

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : *Mathématiques appliquées/Analyse numérique*

Par :

HAMIDAOUI Meryem

Sur le thème

Méthode des différences finies appliquée aux EDPs fractionnaires

Soutenue publiquement le 20 juin 2016 à Tlemcen devant le jury composé de :

<i>M. Bouguima Sidi Mohammed</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Tlemcen</i>	<i>Président</i>
<i>Mme. N.Daoudi – Merzagui</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Tlemcen</i>	<i>Directrice de thèse</i>
<i>M. Mebkhout Benmiloud</i>	<i>MAA</i>	<i>Université de Tlemcen</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. Senouci Bereksi Ghouti</i>	<i>MCA</i>	<i>Université de Tlemcen</i>	<i>Examineur</i>

Année universitaire 2015/2016

RESUME :

Ce mémoire est consacré à l'application de la méthode des différences finies aux équations aux dérivées partielles fractionnaires. Après un développement de la notion de la dérivation d'ordre non entier, quelques schémas de différences finies adaptés aux opérateurs fractionnaires sont présentés. Nous achevons par exposer leur application à quelques exemples d'équations aux dérivées partielles fractionnaires (équation de diffusion et équation d'advection-dispersion) avec étude de la convergence de ces schémas.

Mots clé : Dérivée d'ordre non entier ; E.D.P fractionnaires ; la méthode des différences finies.

ABSTRACT

This master memory is dedicated to the application of the finite difference method to fractional PDEs. After developing the fractional derivation, some finite difference schemes tailored to fractional operators are presented. We end up exposing their application to examples of fractional PDEs (diffusion equation and advection-dispersion equation) with the study of the convergence of these schemes.

Keywords : Fractional order derivative ; Fractional P.D.E ; the finite difference method.

REMERCIEMENTS

*Louanges au Bon Dieu, pour la volonté, la santé et le courage qu'il m'a donnés
durant ma vie.*

*Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Mme. N. Daoudi-Merzagui
Professeur du département de mathématiques de l'Université de Tlemcen, qui fut
pour moi une encadreuse attentive et disponible malgré ses nombreuses charges.
Elle m'a guidé durant mon travail et m'a apporté le soutien nécessaire. De part
ses qualités pédagogiques et ses précieux conseils.*

*Mes sincères remerciements à Monsieur S. M. Bouguïma Professeur du
département de mathématiques de l'Université de Tlemcen, qui m'a fait
l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.*

*Je remercie vivement Monsieur B. Mebkhout, enseignant au département de
mathématiques de l'université de Tlemcen qui m'a fait l'honneur d'accepter de
participer au jury de ce mémoire.*

*Mes profonds remerciements pour Monsieur G. Bereksi Senouci enseignant au
département de mathématiques de l'université de Tlemcen d'avoir accepté
d'examiner ce manuscrit.*

*Mes remerciements s'étendent également à tous les professeurs qui m'ont
enseigné une part de leur savoir.*

DEDICATION

Ce travail est dédié à :

mes parents,

ma sœur, mon frère,

ma famille et mes amis.

A la mémoire de mes grands parents.

TABLE DES MATIÈRES

0.1	Introduction	1
1	PRÉLIMINAIRES	1
1.1	Outils de base	2
1.1.1	Fonctions utiles	2
1.1.1.1	La fonction Gamma	2
1.1.1.2	La fonction Béta	3
1.1.1.3	Fonction de Mittag-Leffler	4
1.2	Méthode des différences finies	4
2	ÉLÉMENTS DE CALCUL FRACTIONNAIRE	9
2.1	Aperçu historique	11
2.2	Intégrale fractionnaire	14
2.3	Dérivée fractionnaire	16
2.3.1	Dérivée au sens de Riemann-Liouville	16
2.3.2	Dérivée au sens de Grünwald-Letnikov	19
2.3.3	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	20
2.3.4	La relation entre la dérivée au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville	22
2.3.5	Différences entre les définitions	22
2.3.6	Dérivée à gauche et à droite	23

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
2.3.7 Propriétés générales des dérivées fractionnaires	25
2.4 Les équations aux dérivées partielles fractionnaires	26
2.4.1 Dérivée fractionnaire partielle	27
2.4.1.1 Intégrale fractionnaire partielle de Riemann-Liouville	27
2.4.1.2 Dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville	27
2.4.1.3 Dérivée fractionnaire partielle de Grünwald-Letnikov	28
2.4.1.4 Dérivée fractionnaire partielle de Caputo	28
2.4.2 Exemple d'opérateur différentiel fractionnaire et d'EDP frac-	
tionnaire	29
2.4.2.1 Opérateur de Riesz	29
2.4.2.2 Exemple d'E.D.P fractionnaire	30
3 MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES CAS FRACTIONNAIRES ET	
APPLICATIONS	31
3.1 Différences finies fractionnaires	32
3.1.1 Les schémas de Grünwald	32
3.1.2 Les schémas L_1 et L_2	33
3.2 Application	37
3.2.1 Equation d'advection-dispersion fractionnaire	38
3.2.2 Equation de diffusion fractionnaire	45
3.2.3 Perspective et conclusion	62
3.2.3.1 Bilan	62

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	4
3.2.3.2 Perspective	63

0.1 Introduction

Le calcul différentiel fournit un outil puissant pour expliquer et modéliser des processus dynamiques dans de nombreux domaines des sciences appliquées. Mais les expériences et la réalité nous enseignent qu'il y a beaucoup de systèmes complexes dans la nature avec une dynamique différente, tels le transport de contaminants chimiques dans l'eau autour de rochers, la diffusion atmosphérique de la pollution, la dynamique des matériaux viscoélastiques comme les polymères, le processus de diffusion cellulaire, la transmission de signaux par l'intermédiaire de champs magnétiques intenses, l'effet de la spéculation sur la rentabilité des stocks sur les marchés financiers, le trafic réseau et bien d'autres. Dans les cas mentionnés, les processus ont un comportement complexe macroscopique, qui fait que les dérivées classiques ne peuvent exprimer leur dynamique.

La notion de dérivation fractionnaire qui paraissait une question de mathématiques pures devint alors d'un intérêt certain pour la modélisation de tels processus ([30],[31]), un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout simplement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. La dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommés et des caoutchoucs, et toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique[2]. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement,

autrement dit les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères [20]. En ce qui concerne la résolution numérique, l'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé. Ce ci étant du au fait que tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'informations et une grande complexité de l'algorithme.

De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature. Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20ème siècle, inclut : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erdélyi (1939- 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949),...

Différentes approches ont été utilisés pour cette notion de dérivation :

- La limite de taux d'accroissement d'une fonction qui se généralise sous la

forme de Grunwald-Letnikov, très utile numériquement [18].

- L'intégration, opérateur inverse de la dérivation, via la formule intégrale de Liouville, mène aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo [18].

- Enfin les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(i\omega)^\alpha$ ou p^α avec α non entier [10].

Mais ces différentes définitions ont pendant longtemps semblé ne pas donner toujours les mêmes résultats. Cette incohérence apparente a pu être dissipée dans le cadre nouveau proposé par la théorie des distributions de Laurent Schwartz [24].

Pour la première conférence consacrée au calcul fractionnaire, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974 [15], et il a édité les débats. Pour la première monographie, le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 [18] après une collaboration commune commencée en 1968.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. On peut noter ici que la plupart des travaux sur le calcul fractionnaire sont consacrés à la solvabilité des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles fractionnaires à la base des fonctions spéciales [10],[17]. Récemment, d'autres résultats traitant l'existence, l'unicité et la multiplicité de solutions positives pour des problèmes fractionnaires

par l'utilisation des techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe sont apparues [10]. L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de l'application de la méthode des différences finies aux EDPs fractionnaires.

Ce travail est réparti principalement en, plus d'une introduction, trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous donnons les définitions et les notations qui seront utilisés dans la suite du travail.

Le deuxième est consacré à l'introduction de la théorie du calcul fractionnaire en donnant un aperçu historique sur le développement de cette théorie et les définitions les plus utilisées des, dérivées, intégrales et opérateurs fractionnaires ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre nous présentons la méthode des différences finies dans le cas fractionnaire en donnant quelques schémas pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < \alpha < 2$, avec application à quelques exemples d'EDPs fractionnaires.

Enfin, cette thèse est clôturée par une bibliographie.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Outils de base

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma, Béta et Mittag-Leffler, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Pour plus de détails se référer à ([18], [27]).

1.1.1 Fonctions utiles

1.1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. L'interprétation la plus simple de la fonction gamma est : la généralisation de la notion du factoriel, pour les nombres réels.

Définition 1 : La fonction gamma est définie sur \mathbb{C} , par l'intégrale impropre suivante,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt; \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{Re}(z) > 0,$$

Propriétés

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$.
2. $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone (strictement décroissante) pour $0 < z \leq 1$.
4. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

1.1.1.2 La fonction Béta

Également connu sous le nom d'intégrale d'Euler de premier type. Elle est non seulement définie par l'utilisation de la fonction Gamma, mais elle partage une forme qui ressemble typiquement à l'intégrale/dérivée fractionnaire de nombreuses fonctions.

Définition 2 : La fonction Béta est défini sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par l'intégrale suivante,

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt; x, y \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0$$

Propriétés

Pour tout $x, y \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0$,

1. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$
2. $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Remarque 3 Coefficient binomial

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, définis pour tout entier naturel n et tout entier naturel k inférieur ou égal à n , donnent le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments, notés aussi C_n^k . Cette quantité s'exprime à l'aide de la fonction factorielle par,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, k \leq n$$

La formule généralisée $\binom{\alpha}{k}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$ est donnée par,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Cette formule peut être exprimée en terme de la fonction Gamma pour $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_-$,

$k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha-k+1)}$$

1.1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 4 Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (1.1)$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

1.2 Méthode des différences finies

Au cours de l'histoire, les méthodes de calcul ont été l'expression de pratiques sans cesse renouvelées. Le développement de l'informatique a largement contribué à une rapide progression de l'ensemble des techniques numériques. Dans les simulations, comme dans les modélisations, l'analyse numérique occupe une place centrale. Elle traite de nombreux problèmes de sciences physiques, biologiques, technologiques ou des problèmes issus de modèles économiques et sociaux. Elle

intervient dans le développement de codes de calcul (météorologie, physique des particules...), mais aussi dans les problèmes de simulations (aéronautique, industrie nucléaire...). Elle entretient des liens étroits avec l'informatique. Si sa partie théorique relève plus des mathématiques, sa mise en pratique aboutit généralement à l'implémentation d'algorithmes sur ordinateur. Ses méthodes se fondent à la fois sur la recherche de solutions exactes comme dans le cas de l'analyse matricielle ou du calcul symbolique et sur des solutions approchées qui résultent le plus souvent de processus de discrétisation comme dans le traitement des équations différentielles.

Dans cette section nous allons présenter l'une des méthodes utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles, la méthode des différences finies.

La méthode des différences finies est l'une des techniques de recherche de solution approchée d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres [22]. En apparence, cette méthode est en général simple à mettre en œuvre, elle procède en deux étapes :

1. La discrétisation du domaine d'étude (l'espace discrétisé ou maillage) et des opérateurs de dérivation/différentiation. Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes, etc., dérivées partielles) peut être obtenue par les formules de Taylor, en particulier celle de Taylor avec reste

intégral permet de mesurer les erreurs.

2. La convergence du schéma numérique ainsi obtenu (lorsque la distance entre les points diminue).

Définition 5 *Pour la méthode des différences finies, un maillage est un ensemble de points isolés (appelés nœuds) situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles, une grille sur les seuls nœuds de laquelle sont définies les inconnues correspondant aux valeurs approximatives de ces fonctions. Le maillage comprend également des nœuds situés sur la frontière du domaine (ou au moins « proches » de cette frontière) afin de pouvoir imposer les conditions aux limites et/ou la condition initiale avec une précision suffisante.*

- A priori, la première qualité d'un maillage est de couvrir au mieux le domaine dans lequel il se développe, de limiter la distance entre chaque nœud et son plus proche voisin. Cependant, le maillage doit également permettre d'exprimer la formulation discrète des opérateurs de différentiation : pour cette raison, les nœuds du maillage sont le plus souvent situés sur une grille dont les directions principales sont les axes des variables.

