,\ 1 \leq i \leq N.$$

En effet:

$$\text{si } u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ alors} \int \frac{\partial(u.v)}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\Gamma} u.vcos(\vec{n}, e_i) d\sigma, \ 1 \leq i \leq N.$$

d'où

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx = \int\limits_{\Gamma} u.vcos(\vec{n}, e_i) d\sigma, \ 1 \leq i \leq N.$$

Donc

$$\forall u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \ , \ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Gamma} u.vcos(\vec{n}, e_i) d\sigma, \ 1 \leq i \leq N.$$

Comme $D(\bar{\Omega}) \subset C^1(\bar{\Omega})$ nous avons aussi

$$\forall u, v \in D(\bar{\Omega}) \ , \ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Gamma} u.vcos(\vec{n}, e_i) d\sigma, \ 1 \leq i \leq N.$$

Or $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) \ , \ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Gamma} u.vcos(\vec{n}, e_i) d\sigma, \ 1 \leq i \leq N.$$

Deuxième formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ, C^1 par morceaux. Alors

$$\forall u \in H^2(\Omega) \text{ et } \forall v \in H^1(\Omega); \ -\int\limits_{\Omega} (\Delta u)\, v dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

A noter que

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \ 1 \leq i, \ j \leq N \right\}$$

Théorème 1.4 *(théorème de Rellich-Kondrachov). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et de classe C^1. On a*

si $p < N$, alors $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

si $p = N$, alors $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$

si $p > N$, alors $H_0^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,

avec injections compactes.

1.3 Rappels sur les formes linéaires et bilinéaires sur les espaces de Hilbert

La résolution d'une équation aux dérivées partielles se ramène à celle d'un problème variationnel. Nous abordons dans cette section les outils de base pour l'étude des problèmes écrits sous forme variationnelle.

Définition 1.4 *On appelle forme linéaire une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert V. Une forme linéaire L vérifie donc les propriétés suivantes*

$$L(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha L(w_1) + \beta L(w_2), \ \forall w_1, w_2 \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.1 *Si $V = L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ alors*

$$L_f(w) = \int_\Omega f(x) w(x) dx$$

est une forme linéaire sur V.

Définition 1.5 *Une forme linéaire L sur l'espace de Hilbert V muni de la norme $\|.\|_V$, est continue s'il existe une constante C telle que :*

$$|L(w)| \leq C\|w\|_V \ , \forall w \in V.$$

Exemple 1.2 *La fonctionnelle L_f de l'exemple précédent est continue.*
En effet; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|L_f(w)| = \left| \int_\Omega f(x)w(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.\|w\|_{L^2(\Omega)} = C\|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

où $C = \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Remarque 1.1 *L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert V est appelé espace dual de V et est noté V'.*

Définition 1.6 *Une forme bilinéaire a sur un espace de Hilbert $V \times V$ est une application satisfaisant:*

$$\begin{aligned} a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, w) &= \beta_1 a(u_1, w) + \beta_2 a(u_2, w), \forall u_1, u_2, w \in V \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \\ & \quad et \\ a(u, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) &= \beta_1 a(u, w_1) + \beta_2 a(u, w_2), \forall w_1, w_2, u \in V \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses 2 arguments.

Définition 1.7 *Une forme bilinéaire a est continue sur $V \times V$ s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u, w)| \leq C\|u\|_V.\|w\|_V \ \forall u, w \in V.$$

Définition 1.8 *Une forme bilinéaire a est symétrique si,*

$$a(u, w) = a(w, u) \ \forall u, w \in V.$$

Exemple 1.3 *Soit l'application a définie par:*

$$a(u, w) = \int_\Omega (uw + \nabla u \nabla w)\, dx = \int_\Omega \left(uw + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx$$

alors a est une forme bilinéaire continue sur $H^1(\Omega)$. La bilinéarité est facile à vérifier et la continuité découle de l'inégalité de Cauchy-Shwarz :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (uw + \nabla u \nabla w)\, dx\right| &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}.\|w\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)}.\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 4\|u\|_{H^1(\Omega)}.\|w\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où la continuité de a.

Définition 1.9 *Une forme bilinéaire a est coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive α telle que :*

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2 \ , \forall w \in V.$$

Une forme bilinéaire coercive est une généralisation de la notion de matrice définie positive .

Théorème 1.5 *(Riesz Frechet). Etant donné $\varphi \in V'$, il existe $f \in V$ unique tel que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \ \ \forall v \in V.$$

Théorème 1.6 *(Lax-Milgram).*
Soit V un espace de Hilbert et soit L est une forme linéaire continue sur V $(L \in V')$ et a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$. Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution du problème variationnel:

$$\textit{trouver une fonction } u \in V \textit{ telle que} : a(u, w) = L(w), \forall w \in V. \tag{1.1}$$

Preuve: Puisque a est une forme bilinéaire continue donc $a(.,v) \in V\,'$ pour tout $v \in V$, par le théorème de Riesz, il existe un unique Au tel que

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

L'opérateur A est linéaire, alors

$$a(u,v) = \langle u, Av\rangle \text{ pour tout } u, v \in V.$$

Nous avons aussi $L \in V'$, par le théorème de Riesz il existe un unique $f \in V$ tel que

$$L(v) = \langle f, v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Le problème variationnel est équivalent au problème suivant:

$$\text{trouver } u \in V \text{ telle que } Au = f.$$

Nous allons vérifier que l'on peut choisir $\rho > 0$ de façon que l'application

$$T : w \to w - \rho(Aw - f)$$

soit strictement contractante.

$$\begin{aligned}
\|T(w) - T(w')\|_V^2 &= \|w - w' - \rho A(w - w')\|^2 \\
&= \langle w - w' - \rho A(w - w'), w - w' - \rho A(w - w')\rangle \\
&= \|w - w'\|_V^2 + \rho^2 \|A(w - w')\|_V^2 - 2\rho\langle A(w - w'), w - w'\rangle \\
&= \|w - w'\|_V^2 + \rho^2 \|A(w - w')\|_V^2 - 2\rho\; a(w - w',\; w - w') \\
&\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) \|w - w'\|_V^2 .
\end{aligned}$$

Si nous choisissons $\rho \in \left] \frac{\alpha}{M^2}, \frac{2\alpha}{M^2} \right[$, on obtient $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2 < 1$.

Dans ce cas l'application T est strictement contractante. D'après le théorème du point fixe de Banach , T admet un unique point fixe u .

et par suite

$$\begin{aligned} \langle Tu,\ u\rangle &= \langle u - \rho\,(Au - f),\ u\rangle = \langle u,\ u\rangle \\ &\Longrightarrow \rho\,\langle (Au - f),\ u\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \langle (Au - f),\ u\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow Au = f. \end{aligned}$$

Et par suite u est la solution unique du problème variationnel. ■

Théorème 1.7 [2] *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème de Lax-Milgram et si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, le problème variationnel* (1.1) *est équivalent au problème de minimisation suivant :*

$$\textit{trouver } u \in V \textit{ tel que} : J(u) = \inf_{w \in V} J(w) = \inf_{w \in V} \left(\frac{1}{2} a(w, w) - L(w) \right).$$

La fonctionnelle J est souvent appelée fonctionnelle d'énergie .

Preuve: En premier lieu, on démontre que si u est l'unique solution du problème variationnel (1.1) alors u minimise forcément la fonctionnelle J sur tout l'espace V. Soit donc $w \in V$ quelconque .

