

République Algérienne Démocratique et Populaire

Université Abou Baker Belkaïd
Faculté des sciences
Département de mathématique

Mémoire de Master
Spécialité Mathématiques
Option Modélisation Mathématiques des Systèmes Complexes

Par

MEHIAOUI Fatiha

Titre :

**Impact de la nature du noyau de dispersion d'une équation
intégré-différence sur la vitesse de déplacement des ondes progressives**

Président : Mr Yadi K, MPR, Université de Tlemcen,
Encadreur : Mr Mahdjoub T, MCA, Université de Tlemcen,
Examineur : Mr Mesk M, MCA, Université de Tlemcen ,
Examineur : *M^{me}* Meliani E, MAA, Université de Tlemcen ,

Laboratoire : Analyse Non linéaire et mathématique appliquées.

Année universitaire : 2015-2016

Remerciements

Nous remercions Dieu pour l'accomplissement de ce projet.

Je souhaite adresser ici tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont ainsi contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Tout d'abord je tiens tout particulièrement à remercier mon encadreur, Mr MAHDJOUR Tewfik Maître de conférence à l'université de Tlemcene ABOU BEKR BELKAID, pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans il ce mémoire n'aurait vu le jour.

Mes remerciements s'adressent vivement à Monsieur le président Mr YADI Karim, Monsieur Mr MESK Mohammed et *M^{me}* MELIANI Esma qui ont accepté de juger mon travail.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents.

DEDICACE

A mes parents.

A mes chers frères :Tewfik, Faiçal, Mohammed

A mon cher fiancé Mohammed et à toute sa famille

A mes proches : Naima,Naima,Zohra

A toute ma famille et mes amis

Table des matières

Introduction générale	5
1 Ondes progressives d'une equation intégrro-différence	7
1.1 Equation intégrro-différence dans le cas d'une population non structurée	7
1.1.1 Différentes expressions du noyaux de dispersion	8
1.1.1.1 Noyaux à queue fine	8
1.1.1.2 Noyaux à queue large	9
1.1.2 Solutions d'une equation intégrro-différence dans le cas d'une population non structurée	13
1.1.3 Théorème de Weinberger	13
1.2 Équation intégrro-différence dans le cas d'une population structurée	13
1.2.1 Solutions d'une équation intégrro-différence dans le cas d'une population structurée	14
1.2.2 Théorème de Neubert-Caswell	14
2 Matériels et méthodes	16
2.1 Maladie de Chagas	16
2.1.1 Cycle de vie des Triatomines	17
2.1.2 Habitat des Triatomines	17
2.1.3 Valeurs des différents paramètres démographiques	17
2.1.3.1 Paramètres connus de l'expérience (Rabinovich 1972)	17
2.1.3.2 Paramètres déduits par le calcul pour un pas de temps Δt :	18
2.2 Modèle mathématique	18
2.2.1 Méthode de résolution analytique	19
2.2.2 Méthode de résolution numérique	21
3 Résultat et discussion	24
3.1 Résultats numériques	24
3.1.1 Résultats correspondant à la dispersion maximale des adultes	24
3.1.1.1 Vitesse d'invasion dans le cas du noyau puissance exponentielle	24
3.1.1.2 Vitesse d'invasion dans le cas du noyau de Laplace	27
3.1.1.3 Vitesse d'invasion dans le cas du noyau de Cauchy	28
3.1.2 Discussion	29
Conclusion	30
Annexe A	34

Introduction générale

La dynamique des populations a pour objet de décrire les variations de la taille et de la structure des populations au cours du temps et dans l'espace, et s'intéresse aux mécanismes biologiques et environnementaux qui sont à l'origine de ces variations. Ce qui fait varier la taille d'une population, se sont les individus qui entrent dans la population (reproduction et recrutement, immigration...) et ceux qui en sortent (mortalité, émigration...).

L'étude de la dispersion spatiale chez les populations biologiques a été initiée au début du XIX^{ime} siècle par Pearson et Blackeman (Pearson and Blackeman, 1906) puis Brownlee (Brownlee, 1911) et était basée sur l'analyse détaillée du mouvement décrit par le modèle de la promenade aléatoire. Par la suite Fisher (Fisher, 1937) a construit un modèle à partir de la dynamique de groupe d'individus. Depuis, l'outil de la modélisation de la dispersion spatiale de groupe a évolué et le tableau suivant donne un aperçu de cette évolution.

Espace \ Temps	Continue	Discret
Continu	Equations réaction-diffusion (Fisher, 1937)	Equations différentielles ordinaires (Levin 1972)
Discret	Equation intégro-différence (H.F Weinberger 1978)	Equations matricielles de Hunter-caswell (Hunter-caswell 2005)

FIGURE 1 – Evolution de l'outil de modélisation de la dispersion spatiale du point de vue macroscopique.

Dans notre étude, on s'intéresse à la dispersion spatiale d'une population d'insectes. Comme cette population disperse sur un espace continu et ne peut être recensée que de façon discrète, l'outil que nous utiliserons sera les équations intégro-différences (EID).

Le développement de la théorie mathématique de ces équations a commencé au milieu des années quatre-vingt (Weinberger, 1978 ; Weinberger, 1982).

Depuis, leurs applications en écologie se sont développées rapidement, pour l'étude des vitesses d'invasion des populations biologiques. Ces équations décrivent en même temps les processus de démographie et de dispersion des individus. Dans le cas d'une population non structurée, une EID dépend d'une fonction démographique et d'un noyau de dispersion (noyau d'une intégrale).

Dans le cas d'une population structurée, l'EID s'écrit en fonction des matrices démographique et des noyaux de dispersion.

Le modèle biologique étudié est la population de triatomines, vecteurs de la maladie de Chagas. L'expansion de la maladie de Chagas est un problème de santé publique planétaire auquel l'OMS accorde une attention particulière. En effet, la lutte antivectorielle à l'insecticide, préconisée en l'absence de traitement et de vaccin, est coûteuse et aux résultats limités. Pour cette raison, la modélisation mathématique reste une démarche encouragée.

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude de l'influence de la nature du noyau de dispersion d'une équation intégro-différence sur la vitesse de déplacement des ondes progressives.

Il se compose de trois chapitres : un premier concerne l'outil mathématique « les équations intégro-différences » ; un deuxième chapitre qui traite du matériel « maladie de Chagas » et des méthodes de résolution « analytique et numérique » et un dernier chapitre sur les résultats numériques et leurs interprétations.

Chapitre 1

Ondes progressives d'une equation intégrro-différence

La dynamique des populations biologiques s'intéresse à l'évolution quantitative de la densité de l'habitat d'une population « ensemble d'individus d'une même espèce ». Comme le suivi (le recensement) de la population se fait suivant un temps discret ($t = 0, 1, 2, \dots$) sur un espace continu, l'outil mathématique utilisé sera les équations intégrro-différences développées la première fois par Weinberger (Weinberger 1978). Dans ce chapitre, on expose une construction simple de ces équations dans le cas d'une population non structurée puis dans le cas d'une population structurée en stade de développement. La population biologique étudiée est suivie durant l'intervalle de temps $[t, t+1]$. Pendant ce pas de temps, plusieurs processus biologiques peuvent avoir lieu : les dispersions spatiale et temporelle (diapause prolongée), la démographie, l'infection etc... Dans cette étude, nous supposerons l'existence de deux processus : la dispersion spatiale dans l'intervalle de temps $[t, t + 1/2]$, et la démographie durant l'intervalle de temps $[t + 1/2, t + 1]$.

1.1 Equation intégrro-difference dans le cas d'une population non structurée

Soit P une population biologique de taille $N(t, x)$ à la génération t au point x . Si $k(x, y)$ représente la densité de probabilité de disperser de y vers x durant l'intervalle de temps $[t, t + 1/2]$ alors nous avons :

$$N(t + 1/2, x) = \int_{\Omega} k(x, y)N(t, y)dy \quad (1.1)$$

où Ω : (domaine d'intégration) est l'habitat de la population biologique.

Remarques

Le noyau de dispersion $k(x, y)$ est une fonction densité de probabilités : elle vérifie les conditions suivantes :

- $\forall x, y \in \Omega; k(x, y) \geq 0$

- Pour $x \in \Omega$ fixé ; $\int_{-\infty}^{+\infty} k(x, y) dy = 1$
- Le noyau de dispersion est symétrique $k(x, y) = k(y, x)$

Si l'habitat Ω est homogène, alors $k(x, y)$ dépend seulement de la distance i.e. : $k(x, y) = k(|x - y|)$.

