

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Modélisations Mathématiques des Systèmes
complexes

présenté par

AMMI SAID LAKHDAR

Soutenu le : 28 / 06 / 2016

Quelques modèles avec diffusion linéaire et non-linéaire

Soutenu devant le jury composé de :

M. TOUAOULA M. T.	Pr. Université de Tlemcen	Président
M. MIRI S. E-H.	M.C.A Université de Tlemcen	Examineur
M. ATTAR A.	M.C.B Université de Tlemcen	Examineur
Mlle. MOSTEFAOUI I. M.	M.A.B, EPST Oran	Encadreur

Année Universitaire : 2015-2016

Dédicace

Je dédie ce travail

à mes parents

Mouhammed et Fatima Zohra

à toute ma famille

Remerciement

Je remercie tout d'abord Allah, qui m'a donnée la santé et la volonté pour suivre les études.

Je veux adresser mes remerciements à Docteur **I. M. Mostefaoui**, pour sa grande disponibilité et ses encouragements tout au long de la rédaction de ce mémoire. C'est grâce à ses orientations précieuses ce travail a pris cette forme.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à le professeur **A. Moussaoui**, notre chef de projet de notre master, ainsi tout mes enseignants, pour ses efforts pendant ces deux ans du master. .

Je remercie aussi le professeur **M. T. TOUAOULA** pour sa disponibilité et d'avoir accepté de présider le jury.

je tiens à remercier monsieur **S. E-H. MIRI** et monsieur **A. ATTAR** de bien vouloir évaluer ce travail.

Je remercie toute l'équipe pédagogique de département de mathématiques, surtout le chef de département monsieur **B. Mebkhout**.

Je tiens à remercie tous mes amis, ma famille, et toute personne qui m'a aidé dans ce travail.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Préliminaires	4
2.1	Systèmes dynamiques	4
2.2	Quelques outils pour les systèmes dynamiques	5
2.2.1	Stabilité locale	6
2.2.2	Stabilité globale	7
2.3	Résultats fondamentaux des systèmes de réaction-diffusion	7
2.3.1	Domaine positivement invariant	8
3	Dynamique de proie-prédateur avec diffusion	10
3.1	Introduction	10
3.2	Étude qualitative du modèle	11
3.2.1	Bornitude de la solution	14
3.2.2	Points d'équilibre	17
3.2.3	Stabilité locale des points d'équilibre	19
3.2.4	Stabilité globale	21
3.3	Conclusion	24
4	Application numérique	26
4.1	Introduction	26
4.2	Système dynamique	27
4.3	Système avec diffusion	27
4.4	Points d'équilibre	30

4.5	Conclusion	33
5	Points stationnaires non-triviaux d'un modèle avec diffusion non-linéaire	35
5.1	Introduction	35
5.2	Définitions et Notations	36
5.3	Présentation du modèle	38
5.4	Non-existence des Points stationnaires	39
5.5	Bornitude des points stationnaires	41
5.6	Conclusion	43
	Conclusion générale	44
	Bibliographie	45

Chapitre 1

Introduction

Le 20^{ème} siècle a été caractérisé par le développement des méthodes mathématiques destinées à la modélisation des systèmes biologiques. L'un des efforts, dans la modélisation de dynamique des populations est la construction et l'étude du modèle de proie-prédateur. Le premier modèle de proie-prédateur est celui de Lotka-volterra (1924–1926). Des années plus tard, Holling a proposé une classification des fonctions de réponse en trois types (1959)[9]

$$\begin{aligned}f_1(R) &= \min\{\lambda R, C^{te}\} \\f_2(R) &= \frac{\lambda R}{1 + b\lambda R} \\f_3(R) &= \frac{\lambda R^\mu}{1 + b\lambda R^\mu}\end{aligned}$$

Après, le mathématicien Leslie a présenté un modèle de proie-prédateur, où la capacité limite des prédateurs dépend du nombre ou de la densité des proies.

Le modèle de proie-prédateur avec modification de Leslie-Gower est donné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dH}{dT} = \left(a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1} \right) H & T > 0 \\ \frac{dP}{dT} = \left(a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2} \right) P & T > 0 \\ H(0) = H_0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Il a été étudié et publié par **M. A. Aziz-Alaoui** et ses collaborateurs dans plusieurs articles (voir par exemple [3, 4, 2]).

Le modèle devient très réaliste quand on prend en considération la diffusion et l'espace comme une variable. Le même modèle avec le terme de diffusion s'écrit de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial H}{\partial T} = D_1 \Delta H + \left(a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1} \right) H & x \in \Omega, T > 0 \\ \frac{\partial P}{\partial T} = D_2 \Delta P + \left(a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2} \right) P & x \in \Omega, T > 0 \\ H(0, x) = H_0(x) & x \in \Omega \\ P(0, x) = P_0(x) & x \in \Omega \\ \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

Il a été étudié par **M. A. Aziz-Alaoui**, pour des conditions de type Neumann aux bords, en 2008 (voir [5]).

