



République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme
de Master en MATHÉMATIQUES

Option: Mathématiques appliquées \ Analyse Numérique

Thème

Equations hyperboliques non-linéaires
et
Approximation numérique

Réalisé par:

Fatima Zahra BENYOUB

Présenté le: 28/ 06/ 2016, devant le jury composé de:

M. B.MEBKHOUT	<i>M.A.A université de Tlemcen</i>	<i>Président</i>
M. F.ABI-AYAD	<i>M.A.A université de Tlemcen</i>	<i>Encadreur</i>
M. A.BENCHAIB	<i>M.A.A université de Tlemcen</i>	<i>Examineur</i>

Année Universitaire: 2015-2016

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des équations hyperboliques non linéaires issues des Lois de conservation scalaires.

On présente, dans un premier temps, la résolution théorique (exacte) de ce type de problèmes par le biais d'une équation modèle : L'équation de Burgers.

Dans un second temps, on présente la résolution numérique par une méthode de type différences et volumes finis : Les méthodes conservatives.

Abstract

In this thesis, we are interested about the study of non-linear hyperbolic equations: scalar conservation laws.

Initially, we present the theoretical resolution of such problems via a model equation: Burgers equation.

In the second part, we present a numerical resolution by finite difference and volume methods: The conservative methods.

Je dédie ce modeste travail à :
mes très chers parents.
mes frères : Nasreddine et Ahmed Ali.
mon très cher neveu Mohammed Ali.
mes chères sœurs : Zakia, Kheira et Samia.
ma famille : ma grande-mère et mes chers oncles et tantes.
mes très chers amis Zaki et Sanaa.
mon collègue Abdelhadi.
mes copines : Meryem, Somia, Ilham, Rahmouna, Souâd, Nawal,
Fatima Zahra, Amel, Fatiha, Khawla, Nadia et Hayat.

Remerciements :

Je remercie tout d'abord **mes chers parents** d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux. Ils sont toujours une source de motivation, d'encouragement et de bonheur.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Monsieur F. ABI-AYAD pour sa patience, sa disponibilité, son aide et sa rigueur scientifique.

Je remercie chaleureusement notre chef de département des Mathématiques monsieur B. MEBKHOUT pour son aide et ses conseils durant toutes ces années d'études, et pour avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Mes vifs remerciement à mon examinateur Monsieur A. BENCHAIB d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, j'exprime ma sincère reconnaissance à messieurs F.Abi-ayad, A.Benchaib, G.S.Bereksi, G.Boukli-Hacène, H.Dib, B.Abdellaoui, M.Houbad et K.Yadi mes professeurs en Master Mathématiques appliquées\ Analyse numérique.

Fatima Zahra BENYOUB

Table des matières

I	Première partie : Théorie	6
1	Théorie des lois de conservation scalaire	7
	1.1 Solution classique et Méthode des caractéristiques	8
	1.1.1 Droites caractéristiques	8
	1.2 Solutions Faibles	11
	1.2.1 Solutions C^1 par morceaux : condition de choc	12
	1.2.2 Non-unicité de la solution faible	13
	1.3 Solution entropique	14
2	Problème de Riemann	18
	2.0.1 Une solution auto-semblable	18
	2.0.2 solution du problème de Riemann(à deux états)	19
	2.1 Problème de Riemann à trois états	21
	Donnée initiale croissante	22
	Donnée initiale décroissante	22
	Donnée initiale non-monotone	24
II	Deuxième partie : Approche numérique	32
3	Les méthodes conservatives	33
	3.1 Généralités sur les schémas conservatifs	35
	convergence	37
	Consistance	37
	Ordre d'un schéma	37
	Stabilité	38
	Théorème de Lax-Wendroff	38
	Schéma entropique	40
	3.2 Schéma de Lax-Friedrichs	42
	3.3 Schéma de Godunov	42
	3.4 Tests numériques	44
	3.4.1 Applications	45

Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude des équations hyperboliques de type

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

où f est une fonction régulière en u , cette équation traduit la conservation de la quantité u , on dit qu'il s'agit d'une loi de conservation.

Cette équation provient de la modélisation de divers phénomènes. citons par exemple

* Aéronautique (écoulement supersonique) : équation de Burgers avec $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

* Ecoulement en milieux poreux : équation de Buckley-Leverett avec

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1 - u^2)\mu_w/\mu_0}$$

où μ_w et μ_0 sont les viscosités de l'eau et de l'huile (pétrole) respectivement.

* Ecoulement en eau peu profonde : équation de Saint-Venant.

Le contenu de ce mémoire se décompose en deux parties.

Une première partie est consacrée à l'étude théorique du problème (1), elle contient deux chapitres :

dans le premier chapitre, on va rappeler les notions de base sur les équations hyperboliques, et la théorie développée dans le cas scalaire.

Dans le deuxième chapitre, on va utiliser les résultats du premier chapitre pour expliciter la solution du problème de Riemann dont la donnée initiale u_0 est constante par morceaux .

Une deuxième partie qui contient un seul chapitre : chapitre 3, concerne la résolution numérique du problème (1).

Dans le chapitre 3, on va appliquer une méthode de type différences et volumes finis pour approcher la solution du problème (1). On commencera par aborder l'aspect théorique de cette méthode, ce qu'on appelle l'**analyse numérique**, puis on va l'appliquer pour un exemple dont on peut calculer la solution exacte afin de pouvoir comparer les résultats obtenus.

Première partie

THÉORIE

Théorie des lois de conservation scalaire

Dans ce chapitre, nous présentons les principales notions de base sur la théorie des équations hyperboliques issues des lois de conservation scalaires. nous rassemblons donc ci-après un certain nombre de définitions et de résultats démontrés déjà dans les références indiquées à la fin de cet ouvrage.

On considère l'équation de loi de conservation scalaire pour $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.1)$$

où f est une fonction en u de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

* pour $f(u) = \frac{u^2}{2}$, on a l'équation de **Bürgers** :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2)$$

On dit que l'équation (1.1) est sous forme **conservative**, par opposition à sa forme **non-conservative** :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c(u(x, t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

où $c = f'$.

* sous forme non-conservative, l'équation de Bürgers s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Pour l'équation (1.1), on va étudier le **problème de Cauchy** :
trouver $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (1.1) satisfaisant la condition initiale :

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

où la condition initiale u_0 est une fonction donnée.

Tout revient donc à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.5)$$

* Quand la condition initiale est constante par morceaux, le problème est dit "**problème de Riemann**".

On parle alors de problème de Riemann à deux états si :

$$u_0 = \begin{cases} u_l & \text{si } x \leq 0 \\ u_r & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où u_l et u_r sont des constantes.

1.1 - SOLUTION CLASSIQUE ET MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

Définition 1 (Solution classique):

On dit que u est une **solution classique** de (1.5) si :

i- $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$

ii- u vérifie (1.5)

Pour construire la solution classique de (1.5) on utilise **la méthode des caractéristiques** dont le principe est de trouver une courbe le long de laquelle l'E.D.P peut se ramener à une équation différentielle simple à résoudre, mais on verra que cette solution, en général, n'existe pas pour tout le temps!!

Droites caractéristiques

supposons que u_0 est de classe C^1 .

Soit u une solution classique de (1.5), donc elle vérifie la forme non-conservative

(1.3).

Considérons maintenant la courbe $(X(t), t)$ du plan (x, t) définie par :

$$\begin{cases} X'(t) = c(u(X(t), t)), & t \geq 0 \\ X(0) = y \end{cases} \quad (1.6)$$

Alors on peut dériver u par rapport au temps le long de cette courbe et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(X(t), t) &= X' \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) + \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)(X(t), t) \end{aligned}$$

D'après (1.3), cette quantité est nulle, autrement dit, u est constante le long de la courbe (1.6) :

$$u(X(t), t) = u(X(0), 0) = u_0(y) \quad \forall t \geq 0$$

On en déduit, d'après (1.6), que la courbe en question est une droite du plan (x, t) d'équation :

$$x = X(t) = y + c(u_0(y)) \cdot t \quad (1.7)$$

Définition 2 (droites caractéristiques):

les droites de la forme (1.6) ou (1.7) sont appelées **droites caractéristiques** (ou simplement caractéristiques) pour u solution classique du système (1.5). De plus u est constante le long de chaque droite.

Tant que les caractéristiques ne se croisent pas, La méthode des caractéristiques nous permet de construire une solution régulière de (1.5) en suivant les deux étapes suivantes :

étant donné $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

i) trouver y solution de

$$y + t \cdot c(u_0(y)) = x$$

ii) poser $u(x, t) = u_0(y)$

(voir exemple 1.1.2)

En général, les caractéristiques se coupent en un temps fini caractérisé par le résultat d'existence suivant (pour la preuve le lecteur peut consulter [2]) :

Proposition 1.1.1

soit $u_0 \in C^1$ bornée ainsi que sa dérivée, on définit :

$$T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } c \circ u_0 \text{ est croissante} \\ -(\inf \frac{d}{dx} c \circ u_0)^{-1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.8)$$

alors (1.5) admet une unique solution classique u dans $\mathbb{R} \times [0, T^*)$ qui ne peut être prolongée au delà de T^* .

Ce résultat peut se généraliser à une donnée initiale u_0 continue qui est seulement C^1 par morceaux.

Remarque 1:

Lorsque f est convexe, c est croissante et la condition " $c \circ u_0$ est croissante" devient simplement " u_0 est croissante". c'est le cas de l'équation de Burgers.

Exemple 1.1.2 (méthodes des caractéristiques pour l'équation de Burgers):

on veut résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de Burgers (1.2) avec la condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

par la méthode des caractéristiques.

La droite caractéristique issue de y a pour équation :

$$x = \begin{cases} y + t & y \leq 0 \\ y + (1 - y)t & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases}$$

Le temps critique T^* est égal à 1.

pour un point (x, t) on résout, en y , l'équation

$$x = y + t.u_0(y)$$

i.e

$$x = \begin{cases} y + t & y \leq 0 \\ t + (1 - t)y & 0 \leq y \leq 1 \\ y & y \geq 1 \end{cases}$$

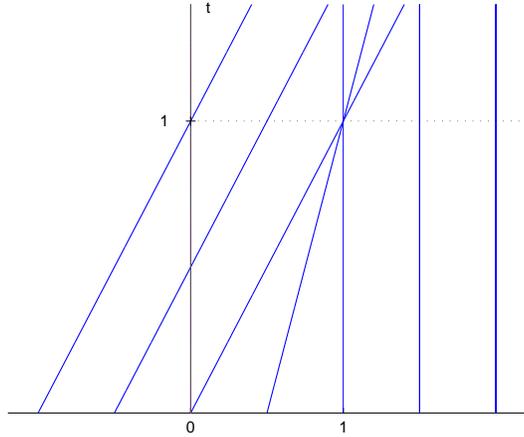


FIGURE 1.1 – les caractéristiques

pour $t < 1$, les caractéristiques ne se croisent pas, soit (x, t) donné avec $t < 1$, on détermine le point correspondant y

$$y = \begin{cases} x - t & x \leq t \\ \frac{x - t}{1 - t} & t \leq x \leq 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

Enfin, on pose $u(x, t) = u_0(y)$, et, pour tout (x, t) dans $\mathbb{R} \times [0, 1)$, on obtient

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq t \\ \frac{1 - x}{1 - t} & t \leq x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

1.2 - SOLUTIONS FAIBLES

L'apparition possible de singularités (discontinuités) rend la définition de solution classique inadaptée dans de nombreux cas. La notion de solution faible permet d'obtenir des solutions non continues.

On suppose que $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, où L_{loc}^∞ est l'espace des fonctions mesurables localement bornées.