On peut toujours écrire que :

$$w = u + (w - u) = u + w_1 \ , \ (w_1 = w - u)$$

On a alors

$$J(w) = J(u + w_1) = \frac{1}{2}a(u + w_1, u + w_1) - L(u + w_1).$$

Puisque a est bilinéaire et L linéaire, nous avons

$$J(w) = \frac{1}{2}\left[a(u,u) + a(w_1,u) + a(u,w_1) + a(w_1,w_1)\right] - L(u) - L(w_1)$$

et la symétrie de a nous donne

$$\begin{aligned} J(w) &= \left(\frac{1}{2}a(u,u) - L(u)\right) + \left(a(u,w_1) - L(w_1)\right) + \frac{1}{2}a(w_1,w_1) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(w_1,w_1). \end{aligned}$$

Car $a(u,w_1) - L(w_1) = 0$ puisque u est la solution du problème (1.1).

Enfin, la coercivité de a nous assure que

$$J(w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w_1,w_1) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2}\left\|w_1\right\|_V^2$$

ainsi

$$J(u) \leq J(w),\ \forall w \in V.$$

Donc u minimise la fonctionnelle J sur l'espace V.

• Inversement, si u minimise J, on démontre que u est aussi une solution du problème variationnel (1.1). Considérons la fonction de la variable réelle ε définie par:

$$g(\varepsilon) = J(u + \varepsilon w) = \frac{1}{2}a(u + \varepsilon w, u + \varepsilon w) - L(u + \varepsilon w)$$

Puisque u minimise J, la fonction g possède un minimum local en $\varepsilon = 0$, pour tout w. Donc

$$g'(0) = 0, \text{pour tout } w.$$

d'autre part on a

$$g(\varepsilon) = J(u) + \varepsilon\left(a(u,w) - L(w)\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}a(w,w),$$

d'où

$$\begin{aligned} g'(\varepsilon) &= a(u,w) - L(w) + \varepsilon a(w,w) \\ & \quad\ et \\ g'(0) &= a(u,w) - L(w) \end{aligned}$$

La condition $g'(0) = 0$ pour tout w, et donc équivalente à l'équation (1.1). ■

1.4 Exemple de la formulation variationnelle pour un problème elliptique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ qui sera, par exemple, une variété de dimension $N-1$, une fois continûment différentiable, Ω étant d'un seul côté de Γ.

Considérons alors le problème elliptique de type mêlé suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \Gamma_2 \\ \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \tag{1.2}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$ et $\frac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée normale extérieure à Γ.

Si Γ_1 est un morceau de Γ, Γ_2 désignant le reste de la frontière Γ,

On prend

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u \mid_{\Gamma_1} = 0 \right\}.$$

En multipliant les deux membres de l'équation du problème par une fonction test $v \in V \subset H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient:

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)\, v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} fv dx.$$

En utilisant formellement la deuxième formule de Green on a

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} fv dx.$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma_2} gv d\sigma.$$

D'une part;

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx$$

et d'autre part

$$L(v) = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma_2} gv d\sigma.$$

On peut alors remplacer le problème elliptique formulé en (1.2) par le problème suivant:

Etant donné $f \in L^2(\Omega)$.

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = L(v)$$

qui est équivalent au problème suivant:

Etant donné $f \in L^2(\Omega)$,

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uvdx = \int_{\Omega} fvdx + \int_{\Gamma_2} gvd\sigma. \tag{1.3}$$

A ce niveau, on peut utiliser la formulation variationnelle (1.3) pour représenter le problème elliptique sous forme d'un problème variationnel .

Pour montrer que (1.3) admet une solution unique $u \in V$ il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram précédent.

En effet;

Bilinéarité de a :

Puisque a est symétrique , $a(u,v) = a(v,u)$, il suffit de vérifier la linéarité par rapport à l'un des deux arguments.

$$\begin{aligned}
a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, v) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial\left(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2\right)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \left(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2\right) vdx \\
&= \beta_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u_1 vdx \right) + \beta_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u_2 vdx \right) \\
&= \beta_1 a(u_1, v) + \beta_2 a(u_2, v).
\end{aligned}$$

D'où la bilinéarité de a.

Continuité de a: Pour tous $u, v \in V$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| . \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx + \int_{\Omega} |u|\,|v|\,dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) . \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_V \|v\|_V .
\end{aligned}$$

D'où la continuité de a.

Ellipticité de a :

Soit $v \in V$

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_{\Omega} |v|^2\,dx. \\
&= \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\geq \|v\|^2_V
\end{aligned}$$

D'où la coercivité de a.

Linéarité de L :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $v_1, v_2 \in V$

$$\begin{aligned}
L(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_{\Omega} f(\alpha v_1 + \beta v_2) dx + \int_{\Gamma_2} g(\alpha v_1 + \beta v_2) d\sigma \\
&= \alpha \left(\int_{\Omega} f v_1 dx + \int_{\Gamma_2} g v_1 d\sigma\right) + \beta \left(\int_{\Omega} f v_2 dx + \int_{\Gamma_2} g v_2 d\sigma\right) \\
&= \alpha L(v_1) + \beta L(v_2).
\end{aligned}$$

D' où la linéarité de L.

Continuité de L :

Soit $v \in V$

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma_2} gv d\sigma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} . \end{aligned}$$

D'après le théorème de la Trace

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \text{où } C > 0. \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

D'où la continuité de L.

Conclusion

Le problème variationnel (1.3) précédent admet une solution unique u puisque toutes les conditions du théorème Lax-Milgram sont vérifiées. De plus puisque a est symétrique, il revient de même à résoudre le problème

$$J(u) = \inf_{w \in V} J(w) = \inf_{w \in V} \left(\frac{1}{2} a(w,w) - L(w) \right)$$

c'est-à-dire

$$= \inf_{w \in V} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} w^2 dx \right) - \left(\int_{\Omega} fw dx + \int_{\Gamma_2} gw d\sigma \right) \right] .$$

1.5 Rappel sur les principes de maximum

Le principe de maximum admet de nombreuses formulations; nous en présentons quelques-unes.

Considérons l'opérateur elliptique qui est de la forme suivante

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

où les coefficients a^{ij}, b^i sont continus, l'opérateur différentielle aux dérivées partielles L est uniformément elliptique c'est-à-dire il existe une constante $\theta > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta \left|\xi\right|^2 \ p.p \text{ pour tout } \xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

et les coefficients a^{ij} sont symétriques c'est- à- dire $a^{ij} = a^{ji}$ $(i, j = 1, ..., N)$.

Principe de maximum faible

Théorème 1.8 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Supposons que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

(i) *Si*

$$Lu \leq 0 \quad dans \quad \Omega.$$

Alors

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) *Si*

$$Lu \geq 0 \quad dans \quad \Omega.$$

Alors

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Preuve: Voir [5] ■

Principe de maximum fort

Théorème 1.9 *Soit Ω est un ouvert borné connexe. Supposons que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*
(i) *Si*

$$Lu \leq 0 \quad dans \quad \Omega$$

et u atteint son maximum sur $\overline{\Omega}$ en un point d'intérieur,
alors

$$u \text{ est constante dans } \Omega.$$

(ii) *De même, Si*

$$Lu \geq 0 \quad dans \quad \Omega$$

et u atteint son minimum sur $\overline{\Omega}$ en un point d'intérieur,
alors

$$u \text{ est constante dans } \Omega.$$

Preuve: Voir [5]
■

Chapitre 2

Approximation variationnelle

Dans ce chapitre nous allons présenter l'approximation des problèmes qui admettent une formulation variationnelle (dite aussi une formulation faible) dans un espace de Hilbert V. Nous présentons d'abord la méthode d'approximation interne et montrons que celle-ci conduit à la résolution des systèmes linéaires.