Définition 6 *On appelle pas du maillage la distance entre deux nœuds voisins situés sur une droite parallèle à l'un des axes. Dans ce sens, le pas est une notion à la fois locale et directionnelle.*

On parlera de pas global pour désigner le plus grand pas local, une notion qui reste directionnelle.

Schémas de différences finies :

Les schémas de différences finies sont obtenus grâce aux formules de Taylor.

Formule de Taylor d'ordre 1 :

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + O(h) \quad (\text{taylor1})$$

Formule de Taylor d'ordre 2 :

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + O(h^2), \quad (\text{taylor2})$$

En un point $x \in [l, L]$ et pour une valeur h du pas de discrétisation donné par $h = \frac{L-l}{N}$, tel que u est une fonction une fois dérivable.

La formule (taylor1) nous permet d'approximer $u'(x)$,

$$\frac{u(x + h) - u(x)}{h} \approx u'(x) \quad (1.2)$$

ou encore,

$$\frac{u(x) - u(x - h)}{h} \approx u'(x) \quad (1.3)$$

Et se basant sur (taylor2) et (1.3) nous obtenons l'approximation suivante de $u''(x)$,

$$u''(x) \approx \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)}{h^2} \quad (1.4)$$

Notons

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ \tilde{\tilde{u}}(x) &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}\end{aligned}$$

Lemme 7 $|u'(x) - \tilde{u}(x)| \leq O(h)$ et $|u''(x) - \tilde{\tilde{u}}(x)| \leq O(h^2)$

CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS DE CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre nous abordons le calcul différentiel fractionnaire qui est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux operateurs de dérivation (et d'intégration) d'ordre non entier. Nous nous restreindrons à trois approches des dérivées fractionnaires, les plus populaires et les plus pratiques (l'approche de Grunwald Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo) ainsi que leurs propriétés.

La technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue. De nombreux travaux sont apparus, spécialement dans la théorie de viscoélasticité et de la mécanique du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une modélisation mathématique basée sur les modèles rhéologiques mène naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et à la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. La rhéologie est une extension des disciplines telles que l'élasticité et la mécanique des fluides newtoniens, aux matériaux dont le comportement mécanique ne peut être décrit par ces théories classiques. Elle permet également de déterminer les propriétés mécaniques macroscopiques à partir d'une étude basée sur la structure micro ou nanoscopique

du matériau, par exemple la taille moléculaire et l'architecture d'un polymère en solution ou encore la distribution de taille de particules dans une suspension solide. La rhéologie unit des champs d'application apparemment sans rapport, les matériaux plastiques et les fluides non newtoniens, en supposant que les deux types de matériaux sont incapables de supporter une contrainte de cisaillement en équilibre statique, ce qui fait du solide plastique un fluide.

2.1 Aperçu historique

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul différentiel classique tel que nous le connaissons, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où Newton et Leibniz(1695) ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral.

Nous présentons ici les étapes historiques principales de l'élaboration du calcul fractionnaire, qui a connu un essor grâce aux développements de ses applications dans les années 1970. Nous nous basons sur les ouvrages [7], [15], [18] et [23] pour couvrir la période de 1695 à 1970.

En 1695, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée d'ordre n d'une fonction f , quand il a annoncé ses résultats dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : « Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = 1/2$ ». Leibniz dans une lettre datée du 30 septembre 1695, a répondu par : « un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences »[3].

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question en 1730. Dans son article [5] où il a introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralisa la fonction factorielle, il conclut son article en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction puissance x^β , avec $\beta > 0$. Son cheminement est le suivant :

Pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \quad (2.1)$$

Grâce à la fonction Gamma cette formule s'écrit :

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (2.2)$$

Le membre de droite de (2.2) conservant un sens pour un réel $n > 0$ (tel que $n < m + 1$), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ de la fonction puissance x^β pour β un réel positif,

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \quad (2.3)$$

Mentionnons ensuite le travail de Fourier [6] qui, grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel positif β de f :

$$\frac{d^\beta f(x)}{dx^\beta} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(t) \cos[s(x-t)] dt ds \quad (2.4)$$

Abel [1] utilisa le calcul fractionnaire en 1823 pour résoudre le problème du tautochrone généralisé. La notion de problème tautochrone consiste à trouver la courbe tautochrone. Une courbe tautochrone est une courbe située dans un plan vertical, où le temps pris par une particule glissant le long de la courbe sous l'influence uniforme de la gravité jusqu'à son point le plus bas est indépendant de son point de départ.

Liouville (1832-1837) a été le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire [12], et il a obtenu la formule suivante,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy; \text{ où } 0 < \alpha < 1 \text{ et } \beta > 0 \quad (2.5)$$

À partir d'une généralisation de la formule de Taylor, en 1847 Riemann [4] propose une définition de l'intégrale fractionnaire par,

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy + \psi(x) \quad (2.6)$$

où $\psi(x)$ est une fonction complémentaire [15]. Cette fonction complémentaire est essentiellement une tentative pour fournir une mesure de l'écart à la loi d'exposants et elle est obtenue en faisant la différence entre deux déterminations quelconques de $\partial_x^\gamma f$ (avec : $\partial_x^\gamma f$ est le coefficient de $\frac{h^\gamma}{P(\gamma+1)}$ dans les développements en série infinie, où $P(\gamma+1)$ désigne la quantité que nous notons aujourd'hui par $\Gamma(\gamma+1)$).

Grünwald (1867) puis Letnikov (1868) [11] proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie entre $f(x+h)$ et $f(x)$ divisée par h . C'est en 1869 que l'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparut pour la première fois dans le travail de N. Ya. Sonin [26],

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (2.7)$$

C'est en 1937 que Riesz chercha à donner un sens à l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables. Il donna la définition suivante,

$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-\alpha}} dy$$

Cet opérateur vérifie notamment $I^\alpha \circ I^\beta = I^{\alpha+\beta}$.

Dans [19](1970), Oldham et Spanier traitent le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que lors d'un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée $1/2$ du paramètre physique (température, concentration d'espèces chimique,..).

2.2 Intégrale fractionnaire

I l'opérateur d'intégration est défini sur $C([a, b])$, l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, par

$$(If)(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Intégrons f une deuxième fois nous obtenons :

$$(I^2f)(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s)ds$$

Et en permutant l'ordre d'intégration,

$$(I^2f)(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

Le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I , ($n \in \mathbb{N}$), peut s'écrire alors,

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \quad (2.8)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et après la généralisation du factoriel par la fonction Gamma $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann remarqua que le second

membre de (2.8) pourrait avoir un sens si n n'est pas un entier, en utilisant la fonction Gamma, ce qui a permis de donner la définition suivante de l'intégrale fractionnaire.

Définition 8 : f une fonction de $C([a, b])$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (2.9)$$

est appelée intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

Proposition 9 : Si f est une fonction continue de $[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma > -1$;

alors

$$- I^\alpha(I^\beta f)(x) = I^\beta(I^\alpha f)(x),$$

$$- I^\alpha(I^\beta f)(x) = I^{\alpha+\beta} f(x),$$

$$- I^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}.$$

Propriétés :

1. si $\alpha = 0$, $I^\alpha f(x) = f(x)$.
2. $I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (-x+t)^{\alpha-1} f(t) dt$. pour tout $b \in \mathbb{R}$

Exemple 10 Déterminons l'intégrale fractionnaire de f où $f(x) = (x-a)^c$,

$x > a$, $c \in \mathbb{R}_+$.

Par (2.9), on a,

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^c dt$$

posons : $y = \frac{t-a}{x-a} \implies t - a = y(x - a)$, $0 \leq y \leq 1$ et $dt = (x - a)dy$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - a - y(x - a))^{\alpha-1} y^c (x - a)^c (x - a) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha+c} \int_0^1 y^c (1 - y)^{\alpha-1} dy \\ &= \frac{\Gamma(c + 1)}{\Gamma(\alpha + c + 1)} (x - a)^{\alpha+c} \end{aligned}$$

2.3 Dérivée fractionnaire

Dans cette section nous présentons les définitions des dérivées fractionnaires les plus utilisées (dérivée au sens de Riemann-Liouville, Caputo et au sens de Grünwald-Letnikov) sur un intervalle I fini de \mathbb{R} et nous donnons certaines de leurs propriétés dans l'espace $C(I)$, des fonctions continues sur I . Pour plus de détails se référer à [9], [10] et [28].

2.3.1 Dérivée au sens de Riemann-Liouville

La dérivée au sens de Riemann-Liouville est définie à partir de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, en se basant sur la relation entre la dérivation et l'intégration classique, cette relation est donnée par :

$$D^m = D^n (I^{m-n})$$

où $n, m \in \mathbb{N}$, D l'opérateur de dérivation classique et I l'opérateur d'intégration classique.

Définition 11 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $n - 1 \leq \alpha \leq n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f \in C([a, b])$ est définie par :

$$D_a^\alpha f(x) = D^n(I_a^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt \quad (2.10)$$

La dérivée au sens de Riemann-Liouville à gauche est donnée par (2.10), maintenant nous allons donner la dérivée à droite correspondante :

Définition 12 Pour $f \in C([a, b])$, la dérivée d'ordre α de Riemann-Liouville à droite, est donnée par :

$$D_b^\alpha f(x) = -D^n(I_b^{n-\alpha} f)(x) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt \quad (2.11)$$

Propriétés

1. Si $\alpha = 0$, on a : $D_a^0 f(x) = D^1(I_a^1 f)(x) = f(x)$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $D_a^\alpha f(x) = D^{\alpha+1}(I_a^1 f)(x) = D^\alpha f(x)$, la dérivée usuelle.
3. Soit $n = [\alpha] + 1$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, on a : $D_a^\alpha f(x) = D^m(I_a^{m-\alpha} f)(x)$, $m > \alpha$
4. $\alpha > 0$, $f \in L^1([a, b])$: $D_a^\alpha(I_a^\alpha f)(x) = f(x)$.pp dans $[a, b]$.
5. En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

Pour $\alpha, \beta > 0$ vérifiant $n - 1 \leq \alpha < n$, $m - 1 \leq \beta < m$, ($n, m \in \mathbb{N}$) alors :

$$\text{Si } \alpha > \beta > 0, \text{ alors } \forall f \in L^1([a, b]), \quad D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x)$$

Si $\beta > \alpha > 0$, et $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors $D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x)$

6. Composition des dérivées fractionnaires

Pour $\alpha, \beta > 0$ vérifiant $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$, ($n, m \in \mathbb{N}$),

$$D_a^\beta(D_a^\alpha f)(x) = D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{m-1} D_a^{\beta-k} f(a) \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}.$$

et

$$D_a^\alpha(D_a^\beta f)(x) = D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} D_a^{\alpha-k} f(a) \frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}$$

ce qui implique que deux opérateurs de dérivation fractionnaire ne commutent que si $D_a^{\alpha-k} f(a) = 0$ pour tout $k = 1; 2; \dots; n$, et $D_a^{\beta-k} f(a) = 0$, pour tout $k = 1; 2; \dots; m$

7. Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entier) ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0; 1; 2; \dots; n$

car :

$$\frac{d^n}{dx^n}(D_a^\alpha f) = D_a^{\alpha+n} f$$

mais

$$D_a^\alpha\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = D_a^{n+\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}$$

Exemple 13 Nous reprenons l'exemple précédent : $f(x) = (x - a)^c$, $x > a$,

$c \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha f(x) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = D^n \left(\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(n-\alpha+c+1)} (x-a)^{n-\alpha+c} \right) \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(n-\alpha+c+1)} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^{n-\alpha+c}] \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(n-\alpha+c+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)} (x-a)^{c-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)} (x-a)^{c-\alpha}
\end{aligned}$$

2.3.2 Dérivée au sens de Grünwald-Letnikov

Les formules de Grünwald-Letnikov pour représenter la dérivée fractionnaire font intervenir des limites de différences finies d'ordre fractionnaire. Cette approche est importante pour la discrétisation des opérateurs d'ordre non entier.