Soit $C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ l'espace des fonctions φ de classe C^1 à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

Multiplications les deux membres de l'équation (1.1) par une fonction φ de $C_0^1(\mathbb{R} \times$

$[0, +\infty[)$, puis intégrons sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, par partie, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (1.9)$$

Définition 3:

on suppose que $u_0 \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, une fonction u de $L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est dite **solution faible** de (1.5) si elle satisfait (1.9) pour toute fonction φ de $C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$

La proposition suivante montre le lien entre la solution classique et la solution faible

Proposition 1.2.1

Si u est une solution classique du problème de Cauchy (1.5), alors c'en est aussi une solution faible. Réciproquement, Si $u \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est une solution faible du problème de Cauchy (1.5), alors c'est une solution classique.

Dans la section suivante, nous allons nous intéresser à une classe particulière de solutions faibles : les solutions C^1 par morceaux.

Solutions C^1 par morceaux : condition de choc

Définition 4 (fonction C^1 par morceaux):

On dit qu'une fonction u est C^1 par morceaux s'il existe un nombre fini de courbes Γ du plan (x, t) en dehors desquelles u est de classe C^1 .

Notons qu'à travers une courbe de discontinuité, u a un saut de discontinuité (admet des limites différentes de part et d'autre de la courbe).

Etant donné une courbe de discontinuité Γ paramétrée par $(\xi(t), t)$, où $\xi : t \mapsto \xi(t)$ est une fonction C^1 d'un certain intervalle de temps dans \mathbb{R} . on note par $n = (n_x, n_t)^T$ la normale unitaire à Γ orientée vers les x positifs de sorte que :

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(1, -s)^T, \quad \text{où } s = \xi'(t)$$

et par u^+ et u^- les limites de u "à droite" et "à gauche" de Γ :

$$u^{\pm} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (u(x, t) \pm \epsilon n)$$

Le saut à travers la discontinuité est :

$$[u] = u^+ - u^-$$

Nous pouvons maintenant considérer des solutions du problème qui soient seulement C^1 par morceaux. Nous allons voir cependant que les discontinuités d'une telle solution ne sont pas arbitraires.

Proposition 1.2.2

Soit u une fonction de classe C^1 par morceaux. alors u est solution faible de (1.5) si et seulement si

i) u est une solution classique de (1.5) là où elle est C^1 .

ii) u satisfait la condition :

$$\xi'(t)[u] = [f(u)] = f(u^+) - f(u^-) \quad (1.10)$$

le long des courbes de discontinuité $\Gamma = (\xi(t), t)$.

La condition de saut (1.10) est appelée relation de **Rankine-Hugoniot**

Remarque 2:

si la fonction u est continue, alors il est évident que les relations de Rankine-Hugoniot sont satisfaites.

* dans le cas de l'équation de Burgers, la condition (1.10) s'écrit :

$$\xi'(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}$$

Dans le paragraphe suivant, on va montrer que le problème (1.5) admet une solution faible qui n'est pas unique.

Non-unicité de la solution faible

considérons le problème de Riemann pour l'équation de Burgers suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.11)$$

on peut construire au moins deux solutions faibles pour (1.11).

La première est celle qui reste égale à u_0 pour tout $t > 0$. c'est à dire :

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

En effet, u est bornée et on vérifie aisément que

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0$$

pour toute fonction φ de $C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$, et donc la fonction u est solution faible de (1.11).

On définit la deuxième solution par

$$v(x, t) = \begin{cases} -1 & x < -t \\ \frac{x}{t} & -t \leq x \leq t \\ 1 & x > t \end{cases}$$

Les relations de Rankine-Hugoniot sont également satisfaites puisque v est continue. La fonction v est donc aussi solution faible du problème (1.11).

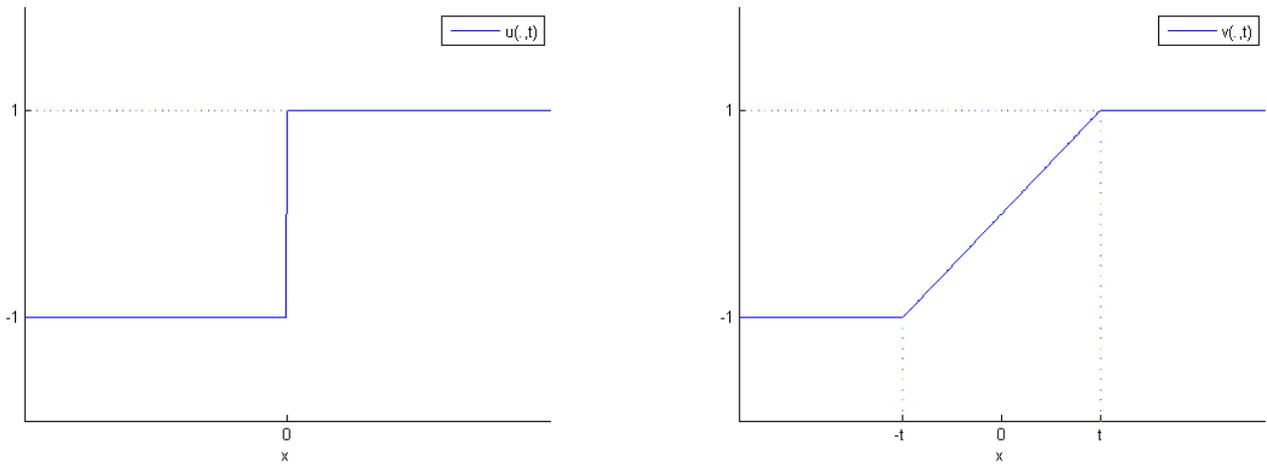


FIGURE 1.2 – Deux solutions faibles du problème de Riemann pour l'équation de Burgers

Pour éliminer les solutions supplémentaires, et pour que le problème d'évolution soit bien posé en présence des discontinuités, on doit ajouter une condition supplémentaire dite **condition d'entropie**.

1.3 - SOLUTION ENTROPIQUE

Définition 5:

une fonction convexe η de classe C^1 est appelée **entropie** pour le problème (1.5) s'il existe une fonction S de classe C^1 , dite **flux d'entropie**, telle que

$$\eta'(u)f' = S'(u) \quad (1.12)$$

Si u vérifie (1.1) alors, en utilisant (1.12), on obtient

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial S(u)}{\partial x} = 0$$

La condition (1.12) peut être prise au sens des distributions si η et S ne sont pas C^1 . Dans ces conditions, la fonction $\eta(u) = |u - k|$, $k \in \mathbb{R}$, est une entropie de flux :

$$S(u) = \text{signe}(u - k)(f(u) - f(k))$$

Définition 6 (solution entropique):

Une solution faible de (1.5) est appelée **solution entropique** si pour toute entropie η de flux S du problème (1.5), u vérifie

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial S(u)}{\partial x} \leq 0 \quad (1.13)$$

au sens des distributions.

d'une manière alternative, (1.13) s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\eta(u) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S(u) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt \leq - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \cdot \varphi(x, 0) dx$$

Remarque 3:

- si u est solution classique de (1.5) alors elle est solution entropique, et pour toute entropie η de flux S on a

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial S(u)}{\partial x} = 0$$

au sens des distributions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

- Soit u de classe C^1 par morceaux, vérifiant (1.5) là où elle est C^1 et satisfaisant les relations de Rankine-Hugoniot le long des courbes de discontinuités $\Gamma = \{(\xi(t), t)\}$, Alors u est une solution entropique si et seulement si

$$\xi'[\eta(u)] \leq [S(u)] \quad (1.14)$$

pour toute entropie η de flux S .

Le critère (1.14) est relativement peu pratique pour vérifier qu'un choc est entropique ou non. Heureusement, on peut en donner une forme équivalente plus simple, à commencer par le cas où f est convexe.

THÉORÈME 1.3.1 (CHOC ENTROPIQUE : CAS CONVEXE):

On suppose que f est strictement convexe (resp. strictement concave). Alors la condition de choc entropique est équivalente à

$$u^- > u^+ \quad (\text{resp } u^- < u^+) \quad (1.15)$$

le long de toute courbe de discontinuité Γ .

Dans le cas où f est strictement convexe, la condition $u^+ < u^-$ est équivalente à

$$f'(u^+) < s < f'(u^-)$$

où s est la vitesse de propagation des discontinuités. C'est la condition de choc de Lax.

Nous donnons maintenant la version générale du théorème 1.3.1 :

THÉORÈME 1.3.2 (CHOC ENTROPIQUE : CAS GÉNÉRAL):

La condition de choc entropique (1.14) est équivalente à $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$\begin{cases} f(\alpha u^- + (1 - \alpha)u^+) \geq \alpha f(u^-) + (1 - \alpha)f(u^+) & \text{si } u^+ > u^- \\ f(\alpha u^- + (1 - \alpha)u^+) \leq \alpha f(u^-) + (1 - \alpha)f(u^+) & \text{si } u^+ < u^- \end{cases}$$

Le théorème suivant est dû à KRUKHOV (1956), il assure l'existence et l'unicité de la solution entropique.

THÉORÈME 1.3.3 (KRUKHOV):

Soient u_0 de $L^1(\mathbb{R})$ et f de classe C^1 . Le problème (1.5) admet une et une seule solution entropique $u \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^)$.*

Nous renvoyons à D.Serre [2] pour la démonstration détaillée de ce théorème.

La proposition suivante montre une propriété essentielle de la solution entropique : La monotonie.

Proposition 1.3.1

Si u et v sont les solutions entropiques de (1.5) associées aux conditions initiales u_0 et v_0 , on a

$$u_0 \geq v_0 \Rightarrow u(., t) \geq v(., t) \quad , \quad \forall t \geq 0 \quad p.p \quad (1.16)$$

En particulier, on déduit

Corollaire 1.3.1.1

$$\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto u_0(x) \text{ croissante} \iff x \mapsto u(x, t) \text{ croissante} \quad \forall t > 0 \quad p.p \\ a \leq u_0(x) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad p.p \iff a \leq u(x, t) \leq b \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad p.p \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Problème de Riemann

Dans ce chapitre, nous nous limitons pour simplifier au cas où f est strictement convexe. nous allons calculer explicitement la solution entropique du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = \begin{cases} u_g & x \leq 0 \\ u_d & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.1)$$

où u_g et u_d sont deux constantes données.

Le problème est dit de Riemann par analogie à un problème étudié par ce dernier en dynamique des gaz.

Ce problème est à la base de nombreuses méthodes numériques de résolution des problèmes issus des lois de conservation, en particulier celles qui seront décrites dans le prochain chapitre.

Une solution auto-semblable

Proposition 2.0.2

La solution u du problème de Riemann (2.1) est auto-semblable, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$u(x, t) = v(x/t)$$

preuve:

soit u la solution entropique du problème (2.1), et soit $a > 0$ alors $u^a := u(ax, at)$ est la solution entropique pour la donnée initiale " $u_0(ax)$ ", dans ce cas u_0 . Par unicité de la solution entropique (théorème 1.3.3 du chapitre précédent) on obtient

$$u^a \equiv u$$

par suite, en choisissant $a = t^{-1}$, on obtient

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{t}, 1\right)$$

donc la solution du problème 2.1 est de la forme

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$$

avec $v \in L^\infty$.

D'autre part, la fonction v doit vérifier

$$v'(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad c(v(\xi)) = \xi \quad (2.2)$$

c'est simple à vérifier, en posant $\xi = \frac{x}{t}$. Nous pouvons maintenant résoudre explicitement le problème (2.1)

* Il est clair que si $\underline{u_g} = u_d$, l'unique solution entropique est $u \equiv u_g = u_d$.

* on se place dans le cas où $\underline{u_g} < u_d$, dans ce cas la discontinuité n'est pas admissible pour les solution entropiques (cf. théorème 1.3.1 du chapitre précédent), on cherche donc une solution continue. La méthode des caractéristiques permet de construire la solution dans les domaines $x \leq t.c(u_g)$ et $x \geq t.c(u_d)$, on a :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq t.c(u_g) \\ u_d & \text{si } x \geq t.c(u_d) \end{cases}$$

Pour calculer u dans le domaine $c(u_g) \leq \frac{x}{t} \leq c(u_d)$ on résout l'équation (2.2). C'est toujours possible car f est strictement convexe, donc c est inversible. On obtient :

$$u(x, t) = c^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{si } c(u_g) \leq \frac{x}{t} \leq c(u_d)$$

La solution u ainsi construite est effectivement continue.