2.1 Principe de la méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin (dite méthode d'approximation interne) consiste à remplacer l'espace de Hilbert V par une famille de sous-espaces V_h de dimension finie, $h > 0$ étant un paramètre réel destiné à tendre vers 0, de sorte que V_h tende vers V, lorsque $h \to 0$. Ainsi pour chaque h, on résout le problème approché suivant:

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h \ . \tag{2.1}$$

Lemme 1 *Si la forme bilinéaire a est V -elliptique, alors le problème* (2.1) *a une solution unique $u_h \in V_h$.*

Preuve: Comme V_h est un espace fermé pour la norme de V, alors la forme bilinéaire a restreinte à V_h $a_{|V_h}$ est continue et V_h- elliptique.

De même, $L_{|V_h}$ appartient à V_h', puisque

$$|L(v)| \leq C \|v\|, \ \forall v \in V.$$

ce qui implique par restriction que

$$|L(v_h)| \leq C \|v_h\|, \ \forall v_h \in V_h.$$

La conclusion découle du théorème de Lax-Milgram. ■

La méthode précédente s'appelle méthode d'approximation interne car tous les espaces V_h sont supposés inclus dans V. La solution u_h ainsi obtenue est appelée l'approximation de Galerkin de u.

On va supposer que V_h est de dimension finie $N(h)$ et on introduit une base $(\varphi_k)_{k=1,\dots,N(h)}$ de V_h. La solution u_h peut donc se décomposer comme suivant

$$u_h = \sum_{k=1}^{N(h)} u_h^k \varphi_k$$

(dans le terme u_h^k, k est un indice) et on voit que u_h est solution de (2.1) ce qui se traduit par

$$a(u_h, \varphi_l) = L(\varphi_l) \ \text{ pour tout } l = 1, ..., N(h)$$

Ce qui implique

$$a\left(\sum_{k=1}^{N(h)} u_h^k \varphi_k, \varphi_l\right) = L(\varphi_l) \ \text{ pour tout } l = 1, ..., N(h)$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{N(h)} u_h^k a(\varphi_k, \varphi_l) = L(\varphi_l) \quad \text{pour tout } l = 1, ..., N(h). \tag{2.2}$$

Ces équations peuvent se reformuler sous la forme d'un système $Au = F$ de $N(h)$ équations à $N(h)$ inconnues (les composantes de u_h)

$$\text{où } u = \left(u_h^k\right)_{k=1,\dots,N(h)}, F = (L(\varphi_l))_{l=1,..,N(h)} \text{ et } A = (a(\varphi_k, \varphi_l\ ))_{k,l=1,..,N(h)}.$$

• La matrice A est appelée matrice de rigidité du problème.

• La matrice A est symétrique lorsque a est symétrique.

• D'autre part, ce système est de Cramer puisque le problème approché admet une solution unique u_h.

L'un des intérêts de la méthode de Galerkin est qu'elle permet d'aboutir à une estimation d'erreur optimale entre la solution exacte u et la solution approchée u_h, au sens où l'erreur $\|u - u_h\|$ est comparable au minimum de $\|u - v_h\|$ quand v_h parcourt V_h. Ceci est exprimé par le lemme suivant:

Lemme 2.1 *(Lemme de Céa). On suppose que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées alors, il existe une solution unique u_h du problème approché* (2.1) *vérifiant l'estimation d'erreur*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \quad \forall u \in V.$$

Preuve: Soit $v_h \in V_h$ quelconque et posons $w_h = v_h - u_h \in V_h$. D'une part

$$a(u, w_h) = L(w_h)$$

D'autre part, u_h est la solution du problème approché

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} a(u-u_h, u-u_h) &= a(u-u_h, u-v_h+v_h-u_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, v_h-u_h). \end{aligned}$$

Par ailleurs $a(u-u_h, v_h-u_h) = 0$, en effet;

nous avons

$$a(u, w_h) = L(w_h)$$

puisque

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

et $w_h \in V_h$, nous avons

$$a(u_h, w_h) = L(w_h),$$

et par suite

$$\begin{cases} a(u, w_h) = L(w_h) \\ a(u_h, w_h) = L(w_h) \end{cases} \Rightarrow a(u, w_h) - a(u_h, w_h) = 0$$

Donc

$$a(u-u_h, w_h) = 0 \ .$$

D'où

$$a(u-u_h, v_h-u_h) = 0$$

Ainsi

$$a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h).$$

Par ellipticité de a

$$a(u-u_h, u-u_h) \geq \alpha \left\| u-u_h \right\|_V^2$$

et par continuité de a

$$a(u-u_h,w_h)=a(u-u_h,v_h-u_h)\leq C\left\|u-u_h\right\|_V\left\|v_h-u_h\right\|_V$$

Alors

$$\alpha\left\|u-u_h\right\|_V^2\leq C\left\|u-u_h\right\|_V\left\|v_h-u_h\right\|_V.\ \forall v_h\in V_h.$$

On en déduit que

$$\left\|u-u_h\right\|_V\leq\frac{C}{\alpha}\inf_{v_h\in V_h}\left\|u-v_h\right\|_V\ . \tag{2.3}$$

■

Remarque 2.1 *Dans le cas où a est symétrique, le lemme de Céa admet une interprétation importante. Dans ce cas, la forme bilinéaire définit un produit scalaire et une norme sur V, appelée norme de l'énergie*

$$\left\|u\right\|_e=\sqrt{a(u,u)},\forall u\in V,$$

qui est équivalente à la norme de V

$$\sqrt{\alpha}\left\|u\right\|_V\leq\left\|u\right\|_e\leq\sqrt{M}\left\|u\right\|_V\ .$$

Dans ce cas la relation $a(u-u_h,v)=0,\forall v_h\in V_h$ exprime que l'erreur $u-u_h$ est orthogonale à l'espace approché V_h. La solution approchée est donc la projection de la solution exacte sur V_h.
Donc si a est symétrique on peut améliorer l'estimation (2.3).
En effet, d'après ce qui précède,

$$a(u-u_h,u-u_h)=\left\|u-u_h\right\|_e^2\leq\left\|u-v_h\right\|_e^2=a(u-v_h,u-v_h),\forall v_h\in V_h,$$

et il en résulte que, pour tout $v_h \in V_h$

$$\alpha \left\| u - u_h \right\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - v_h, u - v_h) \leq M \left\| u - v_h \right\|_V^2 \ ,$$

d'où

$$\left\| u - u_h \right\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \left\| u - v_h \right\|_V \ .$$

(ce qui est meilleure que (2.3), puisque $\alpha \leq M$).

Théorème 2.1 [2] *Supposons qu'il existe un sous espace V_0 de V dense dans V ($\overline{V_0}^V = V$) et une application r_h de V_0 dans V_h tels que:*

$$\forall v \in V_0, \ \lim_{h \to 0} \left\| v - r_h(v) \right\|_V = 0.$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle converge c'est-à-dire

$$\lim_{h \to 0} \left\| u - u_h \right\|_V = 0,$$

où u est la solution du problème variationnel et u_h est la solution du problème variationnel approché.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$, puisque V_0 est dense dans V donc

$$\forall u \in V, \ \exists v \in V_0; \ \left\| u - v \right\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2C'},$$

où $C' = \frac{C}{\alpha}$.