Donc l'équation (1.1) devient :

$$N(t + 1/2, x) = \int_{\Omega} k(|x - y|) N(t, y) dy \quad (1.2)$$

Pour inclure la démographie on définit la fonction démographique f tel que :

$$N(t + 1, x) = f[N(t + 1/2, x)]$$

soit, d'après l'équation précédente :

$$N(t + 1, x) = f\left(\int_{\Omega} k(|x - y|) N(t, y) dy\right) \quad (1.3)$$

Si f est linéaire, l'équation (1.3) se met sous la forme suivante :

$$N(t + 1, x) = \int_{\mathbb{R}} k(|x - y|) f(N(t, y)) dy \quad (1.4)$$

1.1.1 Différentes expressions du noyaux de dispersion

Le noyau de dispersion $k(x, y)$ est la probabilité qu'un individu au point y disperse vers le point x , on distingue deux types de noyaux de dispersion : les noyaux à queue fine et les noyaux à queue large.

1.1.1.1 Noyaux à queue fine

Le noyau à queue fine est un noyau exponentiellement borné i.e :

$$m(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) e^{xs} dx < +\infty$$

Exemple 1

Exemples des noyaux à queue fines :

- Le noyau de Laplace (figure(1.1)) qui s'écrit sous la forme :

$$k(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x|}{\alpha}}, \alpha > 0 \implies m(s) = \frac{1}{1 - \alpha^2 s^2} \quad (1.5)$$

- Le noyau de Gauss de la forme :

$$k(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0 \implies m(s) = e^{-\frac{s^2\sigma^2}{2}}$$

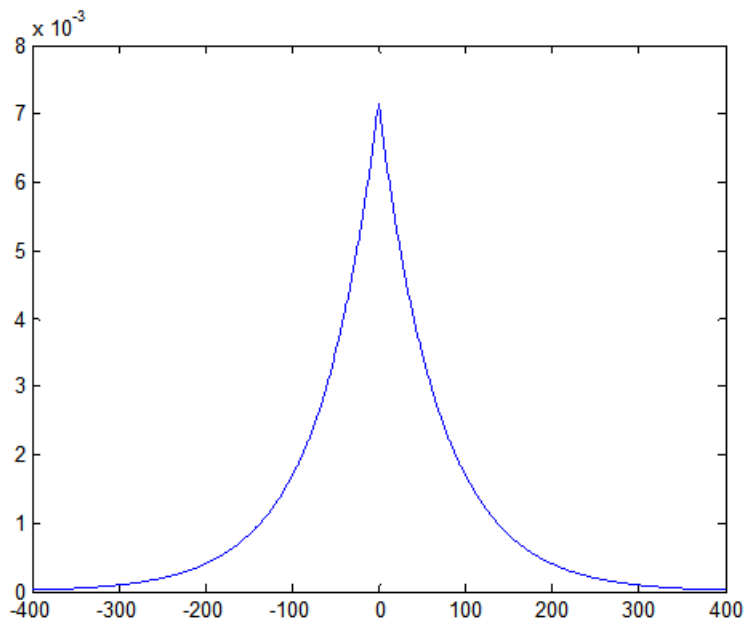


FIGURE 1.1 – Courbe associée à la densité de noyau de Laplace ($\alpha = 70$)

1.1.1.2 Noyaux à queue large

le noyau à queue large est le noyau qui n'admet pas de fonction génératrice des moments i.e. ne sont pas exponentiellement bornées.

Exemple 2

- Le noyau de **Cauchy** qui s'écrit sous la forme suivante :

$$k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{(\beta^2 + x^2)}, \beta > 0 \quad (1.6)$$

le paramètre β donnant une information sur l'étalement de la fonction (paramètre d'échelle). le noyau de Cauchy est à queue large (figure(1.2)).

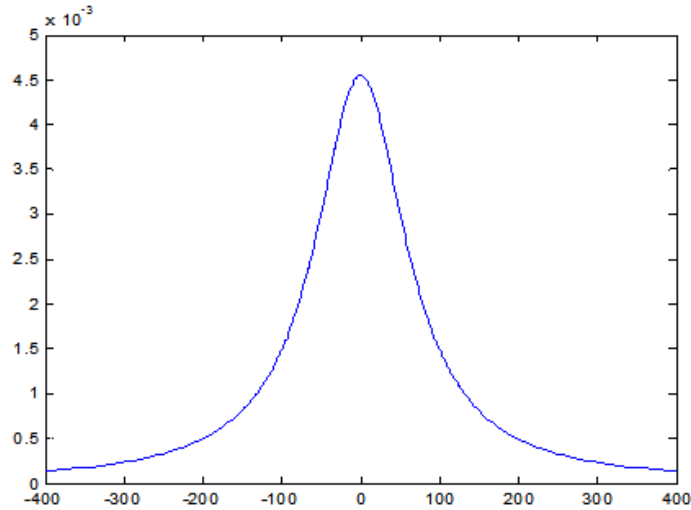


FIGURE 1.2 – Courbe associée à la densité de noyau de Cauchy pour $\beta = 100$.

Remarque

Certains noyaux, dépendant de plusieurs paramètres peuvent être à queue fine pour certains paramètres et à queue large pour d'autres paramètres. Par exemple le noyau "puissance exponentielle" qui s'écrit sous la forme suivante :

$$k(x) = \frac{a^{1/b} b}{2\pi\Gamma(1/b)} e^{-ax^b}$$

où b est un paramètre de forme, et a un scalaire donné.

La fonction Gamma est définie pour $a > 0$ par :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

Suivant le paramètre b , on distingue quatre cas :

- $b = 1$: Le noyau puissance exponentielle est un noyau de Laplace (figure (1.3)).

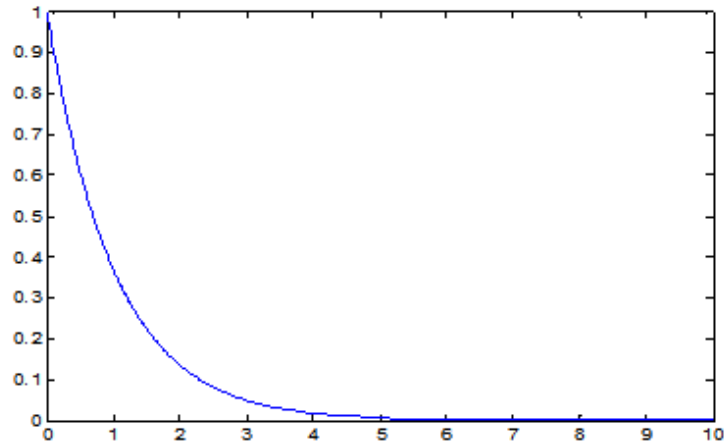


FIGURE 1.3 – Courbe associée à la densité de noyau de puissance exponentielle ($b = 1$) ($a = 1$).

- $b = 2$: Le noyau puissance exponentielle est un noyau de Gauss (figure(1.4)).

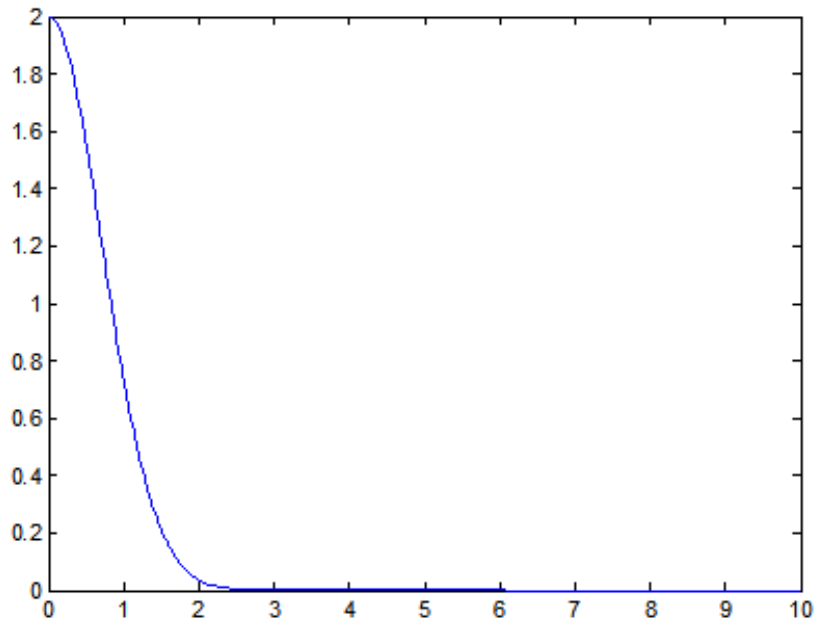


FIGURE 1.4 – Courbe associée à la densité de noyau de puissance exponentielle ($b = 2$)($a = 1$).