On dit qu'il s'agit d'une onde de détente.

* dans le cas où $\underline{u_g} > u_d$, l'unique solution entropique est :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq s.t \\ u_d & \text{si } x > s.t \end{cases}$$

avec $s = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}$, cette solution présente une discontinuité (un choc) le long de la courbe $\{(x, t), x = s.t\}$ et correspond à une onde de choc.

solution du problème de Riemann(à deux états)

En résumé, la solution entropique du problème de Riemann (2.1) peut être notée :

$$w_R\left(\frac{x}{t}; u_g, u_d\right)$$

si $u_g < u_d$

$$w_R(\xi; u_g, u_d) = \begin{cases} u_g & \text{si } \xi \leq c(u_g) \\ c^{-1}(\xi) & \text{si } c(u_g) \leq \xi \leq c(u_d) \\ u_d & \text{si } \xi \geq c(u_d) \end{cases}$$

si $u_g > u_d$

$$w_R(\xi; u_g, u_d) = \begin{cases} u_g & \text{si } \xi \leq s \\ u_d & \text{si } \xi > s \end{cases} \quad \text{où } s = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}$$

Exemple 2.0.3:

considérons le problème de Riemann pour l'équation de Burgers avec :

- * donnée initiale croissante : $u_g = 1$ et $u_d = 2$.
- * donnée initiale décroissante : $u_g = 2$ et $u_d = 1$.

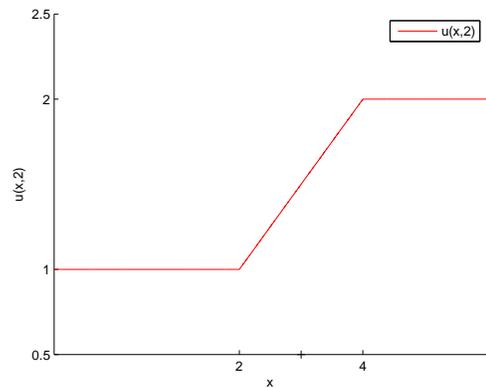
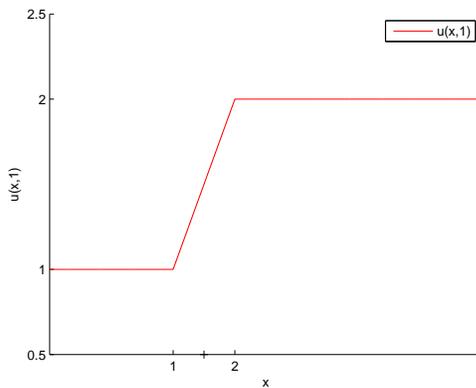


FIGURE 2.1 – Solution entropique du problème de Riemann $u_g = 1, u_d = 2$ pour $t = 1$ et $t = 2$

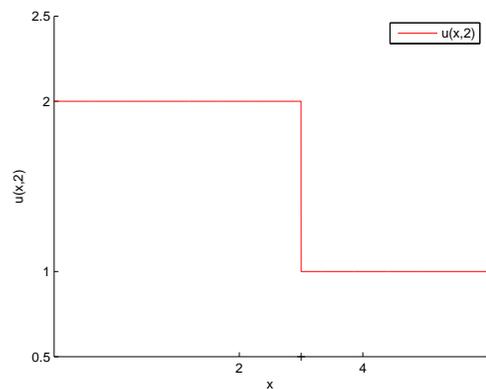
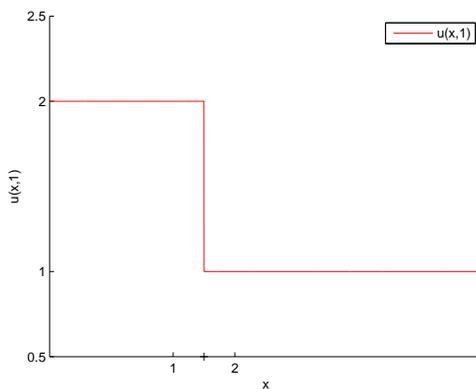


FIGURE 2.2 – Solution entropique du problème de Riemann $u_g = 2, u_d = 1$ pour $t = 1$ et $t = 2$

Une propriété essentielle de la solution entropique du problème de Riemann est donnée par la proposition suivante

Proposition 2.0.3

La fonction $z \mapsto f(w_R(z, u_g, u_d))$ est continue en $z = 0$, c'est à dire

$$f(w_R(0^-, u_g, u_d)) = f(w_R(0^+, u_g, u_d))$$

En effet, la fonction $z \mapsto w_R(z, u_g, u_d)$ est continue partout sauf en $z = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ si $u > v$. Elle est donc continue en 0 sauf si $u > v$ et $f(u) = f(v)$, or dans ce cas,

$$w_R(0^-, u, v) = u \quad \text{et} \quad w_R(0^+, u, v) = v$$

D'où

$$f(w_R(0^-, u, v)) = f(w_R(0^+, u, v))$$

2.1 - PROBLÈME DE RIEMANN À TROIS ÉTATS

En utilisant les résultats établis précédemment, on se propose de résoudre à présent le problème de Cauchy pour l'équation de Burgers suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq 0 \\ u_2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ u_3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{cases} \quad (2.3)$$

où u_1, u_2 et u_3 sont des constantes données.

Pour résoudre ce problème on va tout d'abord résoudre les deux problèmes de Riemann à deux états obtenus en considérant séparément chacune des discontinuités de la donnée initiale u_0 .

En d'autres mots, on va résoudre les problèmes de Riemann de conditions initiales respectives :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq 0 \\ u_2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{puis} \quad u_0(x) = \begin{cases} u_2 & \text{si } x \leq 1 \\ u_3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dans chaque cas, on explicitera la forme de la solution entropique (prenant en compte que pour le deuxième problème, la discontinuité initiale n'est pas en 0), puis on vérifie

si ces solutions interfèreront ou non. On déduira ensuite la solution du problème de Riemann à trois états (2.3).

On distingue alors les trois cas suivants :

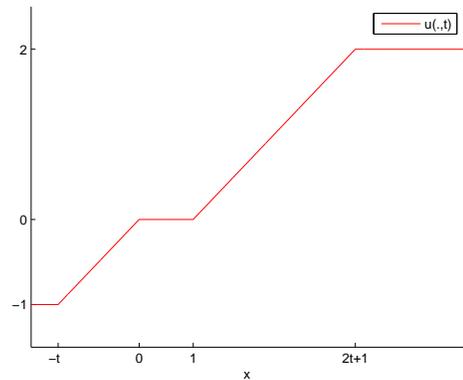
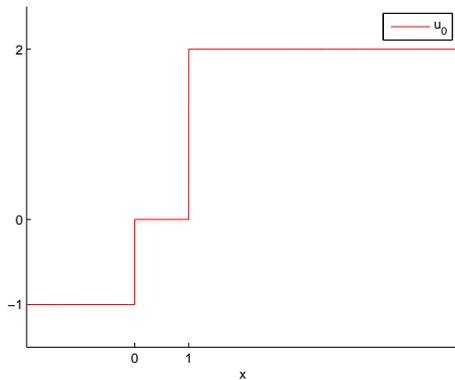
1- Donnée initiale croissante

Supposons que $u_1 < u_2 < u_3$, dans ce cas on est en présence de deux détentes (la première issue de $x = 0$ et la deuxième issue de $x = 1$) qui n'interfèreront jamais. La solution est continue et croissante pour tout $t > 0$, et est donnée par :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq u_1 t \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_1 t < x \leq u_2 t \\ u_2 & \text{si } u_2 t < x \leq u_2 t + 1 \\ \frac{x-1}{t} & \text{si } u_2 t + 1 < x \leq u_3 t + 1 \\ u_3 & \text{si } x > u_3 t + 1 \end{cases}$$

Exemple 2.1.1:

prenant $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, et $u_3 = 2$:



2- Donnée initiale décroissante

Supposant que $u_1 > u_2 > u_3$, dans ce cas les deux chocs entropiques issus des points $x = 0$ et $x = 1$ vont se rencontrer à un temps "fini" t^* à déterminer.

Avant t^* , les deux chocs n'interfèrent pas et la solution est donnée par

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq \xi_1(t) \\ u_2 & \text{si } \xi_1(t) < x \leq \xi_2(t) \\ u_3 & \text{si } x > \xi_2(t) \end{cases}$$

où d'après les relations de Rankine-Hugoniot (1.10)

$$\xi_1'(t) = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad \text{et} \quad \xi_2'(t) = \frac{u_2 + u_3}{2}$$

donc

$$\xi_1(t) = \frac{u_1 + u_2}{2}t \quad \text{et} \quad \xi_2(t) = \frac{u_2 + u_3}{2}t + 1$$

Le temps t^* est donc caractérisé par

$$\xi_1(t^*) = \xi_2(t^*)$$

d'où

$$t^* = \frac{2}{u_1 - u_3}$$

A cet instant, on a

$$\xi_1(t^*) = \xi_2(t^*) = \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_3}$$

Au delà de t^* , il ne reste qu'un seul choc qui se produit le long de la courbe définie par

$$\begin{cases} \xi'(t) = \frac{u_1 + u_3}{2} \\ \xi(t^*) = \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_3} \end{cases}$$

d'où

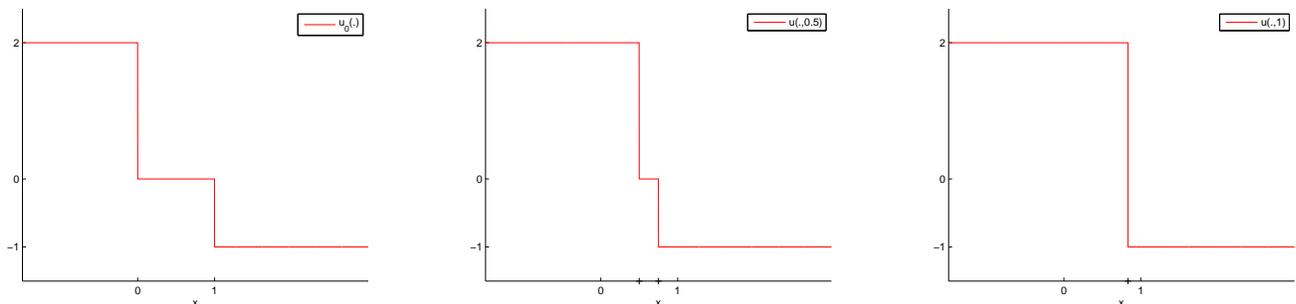
$$\xi(t) = \frac{u_1 + u_2}{2}t + \frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}$$

et la solution pour $t > t^*$, est alors

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq \xi(t) \\ u_3 & \text{si } x > \xi(t) \end{cases}$$

Exemple 2.1.2:

prenant $u_1 = 2$, $u_2 = 0$, et $u_3 = -1$:



3- Donnée initiale non-monotone

dans ce cas, on est devant l'un des deux cas suivant :

1^{er} cas : $u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$

Dans ce cas, on est en présence d'une détente (issue de $x = 0$) et un choc entropique (issu de $x = 1$) qui vont interférer à partir d'un temps t^* que l'on déterminera. avant t^* , la solution est donnée par :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq u_1 t \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_1 t < x \leq u_2 t \\ u_2 & \text{si } u_2 t < x \leq \xi(t) \\ u_3 & \text{si } x > \xi(t) \end{cases}$$

où, d'après la condition de Rankine-Hugoniot, $\xi'(t) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ donc

$$\xi(t) = \frac{u_3 + u_2}{2}t + 1$$

L'instant critique t^* est l'instant où la détente rejoint la ligne de choc. Il est donc caractérisé par la relation :

$$u_2 t^* = \xi(t^*)$$

d'où l'on déduit

$$t^* = \frac{2}{u_2 - u_3}$$

Pour $t > t^*$, la valeur à gauche du choc devient $\frac{x}{t}$ et la valeur à droite du choc est u_3 , Donc le choc se produit le long de la courbe définie par :

$$\xi'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi(t)}{t} + u_3\right) \quad \text{et} \quad \xi(t^*) = \frac{2u_2}{u_2 - u_3}$$