Nous avons aussi

$$\lim_{h \to 0} \left\| v - r_h(v) \right\|_V = 0 \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0; \ h \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left\| v - r_h(v) \right\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2C'} \right).$$

Pour h assez petit (quand $h \to 0$) $r_h(v) \in V_h$ puisque

$$v \in V_0 \text{ et } r_h : V_0 \to V_h$$

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_V &\leq C' \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h \\
&\leq C' \|u - r_h(v)\|_V \\
&\leq C' \left(\|u - v\|_V + \|v - r_h(v)\|_V\right) \\
&\leq C' \left(\frac{\varepsilon}{2C'} + \frac{\varepsilon}{2C'}\right) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

■

Chapitre 3

Résultat d'existence de solutions pour un problème elliptique non local par la méthode de Galerkin

Dans ce chapitre on va étudier l'existence de solutions positives d'un problème non local de type elliptique suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x,u)\|u\|_q^p \text{ dans } \Omega \\ u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $a \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $1 \leq q \leq \infty$, et $p > 0$.

Nous allons prouver l'existence d'une solution positive du problème (3.1) en employant la méthode de Galerkin.

Théorème 3.1 [3] *Le problème* (3.1) *possède une solution sous la condition (i) ou (ii).*
(i) $(N \geq 3)$; $0 < p < 1$, $1 < q < \frac{2N}{N-2}$, $q > \beta + 1$, $\beta + p < 1$, $0 \leq a_0(x) \leq a(x,u) \leq A(x)\,|u|^\beta + B(x), 0 \neq a_0 \in L^s(\Omega)$, $(s > N)$, $0 \leq B \in L^{q'}(\Omega), 0 \leq A \in L^{q_1'}(\Omega)$ *et* $q_1 = \frac{q}{\beta+1}$.
(ii) $(N = 1, 2)$; $0 < p < 1$, $1 < q < \infty$.

Preuve: Considérons d'abord le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x,u)\|u\|_q^p + \lambda\phi \text{ dans } \Omega, \\ \qquad u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P$_\lambda$}$$

où $0 < \lambda < 1$ est un paramètre fixé et $\phi > 0$ est une fonction dans $C_0^2(\bar{\Omega})$.

Pour l'utilisation de la méthode de Galerkin on va considérer une base Hilbertienne orthonormale $B = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ de $H_0^1(\Omega)$ et un espace vectoriel de dimension finie

$$V_m = vect\,\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}\,.$$

Et par suite,

$$\text{si } u \in V_m, \text{ il existe } \xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i$$

et nous avons un isomorphisme linéaire isométrique

$$\begin{array}{lcl} S:\ V_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ u = \sum\limits_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j & \longmapsto & S(u) = \xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \end{array}$$

Puisque la base $B = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ est orthonormale alors

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 = |\xi|^2 =< \xi, \xi >,$$

où $< .,. >$ est le produit scalaire euclidien usuel dans $\mathbb{R}^m$ et $|.|$ est la norme correspondante.

Dans la suite on posera $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|$.

La démonstration du théorème est basée sur la proposition suivante:

proposition 3.1 *Soit* $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *une application continue telle qu'il existe un réel* $r > 0$ *vérifiant:*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^m, \;\; |\xi| = r \implies \langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0 \; .$$

Alors

$$\exists \xi_0, \;\; |\xi_0| \leq r, \; \textit{tel que } F(\xi_0) = 0.$$

Démonstration de la proposition

On raisonne par l'absurde: supposons que F ne s'annule pas sur la boule fermée

$$\bar{B}_r = \{\xi \in \mathbb{R}^m, \;\; |\xi| \leq r\} \, ,$$

c'est-à-dire

$$\forall \xi \in \bar{B}_r(0) : \;\; |F(\xi)| > 0.$$

Considérons l'application

$$G : \; \xi \longmapsto -F(\xi)\frac{r}{|F(\xi)|} \text{de } \bar{B}_r(0) \text{ dans } \partial \bar{B}_r(0) \subset \bar{B}_r(0).$$

G est continue, le théorème du point fixe de Brouwer qui affirme que toute application continue de $\bar{B}_r(0)$ dans $\bar{B}_r(0)$ admet au moins un point fixe ξ_0, implique que

$$\begin{aligned} G(\xi_0) \quad &= \quad \xi_0 \iff -F(\xi_0)\frac{r}{|F(\xi_0)|} = \xi_0 \\ &\implies \quad |\xi_0| = r \end{aligned}$$

et

$$F\ (\xi_0) = -\xi_0 \frac{|F(\xi_0)|}{r}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi_0), \xi_0 \rangle &= \langle -\xi_0 \frac{|F(\xi_0)|}{r}, \xi_0 \rangle \\
&= -\frac{|F(\xi_0)|}{r} |\xi_0|^2 \\
&= -r\,|F(\xi_0)| < 0, \text{ contradiction.} \blacksquare
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'isomorphisme ci-dessus, on identifie $u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i$ à $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$. Soit l'application

$$\begin{aligned}
F : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
\xi &\longmapsto F(\xi) = (F_1(\xi), ..., F_m(\xi)),
\end{aligned}$$

où pour $i = 1, ..., m$.

$$F_i(\xi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx - \|u\|_q^p \int_\Omega a(x, u) \varphi_i dx - \lambda \int_\Omega \phi \varphi_i dx,$$

En utilisant l'identification précédente, avec $u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i$, on écrit

$$F_i(\xi) = \xi_i - \|u\|_q^p \int_\Omega a(x, u) \varphi_i dx - \lambda \int_\Omega \phi \varphi_i dx\ ,$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi), \xi \rangle &= |\xi|^2 - \|u\|_q^p \int_\Omega a(x, u) \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i \right) dx - \lambda \int \phi \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i \right) dx. \\
&= \|u\|^2 - \|u\|_q^p \int_\Omega a(x, u) u dx - \lambda \int_\Omega \phi u dx\ .
\end{aligned}$$

On va montrer que $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$ dans le premier cas (i): $(N \geq 3)$

avec $0 < p < 1$, $1 < q < \frac{2N}{N-2}$, $q > \beta + 1$, $\beta + p < 1$,

$0 \le B \in L^{q'}(\Omega)$, $0 \le A \in L^{q_1'}(\Omega)$, $q_1 = \frac{q}{\beta+1}$et $0 \le a_0(x) \le a(x,u) \le A(x)\left|u\right|^{\beta} + B(x), 0 \ne a_0 \in L^s(\Omega)$

Nous avons

$$0 \le a(x,u) \le A(x)\left|u\right|^{\beta} + B(x).$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a(x,u)u dx &\le \int_{\Omega} a(x,u)\left|u\right| dx \\
&\le \int_{\Omega} A(x)\left|u\right|^{\beta+1} dx + \int_{\Omega} B(x)\left|u\right| dx \ ,
\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} A(x)\left|u\right|^{\beta+1} dx &\le \left(\int_{\Omega} A^{q_1'} dx\right)^{\frac{1}{q_1'}} \left(\int_{\Omega} \left|u\right|^{(\beta+1)q_1} dx\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\le \left\|A\right\|_{q_1'} \left\|u\right\|_q^{\beta+1}
\end{aligned}$$

et $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection compacte alors

$$\int_{\Omega} A(x)\left|u\right|^{\beta+1} dx \le C_1 \left\|A\right\|_{q_1'} \left\|u\right\|^{\beta+1} \ ,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} B(x)u dx &\le \int_{\Omega} B(x)\left|u\right| dx \le \left\|B\right\|_{q'} \left\|u\right\|_q \ , \\
&\le C_2 \left\|B\right\|_{q'} \left\|u\right\| \ ,
\end{aligned}$$

de même

$$\int_\Omega \phi u dx \leq \|\phi\|_2 \|u\|_2$$
$$\leq C_3 \|\phi\|_2 \|u\| \ ,$$

d'où

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq \|u\|^2 - C_1 \|A\|_{q_1'} \|u\|^{\beta+1+p} - C_2 \|B\|_{q'} \|u\|^{p+1} - C_3 \|\phi\|_2 \|u\| .$$