Les termes de la diffusion classique, Δu et Δv , considèrent le fait que les populations sont distribuées de manière homogène. Sauf que, dans plusieurs phénomènes biologiques, la distribution des populations est non-homogène. Il est nécessaire d'introduire un terme de diffusion non-linéaire au lieu de la diffusion classique. Parmi ces modèles, nous citons un modèle proposé, en 2009 par **M. Delgado, M. Montenegro, et A. Suárez** (voir [7]), le modèle est donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(\lambda - u + bv) & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta[(1 + \beta u)v] + v(\mu - v + cu) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega \\ v(0, x) = v_0(x) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

Dans ce mémoire, on a étudié deux modèles, l'un avec la diffusion linéaire (classique), et l'autre avec un terme de diffusion non-linéaire. Le travail est partagé en quatre chapitres :

Le premier chapitre mentionne quelques notions de base à utiliser dans les chapitres

suivants, il est inspiré de quelques références comme le livre de P. Auger, C. Lett et J. C. Poggiale [1], et le livre de J. Smoller [12].

Dans **le deuxième chapitre**, nous avons étudié le modèle de proie-prédateur avec modification de Leslie-Gower sans et avec diffusion, et la présentation numérique des résultats de cette étude a été faite dans **le troisième chapitre**.

Dans **le quatrième chapitre**, on a cherché les cas de la non-existence des points d'équilibre, non-triviaux, du modèle de Lotka-Volterra avec un terme de diffusion non-linéaire.

Chapitre 2

Préliminaires

Sommaire

2.1	Systèmes dynamiques	4
2.2	Quelques outils pour les systèmes dynamiques	5
2.2.1	Stabilité locale	6
2.2.2	Stabilité globale	7
2.3	Résultats fondamentaux des systèmes de réaction-diffusion . .	7
2.3.1	Domaine positivement invariant	8

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions de base sur les équations différentielles ordinaires, qu'on va utiliser dans les chapitres suivants.

2.1 Systèmes dynamiques

Dans cette partie, $I = [t_0, t_0 + A] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non-vidé, U est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1 (Système dynamique)

Soient $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Un système dynamique est une relation du type

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{2.1}$$

Définition 2 (Domaine positivement invariant)

Un ensemble Σ est dit positivement invariant pour le système (2.1)

si $x(t_0) \in \Sigma$ alors $x(t) \in \Sigma \forall t \in I$.

Définition 3 (isoclines zéros)

Les isoclines zéros sont des ensembles des points de \mathbb{R}^n , où l'une des composantes du vecteur vitesse est nulle.

i. e. une isocline zéro vérifie :

$$x'_i(t) = f_i(t, x(t)) = 0$$

pour $1 \leq i \leq n$ fixé.

Dans la partie suivante, on considère le système autonome suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ et $f(x) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T.$$

2.2 Quelques outils pour les systèmes dynamiques

Ici, on présente quelques théorèmes qui sont intéressants pour étudier les systèmes dynamiques. Commençons par la définition d'un point d'équilibre.

Définition 4 (point d'équilibre d'un système dynamique)

Un point d'équilibre du système (2.2) est le point $\tilde{x} \in U$, tel que

$$f(\tilde{x}) = 0.$$

Théorème 2.1 (Théorème de comparaison)

Soient u et v deux fonctions définies sur \mathbb{R}_+ .

Si

$$\frac{du}{dt} \leq \frac{dv}{dt} \quad (2.3)$$

et

$$u(0) \leq v(0) \tag{2.4}$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+; \quad u(t) \leq v(t).$$

Lemme 2.1 (Lemme de Gronwall)

Soit ϕ une fonction absolument continue, satisfait l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} + \alpha_1 \phi(t) \leq \alpha_2, \quad t \geq 0, \quad \text{où } (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1 \neq 0$$

Alors,

$$\forall 0 \leq \tilde{T} \leq t, \quad \phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T}) \right) e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})}.$$

2.2.1 Stabilité locale

Définition 5

On dit qu'un point d'équilibre \tilde{x} du système (2.2) est localement stable, si pour chaque condition initiale x_0 autour de \tilde{x} , la solution reste proche de \tilde{x} .

i. e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \| \tilde{x} - x_0 \| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \| x(t) - \tilde{x} \| < \varepsilon.$$

De plus, si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| x(t) - \tilde{x} \| = 0$$

on dit que \tilde{x} est localement asymptotiquement stable.

Pour étudier cette stabilité locale, on linéarise le système (2.2) autour du point d'équilibre, on obtient le système linéarisé suivant

$$\dot{u} = Df(\tilde{x})u$$

où $Df(\tilde{x})$ et la matrice Jacobienne de f calculer au point \tilde{x} .

Théorème 2.2

Si toutes les valeurs propres de $Df(\tilde{x})$ sont de partie réelle strictement négative, alors \tilde{x} est localement asymptotiquement stable pour le système (2.2).

Le point \tilde{x} est instable si au moins l'une des valeurs propres de $Df(\tilde{x})$ est de partie réelle strictement positive.

2.2.2 Stabilité globale

La théorie de Lyapunov est largement utilisée pour démontrer la stabilité globale des points d'équilibre. Ici, nous en présentons le théorème de Lyapunov.

Théorème 2.3 (Théorème de Lyapunov)

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système :

$$X'(t) = F(X)$$

Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue différentiable, telle que :

$$V(0) = 0 \text{ et } V(X) > 0, \forall X \neq 0$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$$

$$\frac{dV}{dt} < 0, \forall X \neq 0$$

Alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

2.3 Résultats fondamentaux des systèmes de réaction-diffusion**Définition 6 (point d'équilibre)**

un point d'équilibre x est une solution du système d'équations aux dérivées partielles, qui ne dépend pas de temps. i. e. $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$.