Définition 14 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'ordre α d'une fonction f continue sur $[a, b]$ est donnée par :

$${}^{GL}D_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh) \quad (2.12)$$

où $\Delta_h^\alpha f$ la différence finie d'ordre α et de pas h de la fonction f .

$$\Delta_h^\alpha f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh)$$

Théorème 15 si $f \in C^n([a, b])$, $n = [\alpha]$, $\alpha > 0$:

$${}^{GL}D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt$$

Proposition 16 *Il est possible de définir l'intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov en remplaçant α par $-\alpha$ dans (2.12), nous obtenons alors,*

$${}^{GL}I_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh), \quad \alpha > 0$$

2.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La définition (2.10) de la différentiation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires.

Les problèmes modélisant les phénomènes réels demandent des définitions de dérivées fractionnaire autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$, $f'(a)$, etc. Ces problèmes avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (voir par exemple solutions données dans [23] et [8]). Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure $x = a$, par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow a} D_x^{\alpha-1} f(x) = b_1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} D_x^{\alpha-2} f(x) = b_2,$$

...

$$\lim_{x \rightarrow a} D_x^{\alpha-n} f(x) = b_n,$$

avec b_k ($k = 1, \dots, n$) sont des constantes données.

Bien que ce genre de problème aux valeurs initiales puisse être résolu mathématiquement., leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de tels types de conditions initiales, ici, on observe le conflit entre la théorie mathématique bien établie et les besoins pratiques.

Une certaine solution pour ce conflit a été proposée dans les années soixante par M. Caputo dans son papier [2], où il a défini un opérateur de dérivation modifié ; une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 17 *La dérivée d'ordre α ($n - 1 < \alpha < n$) au sens de Caputo de la fonction $f \in C^{n+1}([a, b])$ est définie par :*

$${}^c D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad x > a \quad (2.13)$$

Exemple 18 *Nous reprenons l'exemple précédent : $f(x) = (x-a)^c$, $x > a$, $c \in \mathbb{R}_+$*

En appliquant (2.13), à cet exemple de fonction, nous obtenons,

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-1-\alpha} [(t - a)^c]^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{\Gamma(c + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(c - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{n-1-\alpha} (t - a)^{c-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(c + 1)}{\Gamma(c - \alpha + 1)} (x - a)^{c-\alpha}. \end{aligned}$$

2.3.4 La relation entre la dérivée au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville

1. ${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha [f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}$ pp dans $[a, b]$, avec $\alpha \neq 1, 2, \dots$
2. Si $f^{(k)}(a) = 0$ ou $\alpha = n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \implies {}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x)$.

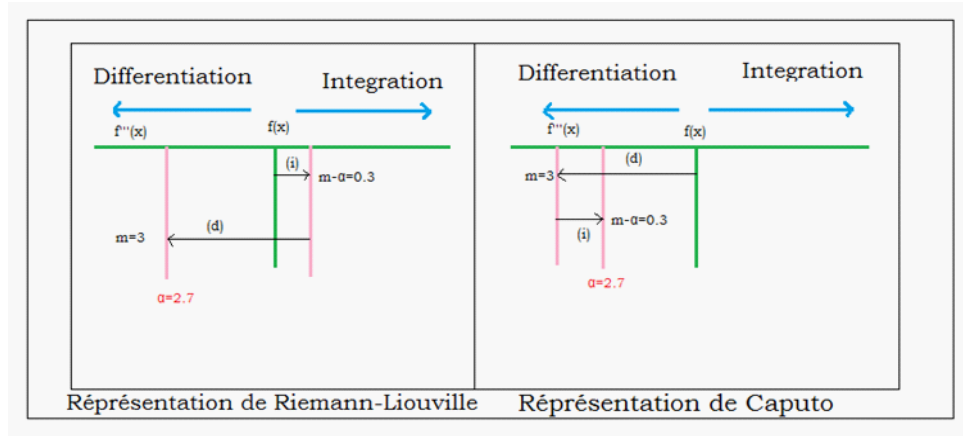
2.3.5 Différences entre les définitions

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme que celle des équations différentielles d'ordre entier.

Une autre différence entre la définition de Riemann-Liouville et celle de Caputo est :

1. La dérivée de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(x) = C$ n'est pas égale à zéro ; elle vaut $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$; mais au sens de Caputo elle est identiquement nulle.
2. Graphiquement, on peut dire que le chemin pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est l'inverse de celui de Riemann Liouville comme le montre la figure, c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ ($m \in \mathbb{N}$) par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction f et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre m ; mais pour trouver

la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m - 1 \leq \alpha \leq m$ ($m \in \mathbb{N}$) par l'approche de Caputo, on commence par la dérivée d'ordre m de la fonction f et puis on l'intègre à l'ordre fractionnaire $(m - \alpha)$.



3. L'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville mais pas un inverse à droite car :

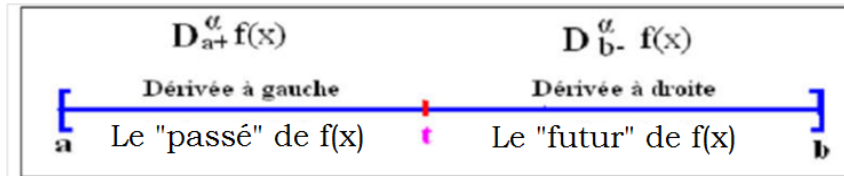
$${}^C D_a^\alpha (I_a^\alpha f)(x) = f(x) \text{ et } I_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

2.3.6 Dérivée à gauche et à droite

Jusqu'à présent, nous avons considéré les dérivées fractionnaires avec la borne inférieure a fixée et faisant varier la borne supérieure x . De plus, nous avons supposé que $a < x$. Cependant, il est aussi possible de considérer des dérivées fractionnaires en faisant varier la borne inférieure x tout en fixant la borne supérieure b .

Supposons que la fonction f est définie dans l'intervalle $[a; b]$. La dérivée

fractionnaire avec la borne inférieure à l'extrémité gauche de l'intervalle $[a; b]$, est appelée la dérivée fractionnaire à gauche. La dérivée fractionnaire avec la borne supérieure à l'extrémité droite de l'intervalle $[a; b]$ est appelée la dérivée fractionnaire à droite.



Les dérivées fractionnaires à droite et à gauche peuvent être considérées de points de vue physique et mathématique. Et parfois l'interprétation physique suivante de la dérivée à droite et à gauche est utile.

Supposons que x est le temps et que $f(x)$ décrit un certain processus dynamique qui évolue en fonction du temps. Si on prend $s < x$, où x est le moment présent, alors l'état $f(s)$ du processus f appartient au passé du processus ; si on prend $s > x$, $f(s)$ appartient au futur du processus de f . De ce point de vue, la dérivée à gauche est une opération exécutée dans les états passés du processus f et la dérivée à droite est une opération exécutée dans les états futurs du processus f .

Le principe de "causalité" physique signifie que l'état présent du processus "démontre" à l'instant $s = a$, i.e., les valeurs de $f(x)$ (dans le présent), dépendent de tous les états précédents (dans le passé) $f(s)$ ($a < s < x$). De cela on peut remarquer que contrairement à la dérivée usuelle, les dérivées fractionnaires ne sont jamais locales. C'est justement grâce à cette propriété de non localité que des phénomènes à mémoires longues peuvent être modélisés.

Les dérivées à droite de Caputo et de Grunwald-Letnikov peuvent être définies de la même manière que celle de Riemann-Liouville à droite.

2.3.7 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

Une des caractéristiques du calcul fractionnaire est qu'il généralise certaines propriétés des dérivées classiques, dans cette partie nous exposons quelques unes.

1. **Linéarité :** Soient f, g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires existent, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, alors : $D^\alpha(c_1f(x) + c_2g(x))$ existe et on a :

$$D^\alpha(c_1f(x) + c_2g(x)) = c_1D^\alpha f(x) + c_2D^\alpha g(x)$$

avec, D^α est un opérateur de dérivée fractionnaire. (D^α peut-être au sens de Riemann-Liouville ou d'autre sens).

2. **La formule de Leibniz :** pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x),$$

la généralisation de cette formule est,

$$D^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x)D^{\alpha-k}g(x) + R_n^\alpha(x), \text{ pour } \underline{n \geq \alpha + 1}$$

où,

$$R_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^x f^{(n+1)}(t)(\tau-t)^n dt$$

$$\text{avec : } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\alpha(x) = 0.$$

3. Intégration par parties : La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. Nous donnons ici une version simplifiée avec des conditions explicites citées dans [9].

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n - 1 < \alpha \leq n$. Soit $f \in C^n([a, b])$ et $g \in C_0^n([a, b])$. Alors,

$$\int_a^b f(x).D^\alpha g(x)dx = \int_a^b D^\alpha f(x).g(x)dx.$$

où, D^α est l'opérateur de dérivée fractionnaire.

Remarque 19 *On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions :*

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(f.g) &\neq f.\frac{d^\alpha g}{dx^\alpha} + g.\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \\ \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(f \circ g) &\neq \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(g).g' \end{aligned}$$

2.4 Les équations aux dérivées partielles fractionnaires

Les équations aux dérivées partielles fractionnaires notées (EDPF) sont une généralisation des équations aux dérivées partielles classique (EDP). Comme les dérivées fractionnaires, les EDPF jouent un grand rôle dans la modélisation des phénomènes réels dont leur présentation est impossible avec les EDP classique

2.4. LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES FRACTIONNAIRES 27

ou bien qu'elle est insuffisante comme par exemple les phénomènes à mémoires longues.

Dans cette section nous donnons des formules d'intégrales et de dérivées fractionnaires partielles et des exemples d'opérateurs fractionnaires.

2.4.1 Dérivée fractionnaire partielle

Nous donnons ici les formules les plus utilisées de la dérivation fractionnaires partielles.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; posons :

$$\Gamma(\alpha) := (\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)), \quad \frac{\partial}{\partial x} := \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

2.4.1.1 Intégrale fractionnaire partielle de Riemann-Liouville

$x \in [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

L'intégrale fractionnaire partielle de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha_k) > 0$) par rapport à x_k est donnée par :

$$I_{a_k}^{\alpha_k} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{a_k}^{x_k} (x_k - t_k)^{\alpha_k - 1} f(x_1, \dots, t_k, \dots, x_n) dt_k \quad . \quad (2.14)$$

2.4.1.2 Dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville

$x \in [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

La dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha_k \in$

2.4. LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES FRACTIONNAIRES 28

\mathbb{C} , ($\text{Re}(\alpha_k) > 0$) par rapport à x_k d'une fonction $f \in C([a_k, b_k])$ est donnée par :

$$D_{a_k, x_k}^{\alpha_k} f(x) \quad : \quad = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{L_k} (I_{a_k}^{L_k - \alpha_k} f)(x) \quad \text{avec } L_k = [\text{Re}(\alpha_k)] + 1 \quad (2.15)$$

$$D_{a_k, x_k}^{\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(L_k - \alpha_k)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{L_k} \int_{a_k}^{x_k} (x_k - t_k)^{L_k - \alpha_k - 1} f(x_1, \dots, t_k, \dots, x_n) dt_k \quad .$$

La dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha_k \in$

\mathbb{C} , ($\text{Re}(\alpha_k) > 0$) par rapport à x_k d'une fonction $f \in C([a_k, b_k])$ est donnée par :

$$D_{b_k, x_k}^{\alpha_k} f(x) = \frac{-1}{\Gamma(L_k - \alpha_k)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{L_k} \int_{x_k}^{b_k} (x_k - t_k)^{L_k - \alpha_k - 1} f(x_1, \dots, t_k, \dots, x_n) dt_k \quad . \quad (2.16)$$

2.4.1.3 Dérivée fractionnaire partielle de Grünwald-Letnikov

$$x \in [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

La dérivée fractionnaire partielle de Grünwald-Letnikov d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$, ($\text{Re}(\alpha_k) >$

0), par rapport à x d'une fonction $f \in C^n([a_k, b_k])$ est donnée par :

$${}^{GL}D_{a_k}^{\alpha_k} f(x) = \sum_{j=0}^{L_k} \frac{\partial^{L_k} f(x_1, \dots, a_k, \dots, x_n)}{\Gamma(j+1 - \alpha_k) \partial x_k^{L_k}} \cdot (x_k - a_k)^{j - \alpha_k} + \int_{a_k}^{x_k} \frac{(x_k - t_k)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} f(x_1, \dots, t_k, \dots, x_n) dt_k \quad (2.17)$$

avec $x_k > a_k$ et $L_k = [\text{Re}(\alpha_k)] + 1$

2.4.1.4 Dérivée fractionnaire partielle de Caputo

$$x \in [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$t \in [0, T]$.