On définit la courbe $(t, y(t))$ (on a posé $t = \|u\|$.)

$$y(t) = t^2 - C_1 \|A\|_{q_1'} t^{\beta+1+p} - C_2 \|B\|_{q_1} t^{p+1} - C_3 \|\phi\|_2 t$$

Alors, puisque $\beta + 1 + p < 2$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$$

Donc il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$; $y(t) > 0$.
ce qui se traduit par $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$ pour $|\xi| > t_0$.
D'après la proposition précédente

$$\exists \xi^m \in \mathbb{R}^m, \ |\xi^m| = r > t_0 \text{ tel que } F(\xi^m) = 0,$$

d'où

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_i dx = \|u_m\|_q^p \int_\Omega a(x, u_m) \varphi_i dx + \lambda \int_\Omega \phi \varphi_i dx. \text{ où pour } i = 1, ..., m.$$

et donc

$$\int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \varphi dx = \|u_m\|_q^p \int_{\Omega} a(x, u_m)\varphi dx + \lambda \int_{\Omega} \phi \varphi dx \ , \forall \varphi \in V_m,$$

en particulier pour $\varphi = u_m$ nous avons

$$\begin{aligned} \|u_m\|^2 &= \|u_m\|_q^p \int_{\Omega} a(x, u_m) u_m dx + \lambda \int_{\Omega} \phi u_m dx \ , \\ &\Longrightarrow \|u_m\|^2 \leq C_1 \|u_n\|^{p+1} + C_2 \|\phi\|_2 \|u_n\| \end{aligned}$$

Donc (u_m) est une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$ car la suite $(\|u_m\|)$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

$$u_m \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Par l'injection compacte de Sobolev

$$\begin{aligned} u_m &\to u \text{ dans } L^q(\Omega), 1 < q < \frac{2N}{N-2}. \\ u_m &\to u \quad p.p \text{ dans } \Omega. \\ \|u_m\|_q &\to \|u\|_q \,. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \|u\|_q^p \int_{\Omega} a(x, u(x))\varphi dx + \lambda \int_{\Omega} \phi \varphi dx \ , \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

Nous notons $u = u_\lambda$ et donc

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = a(x, u_\lambda(x)) \|u_\lambda\|_q^p + \lambda \phi \text{ dans } \Omega \\ u_\lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

puisque $\lambda > 0$ et $\phi > 0$ dans Ω,

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda \geq a(x, u_\lambda(x)) \left\| u_\lambda \right\|_q^p \text{ dans } \Omega \\ u_\lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

par le principe de maximum $u_\lambda > 0$ dans Ω,

$$\begin{cases} -\Delta \left(\frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_q^p} \right) \geq a_0(x) \text{ dans } \Omega. \\ \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_q^p} = 0 \text{ dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit w la solution positive unique du problème

$$\begin{cases} -\Delta w = a_0(x) \text{ dans } \Omega \\ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega \ . \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta \left(\frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_q^p} \right) \geq -\Delta w \text{ dans } \Omega, \\ \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_q^p} = w = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et d'après le principe de maximum

$$\frac{u_\lambda}{\left\| u_\lambda \right\|_q^p} \geq w \text{ dans } \Omega.$$

Ce qui implique

$$\left\| u_\lambda \right\|_q \geq \left\| w \right\|_q^{\frac{1}{1-p}} > 0, \forall \lambda \in (0.1).$$

Puisque $0 < p < 1$ alors $\left\| u_\lambda \right\|_q$ est bornée inférieurement par $\left\| w \right\|_q^{\frac{1}{1-p}}$ qui est indépendant de $\lambda \in (0, 1)$.

On prend $\lambda = \frac{1}{n}, n = 1, 2, ...$ et on pose $u_{\frac{1}{n}} = u_n$ on obtient

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi dx = \left\| u_n \right\|_q^p \int_\Omega a(x, u_n) \varphi dx + \frac{1}{n} \int_\Omega \phi \varphi dx \ , \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

pour $\varphi = u_n$

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \|u_n\|_q^p \int\limits_\Omega a(x,u_n)u_n dx + \frac{1}{n}\int\limits_\Omega \phi u_n dx. \\ &\Downarrow \\ \|u_n\|^2 &\leq C\|u_n\|^{p+1} + \frac{C}{n}\|\phi\|_2 \|u_n\|, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Donc (u_n)est une suite bornée,

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega). \\ u_n &\rightarrow u \text{ dans } L^q(\Omega). \end{aligned}$$

et

$$\int\limits_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \|u\|_q^p \int\limits_\Omega a(x,u(x))\varphi dx \ , \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

puisque

$$\|u_m\|_q \geq \|w\|^{\frac{1}{1-p}} \text{ nous avons } \|u\|_q \geq \|w\|_q^{\frac{1}{1-p}} > 0.$$

On peut conclure que nous obtiendrons une solution positive non triviale au problème (3.1).

Les mêmes techniques peuvent être utilisées pour démontrer l'existence d'une solution positive dans le cas ii).

■

Remarque 3.1 *Si $p = 1$ et a est suffisamment petit, la seule solution du problème* (3.1) *est la solution triviale .*

En effet; raisonnons par l'absurde:

soit u une solution non triviale de (3.1). *Alors*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|_q \int\limits_\Omega a(x)udx \leq \|a\|_\infty \|u\|_q |\Omega|^{\frac{1}{q'}} \|u\|_q$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq C\,|\Omega|^{\frac{1}{q'}}\,\|a\|_\infty\,\|u\|^2\,. \\ &\Rightarrow \|a\|_\infty \geq \frac{1}{C\,|\Omega|^{\frac{1}{q'}}},\ \textit{contradiction.} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$u = 0 \ si\ \|a\|_\infty < \frac{1}{C\,|\Omega|^{\frac{1}{q'}}}.$$

Remarque 3.2 *On remarque que le problème* (3.1) *possède au plus une solution non triviale si a ne dépend pas de u.*
En effet; supposons que u et v sont deux solutions non triviales du problème (3.1), *alors u vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)\|u\|_q^p \ dans\ \Omega \\ u = 0\ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a(x) = -\frac{\Delta u}{\|u\|_q^p} \tag{3.2}$$

et v vérifie

$$\begin{cases} -\Delta v = a(x)\|v\|_q^p \ dans\ \Omega \\ v = 0\ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a(x) = -\frac{\Delta v}{\|v\|_q^p} \tag{3.3}$$

de (3.2) *et* (3.3) *on déduit que*

$$-\frac{\Delta u}{\|u\|_q^p} = -\frac{\Delta v}{\|v\|_q^p}$$

d'où

$$\begin{cases} -\Delta\left(\frac{u}{\|u\|_q^p}\right) = -\Delta\left(\frac{v}{\|v\|_q^p}\right) \\ u = 0 = v \qquad sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

et par conséquent

$$\|u\|_q = \|v\|_q$$

et par suite

$$\begin{cases} -\Delta u = -\Delta v \ \ dans\ \Omega \\ u = 0 \ \ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

ce qui donne, par unicité $u = v$.