Définition 7 (Formule de Green)

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 , et $n(x)$ sa normale extérieure au point x . Soient u, v deux fonctions régulières, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u) v dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &= \int_{\Omega} u \Delta v + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) \\ \int_{\Omega} (\Delta u) v dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \end{aligned}$$

2.3.1 Domaine positivement invariant

Dans cette partie, on considère un système de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + f(u, t) & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

où $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}_+^n$, et f de classe $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

avant de présenter le théorème, nous avons défini la fonction quasi-convexe.

Définition 8 (fonction quasi-convexe)

Une fonction $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite quasi-convexe en v , si chaque fois que $dG_v(\eta) = 0$, alors $d^2G_v(\eta, \eta) \geq 0$.

Maintenant considérons le domaine Σ de la forme :

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{v \in U : G_i(v) \leq 0\}$$

Théorème 2.4 (Ensemble invariant) [12]

Supposons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et pour tout $v_0 \in \partial\Omega$, (alors $G_i(v_0) = 0 \forall i$), les conditions suivantes sont vérifiées :

1. dG_i au point v_0 est un vecteur propre \tilde{A} gauche de $D(v_0, x)$ et $M(v_0, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Si $dG_i D(v_0, x) = \mu dG_i$, avec $\mu \neq 0$, alors G_i est quasi-convexe.
3. $dG_i(f) < 0$ en v_0 .

Alors Σ est un ensemble invariant pour le système (2.5).

Dans la section précédente, on a présenté le théorème de Lyapunov, maintenant, nous présentons le principe d'invariance de LaSalle, qui est aussi très utilisé pour étudier le comportement asymptotique des solutions des systèmes d'équations différentielles.

Théorème 2.5 (Théorème d'invariance de LaSalle) [8]

Soit Ω un compact invariant de $D \subset \mathbb{R}^n$, et soit V une fonction $C^1(D, \mathbb{R})$ telle que la fonction \dot{V} est semi-définie négative sur Ω (i. e. $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in \Omega$).

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ le plus grand sous ensemble invariant de E , avec $E := \{x \in \Omega, \dot{V}(x) = 0\}$.

Alors : toute solution commençant dans Ω converge vers M quand $t \rightarrow \infty$.

Chapitre 3

Dynamique de proie-prédateur avec diffusion

Sommaire

3.1	Introduction	10
3.2	Étude qualitative du modèle	11
3.2.1	Bornitude de la solution	14
3.2.2	Points d'équilibre	17
3.2.3	Stabilité locale des points d'équilibre	19
3.2.4	Stabilité globale	21
3.3	Conclusion	24

3.1 Introduction

Ce chapitre fait l'objet d'une étude mathématique d'un modèle proie-prédateur présenté par Pr. Aziz Allaoui dans [5]

Il s'agit du système de réaction diffusion avec fonction de réponse Holling-type-II, et modification de Leslie-Gower.

La formulation de Leslie-Gower est basée sur l'hypothèse que la réduction dans une population de prédateur a une relation réciproque avec la disponibilité de sa nourriture

préférée, donc, Leslie a introduit un modèle de proie-prédateur, où la capacité limite de l'environnement du prédateur est proportionnel au nombre des proies. Le modèle dynamique est présenté par :

$$\begin{cases} \frac{dH}{dT} = \left(a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1} \right) H \\ \frac{dP}{dT} = \left(a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2} \right) P \end{cases} \quad (3.1)$$

Et le modèle réaction-diffusion associe est :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial T} = D_1 \Delta H + \left(a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1} \right) H \\ \frac{\partial P}{\partial T} = D_2 \Delta P + \left(a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2} \right) P \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$$\begin{cases} H(0, x) = H_0(x) \geq 0 \\ P(0, x) = P_0(x) \geq 0 \end{cases} \quad x \in \Omega$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial \nu} = \frac{\partial P}{\partial \nu} = 0 \quad x \in \partial\Omega$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$ est un domaine borné.

H et P représentent les densités des populations. Les paramètres du modèle sont présentés dans le tableau (3.1), ils sont strictement positifs.

3.2 Étude qualitative du modèle

Dans cette partie nous allons présenter des résultats intéressants sur la bornitude des solutions du modèle, ainsi que les points d'équilibre et la stabilité globale de ces points.

Et pour simplifier les calculs, considérons le changement des variables suivant :

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{a_1}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}} X, & y &= \left(\frac{a_1}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}} Y \\ u(t) &= \frac{b_1}{a_1} H(T), & v(t) &= \frac{c_2 b_1}{a_1 a_2} P(T) \\ t = a_1 T, & a = \frac{a_2 c_1}{a_1 c_2}, & b = \frac{a_2}{a_1}, & e_1 = \frac{b_1 k_1}{a_1}, & e_2 = \frac{b_1 k_2}{a_1}, & \delta = \frac{D_2}{D_1}. \end{aligned}$$