2.4. LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES FRACTIONNAIRES 29

La dérivée fractionnaire partielle de Caputo à gauche d'ordre $\alpha > 0$, par rapport à t d'une fonction $f \in C^{n+1}([0, T])$ est donnée par :

$${}^c D_{0,t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau \quad (2.18)$$

2.4.2 Exemple d'opérateur différentiel fractionnaire et d'EDP fractionnaire

Les opérateurs aux dérivées partielles fractionnaires sont donnés en fonction des dérivées fractionnaires (au sens de Riemann-Liouville, Caputo,...), ici nous citons un exemple d'un opérateur donné en fonction de la dérivée de Riemann-Liouville.

2.4.2.1 Opérateur de Riesz

Soit $n - 1 < \alpha \leq n$, $x \in [a, b]$, l'opérateur de la dérivée fractionnaire partielle de Riesz est donné par,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t) = -C_\alpha (D_a^\alpha + D_b^\alpha) u(x, t) \quad (2.19)$$

avec : $C_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \cos(\frac{\pi\alpha}{2})$, $\alpha \neq 1$

D_a^α c'est l'opérateur de dérivée partielle fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, donnée par (2.10)

D_b^α c'est l'opérateur de dérivée partielle fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, donnée par (2.11).

2.4.2.2 Exemple d'E.D.P fractionnaire

Comme exemple d'une E.D.P fractionnaire nous avons choisi l'exemple d'équation d'advection-dispersion ([29]).

L'équation d'advection-dispersion fractionnaire est utilisée dans l'hydrologie souterraine pour modéliser le transport des traceurs passifs portés par l'écoulement de fluide dans un milieu poreux ([29]) et le transport de solutés dans un matériau de sous-sol ([13], [16]).

Soit l'équation d'advection-dispersion fractionnaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + d. \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.20)$$

où $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ est un opérateur de Riesz donné par (2.19), u est la concentration de soluté, $v \geq 0$ et $d \geq 0$ représentent le coefficient de dispersion, et la vitesse moyenne du fluide.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES CAS FRACTIONNAIRES ET APPLICATIONS

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques schémas de différences finies dans le cas fractionnaire et nous donnons deux exemples d'application de ces schémas.

3.1 Différences finies fractionnaires

Pour le cas fractionnaire, nous définissons les schémas L_n , pour $n=1,2$ et le schéma de Grünwald en se basant sur [27], [20] et [18].

Ces algorithmes sont conçus pour approcher : $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$, $\alpha \in (n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soient $(N+1)$ points uniformément espacés dans l'intervalle $[0, x]$, $h = \frac{x}{N}$, nous voulons calculer $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$, $\alpha \in (0, 2)$, $x \in \mathbb{R}$, notons :

$$f_j = f\left(x - j\frac{x}{N}\right), \quad j = 0, \dots, N$$

3.1.1 Les schémas de Grünwald

$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ est donnée aux sens de Riemann-Liouville.

Ces schémas sont basés sur la formule de dérivation de Grünwald-Letnikov.

Pour α fixé entre $(0, 1)$, nous avons l'algorithme standard de Grünwald :

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f\left(x - j\frac{x}{N}\right)$$

En considérant :

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &\approx \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right) = (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f\left(x - j\frac{x}{N}\right) \\ &= (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nous pouvons écrire (3.1) sous la forme :

$$\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j f_j \quad (3.2)$$

$$\text{avec} \quad : \quad c_j = h^{-\alpha} w_j, \quad w_j = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} \quad (3.3)$$

$$f_j = f\left(x - j \frac{x}{N}\right), \quad (3.4)$$

et, w_j vérifie la formule de récurrence suivante :

$$w_0 = 1, \quad w_j = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{j}\right) w_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Pour $\alpha \in (1, 2)$, le schéma de Grünwald s'écrit :

$$\begin{aligned} {}_{GL}D^\alpha f(x) &\approx (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N+1} w_j f\left(x - (j-1) \frac{x}{N}\right) \\ {}_{GL}D^\alpha f(x) &\approx \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right) = (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N+1} w_j f_{N-j+1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Lemme 20 $\left| {}_{GL}D^\alpha f(x) - \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right) \right| \leq O(h)$

Preuve 21 *La démonstration de ce lemme est donnée dans [14]*

3.1.2 Les schémas L_1 et L_2

Dans cette procédure nous nous basons sur la définition de Caputo de dérivation (i.e $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ est donné au sens de Caputo). Si la dérivée est donnée aux sens de Riemann-Liouville, il faudra passer par la relation entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville et il faut approcher la dérivée de Caputo par ces formules.

Pour $\alpha \in (0, 1)$ $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ au sens de Caputo s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{f'(x-t)}{t^\alpha} dt \\
&\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(x-jh) - f(x-(j+1)h)}{h} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{dt}{t^\alpha} \\
&= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] = \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L1}
\end{aligned}$$

Le schéma L_1 peut être donné par la forme suivante :

$$\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L1} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_{N-j} - f_{N-1-j}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] \quad (3.7)$$

Lemme 22 $\left| \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} - \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L1} \right| \leq O(h)$

Preuve 23 Cette démonstration est basée sur le lemme 7

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{f'(x-t)}{t^\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{f(x-jh) - f(x-(j+1)h)}{h} + O(h) \right] \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{dt}{t^\alpha} \\
&= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] + \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} O(h) \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{dt}{t^\alpha} \\
&= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] + \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} O(h) \sum_{j=0}^{N-1} [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] \\
&= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] + \frac{N^{1-\alpha} h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} O(h) \\
&= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] + O(h) = \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L1} + O(h)
\end{aligned}$$

Pour $\alpha \in (1, 2)$, le schéma L2 est alors donné par :

$$\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L2} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}] [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] \quad (3.8)$$

Le schéma L_2 peut être donné par la formule suivante :

$$\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L2} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_{N-j-1} - 2f_{N-j} + f_{N-j+1}] [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] \quad (3.9)$$

Remarque :

Les algorithmes considérés n'utilisent pas tous $(N+1)$ valeurs de f ; l'algorithme de Grünwald pour $0 < \alpha < 1$ emploie seulement N données, f_N n'est pas

utilisé, d'autre part l'algorithme de Grünwald pour $1 < \alpha < 2$ les algorithmes L_2 nécessite $(N + 2)$ points.

Lemme 24 $|\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} - (\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha})_{L2}| \leq O(h)$

Preuve 25 *La démonstration de ce lemme est basée sur le lemme 7*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right)_{L2} &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_{N-j-1} - 2f_{N-j} + f_{N-j+1}] [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{\partial^2 f(x-jh)}{\partial x^2} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] + O(h^2) \right] \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 f(x-jh)}{\partial x^2} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] + \frac{h^{2-\alpha} N^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} O(h^2) \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 f(x-jh)}{\partial x^2} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] + O(h^2)
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{f''(x-t)}{t^{\alpha-1}} dt \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] f''(x-z_j)
\end{aligned}$$

Avec $z_j \in [jh, (1+j)h]$

Donc nous allons avoir :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} - \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L2} \right| &= \left| \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] \left[f''(x - z_j) - \frac{\partial^2 f(x - jh)}{\partial x^2} \right] + O(h^2) \right| \\
&\leq \left| \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] O(h) + O(h^2) \right| \\
&= \left| \frac{h^{2-\alpha} k^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} O(h) + O(h^2) \right| = O(h) + O(h^2) \\
&= O(h)
\end{aligned}$$

3.2 Application

Dans cette section nous donnons deux exemples d'EDP fractionnaire et nous appliquons les schémas numériques L_1 , L_2 , le schéma de Grünwald et nous montrons la stabilité et la convergence de ces schémas en se basant sur la méthode présentée dans [25], et nous achevons par un exemple où la méthode diverge.

Dans la résolution numérique des EDPs fractionnaires par le méthode des différences finies nous cherchons à calculer une solution approchée en un nombre fini de points (x_i, t_k) du domaine espace-temps $[0, L] \times [0, T]$. Nous nous limitons au cas le plus simple du maillage régulier. Soient N, M deux entiers fixés, posons :

$$\begin{aligned}
x_i &= hi, \quad i = 0, \dots, M; \quad h = \frac{L}{M}, \quad \text{avec } x_0 = 0, x_M = L. \\
t_k &= \tau k, \quad k = 0, \dots, N; \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad \text{avec } t_0 = 0, t_N = T
\end{aligned}$$

Les points (x_i, t_k) sont alors les points d'intersection d'une grille régulière en espace-temps. L'approximation par différences finies consiste alors à chercher une approximation, notée u_i^k , de $u(x_i, t_k)$.

3.2.1 Equation d'advection-dispersion fractionnaire

Comme première application nous considérons l'équation d'advection-dispersion donnée par (2.20) soumise à des conditions aux limites. En particulier soit le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + d \cdot \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \quad 1 < \alpha \leq 2, 0 < x < L, t \in [0, T] \\ u(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in]0, L[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (Q)$$

Résolution numérique du problème (Q) :

Les valeurs approchées aux points du maillage au bord du domaine et en $t = 0$ sont données par la valeur exacte (donnée) de la fonction u :

$$\begin{aligned} u_0^k &= u_M^k = 0, \quad \forall k = 0, \dots, N \\ u_i^0 &= g(x_i) = g_i, \quad \forall i = 0, \dots, M \end{aligned}$$

Dans le problème (Q) la dérivée par rapport à l'espace est donnée par l'opérateur de Riesz défini par (2.19) ; nous avons alors :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x, t) = \frac{1}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} ({}_0D_x^\alpha u(x, t) + {}_x D_L^\alpha u(x, t))$$

Pour approcher l'opérateur de Riesz il faut approcher ${}_0D_x^\alpha u(x, t)$ et ${}_x D_L^\alpha u(x, t)$ avec $0 < \alpha \leq 2$, et pour cela nous utilisons le schéma de Grünwald (3.6).

$${}_0D_x^\alpha u(x_i, t_{k+1}) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) + O(h)$$

$${}_x D_L^\alpha u(x_i, t_{k+1}) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j u(x_{i+j+1}, t_{k+1}) + O(h)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x_i, t_{k+1}) \approx \frac{1}{2 \cdot \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} (h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) + h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j u(x_{i+j-1}, t_{k+1})) + O(h) \quad (3.10)$$

Dans le problème (Q) les dérivées d'ordre 1 sont approchées par le schéma

(1.2) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+1}) = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + O(\tau) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{k+1}) = \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{h} + O(h) \quad (3.12)$$

En approchant les dérivées dans le problème (Q) par les formules (3.10), (3.11)

et (3.12) nous obtenons pour $i = 1, \dots, M - 1$, $k = 0, \dots, N - 1$:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = -v \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{h} + \frac{1}{2 \cdot \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} (d \cdot h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} + d \cdot h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j u_{i+j-1}^{k+1}) \quad (3.13)$$

$$u_i^{k+1} - u_i^k = V \cdot (u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}) + B \left[\sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j u_{i+j-1}^{k+1} \right]$$

$$V = -\frac{v \cdot \tau}{h}; \quad B = -\frac{d \cdot \tau}{2 \cdot h^\alpha \cdot \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$$

Le schéma obtenu est alors,

$$(1 - V - 2Bw_1)u_i^{k+1} + (V - Bw_2 - Bw_0)u_{i-1}^{k+1} + (-Bw_2 - Bw_0)u_{i+1}^{k+1} - B \left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j u_{i+j-1}^{k+1} \right] = u_i^k \quad (3.14)$$

$$i = 1, \dots, M - 1, k = 0, \dots, N - 1$$

Stabilité et convergence du schéma numérique :

Proposition 26 *Les coefficients $w_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ vérifient les propriétés suivantes :*

$$w_1 = -\beta, w_j \geq 0, j = 0, 2, 3, \dots;$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} w_j = 0.$$

$$\forall n \text{ un entier naturel, } \sum_{j=0}^n w_j < 0.$$

Preuve 27 *La démonstration de cette proposition est donnée dans [14]*

Pour monter la stabilité du schéma posons pour $k = 0, 1, 2, \dots, N$ et $i = 0, 1, 2, \dots, M$;

$$v_i^k \text{ la solution approximée de (3.14),} \quad (\text{sol approx})$$

et e_i^k l'erreur

$$e_i^k := v_i^k - u_i^k \quad (\text{erreur})$$

vérifiant pour $i = 1, \dots, M - 1, k = 0, \dots, N - 1$:

$$(1 - V - 2Bw_1)e_i^{k+1} + (V - Bw_2 - Bw_0)e_{i-1}^{k+1} + (-Bw_2 - Bw_0)e_{i+1}^{k+1} - B \left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j e_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j e_{i+j-1}^{k+1} \right] = e_i^k$$

Posons : $e^k = [e_1^k, \dots, e_{M-1}^k]^T$.

et $|e_l^k| = \|e^k\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |e_i^k|$, pour $k = 0, \dots, N-1$.