Remarque 3.3 *Si la fonction* a *ne dépend que de* $x \in \Omega$*, le problème* (3.1)*peut être facilement résolu.*
En effet, supposons que $0 \neq a(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$ *et soit* $v \in W^{2,q}(\Omega)$ *l'unique solution de*

$$\begin{cases} -\Delta v \ = a(x) \ \ dans\ \Omega \\ v = 0 \ \ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

et soit $u = \|v\|_q^{\frac{p}{1-p}} v$, *avec* $p \neq 1$. *Alors*

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)\|u\|_q^p \ \ dans\ \Omega. \\ u > 0 \ \ dans\ \Omega. \\ u = 0 \ \ sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

dans ce cas nous avons aussi l'unicité.

Chapitre 4

Étude de l'équation de la chaleur

4.1 Cadre fonctionnel

Soit V un $\mathbb{R}$ espace de Hilbert. On définit l'espace $L^2(0,T;V)$ comme suit

$$L^2(0,T;V) = \left\{ f : \ ]0,T[\to V \ et \ \int_0^T \|f(t)\|_V^2 \ dt < \infty \right\}$$

L'espace $L^2(0,T;V)$ est un espace de Hilbert tel que $\int_0^T \|f(t)\|_V \, dt$ est sa norme associée induite par le produit scalaire suivant

$$f, \ g \in L^2(0,T;V) \Rightarrow \langle f, \ g \rangle_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T \langle f(t), \ g(t) \rangle_V dt$$

Remarque

Si V est un espace de Hilbert, et V' est son dual, pour deux fonctions u et v appartenant respectivement aux espaces $L^2(]0,T[,V)$ et $L^2(]0,T[,V')$, on peut définir la quantité

$$\int_0^T < u(t), v(t) >_{V,V'} \ dt$$

Lemme 4.1 *[9] Soit X un espace de Banach et X' son dual et soit u et g deux fonctions de $L^1(a,\ b;\ X)$. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(i)

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds,\ \ \xi \in X,\ \ p.p.\ t \in [a,b].$$

(ii) Pour toute fonction $\phi \in D(a,\ b)$,

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt\ \ \left(\phi' = \frac{d\phi}{dt}\right);$$

(iii) Pour tout $\eta \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle u,\ \eta\rangle = \langle g,\ \eta\rangle,$$

au sens de produit scalaire des distributions, dans (a, b).

Si (i)-(iii) sont satisfiaites, u est égale presque partout à une fonction continue de $[a,\ b]$ dans X.

Lemme 4.2 *[9] Soient $V,\ H, V'$ (le dual de V) trois espaces de Hilbert vérifiant l'inclusion suivante*

$$V \subset H \equiv H' \subset V'.$$

Si $u \in L^2(0,T;V)$ et $u' \in L^2(0,T;V')$, alors u est égale presque partout à une fonction continue définie de $]0,\ T[$ dans H et nous avons l'égalité suivante

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle \qquad \text{(au sens de produit scalaire des distributions).}$$

Remarque 4.1 *Soient $V,\ H, V'$ (le dual de V) trois espaces de Hilbert vérifiant l'inclusion suivante*

$$V \subset H \equiv H' \subset V'.$$

Alors le produit scalaire dans H entre $f \in H$ et $u \in V$ c'est le même produit scalaire entre $f \in V'$ et $u \in V$

$$\langle f,\ u\rangle = (f,\ u),\ \forall f \in H,\ \forall u \in V.$$

4.2 Formulation variationnelle, estimations d'énergie, unicité

Nous allons nous intéresser à un exemple typique d'EDP parabolique (non stationnaire): l'équation de la chaleur ou équation de diffusion, cette équation s'écrit

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \tag{4.1}$$

où $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ est l'opérateur laplacien et le couple (t,x) est dans $[0,\infty[\times\Omega$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. La fonction f est une donnée du problème. Cette équation est de plus assortie d'une condition initiale

$$u(0,x) = v(x) \text{ pour } x \in \Omega,$$

et d'une condition aux limites

$$u(t,x) = g(t,x) \text{ pour } (t,x) \in]0,T[\times\partial\Omega,$$

où v et g sont des fonctions données.

Une des interprétations possibles de l'équation (4.1) est la modélisation d'un flux de la chaleur dans un corps. Voici l'interprétation de chaque terme de l'équation.

- Le terme $\partial_t u$ permet de décrire l'évolution de la distribution de la chaleur au cours du temps. Notamment, on s'attend à pouvoir définir la valeur d'une solution à un temps $t > 0$ quelconque en connaissant la distribution à l'instant 0.

- Le terme Δu correspond à une variation de u par rapport à sa moyenne locale. Un point x où $\Delta u(x) > 0$ est un point plus froid que son entourage direct(et dont la température va augmenter), et inversement. Ce terme correspond donc à un phénomène de moyenne, et va avoir tendance à rendre régulières les solutions de l'équation.

- le terme v correspond à la distribution de chaleur à l'instant initial.

- Le terme g correspond à un thermostat situé sur le bord de l'ouvert et imposant sa chaleur à la frontière du système.

On cherche donc une solution au problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \text{ dans } \quad]0,T[\times\Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \quad]0,T[\times\partial\Omega, \\ u(0,.) = v \quad \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

La formulation variationnelle de ce problème s'obtient en multipliant l'équation par une fonction test φ de $H_0^1(\Omega)$ en intégrant en espace et par parties.

La formulation variationnelle associée au problème (4.2) est alors la suivante:

Définition 4.1 *Supposons que v est un élément de $L^2(\Omega)$ et que f est un élément de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$.*

On dit qu'une fonction u est solution variationnelle au problème (4.2) si elle vérifie

- *u est dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u$ est dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$;*
- *pour toute fonction φ de $H_0^1(\Omega)$, on a pour presque tout $t \in]0,T[$*

$$\int_\Omega \partial_t u(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \tag{4.3}$$

La condition initiale de u est $u(0,.) = v$.

- La troisième condition à un sens en vertu du lemme suivant;
- Les hypothèses de régularité sur chaque terme correspndent à des hypothèses naturelles pour donner un sens à la formulation (4.3).

Lemme 2 *Soit u une fonction $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ telle que $\partial_t u$ soit dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. Alors u s'identifie à une fonction de $C([0,T], L^2(\Omega))$ vérifiant*

$$\|u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\int_0^T\int_\Omega u(t,x)\partial_t u(t,x)dxdt.$$

Preuve: Pour la démonstration du lemme 2 voir le lemme (4.1) et le lemme (4.2) de la section précédente. ■

Le lemme 2 permet d'obtenir la régularité en le couple (t,x) à partir d'hypothèses de régularité en x et en t.

En effet, l'espace $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ est un espace de fonctions régulières en espace mais pas forcément en temps, alors qu'une fonction vérifiant $\partial_t u \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$ est régulière en temps mais pas forcément en espace. La conclusion du lemme donne une régularité modérée en chacune des variables .

Théorème 4.1 *Le problème* (4.2) *admet une unique solution variationnelle u au sens de la définition* (4.3).
De plus, si la fonction f est dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, alors la fonction u vérifie, pour une certaine constante $C>0$, l'inégalité suivante, appelée estimation à priori,

$$\|u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq C\int_0^t \|f(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{4.4}$$

Preuve: L'estimation à priori

On commence tout d'abord par montrer l'estimation à priori (4.4) si le second membre f est dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$. Soit u une solution de la formulation variationnelle. On peut prendre pour tout t, φ la fonction $u(t,.)$ comme fonction test. On obtient alors l'égalité

$$\frac{1}{2}\partial_t\int_\Omega |u(t,x)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx = \int_\Omega f(t,x)u(t,x)dx$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré on obtient, c étant une constante positive.