TABLE 3.1 – Paramètres du modèle

Paramètre	Description
a_1	taux de croissance de proie
b_1	la force de la concurrence entre les proies
c_1	la valeur maximale de taux de réduction des proies qui peut atteindre par individu
k_1	la mesure dans laquelle l'environnement offre une protection à proies
a_2	taux de croissance de prédateur
c_2	la valeur maximale de taux de réduction des prédateurs qui peut atteindre par individu
k_2	la mesure dans laquelle l'environnement offre une protection à prédateurs
D_1	le taux de diffusion des proies
D_2	le taux de diffusion des prédateurs

Donc,

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{a_1 \partial H}{\partial t} = \frac{a_1^2 \partial u}{b_1 \partial t}$$

et

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} = \frac{a_1}{D_1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \Rightarrow D_1 \Delta H = \frac{a_1^2}{b_1} \Delta u$$

pour la fonction de réponse :

$$\begin{aligned} \left(a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1} \right) H &= \left(a_1 - a_1 u - \frac{c_1 a_1 a_2 v}{c_2 b_1 \frac{a_1}{b_1} u + k_1} \frac{v}{\frac{a_1}{b_1} u} \right) \frac{a_1}{b_1} u \\ &= \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) \frac{a_1^2}{b_1} u \end{aligned}$$

même calcul pour la deuxième equation, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{a_1 \partial P}{\partial t} = \frac{a_1^2 a_2}{c_2 b_1} \frac{\partial v}{\partial t}$$

et

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = \frac{a_1}{D_1} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \Rightarrow D_2 \Delta P = \frac{D_2 a_1^2 a_2}{D_1 c_2 b_1} \Delta v = \delta \frac{a_1^2 a_2}{c_2 b_1} \Delta v$$

$$\begin{aligned} \left(a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2} \right) P &= \left(a_2 - \frac{a_1 a_2}{b_1} \frac{v}{\frac{a_1}{b_1} u + k_2} \right) \\ &= \left(a_2 - a_2 \frac{v}{u + e_2} \right) \frac{a_1 a_2}{c_2 b_1} v \cdot \\ &= b \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \frac{a_1^2 a_2}{c_2 b_1} v \end{aligned}$$

Après remplacement dans (3.1) et (3.2), on trouve les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) = f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) = g(u, v) \end{cases} \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.3)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \Delta v + g(u, v) \end{cases} \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.4)$$

avec les conditions du Neumann sur le bord, elles sont données par :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial \Omega$$

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x) \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases} \quad x \in \Omega$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$ est un domaine borné.

3.2.1 Bornitude de la solution

Dans cette partie, on va démontrer l'existence, dans \mathbb{R}_+^2 , d'un domaine positivement invariant, par le théorème suivant :

Théorème 3.1 *On note par :*

$$\Sigma = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq u + v \leq A\}$$

où

$$A = \frac{5b + (1 + b)^2(1 + e_2)}{4b}$$

1. Σ est positivement invariant pour le système (3.3)
2. Σ est positivement invariant pour le système (3.4)

preuve

Soit le graphe du domaine Σ qui est présenté par la figure (3.1).

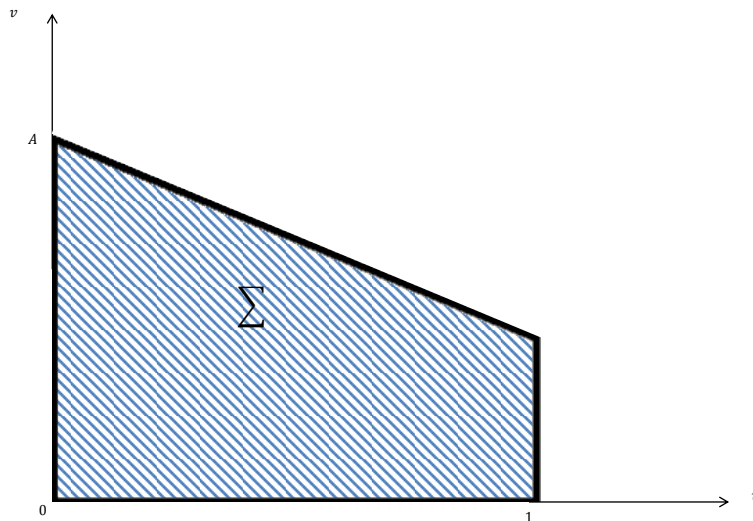


FIGURE 3.1 – Domaine Σ

tout d'abord remarquons que \mathbb{R}_+^2 est positivement invariant pour les deux systèmes (3.3), et (3.4), car les axes $u = 0$ et $v = 0$ sont des isoclines, donc les trajectoires ne les coupent

pas, ce qui démontre que $u \geq 0$ et $v \geq 0$.

Reste à montrer que $u \leq 1$ et $u + v \leq A$ pour les systèmes (3.3) et (3.4).

système (3.3)

Commençons par $u \leq 1$:

On a

$$\frac{du}{dt} = u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) \leq u(1 - u)$$

car

$$a > 0, v(t) \geq 0, u(t) \geq 0, e_1 > 0.$$

Comme

$$x(t) = \frac{1}{1 + ce^{-t}}$$

est la solution de l'équation $\frac{dx}{dt} = x(1 - x)$ avec $c = \frac{1}{u(0)} - 1$, et d'après le théorème de comparaison (voir le théorème 2.1)

$$u(t) \leq x(t) \leq 1.$$

Maintenant, montrons que $u + v \leq A$.