Se basant sur la technique donnée en [25]; pour montrer la stabilité de schéma donné par (3.14) il suffit de montrer que $|e_l^k| \leq |e_l^0|$ pour $k = 1, \dots, N-1$,

Pour commencer nous allons montrer que :

$$(1 - V - 2Bw_1) + (V - Bw_1 - Bw_0) + (-Bw_2 - Bw_0) - B\left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j\right] \geq 1$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} & (1 - V - 2Bw_1) + (V - Bw_2 - Bw_0) + (-Bw_2 - Bw_0) - B\left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j\right] \\ &= 1 - B\left[\sum_{j=0}^{i+1} w_j + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j\right] \end{aligned}$$

Or d'après la proposition 26, $\sum_{j=0}^n w_j \leq 0$ $n = i+1$ ou $n = N-i+1$. En plus

$B \geq 0$. Ce qui implique que : $1 - B\left[\sum_{j=0}^{i+1} w_j + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j\right] > 1$.

et par suite,

$$\begin{aligned} |e_l^{k+1}| &\leq \left((1 - V - 2Bw_1) + (V - Bw_2 - Bw_0) + (-Bw_2 - Bw_0) - B\left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j\right] \right) |e_l^{k+1}| \\ &= (1 - V - 2Bw_1) |e_l^{k+1}| + (V - Bw_2 - Bw_0) |e_l^{k+1}| + (-Bw_2 - Bw_0) |e_l^{k+1}| \\ &\quad - B\sum_{j=3}^{i+1} w_j |e_l^{k+1}| - B\sum_{j=3}^{N-i+1} w_j |e_l^{k+1}| \\ &\leq (1 - V - 2Bw_1) |e_l^{k+1}| + (V - Bw_2 - Bw_0) |e_l^{k+1}| + (-Bw_2 - Bw_0) |e_l^{k+1}| \\ &\quad - B\sum_{j=3}^{i+1} w_j |e_{l-j+1}^{k+1}| - B\sum_{j=3}^{N-i+1} w_j |e_{l+j-1}^{k+1}| \\ &\leq |(1 - V - 2Bw_1)e_l^{k+1} + (V - Bw_2 - Bw_0)e_l^{k+1} + (-Bw_2 - Bw_0)e_l^{k+1} \\ &\quad - B\sum_{j=3}^{i+1} w_j e_{l-j+1}^{k+1} - B\sum_{j=3}^{N-i+1} w_j e_{l+j-1}^{k+1}| \\ &= |e_l^k| \leq |e_l^{k-1}| \leq \dots \leq |e_l^1| \leq |e_l^0| \Rightarrow \|e^{k+1}\| \leq \|e^0\|, \quad k = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Ce qui implique que le schéma numérique défini par (3.14) est stable.

Pour montrer la convergence du schéma donné par (3.14) , posons pour $i = 1, 2, \dots, M - 1$, et $k = 1, \dots, N - 1$

$$\varepsilon_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k$$

avec $\varepsilon^0 = 0$.

Ce qui nous donne $u_i^k = u(x_i, t_k) - \varepsilon_i^k$, en remplaçant dans (3.13) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{k+1}) - \varepsilon_i^{k+1} - u(x_i, t_k) + \varepsilon_i^k}{\tau} \\ = & -v \frac{u(x_i, t_{k+1}) - \varepsilon_i^{k+1} - u(x_{i-1}, t_{k+1}) + \varepsilon_{i-1}^{k+1}}{h} + d.h^{-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{i+1} w_j (u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) - \varepsilon_{i-j+1}^{k+1}) \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j (u(x_{i+j-1}, t_{k+1}) - \varepsilon_{i+j-1}^{k+1}) \right) \end{aligned}$$

Avec $i = 1, 2, \dots, M - 1$, $k = 1, \dots, N - 1$. d'après (3.10), (3.11)e, (3.12) et les

lemmes 7 et 20 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau) - \frac{\varepsilon_i^{k+1} + \varepsilon_i^k}{\tau} &= -v \frac{\partial u}{\partial x} + O(h) - v \frac{\varepsilon_i^{k+1} - \varepsilon_{i-1}^{k+1}}{h} + d. \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + O(h) \\ &\quad - d.h^{-\alpha} \left[\sum_{j=0}^{i+1} w_j \varepsilon_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j \varepsilon_{i+j-1}^{k+1} \right] \\ i &= 1, 2, \dots, M - 1, k = 1, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Ce qui entraine :

$$\begin{aligned} & (1 - V - 2Bw_1)\varepsilon_i^{k+1} + (V - Bw_2 - Bw_0)\varepsilon_{i-1}^{k+1} + (-Bw_2 - Bw_0)\varepsilon_{i+1}^{k+1} \\ & - B \left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j \varepsilon_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j \varepsilon_{i+j-1}^{k+1} \right] \\ = & \varepsilon_i^k + O(\tau + h) \end{aligned}$$

Posons $|\varepsilon_l^k| = \|\varepsilon^k\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |\varepsilon_i^k|$.

En utilisant la proposition 26 et les résultats de stabilité et que $\varepsilon^0 = 0$, nous obtenons :

$$\|\varepsilon^k\| \leq \|\varepsilon^0\| + O(h + \tau) \leq O(h + \tau), \quad k = 1, \dots, N - 1$$

Ce qui implique que le schéma numérique défini par (3.14) est convergent.

Algorithme 28 1. Lire les variables : L, T, N, M, f, α .

2. Calcul de h et τ , x et t

3. Calcul de u^0 et B, A .

4. Calcul des w_i

5. Calcul des u^k .

6. Tracé de la solution u en fonction de x et t .

Application numérique

Nous allons considérer le problème (Q) avec $L = \pi; T = 1; g = x^2(\pi - x)$; soit

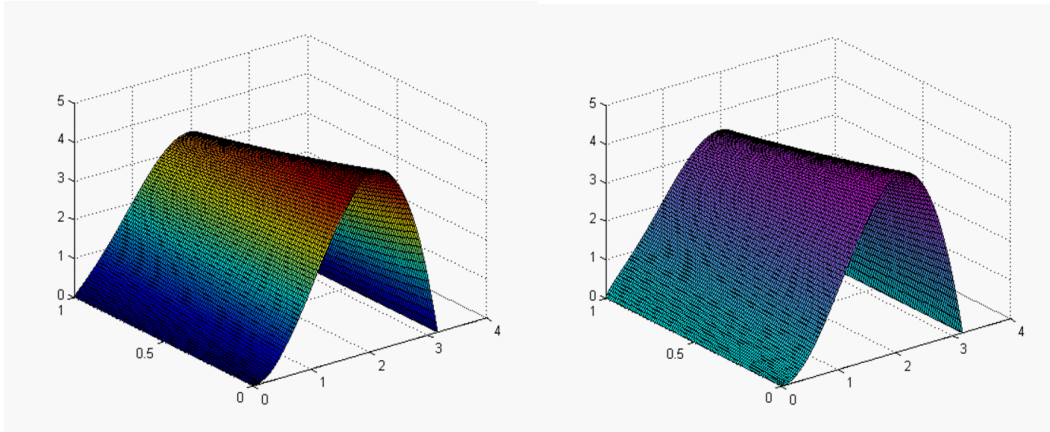
donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + d. \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \quad 1 < \alpha \leq 2, 0 < x < \pi, t \in [0, 1] \\ u(x, 0) = x^2(\pi - x) \quad \forall x \in]0, \pi[\\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (\text{Qnum})$$

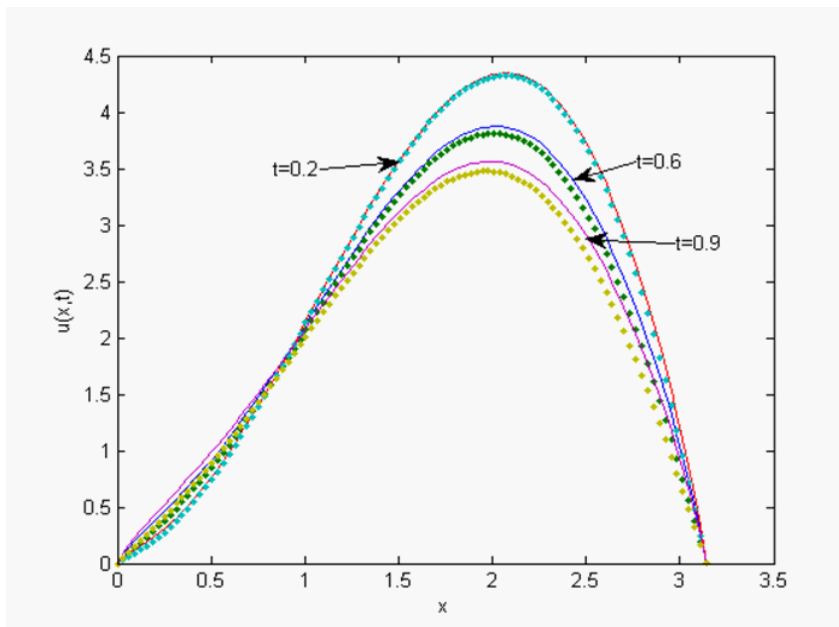
La solution exacte de ce problème (Qnum) est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} - 4}{n^3} \right]. \sin(nx). \exp(-n^\alpha . d.t)$$

Dans le cas $\alpha = 1.5$, Le graphe à gauche est le graphe donné par la solution exacte et celui donnée par le schéma numérique est donné à droite :



Maintenant en fixe un $t = 0.2, 0.6, 0.9$ pour $\alpha = 1.5, d = 0.25, v = 0$, ce qui donne le graphe suivant :



La solution exacte est donnée par des "pointillés" et la solution approchée par une ligne continue.

3.2.2 Equation de diffusion fractionnaire

Un processus de transport fondamental dans la mécanique des fluides environnementale est la diffusion. La diffusion est un phénomène microscopique qui désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces chimiques en son sein, et elle est caractérisée par l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Une équation de diffusion fractionnaire en temps et espace est la généralisation de l'équation de diffusion classique en remplaçant la dérivée par rapport au temps par une dérivée au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ et la dérivée par rapport à l'espace par une dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \beta \leq 2$ [32] ce qui donne l'équation suivante :

$$D_t^\alpha T = a \cdot \frac{\partial^\beta T}{\partial x^\beta} + f(x, t). \quad 1 < \beta \leq 2, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Nous considérons le modèle de diffusion fractionnaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha u = a \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \quad 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2; \quad 0 < x < L, t \in [0, T] \\ u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in]0, L[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

Le théorème suivant affirme l'existence et l'unicité de solution pour le problème (P)

Théorème 29 *Si $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ et $a > 0$, alors le problème (P) admet une solution unique.*

Preuve 30 *La démonstration de ce théorème est donnée dans [23]*

Résolution numérique de problème (P) :

Les valeurs approchées aux points de maillage au bord du domaine et en $t = 0$ sont données par la valeur exacte (donnée) de la fonction u :

$$\begin{aligned} u_0^k &= u_M^k = 0, \quad \forall k = 0, \dots, N \\ u_i^0 &= f(x_i) = f_i, \quad \forall i = 0, \dots, M \end{aligned}$$

Dans le problème (P) la dérivée par rapport au temps est donnée au sens de Caputo avec $0 < \alpha \leq 1$. Nous utilisons le schéma L_1 (3.7) ce qui donne :

$$D_t^\alpha u(x_i, t_{k+1}) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [u(x_i, t_{k-j+1}) - u(x_i, t_{k-j})] b_j + O(\tau) \quad (3.15)$$

où $b_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$, $b_0 = 0$ et $k = 1, \dots, N-1$.