- $b < 1$: le noyau est à queue large (figure(1.5)).

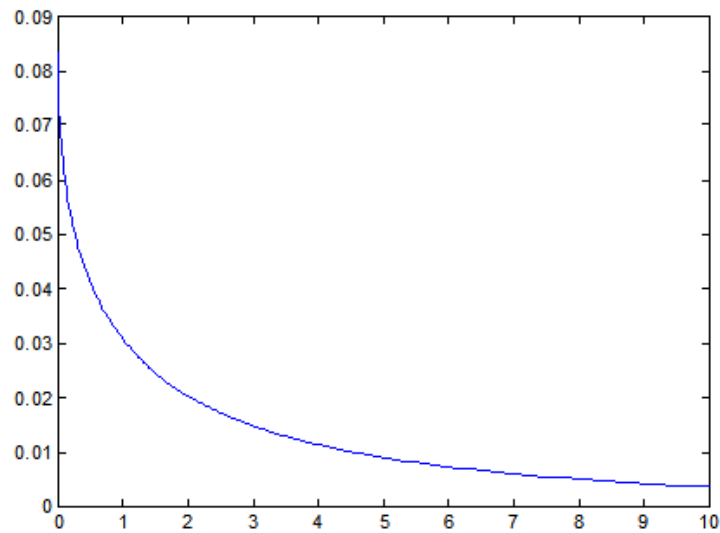


FIGURE 1.5 – Courbe associée à la densité de noyau de puissance exponentielle ($b = 0.5$)($a = 1$).

- $b > 1$: le noyau est à queue fine,(figure(1.6)).

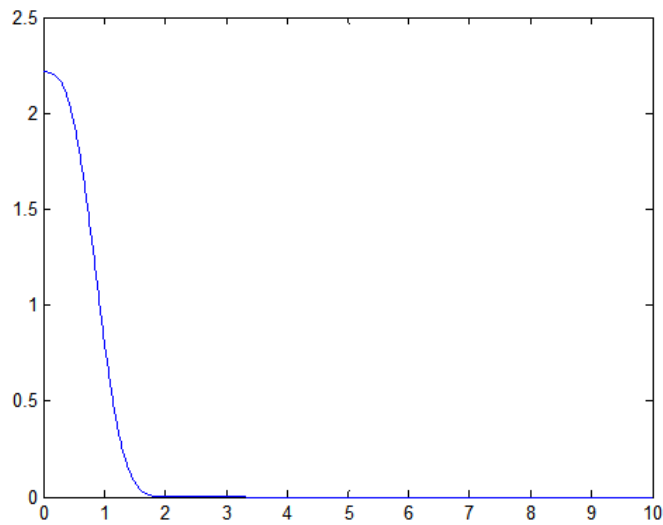


FIGURE 1.6 – Courbe associée à la densité de noyau de puissance exponentielle ($b = 3$)($a = 1$).

1.1.2 Solutions d'une equation intégro-différence dans le cas d'une population non structurée

Pour résoudre l' EID (1.4), on cherche les solutions sous la forme :

$$N(t, x) = w(x - ct);$$

avec :

$$N(x, t) = 1 \text{ quand } x \text{ tend vers } (-\infty)$$

$$N(x, t) = 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } (+\infty),$$

$N(t, x)$ est appelée onde progressive.

Posons le changement de variable $y = x - ct$

Définitions :

On peut définir :

- y est la variable d'onde.
- La fonction w est appelée profil d'onde.
- La constante $c \in \mathbb{R}$ est une vitesse d'onde ou la vitesse d'invasion « vitesse de propagation »

1.1.3 Théorème de Weinberger

Soit l'équation intégro-différence :

$$N(t + 1, x) = \int_{\mathbb{R}} k(|x - y|) f(N(t, y)) dy \quad (1.7)$$

si :

$$i) f'(N) > 0; \forall N \geq 0.$$

$$ii) f(N) \leq f'(0)N.$$

$$iii) \widehat{k}(s) := \int_{\mathbb{R}} k(|z|) e^{zs} dz < +\infty \text{ avec } s \text{ appartenant au voisinage de zéro.}$$

L'équation (1.7) admet une solution onde progressive de la forme : $N(x, t) = w(x - ct)$. Cette dernière a une vitesse d'onde minimale

$$v = \min_{0 < s < \widehat{s}} \left[\frac{1}{s} \ln(f'(0) \widehat{k}(s)) \right] \quad (1.8)$$

1.2 Équation intégro-différence dans le cas d'une population structurée

Une population peut être structurée de différentes manières, selon différents critères. La structure en classes d'âge fut introduite par Leslie (1945). En 1965, Lefkovitch avait considéré une structure en stades de développement, plus adaptée pour les populations d'insectes. Enfin, en 1966, une classification par tailles a été proposée par Usher (1966).

Si la population est structurée en p stades de développement et $N(t, x)$ est le vecteur d'état dont les composantes sont les densités de chaque classe au point x fixé, alors :

$$N(t + 1, x) = B_N N(t + 1/2, x) \quad (1.9)$$

où B_N est une matrice démographique.

Notons par $N_i(t, x)$ la densité de la population de la i ème classe ; par (b_{ij}) les paramètres démographiques associés à la classe i et par k_{ij} la probabilité qu'un individu passant de la classe j à la classe i , disperse du point y vers le point x .

Les densités de différentes classes s'écrivent alors :

$$N_i(t + 1, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n k_{ij}(|x - y|) b_{ij}(N(t, y)) N_j(t, y) dy \quad (1.10)$$

$i = 1, \dots, p$

De façon plus compacte, les équations s'écrivent :

$$N(t + 1, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [k(|x - y|) \circ B_N] N(t, y) dy \quad (1.11)$$

Et « \circ » est le produit terme à terme de Hadamard.

1.2.1 Solutions d'une équation intégral-différence dans le cas d'une population structurée

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite **non négative** si $(a_{ij}) \geq 0$, elle est dite **positive** si $a_{ij} > 0$, pour $1 \leq i, j \leq n$.

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite primitive si elle est non négative et A^k est positive pour certain $k > 0$.

1.2.2 Théorème de Neubert-Caswell

Pour calculer la vitesse d'invasion on a besoin de mettre quelques hypothèses sur la démographie et la dispersion de la population :

i) La matrice B_N est positive et primitive ou bien non négative et primitive.

ii) La plus grande valeur propre λ de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = B(0)$ est supérieure à 1 « la population s'accroît pour de faibles effectifs »

iii) La population ne présente pas un effet Allee i.e :

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(N(x, t)) N_j(t, x) \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} N_j(t, x) \quad (1.12)$$

iiii) Tous les noyaux de dispersion possèdent des fonctions génératrices des moments (sont exponentiellement bornées)

alors la vitesse d'invasion asymptotique de cette population est :

$$c = \min_{0 < s < \hat{s}} \left[\frac{1}{s} \ln(\rho_1(s)) \right] \quad (1.13)$$

où $\rho_1(s)$ est la plus grande valeur propre de la matrice $H(s) = A \circ M(s)$ pour $s \in (0, \hat{s})$. La matrice $M(s)$ est la matrice dont les éléments sont les fonctions génératrices des noyaux k_{ij} , i.e. :

$$m_{ij}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_{ij}(x) e^{sx} dx$$

Chapitre 2

Matériels et méthodes

2.1 Maladie de Chagas

Un des grands événements médicaux du début du siècle dernier a été la découverte en 1909 par le Dr Carlos Chagas de la maladie de Chagas « ou trypanosomiase américaine » causée par le parasite *Trypanosome cruzi*, transmis dans les déjections des insectes infectés appelés triatomes. Ces insectes hématophages relativement gros, vivent surtout en Amérique centrale « Salvador, Brésil, Mexique... » et dans les régions du sud des États-Unis.

Selon l'OMS sept à huit millions de personnes dans le monde auraient une infection chronique par *T.cruzi* (WHO 2014). D'après une étude en 2006 ; 3.5% des immigrants au Canada en provenance d'Amérique latine auraient été infectés par la maladie. De façon générale, la plupart des cas de la maladie de Chagas sont diagnostiqués chez des immigrants en provenance des pays du cône sud. L'infection initiale peut être symptomatique, la maladie se décline en deux phases de gravités différentes :

- **Première phase (aigüe)** : se manifeste peu après l'infection par des symptômes non spécifiques bénins qui se résorbent en deux à trois mois, sans traitement. Les principaux symptômes durant cette phase sont : gonflement autour de la pique infectée, enflure des paupières, fièvre, mal de tête, ganglions lymphatiques, douleurs musculaires, difficulté à respirer.