En fait, considérons la fonction $\sigma(t) = u(t) + v(t)$, donc

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \\ &= u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) + bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \\ &\leq u(1 - u) + bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) && \left(\frac{av}{u + e_1} \geq 0 \right) \\ &\leq \frac{1}{4} + bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) && (\max_{\mathbb{R}_+} u(1 - u) = \frac{1}{4}) \\ &\leq \frac{1}{4} - \sigma(t) + u + v + bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \\ \frac{d\sigma}{dt} + \sigma(t) &\leq \frac{1}{4} + 1 + bv \left(1 + \frac{1}{b} - \frac{v}{u + e_2} \right) && (u(t) \leq 1) \end{aligned}$$

Pour calculer

$$\max_{\mathbb{R}_+} \left[v \left(1 + \frac{1}{b} - \frac{v}{u + e_2} \right) \right] \leq \max_{\mathbb{R}_+} \left[v \left(1 + \frac{1}{b} - \frac{v}{1 + e_2} \right) \right]$$

on considère la fonction

$$h(v) = v \left(1 + \frac{1}{b} - \frac{v}{1 + e_2} \right)$$

dont sa première dérivée est :

$$h'(v) = 1 + \frac{1}{b} - \frac{2v}{1 + e_2}$$

$$h'(\tilde{v}) = 0 \Rightarrow \tilde{v} = \frac{(1 + e_2)(1 + b)}{2b}$$

et

$$h''(v) |_{\tilde{v}} = \frac{-2}{1 + e_2} < 0$$

donc

$$\max_{\mathbb{R}_+} \left[v \left(1 + \frac{1}{b} - \frac{v}{u + e_2} \right) \right] \leq h(\tilde{v}) = \frac{(1 + b)^2(1 + e_2)}{4b^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma(t) &\leq \frac{5}{4} + \frac{(1 + b)^2(1 + e_2)}{4b} \\ &\leq \frac{5b + (1 + b)^2(1 + e_2)}{4b} = A \end{aligned}$$

Grâce au lemme de Gronwall (voir lemme 2.1) pour $\alpha_1 = 1$, et $\alpha_2 = A$, on a

$$\forall 0 \leq \tilde{T} \leq t : \sigma(t) \leq A(1 - \sigma(\tilde{T}))e^{-(t-\tilde{T})}$$

pour $\tilde{T} = 0$, on trouve

$$\sigma(t) \leq A(1 - \sigma(0))e^{-t}.$$

Ensuite, comme $(u(0), v(0)) \in \Sigma$, on obtient

$$u(t) + v(t) \leq \frac{5b + (1 + b)^2(1 + e_2)}{4b}.$$

système (3.4)

Pour le système (3.4), on applique le théorème 2.4, avec

$$F = \begin{pmatrix} u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) \\ bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \end{pmatrix}$$

Prenons les fonctions suivantes :

$$P_1(u, v) = u$$

$$P_2(u, v) = u + v$$

Le long de trajectoire $u = 1$ on a,

$$(\nabla P_1, F) = - \left(\frac{av}{1 + e_1} \right) \leq 0$$

En plus, sur la trajectoire $u + v = A$ on a,

$$\begin{aligned} (\nabla P_2, F) &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(u + v) \\ &= 0 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Utilisons le théorème 2.4. Donc, Σ est positivement invariant pour le système (3.4).

3.2.2 Points d'équilibre

Les deux systèmes (3.3) et (3.4) ont des points d'équilibre, triviaux et non-triviaux. Les points d'équilibre triviaux sont donnés par :

$$E_0 = (0, 0); E_1 = (1, 0); E_2 = (0, e_2)$$

en effet :

$$\begin{cases} u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) = 0 \\ bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique que,

$$\begin{cases} u = 0 \text{ ou } \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) = 0 \\ v = 0 \text{ ou } \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$: Ce point d'équilibre représente l'extinction des deux populations.

$(\bar{u}, 0)$: Ce point d'équilibre implique l'extinction de prédateur.

$(0, \bar{v})$: Ce point d'équilibre représente l'extinction de proie.

(u^*, v^*) : Ce point d'équilibre représente la coexistence des deux populations.

proposition 3.1 *Si la condition*

$$ae_2 < e_1 \tag{3.5}$$

est vérifiée, alors le système (3.3) admet un point d'équilibre unique (u^, v^*) à l'intérieur de \mathbb{R}_+^2 .*

preuve (u^*, v^*) vérifie le système suivant ($u \neq 0, v \neq 0$) :

$$\begin{cases} 1 - u^* - \frac{av^*}{u^* + e_1} = 0 \\ 1 - \frac{v^*}{u^* + e_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - u^*)(u^* + e_1) - av^* = 0 \\ v^* = u^* + e_2 \end{cases}$$

on remplace v^* dans la première équation, on obtient :

$$-u^{*2} + (1 - e_1 - a)u^* - (ae_2 - e_1) = 0,$$

donc, le discriminant est donné par

$$\Delta = (1 - e_1 - a)^2 - 4(ae_2 - e_1).$$

Sous la condition (3.5), on déduit que $\Delta > 0$

ce qui donne :

$$u_{*+} = \frac{(1 - e_1 - a) + \Delta^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$u_{*-} = \frac{(1 - e_1 - a) - \Delta^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Or, $(u_{*+}) \cdot (u_{*-}) = (ae_2 - e_1)$, donc $(u_{*+}) \cdot (u_{*-}) < 0$ ce qui implique que : $u_{*+} > 0$ et $u_{*-} < 0$.