D'où

$$\xi(t) = \sqrt{2(u_2 - u_3)t} + u_3 t$$

La solution entropique pour $t > t^*$ est alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq u_1 t \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_1 t < x \leq \xi(t) \\ u_3 & \text{si } x > \xi(t) \end{cases}$$

Par la suite, de deux choses l'une, soit $u_1 < u_3$ et les formules restent valables pour tout $t > t^*$, soit $u_1 > u_3$ et les formules restent valables tant que

$$u_1 t < \xi(t).$$

C'est à dire pour $t < t^\sim$, où t^\sim est caractérisé par

$$u_1 t^\sim = \sqrt{2(u_2 - u_3)t^\sim} + u_3 t^\sim$$

donc

$$t^\sim = \frac{2(u_2 - u_3)}{(u_1 - u_3)^2}$$

pour $t > t^\sim$, il ne reste qu'un choc qui se produit le long de la courbe définie par :

$$\xi' = \frac{u_1 + u_3}{2} \quad , \quad \xi(t^\sim) = u_1 t^\sim$$

d'où

$$\xi(t) = \frac{u_1 + u_3}{2} t + \frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}$$

La solution, pour $t > t^\sim$, est

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq \xi(t) \\ u_3 & \text{si } x > \xi(t) \end{cases}$$

Exemple 2.1.3:

Considérons la donnée initiale

$$u_0 = \begin{cases} u_1 = -1 & \text{si } x \leq 0 \\ u_2 = 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ u_3 = 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

le temps critique est donc

$$t^* = 2$$

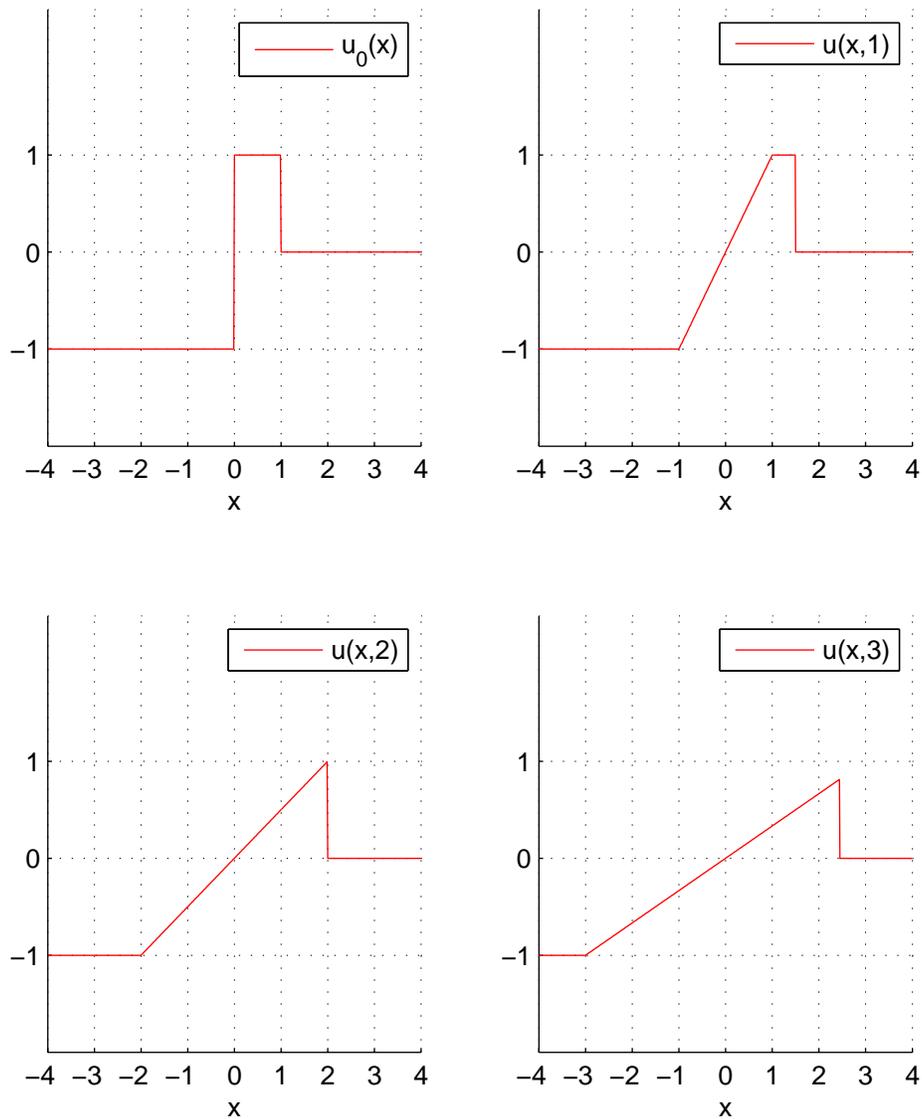
et comme $u_3 > u_1$ alors la solution reste sous la même forme pour tout $t > t^*$.

La figure 2.3 montre la solution entropique pour cette donnée initiale dans des instants différents.

Exemple 2.1.4:

considérons maintenant la donnée initiale

$$u_0 = \begin{cases} u_1 = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ u_2 = 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ u_3 = -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

FIGURE 2.3 – donnée initiale non monotone : $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$

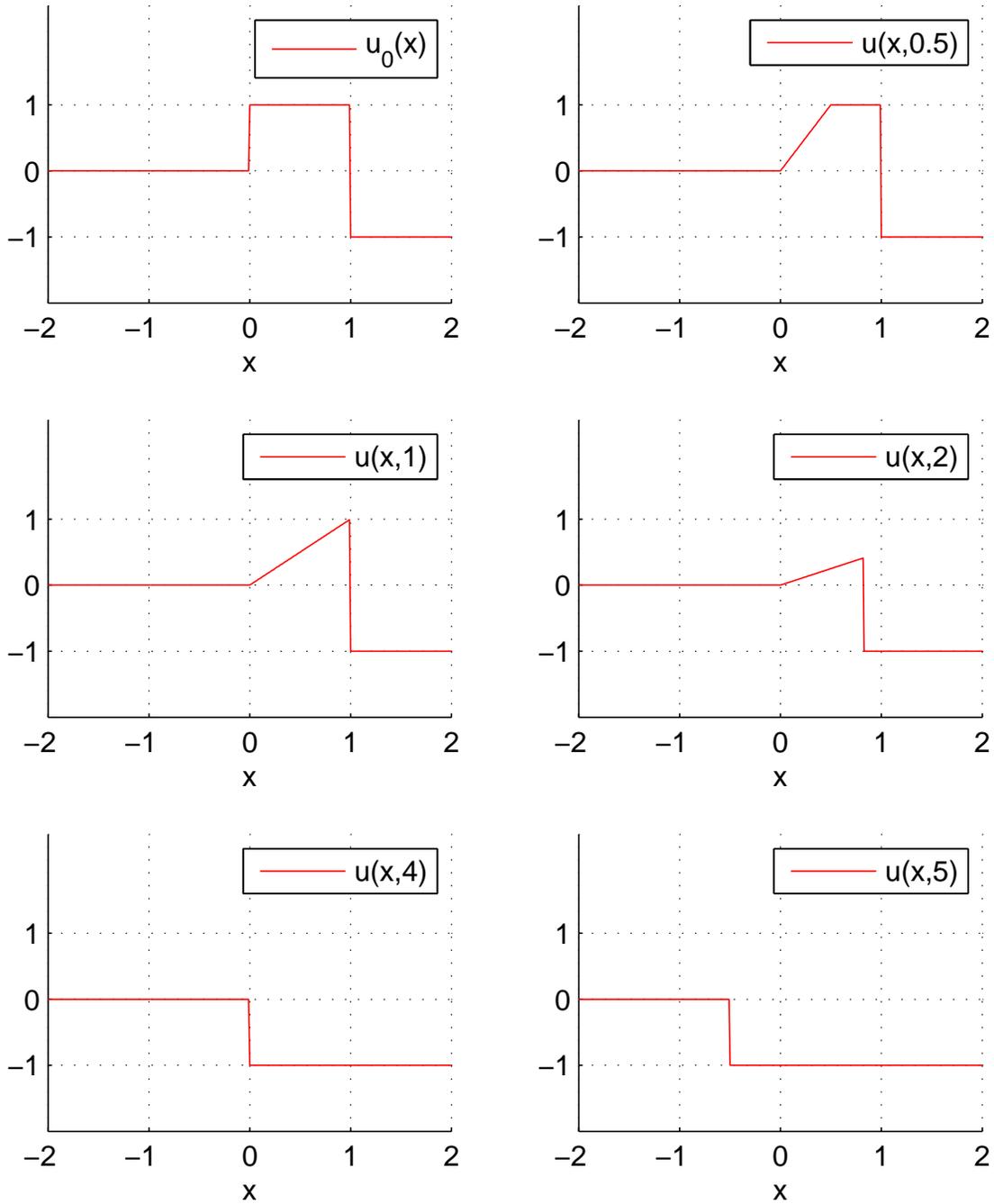
le temps critique dans ce cas est

$$t^* = 1$$

puisque $u_3 < u_1$, la solution change de forme pour

$$t > t^{\sim} = 4$$

La solution exacte est présentée dans la figure 2.4.

FIGURE 2.4 – donnée initiale non monotone : $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$

2^{ème} cas : $u_1 > u_2$ et $u_2 < u_3$

Dans ce cas le choc entropique issu de $x = 0$ et la détente issue de $x = 1$ n'interfèrent pas avant un temps t^* que l'on déterminera, et la solution est donnée pour tout $t < t^*$ par :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq \frac{u_1 + u_2}{2}t \\ u_2 & \text{si } \frac{u_1 + u_2}{2} < x \leq u_2t + 1 \\ \frac{x-1}{t} & \text{si } u_2t + 1 < x \leq u_3t + 1 \\ u_3 & \text{si } x > u_3t + 1 \end{cases}$$

t^* est l'instant où le choc rejoint la détente, il est donc caractérisé par :

$$\frac{u_1 + u_2}{2}t^* = u_2t^* + 1$$

d'où l'on déduit

$$t^* = \frac{2}{u_1 - u_2}$$

Pour $t > t^*$, la valeur de la solution à gauche du choc est u_1 et la valeur à droite devient $\frac{x-1}{t}$. Par conséquent, la relation de Rankine-Hugoniot s'écrit :

$$\xi'(t) = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{\xi(t) - 1}{t}\right)$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$\xi(t) = u_1t + 1 + c\sqrt{t} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

de plus, on a

$$\xi(t^*) = \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2}$$

donc on trouve

$$\xi(t) = u_1t + 1 - \sqrt{2(u_1 - u_2)t}$$

et la solution est

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq \xi(t) \\ \frac{x-1}{t} & \text{si } \xi(t) < x \leq u_3t + 1 \\ u_3 & \text{si } x > u_3t + 1 \end{cases}$$

Par la suite, tout comme le premier cas, les formules restent valables pour tout $t > t^*$ si $u_1 < u_3$, sinon, ces formules restent valables pour $t < t^\sim$ où t^\sim est solution de

$$\xi(t^\sim) = u_3t^\sim + 1$$

donc

$$t^{\sim} = \frac{2(u_1 - u_2)}{(u_1 - u_3)^2}$$

Pour $t > t^{\sim}$, le choc se produit le long de la courbe

$$\xi(t) = \frac{u_1 + u_3}{2}t + \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1}$$

et la solution est donnée par

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq \xi(t) \\ u_2 & \text{si } x > \xi(t) \end{cases}$$

Exemple 2.1.5:

Soit la donnée initiale

$$u_0 = \begin{cases} u_1 = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ u_2 = -1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ u_3 = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

le temps critique, dans ce cas, est : $t^* = 2$, et pour tout $t > t^*$, la solution reste sous la même forme.