Dans de rares cas, la maladie est grave et provoque une myocardite ou une méningo-encéphalite qui peut être fatale.

Les symptômes graves sont plus fréquents chez les enfants, les personnes âgées et les personnes immunodéficientes. Les seuls antimicrobiens dont l'effet est démontré sont le benzidazole et nifurtimox.

Il est possible d'éradiquer la maladie si le traitement est amorcé peu après l'infection, mais l'efficacité du traitement diminue proportionnellement à la durée de l'infection. Un traitement peut également s'imposer pour soigner les symptômes.

- **Second phase (chronique)** : la plupart de patients atteints d'une infection chronique à *T.cruzi* n'ont pas de symptômes. Cette phase chronique est dite de la forme « indéterminée », cependant, dans 20% à 30% des cas le malade décède d'une cardiopathie ou d'un gonflement du colon...

2.1.1 Cycle de vie des Triatomines

Une triatomine passe par sept stades de développement : un stade œuf, cinq stades larvaires et un stade adulte.

Pour simplifier le modèle, nous compactons le stade œuf et les cinq stades larvaires dans une seule classe dite classe des juvéniles de densité $J(t, x)$. La densité des adultes sera notée $A(t, x)$.

Les juvéniles qui survivent avec une probabilité S_j peuvent rester au stade juvénile ou se développer au stade adulte avec des probabilités respectives F_{sj} et $(1 - F_{sj})$.

Les adultes qui survivent avec une probabilité S_A se reproduisent avec une fécondité $F_A(N)$ dépendante du nombre d'individus actifs dans la population.

Le schéma suivant résume le cycle de vie des triatomines :

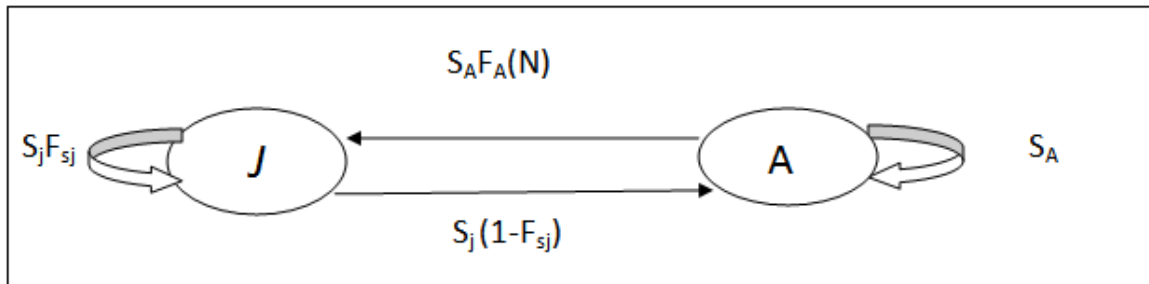


FIGURE 2.1 – représentation schématique de cycle du vie d'une triatomine

2.1.2 Habitat des Triatomines

L'habitat est une configuration de l'espace susceptible d'être occupé par un être vivant à un instant donné. Sa configuration varie d'une espèce biologique à l'autre. Dans cette étude, notre intérêt est porté sur l'espèce *T. infestans*. Cette dernière vit dans les forêts de la région de Cochabamba de la Bolivie. Elle a été trouvée dans les nids d'oiseaux, des tas de pierres, des arbres creux, des tanières de rongeurs. Elle préfère un climat tropical chaud, et on la trouve le plus abondamment aujourd'hui dans les habitations humaines.

2.1.3 Valeurs des différents paramètres démographiques

2.1.3.1 Paramètres connus de l'expérience (Rabinovich 1972)

Les paramètres biologiques :

$T = 160.72$ jours : temps moyen de développement de l'œuf à l'adulte

$L = 114.8$ jours : longévité des adultes

$S = 0.51$: probabilité de survie durant la période de développement

$F = 149.09$: fécondité globale

2.1.3.2 Paramètres déduits par le calcul pour un pas de temps Δt :

a) Probabilité de survie des juvéniles

La probabilité de survie des juvéniles est donnée :

- L'effectif de départ de la classe des juvéniles (œuf +larves $L1$ à $L5$) est $J(0)$.
- L'effectif final de la classe des juvéniles (œufs+larvaire de $L1$ à $L5$) est $S_j J(0)$.
- Si le temps de développement de l'œuf à l'adulte T est divisé en n pas de temps Δt alors en appliquant le théorème des probabilités composées, il vient que $S_j^n = S$, soit $S_j = S^{(\Delta t/T)}$.

b) Probabilité de survie des adultes

La probabilité de survie des adultes est donnée par la relation :

$$S_A = 1 - \frac{\Delta t}{L} \quad (2.1)$$

c) La probabilité de transition de la classe juvénile à la classe adulte :

La probabilité est donnée par :

$$F_{sj} = 1 - \frac{\Delta t}{T} \quad (2.2)$$

d) La fécondité :

La fécondité s'écrit sous la forme suivante :

$$F_A = \Delta t \frac{F}{L} \quad (2.3)$$

2.2 Modèle mathématique

D'après le cycle de vie des triatomines la matrice de transition s'écrit sous la forme :

$$B_N = \begin{pmatrix} S_j F_{sj} & S_A F_A(N(t, x)) \\ S_j(1 - F_{sj}) & S_A \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Nous supposons que la fécondité est constante (pas d'effet densité dépendant), soit :

$$F_A(N(t, x)) = F_A \quad (2.5)$$

Donc la matrice de démographie s'écrit sous la forme suivante :

$$B_N = \begin{pmatrix} S_j F_{sj} & S_A F_A \\ S_j(1 - F_{sj}) & S_A \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La matrice de dispersion s'écrit sous la forme suivante :

$$K(x) = \begin{pmatrix} \delta(x) & k(x) \\ \delta(x) & k(x) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

où δ est la distribution de Dirac
car nous supposons que les juvéniles ne dispersent pas.
Donc le modèle mathématique s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} J(t+1, x) = S_j F_{sj} J(t, x) + S_A F_A \int_{-\infty}^{+\infty} k(|x-y|) A(t, y) dy \\ A(t+1, x) = S_j (1 - F_{sj}) J(t, x) + S_A \int_{-\infty}^{+\infty} k(|x-y|) A(t, y) dy \end{cases} \quad (M)$$

2.2.1 Méthode de résolution analytique

On va calculer analytiquement la vitesse d'invasion des triatomines. Donc on va étudier le modèle (M) pour deux expressions des noyaux de dispersion (**Laplace** et **puissance exponentielle** ($b > 1$)) par application du théorème de Neubert-Caswell (Neubert and Caswell 2000),

Application 1 : Noyau de Laplace ($k(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x|}{\alpha}}$)

α est un paramètre représentant la capacité moyenne de déplacement. La matrice de transition étant constante, nous avons :

B_N s'écrit sous la forme suivante :

$$A = B_N = \begin{pmatrix} S_j F_{sj} & S_A F_A \\ S_j (1 - F_{sj}) & S_A \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

La matrice de dispersion est donnée par :

$$K(x) = \begin{pmatrix} \delta(x) & \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x|}{\alpha}} \\ \delta(x) & \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x|}{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Donc la matrice des moments s'écrit sous la forme suivante :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1 - \alpha^2 x^2} \\ 1 & \frac{1}{1 - \alpha^2 x^2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Par conséquent la matrice $H(s)$ s'écrit :

$$H(s) := A \circ M(s)$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} S_j F_{sj} & \frac{S_A F_A}{1 - \alpha^2 s^2} \\ S_j (1 - F_{sj}) & \frac{S_A}{1 - \alpha^2 s^2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Donc la vitesse d'invasion est donnée par la relation :

$$c = \min_{0 < s < \hat{s}} \left[\frac{1}{s} \ln(\rho_1(s)) \right] \quad (2.12)$$

Application 2 : noyau puissance exponentielle ($k(x) = \frac{a^{2/b}b}{\Gamma(2/b)2\pi}e^{-ax^b}$) (Klein et al 2006)

Dans ce cas aussi, la matrice démographique est donnée par :

$$A = B = \begin{pmatrix} S_j F_{sj} & S_A F_A \\ S_j(1 - F_{sj}) & S_A \end{pmatrix}$$

La matrice de dispersion est donnée par :

$$K(x) = \begin{pmatrix} \delta(x) & \frac{a^{2/b}b}{2\pi\Gamma(2/b)}e^{-ax^b} \\ \delta(x) & \frac{a^{2/b}b}{2\pi\Gamma(2/b)}e^{-ax^b} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

• Si $\mathbf{b}=2$: la matrice de dispersion s'écrit sous la forme suivante :

$$K(x) = \begin{pmatrix} \delta(x) & \frac{a}{\pi}e^{-ax^2} \\ \delta(x) & \frac{a}{\pi}e^{-ax^2} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Et la matrice des moments s'écrit sous la forme suivante :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{\frac{s^2}{4a}} \\ 1 & \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{\frac{s^2}{4a}} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Par conséquent la matrice $H(s)$ s'écrit :

$$H(x) = \begin{pmatrix} S_j F_{sj} & \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{\frac{s^2}{4a}} S_A F_A \\ S_j(1 - F_{sj}) & \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{\frac{s^2}{4a}} S_A \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Donc la vitesse d'invasion est donnée par la relation :

$$c = \min_{0 < s < \hat{s}} \left[\frac{1}{s} \ln(\rho_1(s)) \right]$$

Remarques :

On remarque que :

- Si $\mathbf{b} < 1$ on ne peut pas appliquer le théorème de Neubert-Caswell donc il faut résoudre l'équation par la méthode numérique.
- On ne peut pas résoudre l'équation analytiquement si on a le noyau de Cauchy donc il faut résoudre l'équation numériquement.