Alors, à l'intérieur de $(\mathbb{R}_+)^2$, il existe un unique point d'équilibre donnée comme suit

$$(u^*, v^*) = \left(\frac{(1 - e_1 - a) + ((1 - e_1 - a)^2 - 4(ae_2 - e_1))^{\frac{1}{2}}}{2}, u^* + e_2 \right)$$

Remarque 3.1 *L'état d'équilibre du système (3.3) est le même état d'équilibre du système (3.4).*

Car si $u^ = C^{te}$ alors $\Delta u^* = 0$.*

Remarque 3.2 *Là on traite uniquement les points d'équilibres constants, car on travaille sur \mathbb{R}^1 et \mathbb{R}^2 à la fois.*

3.2.3 Stabilité locale des points d'équilibre

proposition 3.2

i) E_0 et E_1 sont instables.

ii) Si

$$ae_2 > e_1$$

alors, E_2 est localement asymptotiquement stable.

iii) $E_3 = (u^*, v^*)$ est localement asymptotiquement stable.

Démonstration Le signe des valeurs propres de la matrice jacobienne du système (3.3) au point d'équilibre nous permet de connaître les conditions de la stabilité locale. En fait

$$\begin{aligned} DF(u, v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2u - \frac{ave_1}{(u + e_1)^2} & \frac{-au}{u + e_1} \\ \frac{bv^2}{(u + e_2)^2} & b \left(1 - \frac{2v}{u + e_2} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

i) Pour E_0 et E_1 , on a

$$DF(E_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$DF(E_1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{a}{e_1} \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

comme $b > 0$, alors E_0 et E_1 sont instables.

ii) Et pour E_2

$$DF(E_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{ae_2}{e_1} & 0 \\ b & -b \end{pmatrix}$$

si $ae_2 > e_1$, donc les valeurs propres de $DF(E_2)$ sont :

$$\lambda_1 = 1 - \frac{ae_2}{e_1} < 0$$

et

$$\lambda_2 = -b < 0$$

ce qui implique que E_2 est localement asymptotiquement stable. Par contre si $ae_2 < e_1$, E_2 devient instable.

iii) De même pour E_3 , on trouve

$$DF(E_3) = \begin{pmatrix} 1 - 2u^* - \frac{av^*e_1}{(u^*+e_1)^2} & -\frac{au^*}{u^*+e_1} \\ \frac{bv^{*2}}{(u^*+e_2)^2} & b \left(1 - \frac{2v^*}{u^*+e_2} \right) \end{pmatrix}$$

on utilise les deux relations :

$$\begin{cases} 1 - u^* - \frac{av^*}{u^*+e_1} = 0 \\ 1 - \frac{v^*}{u^*+e_2} = 0 \end{cases}$$

pour simplifier les valeurs de $DF(E_3)$, on trouve

$$DF(E_3) = \begin{pmatrix} -u^{*2} & -\frac{au^*}{u^*+e_1} \\ b & -b \end{pmatrix}.$$

Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres de $DF(E_3)$ alors,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(DF(E_3)) = -u^* - b < 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(DF(E_3)) = bu^* + b \frac{au^*}{u^* + e_2} > 0$$

il résulte que $\lambda_1 < 0$, et $\lambda_2 < 0$, et par suite E_3 est localement asymptotiquement stable.

3.2.4 Stabilité globale

Ici, on s'intéresse à la stabilité globale de (u^*, v^*) pour les systèmes (3.3) et (3.4), pour caractériser la coexistence des proies et des prédateurs.

Théorème 3.2 *Si la condition*

$$1 \leq e_1 \leq e_2 \tag{3.6}$$

et la condition (3.5) sont satisfaisantes, alors (u^, v^*) est globalement asymptotiquement stable pour le système (3.3), et pour le système (3.4).*

Preuve Soit la fonction $l : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$l(u, v) = \int_{u^*}^u \frac{(\eta - u^*)(\eta + e_1)}{a\eta(\eta + e_2)} d\eta + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{v^*}^v \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta$$

Considérons ensuite la fonction $L : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$

$$L(u, v) = \int_{\Omega} l(u, v) = \int_{\Omega} \left(\int_{u^*}^u \frac{(\eta - u^*)(\eta + e_1)}{a\eta(\eta + e_2)} d\eta + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{v^*}^v \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta \right) dx$$

Montrons que l est une fonction de Lyapunov du système (3.3).

$$l(u^*, v^*) = \int_{u^*}^{u^*} \frac{(\eta - u^*)(\eta + e_1)}{a\eta(\eta + e_2)} d\eta + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{v^*}^{v^*} \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta = 0$$

$$l(u, v) > 0, \forall (u, v) \neq (u^*, v^*).$$

Car,

$$l(u, v) = \int_{u^*}^u l_1(u) + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{v^*}^v l_2(v),$$

avec $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$.