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(t,x)u(t,x)dx &\leq \left(\int_\Omega |f(t,x)|^2\,dx \int_\Omega |u(t,x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(c\int_\Omega |f(t,x)|^2\,dx \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c^2}{2}\int_\Omega |f(t,x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_\Omega |u(t,x)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx \leq \frac{c^2}{2}\int_\Omega |f(t,x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et t, on trouve

$$\|u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq C\int_0^t \|f(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Unicité de la solution

Montrons maintenant l'unicité de la solution .

Si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors $u_1 - u_2$ est solution variationnelle de l'équation de la chaleur avec $v = 0$ et $f = 0$. La fonction nulle est bien dans $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$ et l'estimation à priori est donc vérifiée dans ce cas,

$$\|u_1(t,.) - u_2(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u_1(s,.) - \nabla u_2(s.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq 0,\ \forall t > 0$$

Donc $u_1(t,.) = u_2(t,.)$ pour tout $t > 0$.

Existence de la solution

Il reste maintenant à montrer l'existence de la solution. On va d'abord prouver l'existence de la solution sous l'hypothèse $f \in L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$ par la méthode de Galerkin. l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa base hilbertienne. Considérons l'espace $V_n = vect\{e_1, ..., e_n\}$. L'union $\underset{n}{\cup} V_n$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. On s'intéresse alors à une solution $u_n \in V_n$ au problème approché suivant:

$$\int_\Omega \partial_t u_n(t,x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla u_n(t,x).\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(t,x)\varphi(x)dx \text{ , pour tout } \varphi \in V_n \tag{4.5}$$

avec u_n dans $C([0,T],V_n)$ et $u_n(0,.) = v_n$ où (v_n) est une suite telle que

$$v_n \in V_n \text{ et } v_n \to v \text{ dans } L^2(\Omega).$$

En réalité, comme l'espace V_n est de dimension finie, u_n est une solution du problème approché si et seulement si (4.5) est vérifiée pour $\varphi = e_1, e_2, ..., e_n$. En décomposant $u_n(t,.)$ sur la base $\{e_1, e_{2,}..., e_n\}$,

$$u_n(t,.) = \sum_{k=1}^{n} c_k^n(t)e_k$$

On obtient le système de n équations différentielles linéaires à n inconnues suivant:

$$\sum_{k=1}^{n} \partial_t c_k^n(t) \int_\Omega e_l(x)e_k(x)dx + \sum_{k=1}^{n} c_k^n(t) \int_\Omega \nabla e_l(x)\nabla e_k(x)dx = \int_\Omega f(t,x)e_l(x)dx \text{ , pour } l = 1, ..., n,$$

dont les conditions initiales sont données par la décomposition de v_n sur la base $\{e_1, e_{2,}..., e_n\}$. Ce système prend la forme

$$M\partial_t c_n(t) + Ac_n(t) = f(t)$$

Comme la matrice M est définie positive, le système a une unique solution.
Il reste maintenant à montrer que la suite (u_n) a une limite quand n tend vers l'infini, et

que cette limite est solution du problème initial.

De la même manière que l'on a prouvé l'estimation à priori, on peut montrer que:

$$\|u_n(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u_n(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq \|v_n\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|f(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds.$$

Alors

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u_n(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq \|v_n\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|f(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds$$

Donc la suite (u_n) est bornée dans les espaces $L^\infty([0,T],L^2(\Omega))$ et $L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))$.

Alors on peut extraire une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telle que

$$u_n \underset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans} \quad L^\infty([0,T],L^2(\Omega))$$

$$\text{et}$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))$$

et par suite

$$\begin{aligned}\forall\Phi &\in L^1([0,T],L^2(\Omega)) = \left(L^\infty([0,T],L^2(\Omega))\right)' : \\ \int_0^T (u_n(t),\Phi(t))\,dt &\to \int_0^T (u(t),\Phi(t))\,dt, \quad \text{quand } n\to\infty\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall\ \Phi &\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)) = \left(L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))\right)' : \\ \int_0^T \langle u_n(t),\Phi(t)\rangle\ dt &\to \int_0^T \langle u_*(t),\Phi(t)\rangle\ dt, \quad \text{quand } n\to\infty\end{aligned}$$

Or

$$H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv \left(L^2(\Omega)\right)' \subset H^{-1}(\Omega) \tag{4.6}$$

A partir de (4.6) et le résultat précédent on conclut que

$$\forall\ \Phi \in L^2(]0,T[,L^2(\Omega)) : \int_0^T (u_n(t),\Phi(t))\,dt \to \int_0^T (u_*(t),\Phi(t))\,dt, \quad \text{quand } n\to\infty$$

Comparons avec (4.5)

$$\forall\ \Phi \in L^2(]0,T[,L^2(\Omega)) : \int_0^T (u(t)-u_*(t),\Phi(t))\,dt = 0.$$

Donc $u = u_* \in L^\infty([0,T],L^2(\Omega)) \cap L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$.

Pour passer à la limite dans l'équation

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u_n}{\partial t}, e_k\right) + (\nabla u_n, \nabla e_k) = (f,e_k)\,,\ k=1,...,n \\ u_n(0) = v_n. \end{cases} \tag{4.7}$$

On considère une fonction Ψ continument différentiable dans $[0,T]$ tel que $\Psi(T)=0$.

Multiplions l'équation (4.7) par $\Psi(t)$ et intégrons par parties

$$\int_0^T \left(u_n^{'}(t),e_k\right)\Psi(t)dt = -\int_0^T \left(u_n(t)\Psi^{'}(t),e_k\right)dt - (u_n(0),e_k)\,\Psi(0).$$

et par suite on trouve

$$-\int_0^T \left(u_n(t),\Psi^{'}(t)e_k\right)dt + \int_0^T (\nabla u_n,\nabla e_k\Psi(t))\,dt = (u_n(0),e_k)\,\Psi(0) + \int_0^T \langle f(t),e_k\rangle\Psi(t)dt$$

On passe à la limite pour $n\to\infty$

En utilisant les résultats précédents et comme

$$u_n(0) = v_n \to v \text{ dans } L^2 \text{ fortement.}$$

Donc

$$-\int_0^T \Big(u(t), \Psi'(t) e_k\Big)\, dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla e_k \Psi(t))\, dt = (v, e_k)\, \Psi(0) + \int_0^T \langle f(t), e_k\rangle \Psi(t) dt, \forall k$$

et par suite

$$-\int_0^T (u(t), \varphi)\, \Psi'(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi)\, \Psi(t) dt = (v, \varphi)\, \Psi(0) + \int_0^T \langle f(t), \varphi\rangle \Psi(t) dt,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.8}$$

intégrons par parties

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, \varphi\right) \Psi(t) dt + (u(0), \varphi)\, \Psi(0) + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi)\, \Psi(t) dt - (v, \varphi)\, \Psi(0) \\ = &\int_0^T \langle f(t), \varphi\rangle \Psi(t) dt,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

prenons en particulier $\Psi \in D(0, T)$.

Nous avons au sens des distributions

$$\frac{\partial}{\partial t}(u, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) = \langle f, \varphi\rangle;\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$$: \ = \int_\Omega \partial_t u(x) \varphi(x) dx + \int_\Omega \nabla u(x). \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx. \tag{4.9}$$

Ce qui est exactement (4.3).

Il reste à montrer que $u(0) = v$.