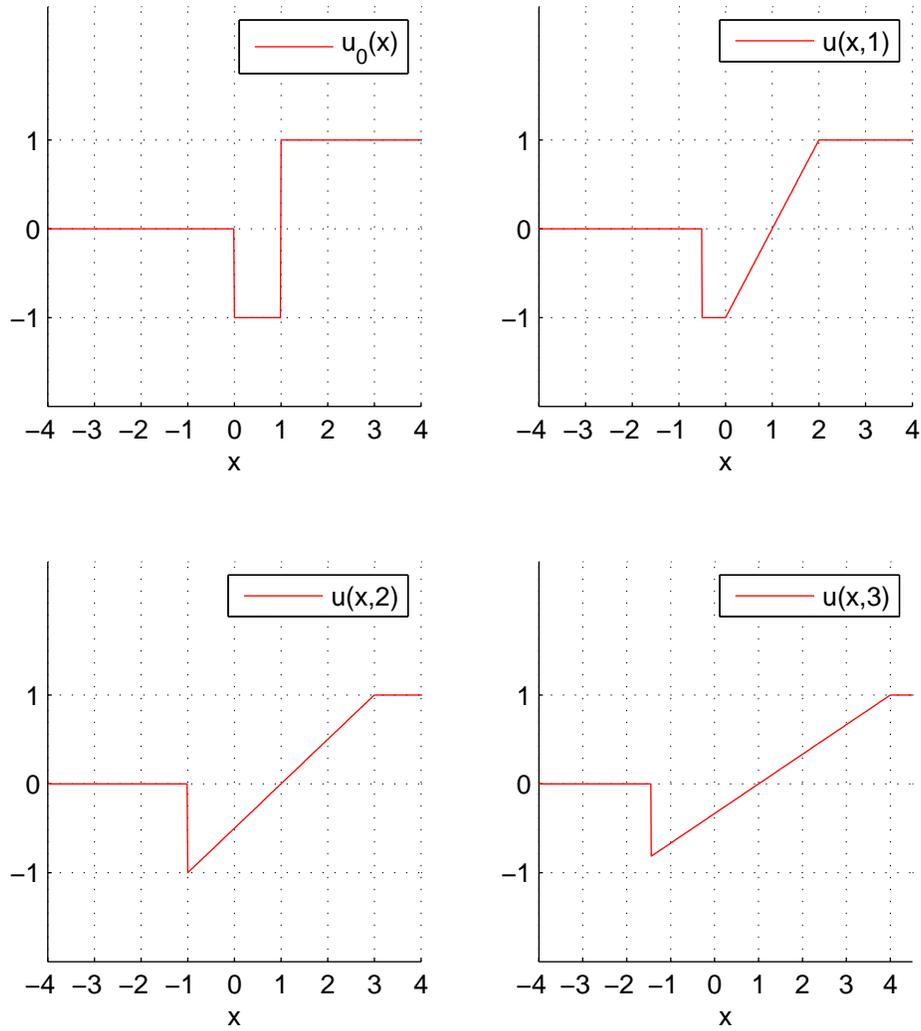
La solution est représentée pour différents instants dans la figure 2.5

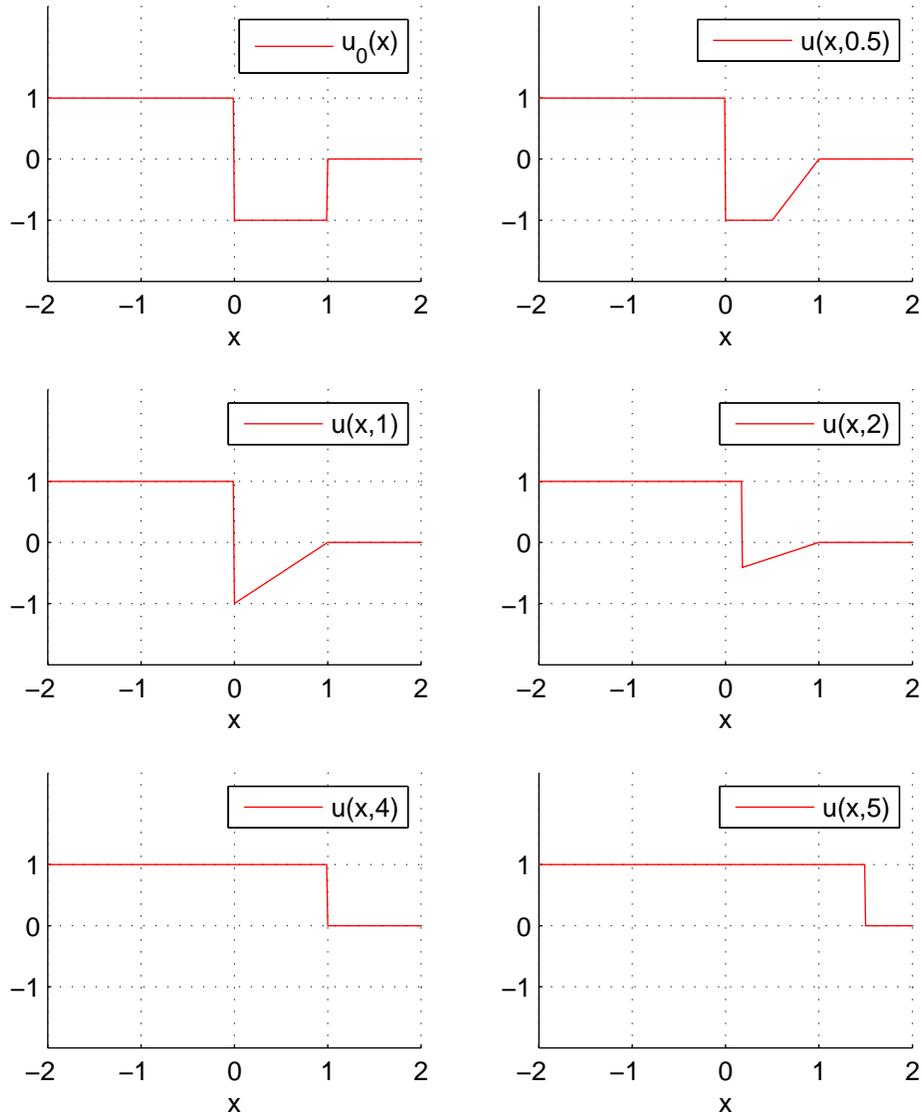
Exemple 2.1.6:

Pour terminer, prenons

$$u_0 = \begin{cases} u_1 = 1 & \text{si } x \leq 0 \\ u_2 = -1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ u_3 = 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Alors, dans ce cas $t^* = 1$ et $t^{\sim} = 4$
(voir figure 2.6).

FIGURE 2.5 – donnée initiale non monotone : $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, $u_3 = 1$

FIGURE 2.6 – donnée initiale non monotone : $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$

Deuxième partie

APPROCHE NUMÉRIQUE

Les méthodes conservatives

ce chapitre est consacré à l'approximation par la méthode différences et volumes finis du problèmes de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \quad tq : \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

on se donne $\Delta x > 0$ pas de discrétisation en espace constant, et $\Delta t > 0$ pas de discrétisation du temps, et on note

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

on introduit les points $x_j = j\Delta x, j \in \mathbb{Z}$, et les instants $t^n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}$.

On verra plus tard, que pour la plupart des schémas, le pas de discrétisation temporelle doit être non-constant, dans ce cas, on le note $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ et

$$\alpha_n = \frac{\Delta t^n}{\Delta x}$$

il est utile de définir aussi

$$x_{j \pm \frac{1}{2}} = (j \pm \frac{1}{2})\Delta x$$

On s'intéresse alors aux approximations discrètes

$$(u_j^n)_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}}} \quad (3.2)$$

de la solution exacte u du problème (3.1) et on considère des schémas de discrétisation explicites à un pas de temps et à trois pas d'espace qui s'écrivent :

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \quad n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

où H est une fonction continue.

L'approximation de la solution du problème (3.1) sous forme non-conservative peut facilement donner des résultats catastrophiques qui sont manifestement incorrects!

Exemple 3.0.7:

Soit l'équation de Burgers sous forme quasi-linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

considérons le schéma décentré à droite suivant

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha u_j^n (u_{j+1}^n - u_j^n) \tag{3.4}$$

le schéma est acceptable pour une solution régulière, mais, en général, il ne converge pas vers une solution faible discontinue quand on raffine le maillage. Si on considère par exemple la donnée initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et par suite, la donnée initiale discrète

$$u_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq 0 \\ -2 & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

on vérifie facilement que

$$u_j^n = u_j^0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

et donc la solution numérique converge vers la fonction $u(x, t) = u_0(x)$ qui n'est pas solution faible de l'équation de Burgers (figure 3.1).

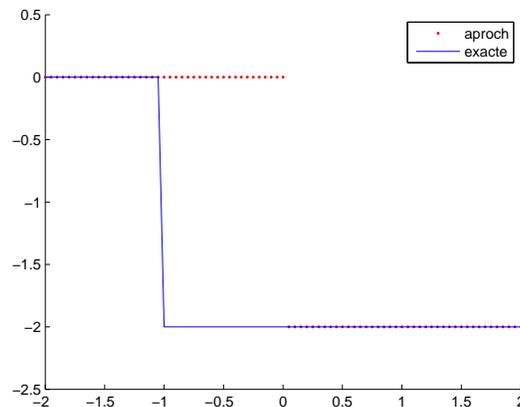


FIGURE 3.1 – solutions exacte et approchée de l'équation de bürgers sous forme non-conservative

Pour éviter le problème de convergence vers une fonction qui n'est pas solution de notre problème, on utilise des schémas "sous forme conservative"

3.1 - GÉNÉRALITÉS SUR LES SCHÉMAS CONSERVATIFS

Définition 7 (schémas conservatifs):

soit $u_j^0, j \in \mathbb{Z}$, données. on dit que le schéma (3.3) peut se mettre sous forme conservative s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ continue tel que l'on ait :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)) \quad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

g est appelée le flux numérique du schéma.

on utilisera souvent la notation

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

où

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n)$$

cette forme est très naturelle si on voit u_j^n comme approximation de \bar{u}_j^n la valeur moyenne de u sur l'intervalle $]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ évaluée en $t = t^n$

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx$$

Si on intègre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

sur $]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\times]t^n, t^{n+1}[$ on obtient

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt = 0$$

et on a

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt \right].$$

Par comparaison avec (3.5), on voit que

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt$$

Une façon de construire des schémas conservatifs consiste à utiliser les schémas de différences finies usuels, mais en démarrant par la forme conservative de l'équation au lieu de la forme quasi-linéaire.

Exemple 3.1.1:

Par exemple, si on veut généraliser le schéma décentré à droite qu'on a utilisé pour l'équation de Burgers dans l'exemple (3.0.7), utilisant cette fois-ci la forme conservative, on obtient

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \left[\frac{1}{2}(u_{j+1}^n)^2 - \frac{1}{2}(u_j^n)^2 \right]$$

c'est sous la forme (3.5) avec

$$g(u, v) = \frac{1}{2}v^2$$

plus généralement, pour une fonction de flux quelconque f , la fonction de flux numérique est :

$$g(u, v) = f(v)$$

Dans la figure 3.2, on donne la solution exacte et la solution numérique pour le même test de la figure 3.1. on observe que, pour cet exemple, il y a convergence de la solution numérique vers la solution exacte.