Et la dérivée par rapport au temps est donnée au sens de Riemann-Liouville avec $1 < \beta \leq 2$. Nous lui appliquons le schéma de Grünwald (3.6) ce qui donne :

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}(x_i, t_{k+1}) = h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) + O(h) \quad (3.16)$$

où $w_j = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}$, $w_0 = 0$ et $i = 1, \dots, M-1$

En remplaçant les dérivées dans le problème (P) par les formules (3.15) et (3.16) nous obtenons :

$$\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [u_i^{k-j+1} - u_i^{k-j}] b_j = a \cdot h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1}$$

avec $i = 1, \dots, M - 1, k = 0, \dots, N - 1, a > 0$

$$\sum_{j=0}^k [u_i^{k-j+1} - u_i^{k-j}] b_j = \mu \sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} \quad (3.17)$$

$$\text{avec} \quad : \quad \mu = a \cdot \frac{\tau^\alpha}{h^\beta} \Gamma(2 - \alpha).$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$u_i^1 = u_i^0 + \mu \sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^1$$

$$u_i^{k+1} - \mu \cdot w_1 u_i^{k+1} - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} = u_i^k - \sum_{j=1}^k b_j u_i^{k-j+1} + \sum_{j=1}^k u_i^{k-j} b_j$$

avec $i = 1, \dots, M - 1, k = 1, \dots, N - 1$. En utilisant le changement d'indice

suivant : $j = j - 1$ dans le terme à droite, nous obtenons le schéma suivant :

$$\begin{aligned} (1 - \mu \cdot w_1) u_i^1 - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^1 &= u_i^0 \\ (1 - \mu \cdot w_1) u_i^{k+1} - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_{i-j+1} u_j^{k+1} &= (1 - b_1) u_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}] u_i^{k-j} \\ &+ b_k u_i^0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Au^1 = u^0 \\ Au^{k+1} = (1 - b_1) u^k + \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}] u^{k-j} + b_k u^0 \\ u^0 = f^0 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Avec : $u^k = [u_1^k, \dots, u_{M-1}^k]^T$, pour $k = 1, 2, \dots$; $f^k = [f(x_1), \dots, f(x_{M-1})]^T$; et

A une matrice carré de dimension $(M - 1) \times (M - 1)$ telle que :

$$A_{i,j} \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } j > i + 1 \\ 1 - \mu \cdot g_1 = 1 + \mu\beta & \text{si } j = i \\ -\mu \cdot g_{i-j+1} & \text{sin on} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Stabilité et convergence du schéma numérique :

Proposition 31 *Les coefficients $b_k(k = 0, 1, 2, \dots)$ et $w_i(i = 0, 1, 2, \dots)$ vérifient les propriétés suivantes :*

$$- b_0 = 1, b_j > 0, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$- b_j > b_{j+1}, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$- w_1 = -\beta, w_j \geq 0, j = 0, 2, 3, \dots; \sum_{j=0}^{\infty} w_j = 0.$$

$$- \forall n \text{ un entier naturel, } \sum_{j=0}^n w_j < 0.$$

Pour monter la stabilité du schéma nous utiliserons les notations (*solapprox*)

et (*erreur*); l'erreur vérifiant,

$$\begin{aligned} (1 - \mu.w_1)e_i^1 - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j e_{i-j+1}^1 &= e_i^0 \\ (1 - \mu.w_1)e_i^{k+1} - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_{i-j+1} e_j^{k+1} &= \\ &= (1 - b_1)e_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}] e_i^{k-j} + b_k e_i^0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$i = 1, \dots, M - 1, k = 1, \dots, N - 1$, on pose : $e^k = [e_1^k, \dots, e_{M-1}^k]^T$.

Soit $|e_i^k| = \|e^k\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |e_i^k|$.

$$(1 - \mu.w_1) - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{l+1} w_j \geq 1, \text{ car on a : } \mu.(w_1 + \sum_{j=0, j \neq 1}^{l+1} w_j) \leq 0$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\|e^1\| &= |e_l^1| \leq ((1 - \mu.w_1) - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{l+1} w_j) |e_l^1| \\
&= (1 - \mu.w_1) |e_l^1| - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{l+1} w_j |e_l^1| \\
&\leq (1 - \mu.w_1) |e_l^1| - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{l+1} w_j |e_{l-j+1}^1| \\
&\leq |(1 - \mu.w_1)e_l^1 - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j e_{l-j+1}^1| \\
&= |e_l^0| = \|e^0\|
\end{aligned}$$

Supposons que $\|e^j\| \leq \|e^0\|, \forall j = 1, \dots, k$, et soit $\|e^{k+1}\| = |e_l^{k+1}| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |e_i^{k+1}|$.

et en utilisant la proposition 31 nous avons :

$$\begin{aligned}
\|e^{k+1}\| &= |e_l^{k+1}| \leq (1 - \mu.w_1) |e_l^{k+1}| - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j |e_l^{k+1}| \\
&\leq |(1 - \mu.w_1)e_l^{k+1} - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j e_{l-j+1}^{k+1}| \\
&\leq |(1 - b_1)e_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}] e_i^{k-j} + b_k e_i^0| \\
&\leq (1 - b_1) \|e^k\| + \sum_{j=1}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) \|e^{k-j}\| + b_k \|e^0\| \\
&\leq (1 - b_1) \|e^0\| + \sum_{j=1}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) \|e^0\| + b_k \|e^0\| \\
&= \|e^0\|
\end{aligned}$$

Ce qui implique que le schéma numérique défini par (3.18) est stable.

Pour montrer la convergence du schéma, posons :

$$\epsilon_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k, i = 1, 2, \dots, M - 1, k = 1, \dots, N - 1;$$

avec $\epsilon^0 = 0$.

Ce qui nous donne $u_i^k = u(x_i, t_k) - \epsilon_i^k$, remplaçant dans (3.17) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [u(x_i, t_{k-j+1}) - \epsilon_i^{k-j+1} - u(x_i, t_{k-j}) + \epsilon_i^{k-j}] b_j \\
= & h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j (u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) - \epsilon_{i-j+1}^{k+1}) \\
& \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [u(x_i, t_{k-j+1}) - u(x_i, t_{k-j})] b_j - \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [\epsilon_i^{k-j+1} - \epsilon_i^{k-j}] b_j \\
= & h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) - h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j \epsilon_{i-j+1}^{k+1}
\end{aligned}$$

avec $i = 1, 2, \dots, M-1, k = 1, \dots, N-1$

Or d'après (3.15) , (3.16) et les lemmes (20) et (31) on a :

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha u(x_i, t_{k+1}) + O(h) - \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [\epsilon_i^{k-j+1} - \epsilon_i^{k-j}] b_j &= \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}(x_i, t_{k+1}) + O(\tau) - h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j \epsilon_{i-j+1}^{k+1} \\
i &= 1, 2, \dots, M-1, k = 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [\epsilon_i^{k-j+1} - \epsilon_i^{k-j}] b_j &= h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j \epsilon_{i-j+1}^{k+1} + O(h + \tau) \\
i &= 1, 2, \dots, M-1, k = 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire,

$$\begin{aligned}
(1 - \mu.w_1) \epsilon_i^1 - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j \epsilon_{i-j+1}^1 &= O(h + \tau) \\
(1 - \mu.w_1) \epsilon_i^{k+1} - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_{i-j+1} \epsilon_j^{k+1} &= (1 - b_1) \epsilon_i^k \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}] \epsilon_i^{k-j} + O(h + \tau)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Posant $|\epsilon_l^k| = \|\epsilon^k\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |\epsilon_i^k|$. En utilisant la récurrence et d'après la proposition 31 et les résultats de stabilité, nous obtenons :

$$|\epsilon_l^1| \leq O(h + \tau)$$

Supposant que : $\|\epsilon^j\| \leq O(h + \tau)$, $j = 1, \dots, k$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} |\epsilon_l^{k+1}| &\leq |(1 - \mu.w_1)\epsilon_l^{k+1} - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j \epsilon_{l-j+1}^{k+1}| \\ &= |(1 - b_1)\epsilon_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}]\epsilon_i^{k-j} + O(h + \tau)| \\ &\leq (1 - b_1)|\epsilon_i^k| + \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}]\epsilon_i^{k-j} + O(h + \tau) \\ &\leq (1 - b_1)\|\epsilon^k\| + \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}]\|\epsilon^{k-j}\| + O(h + \tau) \\ &\leq (1 - b_1)O(h + \tau) + \sum_{j=1}^{k-1} [b_j - b_{j+1}]O(h + \tau) + O(h + \tau) \\ &\leq (2 - b_k)O(h + \tau) \end{aligned}$$

Donc il existe une constante $C = 2 - b_k < 2$ tel que :

$$\|\epsilon^{k+1}\| \leq C.O(h + \tau)$$

Ce qui implique que le schéma numérique défini par (3.18) est convergent.

Algorithme 32 1. Lire les variables : $L, T, N, M, f, \alpha, \beta$.

2. Calcul de h et τ , x et t

3. Calcul de u^0 et μ .

4. Calcul des b_k et les w_i

5. Lire la matrice A .
6. Calcul de u^1 et u^2 et les u^k .
7. Tracé de la solution u en fonction de x et t .

Application numérique

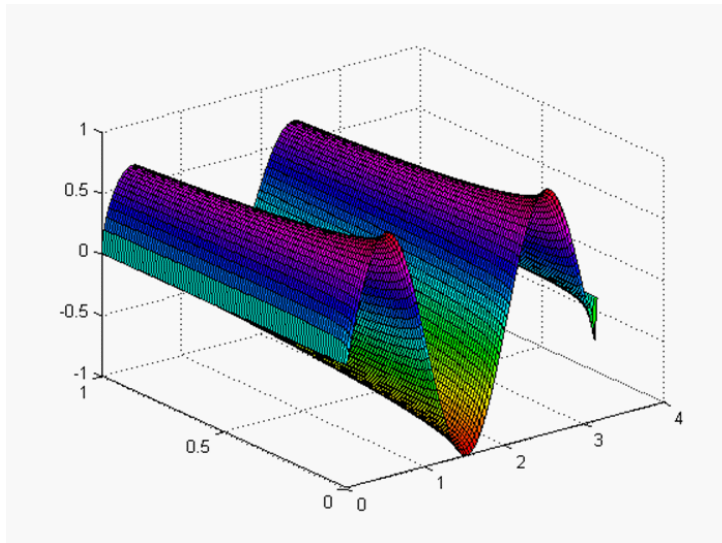
Nous considérons le problème (P) avec $g=\sin(\pi.x)$, $L=\pi, T = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha u = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^\beta u}{x^\beta} \quad 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2; 0 < x < \pi, t \in [0, T] \\ u(x, 0) = \sin(\pi.x) \quad \forall x \in]0, \pi[\\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (Pnum)$$

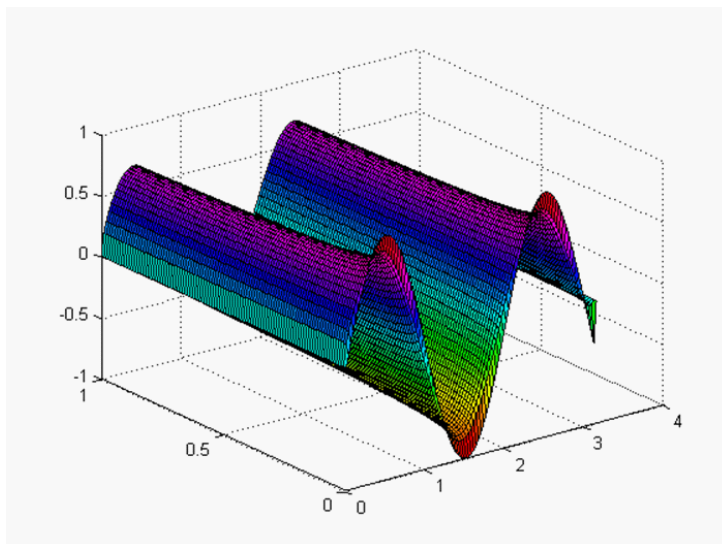
$a = \pi^{-2} > 0, 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2$ ce qui implique que $(Pnum)$ admet une solution unique.