Multiplions (4.9) par $\Psi(t)$ intégrons par rapport à t par parties

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(u, \varphi)\, \Psi(t) dt = -\int_0^T (u(t), \varphi)\, \Psi'(t) dt + (u(0), \varphi)\, \Psi(0).$$

Nous obtenons

$$-\int_0^T (u(t),\varphi)\,\Psi^{'}(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla\varphi)\,\Psi(t)dt = \int_0^T \langle f(t),\varphi\rangle \Psi(t)dt + (u(0),\varphi)\,\Psi(0)$$

Comparons avec (4.8)

$$\begin{aligned}(u(0)-v,\varphi) &= 0,\ \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\\ &\Rightarrow u(0)=v.\end{aligned}$$

On voit que la limite est également solution du problème initial.
Il reste enfin à montrer l'existence dans le cas général $v\in L^2(\Omega)$ et $f\in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Pour cela, on considère une suite (v_n) de fonctions de $H_0^1(\Omega)$ convergeant dans $L^2(\Omega)$ vers v, et une suite (f_n) d'éléments de $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$ convergeant vers f dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$. Le problème associé à v_n et f_n a une unique solution u_n. ■

L'estimation du problème (4.2) permet de montrer que l'équation de la chaleur est dissipative, autrement dit, si $f\equiv 0$ (absence de source de chaleur), alors la température décroit.

Plus précisement

Corollaire 4.1 *Soit u une solution de (4.2) avec $f=0$ et $t_1\geq 0$ tel que $u(t_1,.)$ ne soit pas uniformement nulle. Alors*

$$\|u(t_2,.)\|_{L^2(\Omega)} < \|u(t_1,.)\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } 0<t_1<t_2.$$

Preuve:

$$\|u(t_2,.)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u(t_1,.)\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds.$$

On a donc l'inégalité large. De plus, si on suppose $\|u(t_1,.)\|_{L^2(\Omega)} = \|u(t_2,.)\|_{L^2(\Omega)}$, on a

$$\|\nabla u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ pour } t_1 < t < t_2.$$

La fonction $u(t,.)$ est donc constante pour tout $t_1 < t < t_2$, et est donc nulle puisque elle est dans $H^1_0(\Omega)$. Ceci contredit $u(t,x) \neq 0$. ■

4.3 Principe de maximum

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'équation de la chaleur a également de bonne propriétés vis à vis de la norme $\|.\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Proposition 1 *(Positivité). Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$ et f une fonction $L^2(]0,T[,L^2(\Omega))$ qui soient strictement positives respectivement sur Ω et $]0,T[\times\Omega$. Alors, la solution variationnelle u de* (4.2) *est positive presque partout dans $]0,T[\times\Omega$.*

Preuve: On note $u^-(t,x) = \min(0,u(t,x))$ la partie négative de u et $Q = supp\ u^-$ le support de u^- . Montrons que u^- est nulle.

Tout d'abord, comme u est dans l'espace $L^2(]0,T[,H^1_0(\Omega))$ par la définition (4.1), on peut voir que $u^-(t,.)$ est dans $H^1_0(\Omega)$ pour presque tout $t > 0$ et le gradient de u^-est donné par

$$\nabla u^- = 1_Q \nabla u$$

qui est bien dans $L^2(\Omega)$. De même, on a

$$\partial_t u^- = 1_Q \partial_t u$$

Pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a pour presque tout t

$$\int\limits_\Omega \partial_t u(t,x)\varphi(x)dx + \int\limits_\Omega \nabla u(t,x).\nabla\varphi(x)dx = \int\limits_\Omega f(t,x)\varphi(x)dx.$$

En prenant successivement $\varphi = u^-(t,.)$ pour $t > 0$, on obtient pour presque tout $t > 0$.

$$\int\limits_\Omega \partial_t u(t,x)u^-(t,x)dx + \int\limits_\Omega \nabla u(t,x).\nabla u^-(t,x)dx = \int\limits_\Omega f(t,x)u^-(t,x)dx$$

Ce qui s'écrit

$$\frac{1}{2}\partial_t \int\limits_\Omega \left|u^-(t,x)\right|^2 dx + \int\limits_\Omega \left|\nabla u^-(t,x)\right|^2 dx = \int\limits_\Omega f(t,x)u^-(t,x)dx$$

on en déduit que

$$\frac{1}{2}\partial_t \int\limits_\Omega \left|u^-(t,x)\right|^2 dx = -\int\limits_\Omega \left|\nabla u^-(t,x)\right|^2 dx + \int\limits_\Omega f(t,x)u^-(t,x)dx \leq 0$$

En intégrant en temps, on obtient

$$\int\limits_\Omega \left|u^-(t,x)\right|^2 dx \leq \int\limits_\Omega \left|v^-(t,x)\right|^2 dx = 0$$

car $v \geq 0$. Donc $u^-(t,x) = 0$. ■

Théorème 4.2 *(Principe de maximum). On suppose que le second membre f est nul dans le problème* (4.2). *Alors la solution variationnelle vérifie*

$$\min(0, \inf_{x\in\Omega} v(x)) \leq u(t,x) \leq \max(0, \sup_{x\in\Omega} v(x))$$

presque partout dans $\Omega \times [0,T]$.

Preuve: On pose $K = \max(0, \sup_{x\in\Omega} v(x))$ et $w = K - u$.
La fonction w est alors dans $H^1(\Omega)$ mais pas dans $H_0^1(\Omega)$. En revanche, la fonction $w^-(t,x) = \min(0, w(t,x))$ est bien dans $H_0^1(\Omega)$, car $u_{|\partial\Omega} = 0$ et la constante K est positive,
on a donc $w_{|\partial\Omega} = (K-u)_{|\partial\Omega} = K \geq 0$.

Notre but est de montrer que la fonction w est positive, c'est-à-dire, que $w^- = 0$.

On peut appliquer la formulation variationnelle avec la fonction $w^-(t,.)$, et on obtient, pour presque tout $t > 0$, (on a $\nabla w = -\nabla u$ et $\partial_t w = -\partial_t u$).

$$\int_\Omega \partial_t w(t,x) w^-(t,x) dx + \int_\Omega \nabla w(t,x) \nabla w^-(t,x) dx = 0.$$

Ce qui se récrit

$$\frac{1}{2}\partial_t \left(\int_\Omega \left| w^-(t,x) \right|^2 dx \right) = - \int_\Omega \left| \nabla w^-(t,x) \right|^2 dx \leq 0.$$

En intégrant, on obtient

$$\int_\Omega \left| w^-(t,x) \right|^2 dx \leq \int_\Omega \left| w^-(0,x) \right|^2 dx = 0$$

par construction, on a donc $w^- = 0$. C'est à dire $u(t,x) \leq \max(0, \sup_{x\in\Omega} v(x))$.
Par un raisonnement symétrique, on prouve l'autre inégalité. ■

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle; Théorie et Applications, Dunod, Paris (1999).

[2] J. Céa, *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*, Annales de l'institut Fourier, tome 14, n°2 (1964) .345-444.

[3] F.J.S.A Corrêa, S.D.B.M Menezes, *Positive solutions for a class of nonlocal elliptic problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Vol. 66, (2005) . 195-206.

[4] P. G. Ciarlet, The Finite Element Method For Elliptic Problems, North-Holland Publishing Company (1978).

[5] L. C. Evans, Partial Differential Equations, AMS (1997).

[6] A. Fortin , A. Garon, Les Eléments Finis: de la théorie à la pratique , Presses Internationales Polytechniques, Montréal (2011).

[7] S. Nicaisse, Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles, Dunod, Paris, (2000).

[8] A. Quarteroni, A.Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, vol. 23, Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[9] R.Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland Publishing Company (1977).