2.2.2 Méthode de résolution numérique

Si les noyaux sont à queue large (Cauchy, noyau puissance) alors les théorèmes de Weinberger et de Neubert-Caswell ne s'appliquent pas, d'où l'approche numérique basée sur le programme écrit en C++ qui calcule les densités finales, la dispersion maximale et la vitesse d'invasion (juvéniles, adultes).

Cette méthode sera appliquée pour :

- le noyau puissance exponentielle.
- le noyau de Laplace.
- le noyau de Cauchy.

Son code source est donné dans l'annexe (A).

La résolution numérique sera décrite dans l'algorithme suivant partagé en modules.

a) Module « discrétisation de l'habitat »

- $\Omega = \{\text{origine} _ \text{displacement}, \text{displacement} _ \text{max}\}$
- **origine-displacement** : origine de l'habitat Ω
- **displacement-max** : extrémité de l'habitat Ω
- **Grad-number** : nombre de graduations de l'habitat Ω sans la graduation de l'origine
- **step-displacement** : pas de déplacement (ts)
- **grad** : nombre de graduations par unité de longueur de Ω
- **abscissa-x** : distance de l'origine de l'habitat à un point donné

b) Module « déclaration des paramètres connues pour T.infestans »

- $T=160.72$: Le temps de développement de l'œuf à l'adulte
- $L=114.8$: durée de vie des femelles adultes
- $S=0.51$: pourcentage de survie de l'œuf à l'adulte
- $F=149.09$: durée de vie des œufs de femelles
- $\alpha=46.6$

c) Module « Calcule des paramètres pour T.infestans »

- Δt = les différents pas de temps

Les paramètres démographiques définis sont :

- S_A : La probabilité de survie des adultes
- S_j : La probabilité de survie des juvéniles
- F_{sj} : La probabilité de rester au stade juvénile
- $1 - F_{sj}$: La probabilité de se développer au stade adulte
- F_A : La reproduction des adultes (fécondité)
- **generations** : nombre fixé de générations. C'est une valeur introduite dans le nom des fichiers

d) Module « déclaration d'un tableau des densités »

- `density[grad_number+1][4]` : est donnée (grad_number+1) lignes.
- `density[[0],density[[1]` : les densités des juvéniles et adultes à la génération t .
- `density[[2],density[[3]` : les densités des juvéniles et des adultes à la génération $t + 1$.

e) Module « déclaration des flux de résultats »

Trois flux de résultats numériques sont déclarés :

- **final_densité** : flux des valeurs des densités des Triatomines, en tout point de l'habitat, de la première à la dernière génération fixée,
- **maxi_dispersal** : flux des valeurs de la dispersion maximale de chaque génération. La dispersion maximale d'une génération est la distance de l'origine du repère (origine-déplacement) jusqu'au point $x \in \Omega$ où la densité minimale (densité-seuil) est atteinte.
- **invasion_speed** : flux des valeurs de la vitesse d'invasion. Dans ce cas une seule valeur est récupérée.

f)Module « nomination et ouverture des fichiers de résultats »

Aux 3 flux de valeurs déclarés correspondent 3 fichiers de donnés (.dat) nommés de la façon suivante :

- **le flux final_densité** :est récupéré dans le fichier de donné (.dat) nommé.

final_dens_ts_xx._dp_yy._gn_zz._gr_nn.

- **le flux maxi_dispersal** :est récupéré dans le fichier de donné (.dat) nommé :

max_disp_ts_xx._dp_yy._gn_zz._gr_nn.

- **le flux invasion_speed** :flux des valeurs de la vitesse d'invasion. Dans ce cas une seule valeur est récupérée.

in_sp_gn_zz._gr_nn.

Les symboles *zz* et *nn* indiquent respectivement le nombre fixé de générations et le nombre de graduations contenus dans une unité de déplacement.

Les symboles *xx* et *yy* indiquent respectivement le temps fixé et le nombre de diapauses contenus dans une unité de déplacement.

g)Module « calcul de la vitesse d'invasion »

C'est la partie finale du programme durant la quelle :

- la vitesse d'invasion est calculée par la formule : $adults_invasion_speed = (adults_dispersal[generations] - adults_dispersal[gener_calcul_vitesse]) / (generations - gener_calcul_vitesse)$,

- **le flux maxi_dispersal** :est récupéré dans le fichier de donné (.dat) nommé :

max_disp_ts_xx._dp_yy._gn_zz._gr_nn.

- **adults_dispersal[generations]** :la dispersion de la dernière génération.

- **adults_dispersal[gener_calcul_vitesse]** :la dispersion de la première génération.

- **gener_calcul_vitesse** :la génération au quelle on a commencé à calculer la vitesse d'invasion.

Chapitre 3

Résultat et discussion

Dans cette partie, on expose les résultats obtenus par la méthode de résolution numérique qui nous permet de comparer entre les vitesses d'invasion dans le cas d'un noyau à queue fine puis à queue large.

3.1 Résultats numériques

Les résultats numériques obtenus par le programme, dont le code source se trouve dans l'annexe (A), sont obtenus pour un pas de temps de 7 jours. La population est suivie pendant 10 ans ($t = 520$ générations). Les fichiers générés contiennent les valeurs numériques correspondant :

- aux densités finales des juvéniles et des adultes.
- à la dispersion maximale des adultes.
- à la vitesse d'invasion des T. Infestans.

3.1.1 Résultats correspondant à la dispersion maximale des adultes

La dispersion maximale des adultes de T.infestans sur un espace Ω de 5000 points d'habitat.

3.1.1.1 Vitesse d'invasion dans le cas du noyau puissance exponentielle

La dispersion maximale des adultes sur un espace Ω de 2000 points d'habitat est représentée dans la (figure (3.3)) pour le noyau de puissance exponentielle ($a = 1, b = 1.2$).

L'ajustement de ce nuage de points par la méthode des moindres carrés permet d'écrire l'équation (figure (3.2)) :

$$d = 0.701t - 3.182 \tag{3.1}$$

avec un coefficient de détermination $R^2 = 1$.

Nous constatons que la dispersion maximale est dans ce cas une fonction linéaire du temps t .