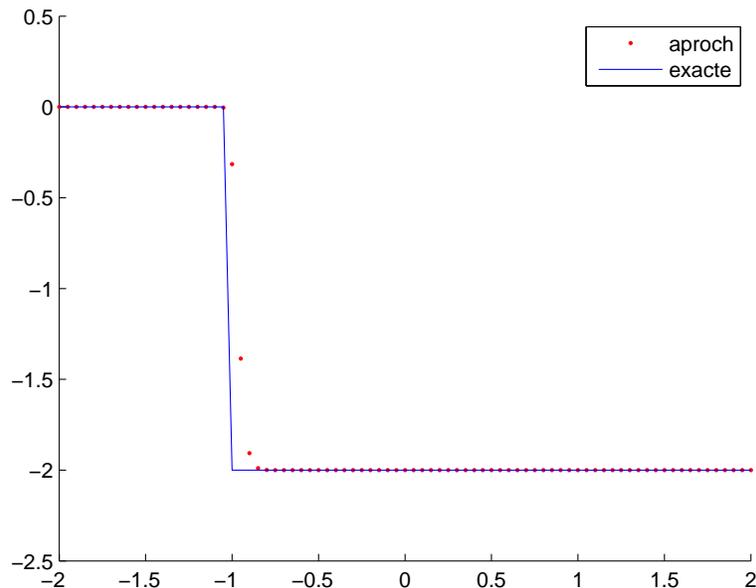


FIGURE 3.2 – solutions exacte et approchée de l'équation de Burgers sous forme conservative

D'autre part, on a la généralisation du schéma décentré à gauche à un schéma conservatif

où le flux numérique est

$$g(u, v) = f(u)$$

Vers la fin de ce chapitre, On verra une généralisation du schéma de Lax-Friedrichs.

Un certain nombre de notions est nécessaire lors de la résolution des lois de conservation au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont : la convergence, la stabilité, et la consistance.

Convergence

On définit la solution numérique du problème (3.1) comme l'extension de l'approximation discrète (3.2) à une fonction constante par morceaux, on la note u_Δ et elle est définie par :

$$u_\Delta(x, t) = u_j^n \quad \forall x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}]$$

On parle de la convergence de (u_j^n) vers u dans le sens :

$$\|u_\Delta - u\|_{L_{loc}^\infty} \xrightarrow{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} 0$$

où L_{loc}^∞ est l'espace des fonctions mesurables localement bornées dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$

Consistance

La consistance exprime le fait que l'opérateur aux différences finis converge vers l'opérateur différentiel lorsqu'on raffine le maillage (lorsque le pas de discrétisation tend vers 0).

Définition 8:

le schéma conservatif (3.5) est dit consistant si

$$g(u, u) = f(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.1.2:

dans l'exemple 3.1.1, le schémas ainsi définit est consistant.

Ordre d'un schéma

L'exactitude d'un schéma numérique mesure la qualité de l'approximation de la solution exacte du problème, l'erreur totale est obtenue en retranchant la discrétisée de la solution exacte, cette erreur est une fonction de Δt^q et Δx^p , L'ordre du schéma

est alors q dans le temps et p dans l'espace.

Proposition 3.1.1

un schéma conservatif et consistant est au moins d'ordre un en espace et en temps.

Stabilité

un schéma est stable si l'erreur entre la solution exacte du problème et la solution discrétisée reste bornée dans le temps et dans l'espace. La plupart des schémas ont une stabilité conditionnée par le choix de Δx et Δt .

Pour notre étude les schémas sont stable sous la condition de CFL (Courant-Friedrichs-lewy)

$$\alpha_n \sup_{j \in \mathbb{Z}} |c(u_j^n)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.6)$$

C'est une condition nécessaire pour la convergence, mais pas suffisante. (pour plus de détails, on invite le lecteur à consulter [3] ou [4]).

On a le résultat de convergence suivant :

THÉORÈME 3.1.1 ([1]):

Pour un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

Théorème de Lax-Wendroff

L'importance de la forme conservative pour un schéma est illustrée par le théorème suivant

Théorème 3.1.1

soit u_j^n l'approximation discrète par un schéma conservatif consistant. Si u_j^n converge vers une fonction v dans le sens défini dans le paragraphe de convergence, alors v est une solution faible du problème (3.1).

(La démonstration de ce théorème est bien détaillée dans [3])

Ce théorème nous assure que les schémas conservatifs sont adaptés au calcul des solutions faibles. Notons qu'un schéma qui ne peut pas s'écrire sous forme conservative peut très bien converger vers une fonction qui n'est pas solution faible du problème (voir précédemment exemple 3.0.7).

Remarque 4:

- Le théorème 3.1.1 ne garantit pas la convergence, et le schéma peut être instable.
- il ne garantit pas l'unicité de la solution.

- Si le schéma converge, le théorème ne garantit pas qu'il converge vers la solution entropique

Exemple 3.1.3 (Schéma de Murman-Roe):

Considérons le schéma, dit de Murman-Roe, suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha [g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)]$$

où

$$g(u, v) = \frac{1}{2} [f(u) + f(v) + |c(u, v)|(u - v)]$$

avec

$$c(u, v) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v \\ f'(u) & \text{si } u = v \end{cases}$$

Ce schéma coïncide avec le schéma décentré lorsque f est monotone.

Ce schéma est **conservatif**. De plus, il est **consistant** car $g(u, u) = f(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Sous la condition de CFL (3.6), et d'après le théorème de Lax-wendroff 3.1.1, le schéma va tendre vers une solution faible du problème qui n'est pas nécessairement la solution entropique.

En effet, soit à résoudre numériquement à l'aide du schéma de Murman-Roe, le problème (3.1) où la donnée initiale est donnée par

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et u_g et u_d sont tels que $f(u_g) = f(u_d)$.

La donnée initiale discrète est :

$$u_j^0 = \begin{cases} u_g & \text{si } j \leq 0 \\ u_d & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$u_j^1 = u_j^0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

et donc,

$$u_j^n = u_j^0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

ainsi, ce schéma permet de calculer une solution du problème donnée par

$$u(x, t) = u_0(x) \quad \forall t > 0$$

c'est une solution faible car elle vérifie la relation Rankine-Hugoniot (1.10).

Si $\underline{u_g} \geq \underline{u_d}$, il s'agit bien de la solution entropique, mais si $\underline{u_g} < \underline{u_d}$, la solution entropique

correspond à une onde de détente et non à ce choc stationnaire.

Dans la figure 3.3, on a la solution entropique et la solution approchée calculée à l'aide du schéma de Murmann-Roe de l'équation de Burgers pour deux données initiales.

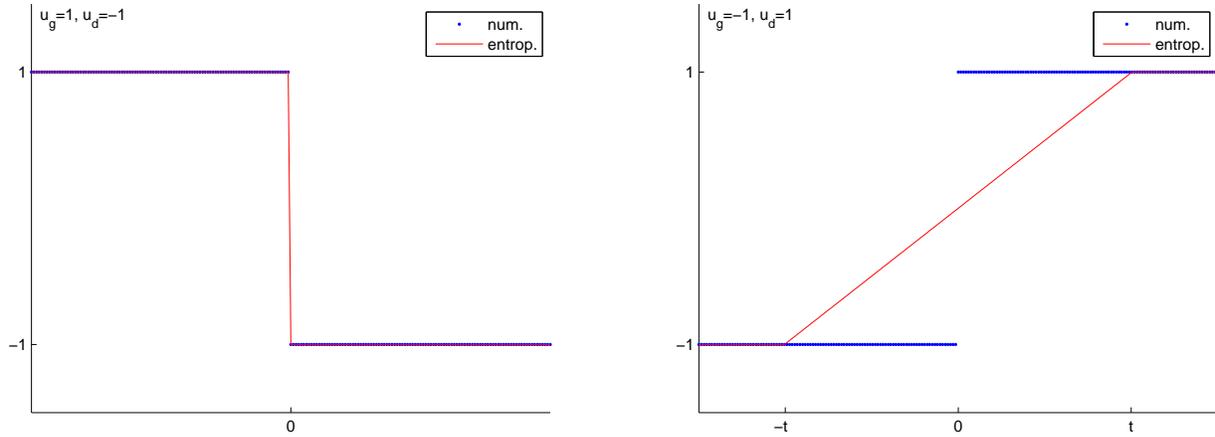


FIGURE 3.3 – solutions entropique et numérique par le schéma de Murman-Roe de l'équation de Burgers

On verra que ce schéma est non-entropique

Schémas entropiques

Dans cette section on va énoncer un critère qui assure la convergence (si cette dernière a lieu) vers la solution entropique.

On rappelle que la solution entropique u doit vérifier la condition d'entropie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} S(u) \leq 0 \quad (3.7)$$

pour toute entropie η de flux S (voir 6 au chapitre précédent).

Définition 9 (Schéma consistant avec la condition d'entropie):

Le schéma 3.5 est dit consistant avec la condition d'entropie 3.7 si et seulement si il existe une fonction $G : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que

i) $G(u, u) = S(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$

ii) Pour toute solution (u_j^n) de 3.5 on a :

$$\eta_j^{n+1} \leq \eta_j^n - \alpha(G_{j+\frac{1}{2}} - G_{j-\frac{1}{2}}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

où l'on a posé

$$\eta_j^n = \eta(u_j^n) \quad ; \quad G_{j+\frac{1}{2}} = G(u_j^n, u_j^{n+1})$$

La fonction G est appelée "le flux d'entropie numérique".

Ceci conduit à définir les schémas entropiques

Définition 10:

On dit que le schéma 3.5 est **entropique** s'il est consistant avec toute condition d'entropie.

Théorème 3.1.2

Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, si de plus le schéma est entropique alors la limite v est l'unique solution entropique.

En pratique, c'est difficile de vérifier si un schéma est entropique!!

Nous allons donc se restreindre à une classe particulière des schémas entropiques : Les schémas monotones

Définition 11 (schéma monotone):

soit u et v les solutions du problème (3.1) pour les données initiales u_0 et v_0 , et (u_j^n) et (v_j^n) leurs approximations par un schéma numérique.

alors le schéma est dit monotone si

$$(u_j^n \geq v_j^n, \quad \forall j \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (u_j^{n+1} \geq v_j^{n+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour vérifier la monotonie d'un schéma, on a :

Proposition 3.1.2

Le schéma

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

est monotone si et seulement si la fonction H est croissante de chacun de ses arguments.

Notons que si H est différentiable alors le schéma (3.1.2) est monotone si et seulement si

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} \geq 0, \quad \text{pour } i = j - 1, j, j + 1$$

En général, la fonction H dépend des pas de discrétisation, et donc la monotonie sera conditionnée!!

Le lien entre les schémas monotones et les schémas entropiques est donnée par la proposition suivante (la preuve est dans [3]).

Proposition 3.1.3

Un schéma conservatif, consistant et monotone est entropique.

Malheureusement, la portée des schémas monotones est limitée par leur ordre :

Proposition 3.1.4

Un schéma conservatif, consistant et monotone est d'ordre 1 (exactement).

(voir ([3]))

3.2 - SCHÉMA DE LAX-FRIEDRICHS

La généralisation du schéma de Lax -Friedrichs aux équation non linéaire prend la forme

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\alpha_n}{2}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) \quad (3.8)$$

Ce schéma peut s'écrire sous forme conservative (3.5) si on prend

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) + \frac{1}{\alpha_n}(u - v)$$

De plus,

$$g(u, u) = f(u)$$

donc il est consistant.

Le schéma de Lax-Friedrichs est monotone sous la condition de CFL (3.6).

En effet, la fonction $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ associée au schéma (3.8) s'écrit comme suit

$$H(u, v, w) = \frac{1}{2}(u + w) - \frac{\alpha_n}{2}(f(w) - f(u))$$

D'où :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2}c(u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0 \quad \text{avec } c = f'$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_n}{2}c(w)$$

Donc H est croissante en chacun de ces arguments si et seulement si

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\alpha_n}{2}c(\cdot) \geq 0$$

par conséquent, le schéma est monotone sous la condition CFL (3.6).

3.3 - SCHÉMA DE GODUNOV

Dans cette section, on va introduire un autre schéma monotone : Le schéma de Godunov, qui est sans doute le plus classique des schémas conservatifs de type volumes

finis.

Son principe est de considérer une série de problèmes de Riemann locaux.