Pour $\int_{u^*}^u l_1$:, si $0 < u < u^*$, alors on a,

$$\int_{u^*}^u l_1(u) = - \int_u^{u^*} l_1(u) = \int_u^{u^*} \frac{(u^* - \eta)(\eta + e_1)}{a\eta(\eta + e_2)} d\eta > 0$$

par ailleurs, si $u > u^*$

$$\int_{u^*}^u l_1(u) > 0$$

Et pour $\int_{v^*}^v l_2$:

Si $0 < v < v^*$:

$$\int_{v^*}^v l_2(v) = - \int_v^{v^*} l_2(v) = \int_v^{v^*} \frac{v^* - \eta}{\eta} d\eta > 0$$

de même, on a si $v > v^*$:

$$\int_{v^*}^v l_2(v) > 0.$$

finalement :

$$\forall (u, v) \neq (u^*, v^*); l(u, v) > 0$$

Reste á montrer que $\frac{dl}{dt} < 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt}(u, v) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{u^*}^u \frac{(\eta - u^*)(\eta + e_1)}{a\eta(\eta + e_2)} d\eta + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{v^*}^v \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta \right) \\ &= \frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} \frac{du}{dt} + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \frac{v - v^*}{v} \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

utilisons : $v^* = u^* + e_2$

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt}(u, v) &= \frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \frac{v - v^*}{v} bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \\ &= \frac{(u - u^*)}{a(u + e_2)} \left((u + e_1)(1 - u) - av \right) + (v - v^*) \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \\ &= \frac{u - u^*}{a(u + e_2)} \left((1 - u)(u + e_1) - av^* \right) + \frac{(u - u^*)(v^* - v)}{u + e_2} \\ &+ (v - v^*) \left(\frac{v^*}{u^* + e_2} - \frac{v}{u + e_2} \right) \end{aligned}$$

utilisons : $av^* = (1 - u^*)(u^* + e_1)$ et $v^* = u^* + e_2$

$$\begin{aligned}
 \frac{dl}{dt}(u, v) &= \frac{u - u^*}{a(u + e_2)} \left((1 - u)(u + e_1) - (1 - u^*)(u^* + e_1) \right) + \frac{(u - u^*)(v^* - v)}{u + e_2} \\
 &+ (v - v^*) \left(\frac{v^* u - v u^* + e_2(v^* - v)}{(u^* + e_2)(u + e_2)} \right) \\
 &= \frac{u - u^*}{a(u + e_2)} (u + e_1 - u^2 - u e_1 - u^* - e_1 + u^{*2} + u^* e_1) + \frac{(u - u^*)(v^* - v)}{u + e_2} \\
 &+ (v - v^*) \left(\frac{v^* u - v u^* + v^* u^* - v^* u^* + e_2(v^* - v)}{(u^* + e_2)(u + e_2)} \right) \\
 &= \frac{u - u^*}{a(u + e_2)} (u - u^* + u^{*2} - u^2 + (u^* - u)e_1) + \frac{(u - u^*)(v^* - v)}{u + e_2} \\
 &+ (v - v^*) \left(\frac{v^* (u - u^*) - u^* (v - v^*) - e_2(v - v^*)}{(u^* + e_2)(u + e_2)} \right) \\
 &= \frac{u - u^*}{a(u + e_2)} (u - u^* + u^{*2} - u^2 + (u^* - u)e_1) + \frac{(u - u^*)(v^* - v)}{u + e_2} \\
 &+ (v - v^*) \left(\frac{v^* (u - u^*) - (u^* + e_2)(v - v^*)}{(u^* + e_2)(u + e_2)} \right) \\
 &= \frac{u - u^*}{a(u + e_2)} (u^* - u)(-1 + u^* + u + e_1) + \frac{(u - u^*)(v^* - v)}{u + e_2} \\
 &+ (v - v^*) \left(\frac{(u - u^*) - (v - v^*)}{(u + e_2)} \right) \\
 &= -\frac{(u - u^*)^2}{a(u + e_2)} (u^* + u + e_1 - 1) + \frac{(v - v^*)}{u + e_2} (-(u - u^*) + (u - u^*) - (v - v^*)) \\
 &= -\frac{(u - u^*)^2}{a(u + e_2)} (u^* + u + e_1 - 1) - \frac{(v - v^*)^2}{u + e_2}
 \end{aligned}$$

donc il est clair que sous la condition (3.6), et par le théorème de Lyapunov (2.3), (u^*, v^*) est globalement asymptotiquement stable.

Pour le système (3.4) on montre que L est une fonction de Lyapunov.

$$l(u^*, v^*) = 0 \implies L(u^*, v^*) = 0$$

$$l(u, v) > 0 \implies L(u, v) > 0$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt}(u, v) &= \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \left(\int_{u^*}^u \frac{(\eta - u^*)(\eta + e_1)}{a\eta(\eta + e_2)} d\eta + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{v^*}^v \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta \right) dx \right] \\
 &= \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_{u^*}^u \frac{(\eta - u^*)(\eta + e_1)}{a\eta(\eta + e_2)} d\eta \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{v^*}^v \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta \right) \right] dx
 \end{aligned}$$

car l est définie, continue et dérivable sur $Int(\mathbb{R}_+^2)$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt}(u, v) &= \int_{\Omega} \left[\frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} \frac{du}{dt} + \frac{u^* + e_2}{bv^*} \frac{v - v^*}{v} \frac{dv}{dt} \right] dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(\frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} \left(\Delta u + u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) \right) \right) dx \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\frac{u^* + e_2}{bv^*} \frac{v - v^*}{v} \left(\delta \Delta v + bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \right) \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(\frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} \left(u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) \right) \right) dx \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\frac{u^* + e_2}{bv^*} \frac{v - v^*}{v} \left(bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \right) \right) dx \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\Delta u \frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} + \delta \Delta v \frac{u^* + e_2}{bv^*} \frac{v - v^*}{v} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} \left(\frac{(u - u^*)^2}{a(u + e_2)} (u^* + u + e_1 - 1) + \frac{(v - v^*)^2}{u + e_2} \right) dx \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\Delta u \frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} + \delta \Delta v \frac{u^* + e_2}{bv^*} \frac{v - v^*}{v} \right) dx
 \end{aligned}$$