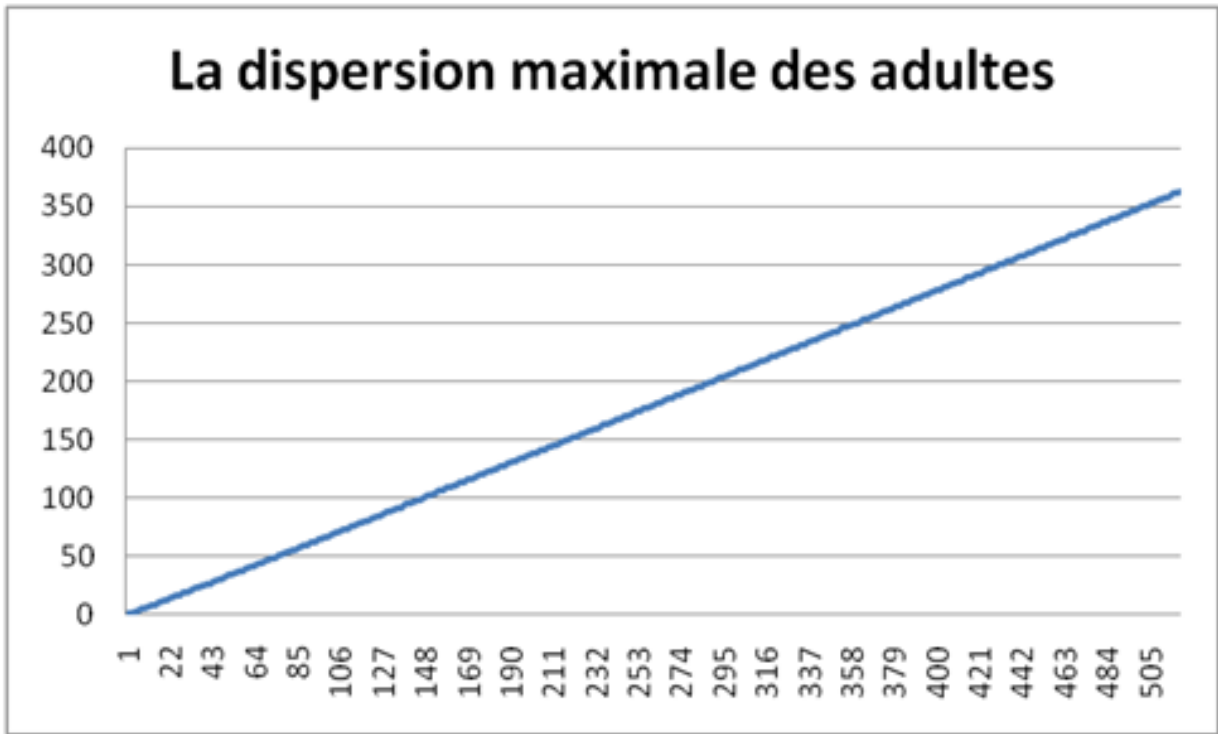


FIGURE 3.1 – Représentation graphique de la dispersion maximale des adultes associée aux pas de temps $\Delta t = 7$ de la première génération $t=0$ à la dernière génération $t=520$, de noyau de puissance exponentielle ($a=1$, $b=1.2$)(abscisse : nombre de générations, ordonnée : dispersion maximale).

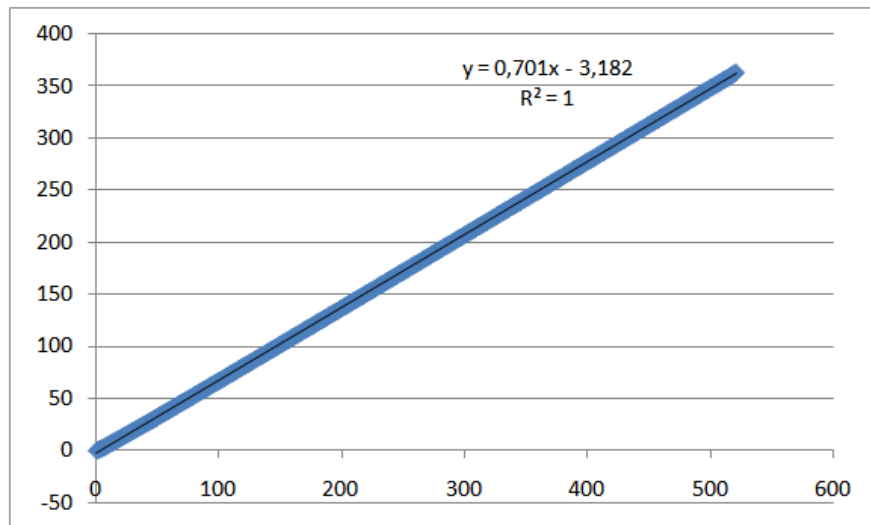


FIGURE 3.2 – Ajustement du nuage de points (de noyau à queue fine, puissance-exponentielle)(abscisse : nombre de générations, ordonnée : dispersion maximale).

La dispersion maximale générée par un noyau à queue large (puissance exponentielle avec $a = 15.83, b = 0.25$) est donnée dans la (figure (3.3)).

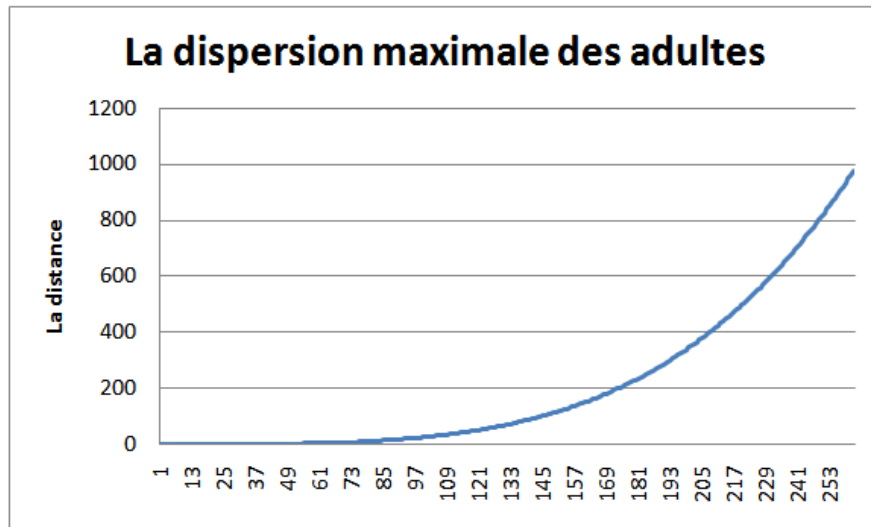


FIGURE 3.3 – Représentation graphique de la dispersion maximale des adultes associée aux pas de temps $t = 7$ de la première génération $t = 0$ à la dernière génération $t = 400$, noyau puissance exponentiel ($a = 15.83, b = 0.25$) (abscisse : nombre de générations, ordonnée : dispersion maximale).

L'ajustement de ce nuage de points par la méthode des moindres carrés donne (figure (3.4)) :

$$\ln(d) = 3.762\ln(t) + c \quad (3.2)$$

soit :

$$d = \lambda t^{3.762} \quad (3.3)$$

Avec un coefficient de détermination $R^2 = 0.999$
 Donc la vitesse d'invasion (d/t) est une fonction de $t^{2.762}$.

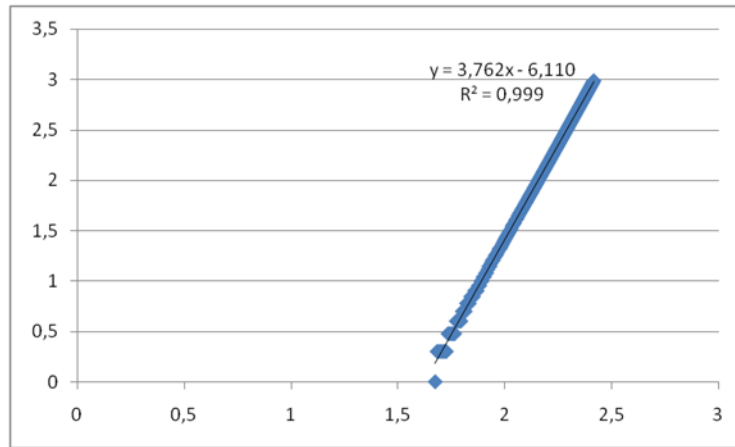


FIGURE 3.4 – Ajustement du nuage de points (de noyau à queue large noyau de puissance exponentiel $b < 1$).

3.1.1.2 Vitesse d’invasion dans le cas du noyau de Laplace

Dans le cas du noyau de dispersion de Laplace, la dispersion maximale est représentée dans la (figure (3.5))

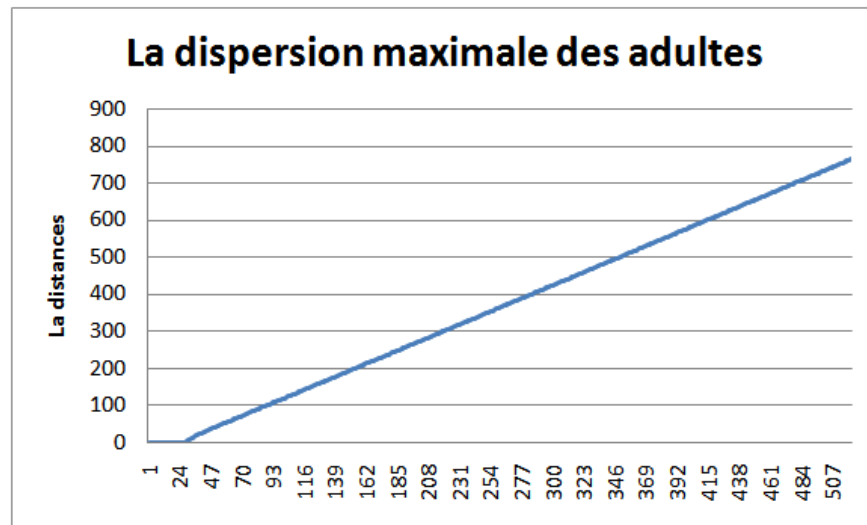


FIGURE 3.5 – Représentation graphique de la dispersion maximale des adultes associée aux pas de temps $t = 7$ de la première génération $t = 0$ à la dernière génération $t = 520$, noyau de Laplace, (abscisse : nombre de générations, ordonnée : dispersion maximale).