La solution exacte de ce problème avec $0 < \alpha < 1, 1 < \beta < 2$ est donnée en fonction de la fonction de Green fractionnaire et la fonction de Mittag-Leffler et elle est compliquée à programmer les formules des solutions sont données dans [20].

Nous allons donner la solution approcher pour $\alpha = 0.5, \beta = 1.5, 1.8$:



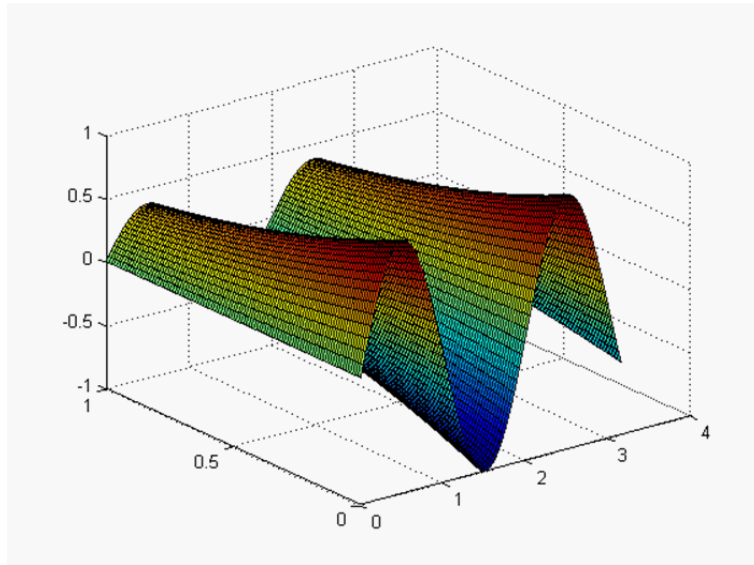
Le graphe de la solution $u(x,t)$ avec $\alpha = 0.5, \beta = 1.5$



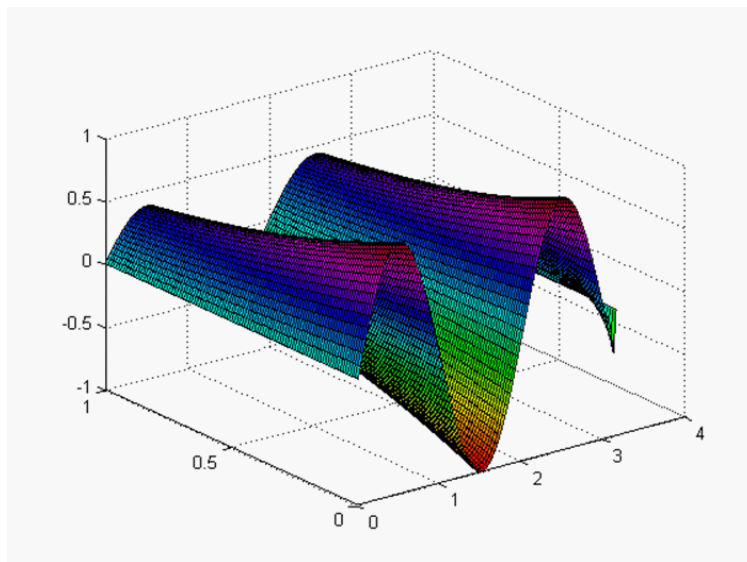
Le graphe de la solution $u(x,t)$ avec $\alpha = 0.5, \beta = 1.8$

Remarque 33 Les schémas de différences finies dans le cas fractionnaire sont applicable pour l'équation de diffusion fractionnaire avec $\alpha = 1, \beta = 2$, et $u(x, 0) = \sin(\pi.x)$, la formule de la solution classique est donnée par : $u(x, t) = \exp(-t) \cdot \sin(\pi.x)$.

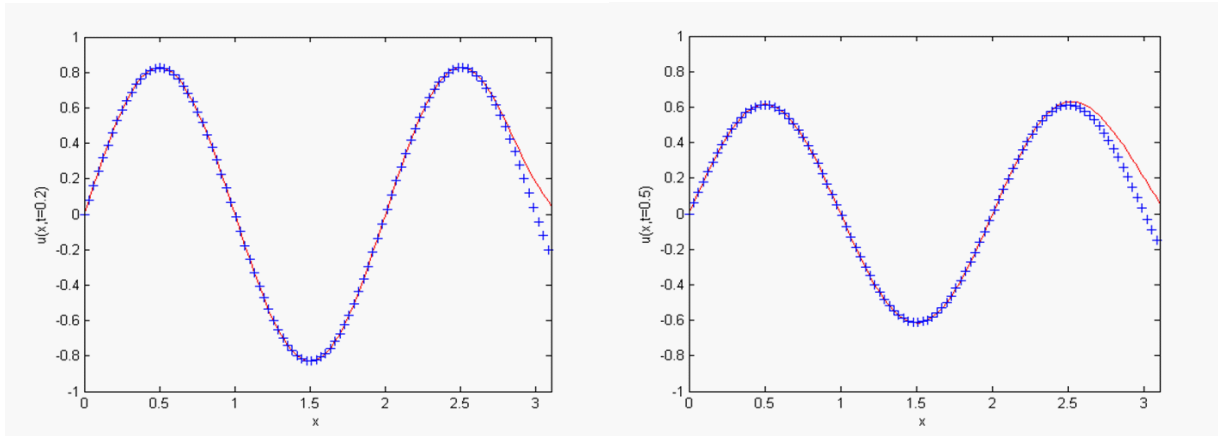
Le graphe donné par la solution exacte est :



Le graphe donné pour le cas classique avec le schéma numérique est :



Maintenant en fixe un t pour $\alpha = 1$, $\beta = 2$ ce qui donne les graphes suivants :



La solution exacte est donnée par "+" et la solution approchée par une ligne continue.

Le premier graphe représente la solution u (exacte en bleu et approchée en rouge) en $t = 0.2$ avec $N = M = 100$; le deuxième représente la solution u en $t = 0.5$ avec $N = M = 100$.

Remarque 34 *Les schémas basés sur la méthode des différences finies donnés précédemment ne sont pas toujours convergents, par exemple dans le cas du problème d'onde-diffusion fractionnaire.*

Équation d'ondes-diffusion fractionnaire est la généralisation de l'équation de diffusion et l'équation d'onde avec une dérivée au sens de Caputo par rapport au temps [21]. Elle a une grande importance car elle est utilisée dans plusieurs domaines comme la biologie, la finance, la physique. . . .

L'équation d'onde-diffusion fractionnaire dans 1D ($x \in \mathbb{R}$) est donnée par

$$D_t^\alpha T = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t). \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (3.23)$$

Si $\alpha = 1$, (3.23), est une équation de diffusion classique, et si $\alpha = 2$ c'est une équation d'onde classique.

Nous allons prendre le modèle de conduction de la chaleur par unité de longueur L finie dans un temps finie $t \in [0, T]$ avec une température initiale uniforme et sans source de chaleur ($f \equiv 0$), donc on aura le problème (R) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha T = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 1 < \alpha < 2, 0 < x < L, t \in [0, T] \\ T(x, 0) = g(x) = \sin(2x) \quad \forall x \in]0, L[\\ \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, L[\\ T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (\text{R})$$

Le théorème suivant affirme l'existence et l'unicité de solution pour le problème (R).

Théorème 35 : Si $1 < \alpha < 2$, et $a > 0$, alors le problème (R) admet une solution unique.

Preuve 36 La preuve de ce théorème est donnée dans [23] (p 75)

Résolution numérique de problème (R) :

Les valeurs approchées aux points de maillage au bord du domaine et en $t = 0$ sont données par la valeur exacte (données) de la fonction T :

$$\begin{aligned} T_0^k &= T_M^k = 0, \quad \forall k = 0, \dots, N \\ T_i^0 &= g(x_i) = g_i, \quad \forall i = 0, \dots, M \end{aligned}$$

Dans le problème (R) la dérivée par rapport à l'espace est approchée par le schéma de différences finies d'ordre deux donné par (1.4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_k) &= \frac{1}{h^2}(T(x_{i+1}, t_k) - 2T(x_i, t_k) + T(x_{i-1}, t_k)) \\ &= \frac{1}{h^2}(T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k), \quad i = 1, \dots, M - 1 \end{aligned} \quad (\text{sc1})$$

Maintenant, puisque la dérivée fractionnaire par rapport au temps est donnée par la définition de Caputo et nous avons $1 < \alpha \leq 2$, donc nous allons l'approcher par le schéma L_2 donné par (3.8).

$$\begin{aligned} D_t^\alpha T(x_i, t_{k+1}) &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \sum_{j=0}^k (T_i^{j-1} - 2T_i^j + T_i^{j+1}) b_j, \quad (\text{sdf2}) \\ \text{avec} \quad : \quad b_j &= (j + 1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}, \quad b_0 = 0, \quad k = 1, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées dans le problème (R) par les formules (sc1) et (sdf2) nous obtenons :

$$\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^k (T_i^{j-1} - 2T_i^j + T_i^{j+1}) b_j = \frac{a}{h^2} (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}) \quad (3.24)$$

$$a > 0, i = 1, \dots, M-1, k = 1, \dots, N-1$$

Posons : $\beta = a\tau^\alpha h^{-2} \Gamma(3-\alpha)$, l'équation (3.24) s'écrit :

$$b_k T_i^{k+1} - \beta (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}) = 2b_k T_i^k - b_k T_i^{k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} (T_i^{j-1} - 2T_i^j + T_i^{j+1}) b_j$$

$$i = 1, \dots, M-1, k = 1, \dots, N-1$$

$$-\beta T_{i-1}^{k+1} + (2\beta + b_k) T_i^{k+1} - \beta T_{i+1}^{k+1} = \sum_{j=1}^k 2b_j T_i^j - \sum_{j=1}^k T_i^{j-1} b_j - \sum_{j=1}^{k-1} b_j T_i^{j+1} + 2T_i^0 - T_i^{-1} - T_i^1$$

$$i = 1, \dots, M-1; k = 1, \dots, N-1$$

$$T_i^0 = g_i \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

$$\frac{T_i^{k-1} - T_i^k}{\tau} = 0 \quad (k=0) \quad \forall i = 0, \dots, N \implies T_i^{-1} = T_i^0 \quad \forall i = 0, \dots, N;$$

Nous calculons le T_i^1 en prenant le cas $k=0$ dans l'équation (3.24) :

$$-\beta T_{i+1}^1 + (2\beta + b_0) T_i^1 - \beta T_{i-1}^1 = 2b_0 T_i^0 - b_0 T^{-1}$$

Application numérique

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 1 < \alpha < 2, 0 < x < L, t \in [0, T] \\ T(x, 0) = \sin(2.x) \quad \forall x \in]0, L[\\ \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, L[\\ T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (\text{Rnum})$$

$1 < \alpha < 2$, $a = 1$, donc d'après le théorème 35 la solution existe.