Soit $u^n = (u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ une approximation de $u(\cdot, t^n)$, et soit u_Δ la fonction constante par morceaux (définie en 3.1) telle que :

$$u_\Delta(x, t) = u_j^n \quad \forall x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}] \quad (3.9)$$

On définit alors $v^{n+1} = (v_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ approximation l'approximation de $u(\cdot, t^{n+1})$ comme projection sur l'ensemble des fonctions constante par morceaux de la solution exacte du problème de Riemann suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > t^n \\ w(x, t^n) = u_\Delta(x, t^n) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.10)$$

Sous la condition

$$\alpha_n \sup_{j \in \mathbb{Z}} |c(u_j^n)| \leq \frac{1}{2}$$

les deux ondes qui passent par les points $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j+\frac{1}{2}}$ n'interfèrent pas. et la solution du problème (3.10) est donnée par :

$$w(x, t) = w_R\left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t^n}, u_j^n, u_{j+1}^n\right) \quad \text{si} \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

où w_R est la solution du problème de Riemann à deux états définie en 2.0.2.

Finalement, on pose :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} w(x, t^{n+1}) dx. \quad (3.12)$$

Afin d'expliciter la forme conservative du schémas, intégrons l'équation dans le système (3.10) sur $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]$, nous obtenons

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (w(x, t^{n+1}) - w(x, t^n)) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (f(w(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - f(w(x_{j-\frac{1}{2}}, t))) dt = 0$$

utilisant (3.11) et (3.12), nous obtenons

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (f(w_R(0, u_j^n, u_{j+1}^n)) - f(w_R(0, u_{j-1}^n, u_j^n))) \quad (3.13)$$

D'après la proposition 2.0.3 du chapitre précédent, la fonction $z \rightarrow f(w_R(z, u_g, d))$ et continue en $z = 0$, et donc, la relation (3.13) est bien la forme conservative du schéma de Godunov. Son flux numérique est alors donné par

$$g(u, v) = f(w_R(0, u, v))$$

De plus, on remarque que $g(u, u) = f(u)$, donc le schéma est consistant.

Le schéma de Godunov est monotone. En effet, on a vu dans le chapitre précédent (proposition 1.3.1) que l'opérateur qui à la donnée initiale associe la solution entropique est monotone et l'opération de projection sur l'ensemble des fonctions constantes par morceaux l'est aussi.

Par conséquent, le schéma est entropique d'ordre 1.

3.4 - TESTS NUMÉRIQUES

Afin de pouvoir tester les schémas de Lax-Friedrichs et de Godunov, nous allons utiliser MATLAB et adopter l'architecture générale suivante :

- une fonction **flux** pour définir la fonction de flux f .
- une fonction **vitesse** pour définir la dérivée de la fonction de flux : c .
- deux fonctions pour définir les fonctions de flux numérique des schémas **g-lax** et **g-godunov**.
- et une fonction **u0** pour la donnée initiale u_0 .
- enfin, un script général permettant de réaliser la simulation de ces schémas.

Algorithme

- 1) Données :
 - cfl : nombre CFL.
 - a,b : bornes d'intervalle du test.
 - N : nombre de sous-intervalles de discrétisation.
 - tf : temps final de test.
- 2) Calcul du pas de discrétisation spatiale et construction de la subdivision spatiale.
- 3) initialisation : définition de la donnée initiale discrète.
- 4) boucle en temps :
 - calcul du pas de temps utilisant le nombre CFL.
 - itération du schéma.
- 5) tracer le graphe de la solution en fonction de x à différent instants.

Applications

Dans cette dernière partie, on validera le code défini précédemment sur deux exemples du problème de Riemann à trois états associé à l'équation de Burgers dont on a déjà explicité la solution exacte dans la dernière section du premier chapitre.

Exemple 3.4.2:

pour le premier test, on considère la donnée initiale non-monotone suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

la solution exacte est :

* pour $t < t^* = 1$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x \leq t \\ 1 & \text{si } t < x \leq \frac{t}{2} + 1 \\ -1 & \text{si } x > \frac{t}{2} + 1 \end{cases}$$

* si $t^* < t < t^\sim = 4$,

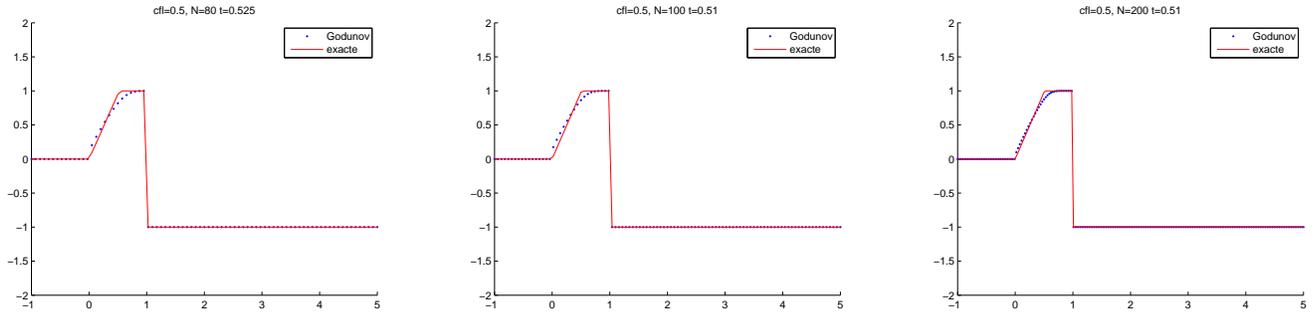
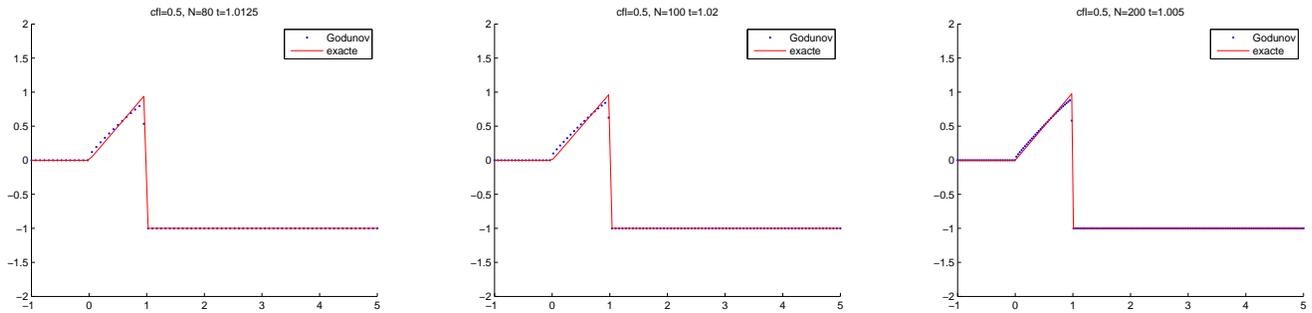
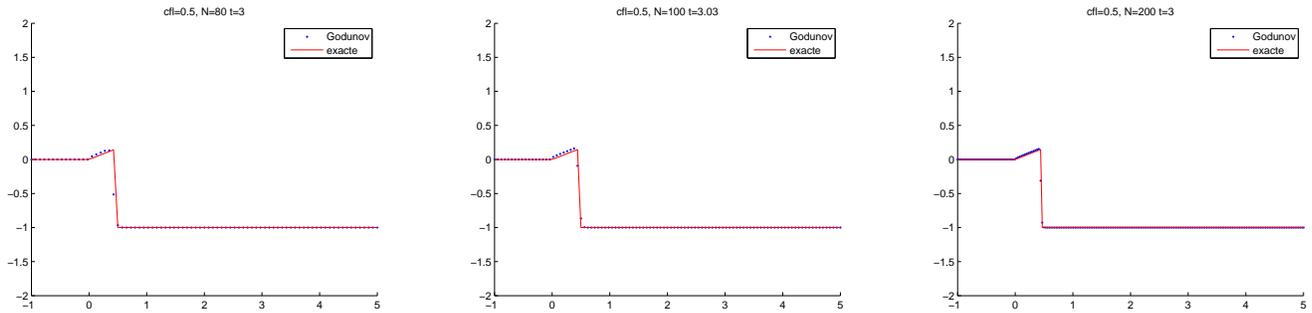
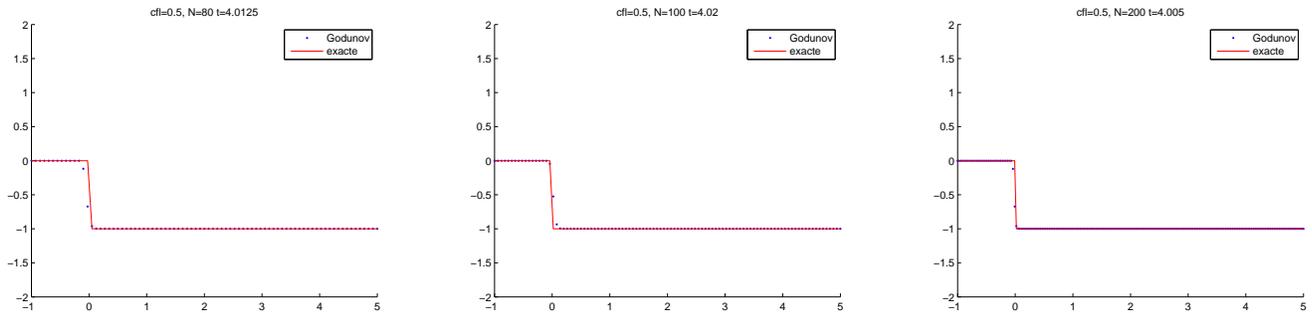
$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x \leq 2\sqrt{t} - t \\ -1 & \text{si } x > 2\sqrt{t} - t \end{cases}$$