L’ajustement de ce nuage de points donne l’équation (figure (3.6)) :

$$d = 1.537t - 33.82$$

avec un $R^2 = 1$. Dans ce cas aussi, les ondes progressives avancent avec une vitesse constante.

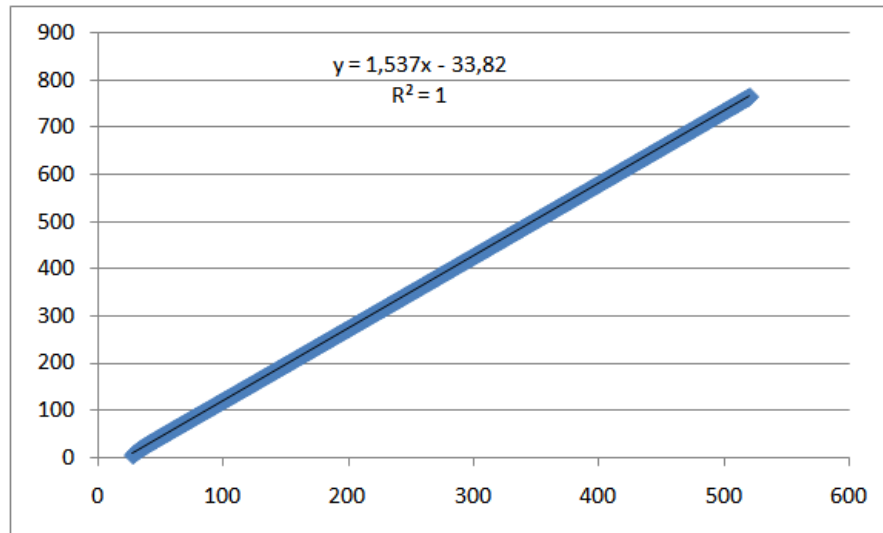


FIGURE 3.6 – Ajustement du nuage de points (de noyau à queue fine, Lapace).

3.1.1.3 Vitesse d’invasion dans le cas du noyau de Cauchy

La dispersion maximale, dans le cas du noyau de Cauchy est représentée dans la (figure (3.7)). Dans ce cas aussi, la vitesse d’invasion n’est pas constante.

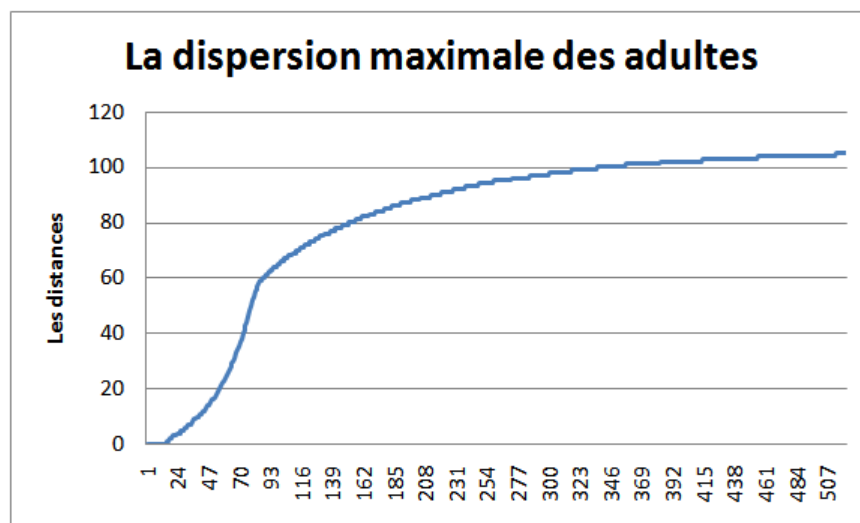


FIGURE 3.7 – Représentation graphique de la dispersion maximale des adultes associée aux pas de temps $ts = 7$ de la première génération $t = 0$ à la dernière génération $t = 520$, noyau de Cauchy,(abscisse : nombre de générations, ordonnée : dispersion maximale).

3.1.2 Discussion

La représentation graphique de la dispersion maximale des adultes change en fonction des noyaux de dispersion, on distingue deux types :

- Un premier où la vitesse d'invasion est constante cas des noyaux de Laplace et puissance-exponentielle ($b > 1$). (figure (3.1), figure (3.5)).
- Un second où la vitesse d'invasion varie en fonction du temps : cas des noyaux puissance exponentielle ($b < 1$) et Cauchy. (figure (3.3), figure (3.7)).

Donc la vitesse d'invasion des noyaux à queue large s'accroît plus rapide que la vitesse d'invasion des noyaux à queue fine.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons fait une étude de l'impact de la nature du noyau de dispersion sur la vitesse de déplacement des ondes progressives solutions d'une EID. Le modèle biologique choisi (à cause de la disponibilité des différents paramètres biologiques) est une population de Triatomines (*T.infestans*) vecteur de la maladie de Chagas.

Deux types de noyaux de dispersion ont été considérés : les noyaux à queue fine tels que les noyaux de Laplace et de la puissance exponentielle ($b > 1$) et les noyaux à queues larges tels que les noyaux de Cauchy et de la puissance exponentielle ($b < 1$).

Les résultats numériques obtenus montrent que dans le cas des noyaux à queues fines, les ondes progressives avancent avec une vitesse constante donnée par les théorèmes de Weinberger et de Neubert-Caswell. Les ondes progressives obtenues avec un noyau à queue large avancent quant à elles avec une vitesse dépendante du temps.

Références Bibliographiques

Bibliographie

- [1] Brownlee, J., 1911. The mathematical theory of random migration and epidemic distribution. Robert Grant & Son.
- [2] Christine M. Hunter, Hal Caswell (2005), The use of the vec-permutation matrix in spatial matrix population models, *Ecological Modelling* **188** (2005) 15–21.
- [3] Etienne Klein, Claire Lavingne. Herve Picault. Michel Renard, and Pierre Henri Gouyon. *Journal of Applied Ecology* 2006 ; **43** ; 141-151.
- [4] Eelke Jongenjans, Katriona Shea, 2008 ; Dispersal demography and spatial population models for conservation and control management.
- [5] Fisher.R.A.1937.The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics* **7** : 353-369
- [6] Mark Kot, Mark A. Lewis,P.Vander Driessche -1996 ; *Ecology*, Vol,77,pp-2027 – 2042.
- [7] Lefkovitch, L.P., 1965. The study of population growth in organisms grouped by stages. *Biometrics* 21, 1-18., doi :10.2307/2528348.
- [8] Leslie, P.H., 1945. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* 33, 183-212., doi :10.2307/2332297. K.Klein, Claire Lavingne. Herve Picault. Michel Renard, and Pierre Henri Gouyon.*Journal of Applied Ecology* 2006 ; **43** ; 141 – 151.
- [9] Neubert, M. G. and H. Caswell (2000). "Demography and dispersal : calculation and sensitivity analysis of invasion speed for structured populations." *Ecology* **81** (6) : 1613-1628.
- [10] Pearson, K., and Blakeman, J., 1906. A mathematical theory of random migration.
- [11] Rabinovich. J.E (1972) vital statistics of Triatoma (Hemiptera : Reduviidae) Under Laboratory Conditions I.Triatoma infestans "Journal of Medical" Entomology **9**(4) 351-370.
- [12] Usher, M.B., 1966. A matrix approach to the management of renewable resources, with special reference to selection forests. *J. Appl. Ecol.* 3, 355-367.
- [13] Weinberger, H. F. (1978). "Asymptotic behavior of a model of population genetics. " J. Chadam, editor. *Nonlinear partial differential equations and applications. Lecture Notes in*

Mathematics **684** : 47-96.

[14] Weinberger, H. F. (1982, May). Long time behavior of a class of biological models. SIAM journal on mathematical analysis **13** (3), 353-396.

[15] WHO (2014), <http://www.who.int>. (Mars, 2014).