La solution de ce type de problème est donnée par :

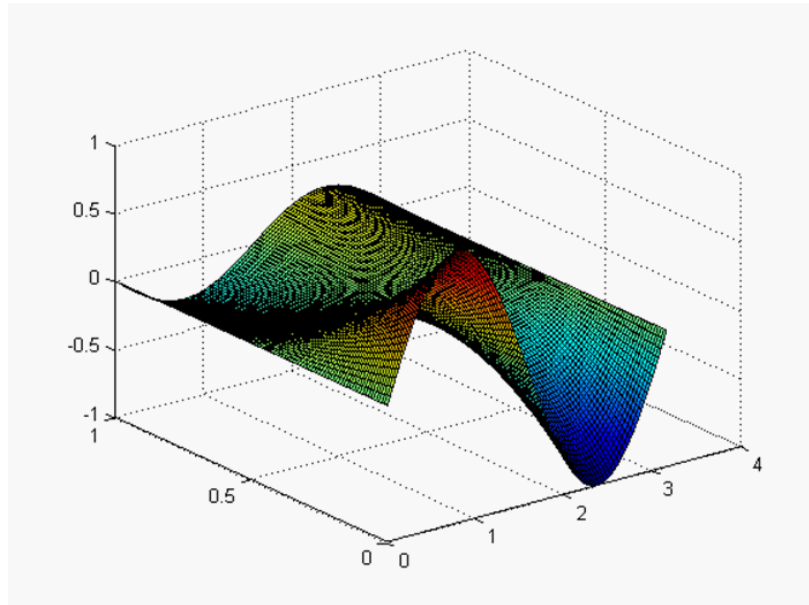
$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k E_{\alpha} \left(-\frac{(k\pi)^2}{L} t^{\alpha} \right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

$$\text{avec} \quad : \quad C_k = \int_0^L \sin(2x) \cdot \sin\left(\frac{K\pi}{L} x\right) dx, \text{ et } E_{\alpha} \text{ est la fonction de Mittag-Leffler}$$

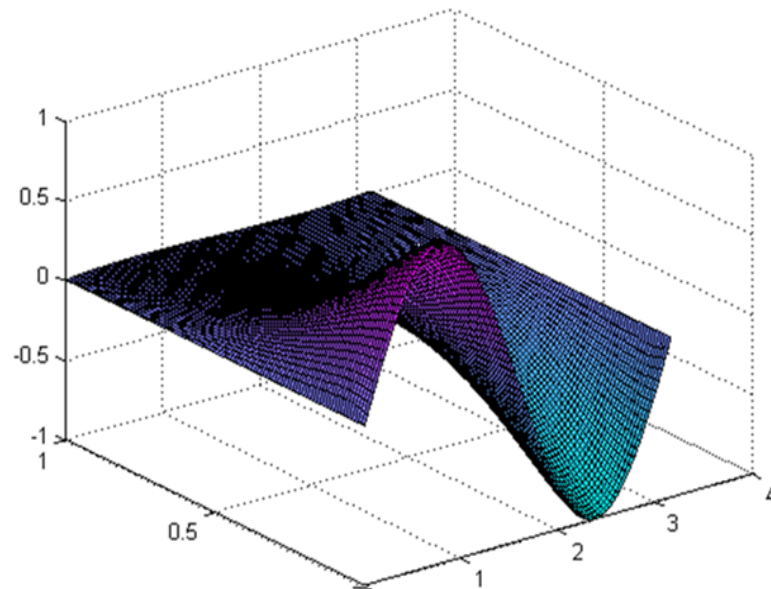
Posons $L = \pi, T = 1$.

Pour programmer la solution exacte nous avons utilisé le programme de la fonction de Mittag-Leffler donnée par Podlubny en 2001, ce programme est accessible par le site officiel de Matlab.

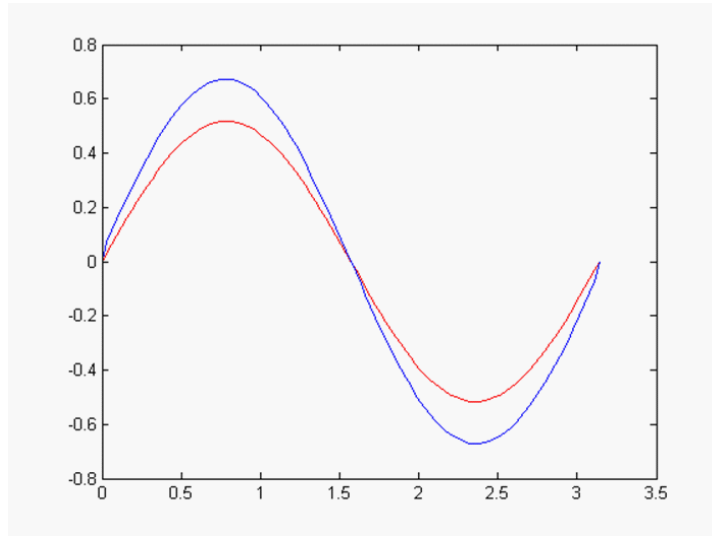
Le graphe de la solution exacte est donné par :



Le graphe de la solution approchée est donné par :



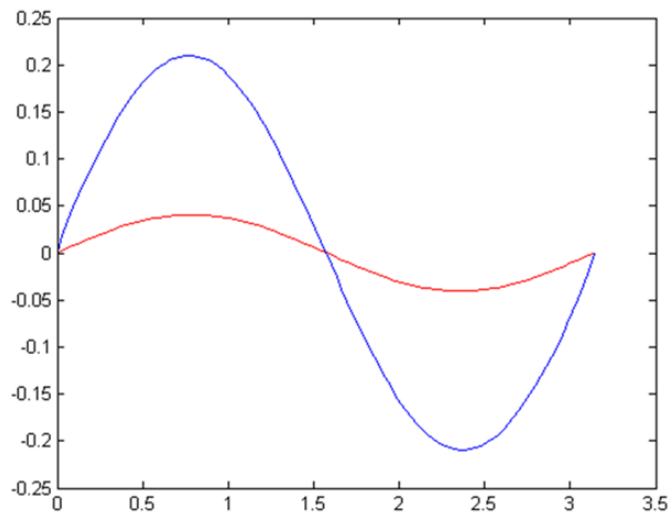
Maintenant pour $t = 0.2$, nous obtenons le graphe suivant :



(figure1)

La solution exacte est donnée par le rouge et la solution
approximer et donné par le bleu.

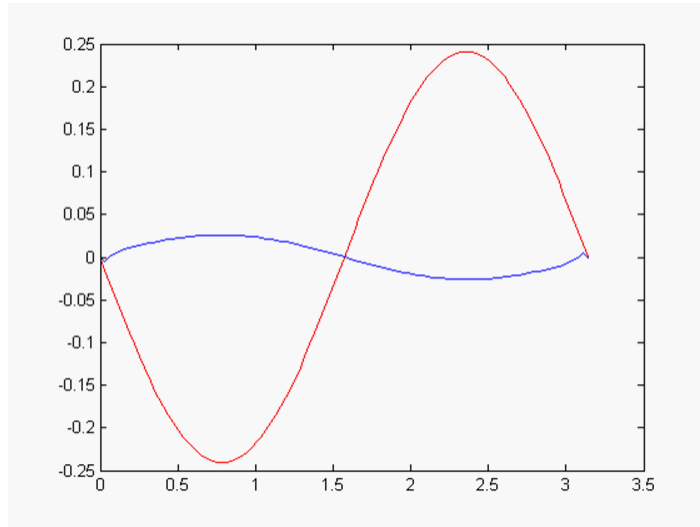
Pour $t = 0.5$ nous avons :



(figure2)

La solution exacte est donnée par le rouge et la solution
approximer et donné par le bleu.

Pour $t = 0.9$ nous avons :



(figure3)

La solution exacte est donnée par le rouge et la solution approximer et donné par le bleu.

Conclusion 37 *De (figure1), (figure2) et (figure3) nous concluons que la méthode dans ce cas diverge et que l'erreur augmente avec le temps.*

3.2.3 Perspective et conclusion

3.2.3.1 Bilan

L'objectif initial de ce travail était d'appliquer une méthode numérique assez simple (méthode des différences finies) à une nouvelle classe de problèmes différentiels (équation aux dérivées partielles fractionnaires) non étudiés pendant mon cursus. Pour cela nous avons proposé de donner un aperçu historique du développement de cette notion. Nous avons donc commencé par faire l'étude des approches les plus utilisées (approche de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov

et celle de Caputo), après cela nous avons donné quelques schémas numériques pour approcher ces définitions (les schémas L_1 , L_2 et les schémas de Grunwald), enfin nous avons exposé l'application de ces schémas.

Ce travail présente, en plus d'un intérêt académique, un intérêt pratique : compréhension et résolution des problèmes fractionnaires liée à la biologie, l'écologie, la physique et l'économique, ces problèmes admettent en générales des solutions assez compliquées à représenter comme le deuxième exemple (diffusion fractionnaire en temps et en espace).

3.2.3.2 Perspective

Tout système étant appelé à évoluer dans le temps, des améliorations peuvent être apportées à ce travail afin de le rendre plus utile :

- Étude de problème physique nouveau.
- Approche différente du dernier exemple (problème d'onde-diffusion fractionnaire) en utilisant d'autre schéma convergent et stable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *N.H. Abel, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies (1823), oeuvres complètes, 1, pp.11-18, Grondahl, Christiania (1881).*

- [2] *M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part 2, Geophys. J. R. Astr. Soc. Vol. 13, p.529539, (1967)*

- [3] *S. Dugowson, Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation, thèse de doctorat, (1994), université Paris Nord, France.*

- [4] *S. Dugowson, L'élaboration par Riemann d'une définition de la dérivation non entière, Revue d'histoire des mathématiques, 3(1997), p.49-97.*

- [5] *L. Euler. De progressionibus transcentibus, seu quarum termini algebraice dari nequeunt. Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 5, 3657 (1738).*

- [6] *J.Fourier, Théorie Analytique de la Chaleur, Didot, Paris (1822)*

- [7] *R. Hilfer. Threefold introduction to fractional derivatives, Anomalous Transport : Foundations and Applications,R. Klages et al. (eds.), Wiley-VCH, Weinheim, (2008), page 17 ISBN : 978-3-527-40722-4.*

- [8] *M.C.Ho, Y.C.Hung, C.H.Chou, Synchronization of two different systems by using generalized active control Phys. Lett. A 296 (1) (2002) 43*

- [9] *P. Inizan. Dynamique fractionnaire pour le chaos hamiltonien. Thèse de Doctorat, L'Observatoire de Paris, France (2010).*
- [10] *A. A. Kilbas, H. M. Srivastava et J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006)*
- [11] *A. V. Letnikov, Theory of Differentiation of Fractional Order. Mat. Sb., vol. 3, (1868), pp. 1-68.*
- [12] *J. Liouville, Mémoire sur le calcul des différentielles indice quelconque, journal de l'école polytechnique, 13, section 21(1932).*
- [13] *F. Lui, V. Anh, I. Turner, P. Zhang, Numerical solution of the space Pokker-Planck equation, J. Comput. Appl. Math. 166 (1) (2004) 209-219.*
- [14] *M. Meershaert and C. Tadjeran, Finite difference approximation for fractional advection-disspersion flow equation, J. Comp. Appl. Math. 172, (2004), 65-77.*
- [15] *K.S. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, New York (1993).*
- [16] *S. Momani, Z. Odibat, Numerical solution of the space-time fractional advection-dispersion equation, Numer. Meth. Partial Differ. Equat. 24 (6) (2008) 1416-1429.*
- [17] *K.B. Oldham, Fractional differential equations in electrochemistry, Advances in Engineering Software, vol.41,no.1,pp.9-12, (2010).*
- [18] *K.B. Oldham and J. Spanier. The Fractional Calculus. Academic Press, York and London (1974).*
- [19] *K.B. Oldham and J. Spanier. The replacement of fick's laws by a formulation involving semi differentiation. J. Electro anal. Chem. 26, 331341 (1970).*

- [20] Igor Podlubny, *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York, (1999).
- [21] Yuriy Povstenko, *Linear Fractional Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers*, Springer, (2010).
- [22] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, DUNOD, (2004).
- [23] S.G. Samko, A.A. Kilbas, et O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach (1993).
- [24] L. Schwartz, *Théories des Distributions*, Hermann, Paris, (1966)
- [25] S. Shen and F. Liu, *Error analysis of an explicit finite difference approximation for the space fractional diffusion*, ANZIAN J., 46 (E), (2005).
- [26] N. Ya. Sonin. *On differentiation with arbitrary index (papers)*. (1869).
- [27] Uchaikin, Vladimir V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Volume I Background and Theory*, Springer, (2013).
- [28] M. Wellbeer, *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical Background*, D. Univ Braunschweig, (2010).
- [29] Q. Yang, F. Lui, I. Turner, *Numerical method for fractional partial differential equation with Riesz space fractional derivatives*. Appl. Math. Modelling 34 (2010) 200-218.
- [30] G.M.Zaslavsky, A.I.Saichev, *Fractional kinetic equation : solution and application*, chaos7 (4) (1997) 753-764.
- [31] G.M.Zaslavsky, *chaos, Fractional kinetic and anomalous transport*, phy. Rep 371 (6) (2002) 461-580.

- [32] *P. Zhang, F. Lui, V. Anh, I. Turner, A fractional order implicit difference approximation for the space-time fractional diffusion, ANZIAM J., 47 (EMAC), (2005).*