* pour $t > t^\sim$

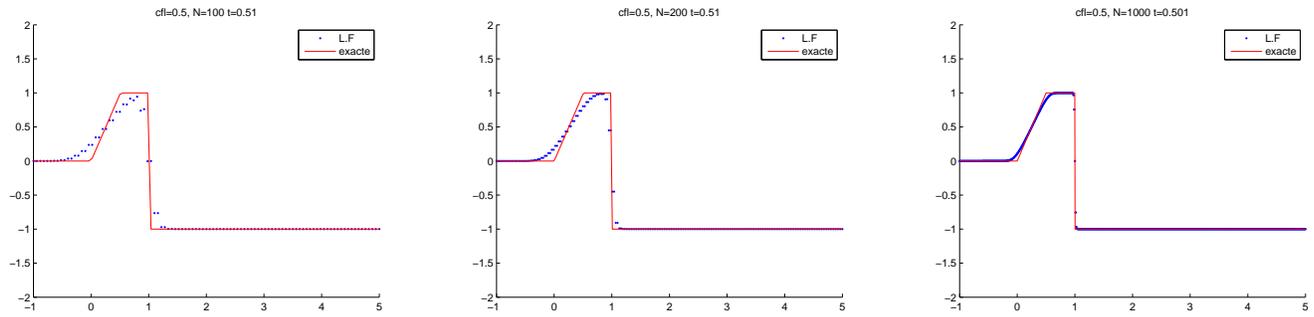
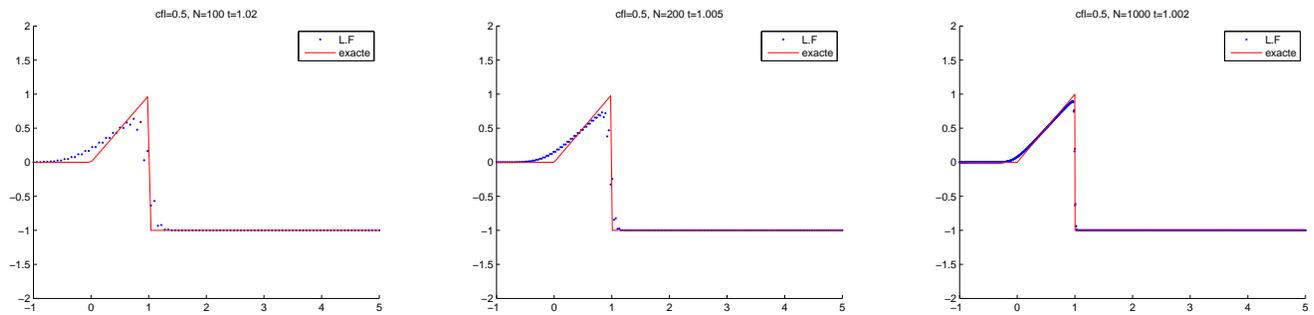
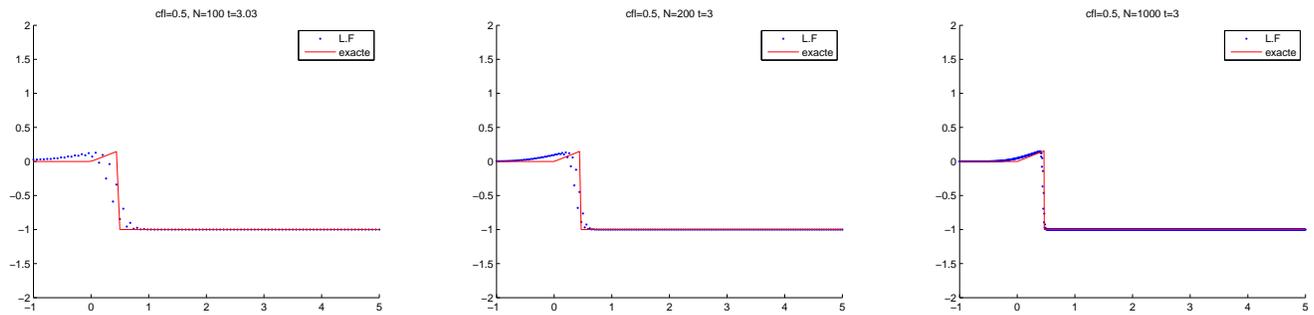
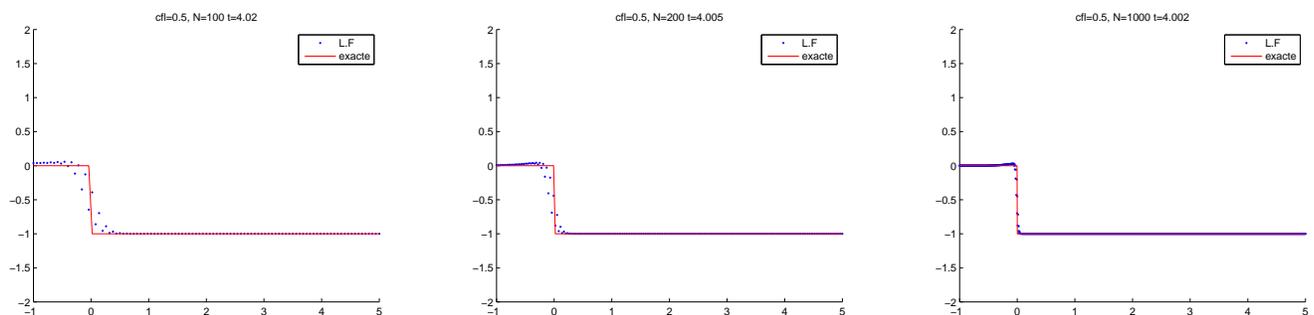
$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{t}{2} + 2 \\ -1 & \text{si } x > \frac{t}{2} + 2 \end{cases}$$

Pour x entre -1 et 5 , on peut voir la solution sous ces trois formes en variant t entre 0 et $t_f = 5$.

Dans les figures suivantes, on compare la solution exacte (rouge) et la solution numérique par le schéma de Godunov (bleue) à différents instants, en changeant le nombre de points du maillage à chaque instant, avec $CFL = 0.5$

FIGURE 3.4 – solutions exacte et numérique $t = 0.5$ FIGURE 3.5 – solutions exacte et numérique $t = 1$ FIGURE 3.6 – solutions exacte et numérique $t = 3$ FIGURE 3.7 – solutions exacte et numérique $t = 4$

Tout comme pour le schéma de Godunov, dans les figures suivantes on présente le schéma de Lax-Friedrichs.

FIGURE 3.8 – solutions exacte et numérique $t = 0.5$ FIGURE 3.9 – solutions exacte et numérique $t = 1$ FIGURE 3.10 – solutions exacte et numérique $t = 3$ FIGURE 3.11 – solutions exacte et numérique $t = 4$ **Remarque 5:**

Dans les figures précédentes, on voit bien la convergence vers la solution exacte, mais

on remarque que le schéma de Godunov converge pour un nombre de points de maillage plus petit que pour le schéma de Lax-Friedrichs, ce qui montre clairement l'efficacité de la méthode des volumes finis par rapport à celle des différences finies.

Exemple 3.4.3:

considérons maintenant la donnée initiale décroissante suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La solution exacte est :

- pour $t < t^* = 1$

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{t}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{t}{2} < x \leq 1 - \frac{t}{2} \\ -1 & \text{si } x > 1 - \frac{t}{2} \end{cases}$$

- si $t > t^*$

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } x > \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dans les figures suivantes, on a la solution exacte et la solution approchée dans $[-1, 2]$ pour $t = 0.5$ et $t = 1$ avec $cfl = 0.5$.

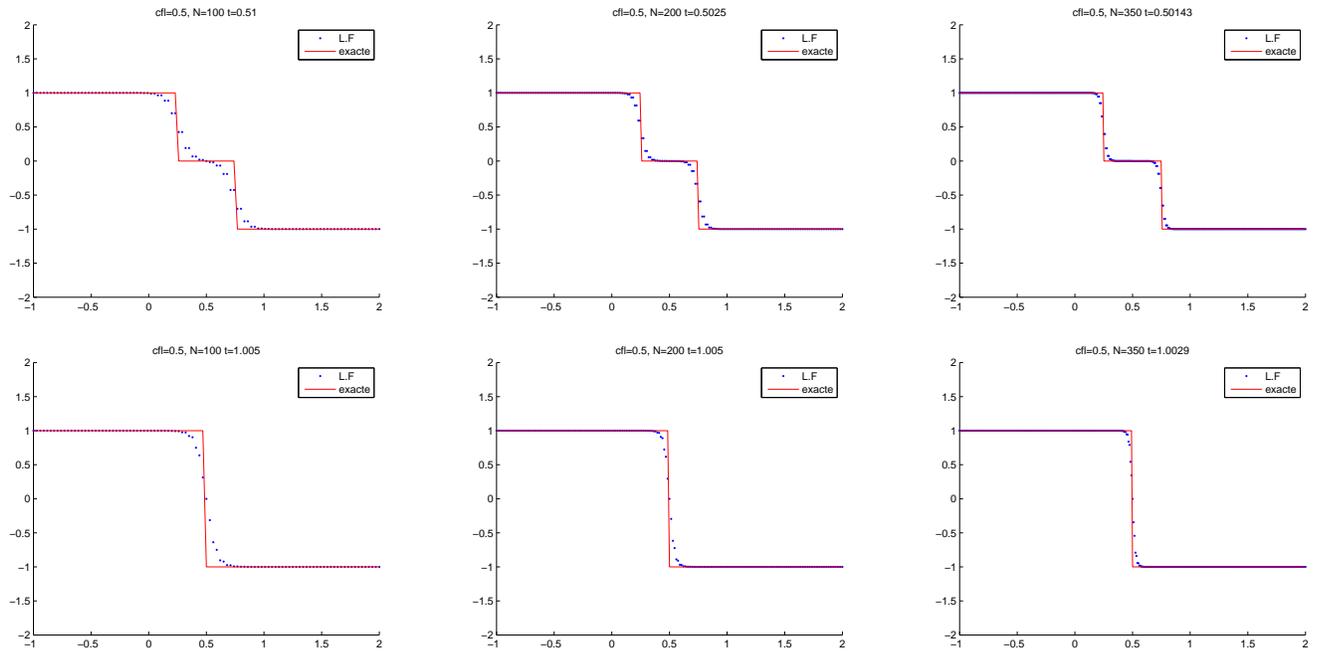


FIGURE 3.12 – approximation par le schéma de Lax-Friedrichs

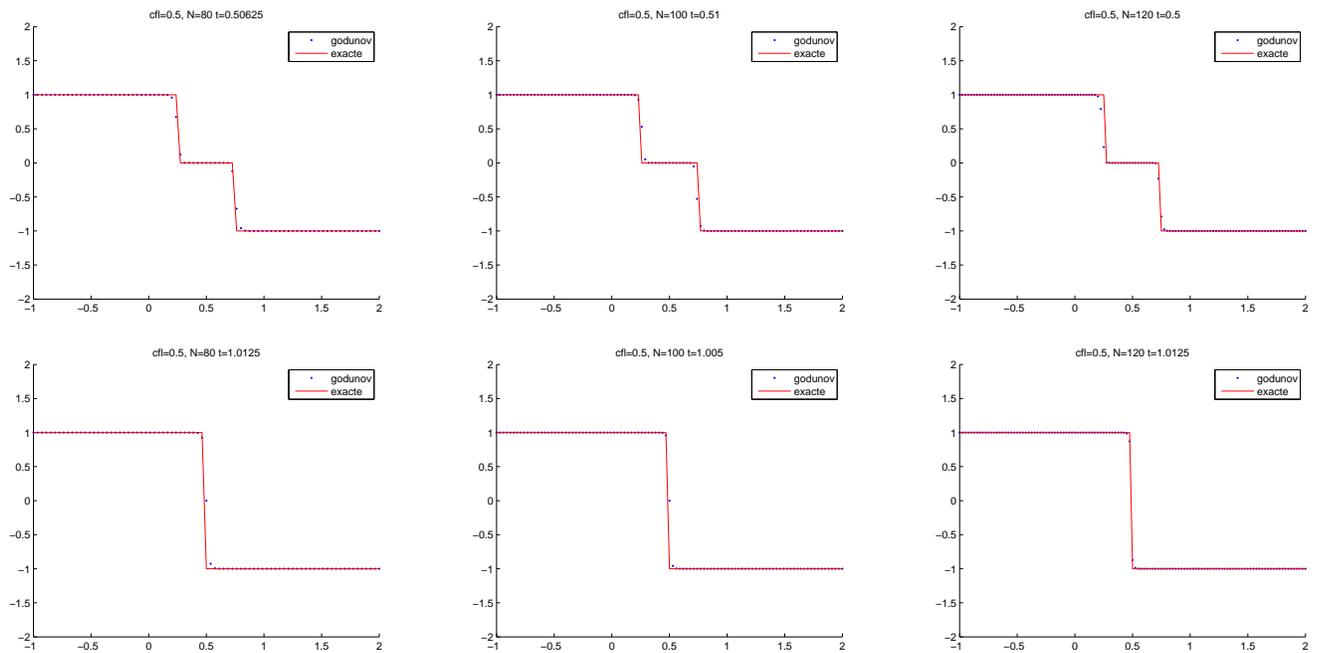


FIGURE 3.13 – approximation par le schéma de Gdunov

Conclusion :

Dans ce mémoire, on a traité les problèmes d'e.d.p hyperboliques non-linéaires issus de loi de conservation scalaires. La particularité des problèmes en étude réside dans l'apparition de discontinuités et ceci même si la donnée initiale est régulière, ce phénomène est réellement lié à la non-linéarité de l'équation.

Les méthodes conservatives qu'on a étudié, sont capables de prendre en compte les discontinuités des solutions par opposition aux schémas de différences finis usuels. On a montré que le schéma numérique appliqué doit être consistant avec toute condition d'entropie pour qu'on puisse avoir la convergence vers l'unique solution physique, mais ce critère de consistance avec la condition d'entropie est peu pratique, c'est pour cela qu'on a se limité au schémas monotones. malheureusement, ses schémas sont seulement d'ordre un.

Bibliographie

- [1] R.J.Leveque. *Numerical methods for conservation laws*, volume 132. Springer, 1992.
- [2] Denis Serre. *Systems of Conservation Laws 1 : Hyperbolicity, entropies, shock waves*. Cambridge University Press, 1999.
- [3] James William Thomas. *Numerical partial differential equations : conservation laws and elliptic equations*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] Lloyd Nicholas Trefethen. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*. Cornell University-Department of Computer Science and Center for Applied Mathematics, 1996.