Annexe A

Annexe A : Code C++ de la résolution numérique du système d'équation integro-différences modélisant la dispersion spatiale de T.infestans.

```
// expo large.cpp : Defines the entry point for the console
application.
//

#include "stdafx.h"

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    return 0;
}

#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <fstream>
#include <string>

using namespace std;

/*****declaring_functions*****/
/*****/

void initialising_densities();
//initial_densities_for_all_stages

void vanishing_densities();
//vanish_densities_Adult(0,0)<1

void recording_final_densities();
//recording_final_densities_for_all_stages

void column_zero(); //transfert_from_density[][3]_to_density[][0]

void column_one(); //transfert_from_density[][4]_to_density[][1]

double function0(int numero_grad,double x,double y);

double function1(int numero_grad,double x,double y);
```

```

double integration(double (*fonc)(int numero_grad,double x,double
y),double x);//integration

double adults_maximal_dispersal(double
adults_treshold);//maximal_dispersal_

double invasion_speed_calculus (int m,int n,double
dispersal[]);//calculus_of_invasion_speed

/*****spatial_constants*****/
*****/
/*****/
*****/

const double origine_displacement=0.0;
const double step_displacement=1;
const double grad=5000;
const double displacement_max=5000;
const int grad_number=5000; // whitout_the_graduation_zero
//int((displacement_max-
origine_displacement)/step_displacement)+1;
double abscissa_x;

/*****definition_of_demographic_constants*****/
*****/
/*****/
*****/

const double sa=0.939; //parametre_survie_T.Infestans
const double sj=0.971; //parametre_survie_T.Infestans
const double fsj=0.956; //parametre_survie_T.Infestans
const double fa=5.1; // fecondite_T.Infestans

const double a=15.83;
const double b=0.25;
double inv_gamma=0.001981;

/*****declaring_densities_array*****/
*****/
/*****/
*****/

double density[grad_number+1][5];
/*
    density[][0] juvenile
    density[][1] adults
    density[][2] integration_of_adults
    density[][3] juvenile_t+1

```

```

        density[][4] adults_t+1
*/

/*****generations*****/
*****/
/*****/

const int generations=520;

int gener_calcul_vitesse=(int(generations/2))-1;

/*****declaring_dispersal_vectors*****/
*****/
/*****/

double adults_dispersal[generations+1];

/*****declaring_invasion_speeds*****/
*****/
/*****/

double adults_invasion_speed;
double pop_tot;
/*****declaring_tresholds*****/
*****/
/*****/

const double adults_treshold=1;
const double adults_max=100;
const double juv_max=100;
/*****declaring_out_flux*****/
*****/
/*****/
ofstream final_densities;
ofstream total_pop;
ofstream maxi_dispersal;
ofstream invasion_speed;
/*****main_programme*****/
*****/
/*****/

int main()
{

```

```

/*****definitions_des_chaines_de_caracteres*****/
*****/
/*****
*****/
    string nom_maxi_dispersal;
    string name_final_densities;

    string partie1a="final_dens_";
    string partie1b="max_disp_";

    string partie4="_gen_";

    string partie5="_grad_";

    string extension=".dat";

/*****transformation_des constantes_en_chaines*****/
*****/
/*****
*****/
    char chaine_gener[20];
    char chaine_grad[20];

_gcvrt(grad,6,chaine_grad);
_gcvrt(generations,6,chaine_gener);

ofstream g("Inv_Speed_Pers.dat");

if(!g.is_open())cout<<"Impossible d'ouvrir le fichier en écriture
!"<<endl;
else
{
    g <<" Step time= one week"
        <<" \tsa="<<sa
        <<" \tsj="<<sj
        <<" \tfsj="<< fsj
        <<endl;

        initialising_densities();

        name_final_densities=partie1a
                                +partie4+chaine_gener
                                +partie5+chaine_grad
                                +extension;

        final_densities.open(name_final_densities.c_str());

        nom_maxi_dispersal=partie1b

```

```

+partie4+chaine_gener
+partie5+chaine_grad
+extension;

maxi_dispersion.open(nom_maxi_dispersion.c_str());

adults_dispersion[0]=0;

maxi_dispersion<<0<<" \t"<<adults_dispersion[0]<<endl;

for(int t=1;t<=generations;t++)
{
final_densities<<"t="<<t<<endl;
for (int i=0;i<=grad_number;i++)
{
abscissa_x=step_displacement*i;

density[i][2]=integration(function0,abscissa_x)/integration(fun
ction1,abscissa_x);

density[i][3]=fsj*sj*density[i][0] + sa*fa*density[i][2];

density[i][4]=(1-
fsj)*sj*density[i][0]+sa*density[i][2];

if
(density[i][4]>adults_max)
{
density[i][4]=adults_max;
}
if
(density[i][3]>juv_max)
{
density[i][3]=juv_max;
}

final_densities<<"\t"<<i<<"\t"<<density[i][4]<<endl;
}

if (density[0][4]<1)
{
vanishing_densities();
}

adults_dispersion[t]=adults_maximal_dispersion(adults_treshold);

```

```

        maxi_dispersal<<t<<"
\t"<<adults_dispersal[t]<<endl;

        column_zero();

        column_one();
    }

    recording_final_densities();

    maxi_dispersal.close();

    final_densities.close();

    adults_invasion_speed=invasion_speed_calculus
(gener_calcul_vitesse,generations,adults_dispersal);

    g<<"\tinv=
"<<adults_invasion_speed<<"\ttot_pop"<<pop_tot<<endl;

}
g.close();
return 0;
}

/*****initialising des vecteurs
densites*****/
/*****
****/
void initialising_densities()
{
    for ( int j=0;j<=grad_number;j++)
    {
        density[j][0]=0.0;    //initialisation_of_juvenile_vectors
        density[j][1]=0.0;    //initialisation_of_adults_vectors
    }
    density[0][1]=10;    //valeur_initiale_des_adultes_origine
}
/*****cancelling des vecteurs
densites*****/
/*****
****/

void vanishing_densities()
{
    for ( int j=0;j<=grad_number;j++)
    {

```



```

        density[j][3]=0.0;    //vanish_of_juvenile_vectors
        density[j][4]=0.0;    //vanish_of_adults_vectors
    }
}
/*****recording_final_densities*****/
*****/
/*****
*****/
void recording_final_densities()
{
    final_densities<<"\tJ"
                    <<"\tA"
                    <<endl;
for (int j=0;j<=grad_number;j++)
{
    final_densities<<j
                    <<"\t"<<density[j][0]
                    <<"\t"<<density[j][1]
                    <<endl;
}
}
/*****column_zero*****/
*****/
/*****
*****/
void column_zero()
{
    for (int j=0;j<=grad_number;j++)
    {
        density[j][0]=density[j][3];
    }
}
/*****column_one*****/
*****/
/*****
*****/
void column_one()
{
    for (int j=0;j<=grad_number;j++)
    {
        density[j][1]=density[j][4];
    }
}
/*****susceptible_juvenile_vectors_f0*****/
*****/
/*****
*****/

```

```

double function0(int j,double x,double y)
{
    double size0=0.0;
    if (j>=0)
    {
        size0=inv_gamma*pow(a,(2/b))*0.1592*b*exp(-a*pow(fabs(x-
y),b))*density[j][1];
    }
    else
    {
        size0=inv_gamma*pow(a,(2/b))*0.1592*b*exp(-a*pow(fabs(x-
y),b))*density[-j][1];
    }
    return size0;
}
/*****
*****/
/*****
*****/

double function1(int j,double x,double y)
{
    double size0=0.0;
    if (j>=0)
    {
        size0=inv_gamma*pow(a,(2/b))*0.1592*b*exp(-a*pow(fabs(x-
y),b));
    }
    else
    {
        size0=inv_gamma*pow(a,(2/b))*0.1592*b*exp(-a*pow(fabs(x-
y),b));
    }
    return size0;
}
/*****integration_of_dispersal_functions*****/
***/
/*****
*****/

double integration(double (*fonc)(int i,double x,double y),double x)
{
    double integral=0.0;
    double y=-displacement_max;
    for (int j=-grad_number+1;j<grad_number;j++)
    {
        y=y+step_displacement;
        integral=integral+step_displacement*fonc(j,x,y);
    }
}

```

```

        integral=integral+(0.5)*step_displacement*(fonc(grad_number,x,y
+step_displacement)
                                +fonc(-
grad_number,x,step_displacement*(-grad_number)));
return integral;
}
/*****infected_juvenile_vector_maximal_dispersal*****/
/*****
*****/

double adults_maximal_dispersal(double adults_treshold)
{
    for (int j=0;j<grad_number;j++)
    {
        if (density[j+1][4]<adults_treshold)
            return (step_displacement)*(j);
    }
    return(grad_number)*(step_displacement);
}
/*****invasion_speed*****/
/*****
*****/

double invasion_speed_calculus (int m,int n,double dispersal[])
{
    double s=0;
    for( int k=m+1;k<=n;k++)
    {
        s=s+dispersal[k]-dispersal[k-1];
    }
    return (s/(n-m));
}

```