On applique la formule de Green et en supposant que le flux est nul sur le bord de Ω , on trouve :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\Omega} \left(\Delta u \frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} + \delta \Delta v \frac{u^* + e_2}{bv^*} \frac{v - v^*}{v} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} \right) dx - \delta \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \left(\frac{v - v^*}{v} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \frac{d}{du} \left(\frac{(u - u^*)(u + e_1)}{au(u + e_2)} \right) dx - \delta \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \frac{d}{dv} \left(\frac{v - v^*}{v} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \left(\frac{e_2 - e_2 + u^*}{a(u + e_2)^2} + \frac{u^* e_1 (2u + e_2)}{a(u^2 + ue_2)^2} \right) dx - \delta \frac{u^* + e_2}{bv^*} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \frac{v^*}{v^2} dx
 \end{aligned}$$

Donc sous la condition (3.6) on a :

$$\frac{dL}{dt}(u, v) < 0, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(u^*, v^*)\}$$

Donc après le principe d'invariance de LaSalle (2.5), avec $E = \{(u^*, v^*)\}$, (u^*, v^*) est globalement asymptotiquement stable.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a traité un modèle de proie-prédateur avec diffusion linéaire. On a commencé par l'étude du système sans diffusion. Ensuite, on a fait l'étude du système

avec diffusion.

Cette étude contient

- La bornitude de la solution, ceci en démontrant l'existence d'un ensemble positivement invariant.
- Les points d'équilibre.
- Les conditions pour avoir la coexistence des proies et des prédateurs (la stabilité globale du point d'équilibre non-trivial).

Chapitre 4

Application numérique

Sommaire

4.1 Introduction	26
4.2 Système dynamique	27
4.3 Système avec diffusion	27
4.4 Points d'équilibre	30
4.5 Conclusion	33

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons, dans une première partie, les simulations numériques associées aux systèmes :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) \\ \frac{dv}{dt} = bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \end{cases} \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \Delta v + bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) \end{cases} \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

avec les conditions du Neumann sur le bord, ils sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0; \quad x \in \partial\Omega \\ \begin{cases} u(0, x) = u_0(x) \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases} \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un domaine borné.

Par ailleurs, une partie importante serait consacrée à l'étude de l'existence d'une solution numérique, non-constante, du système avec diffusion, c'est à dire :

$$\begin{cases} \Delta u + u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) = \Delta u + f(u, v) = 0 \\ \delta \Delta v + bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) = \delta \Delta v + g(u, v) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \Omega \\ \\ x \in \partial\Omega \end{matrix} . \quad (4.3)$$

Pour la recherche de cette solution, on a réalisé un schéma numérique.

4.2 Système dynamique

Pour la résolution numérique du système (4.1), on utilise la fonction prédéfinie en MATLAB **ODE45**.

Rappelons que :

- E_0 et E_1 sont instables.
- Si $ae_2 > e_1$, alors E_3 n'existe pas, et E_2 est localement asymptotiquement stable.
- Si $ae_2 < e_1$, E_2 devient instable, et E_3 est stable.

La figure (4.1) est représentée sous la condition $ae_2 < e_1$. D'autre part, les paramètres choisis dans la figure (4.2) vérifient la condition $ae_2 > e_1$.

4.3 Système avec diffusion

Pour le système (4.2), on utilise la fonction prédéfinie en MATLAB **pdepe**.

La figure (4.3) est représentée sous les conditions de la stabilité globale, (voir les condi-

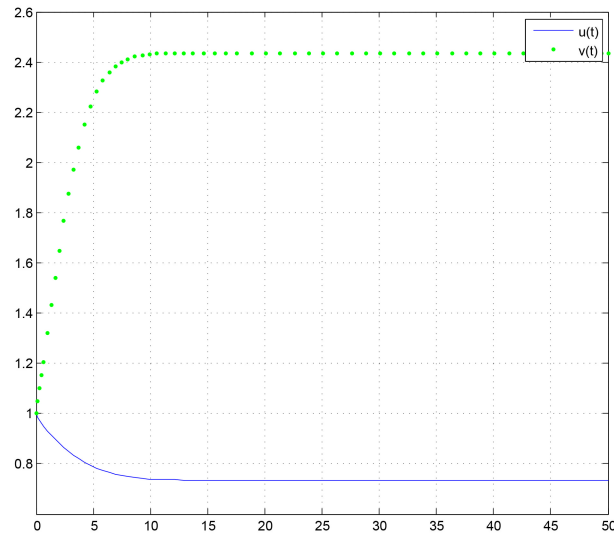


FIGURE 4.1 - $a = 1.1$, $b = 0.2$, $e1 = 0.3$, $e2 = 0.1$

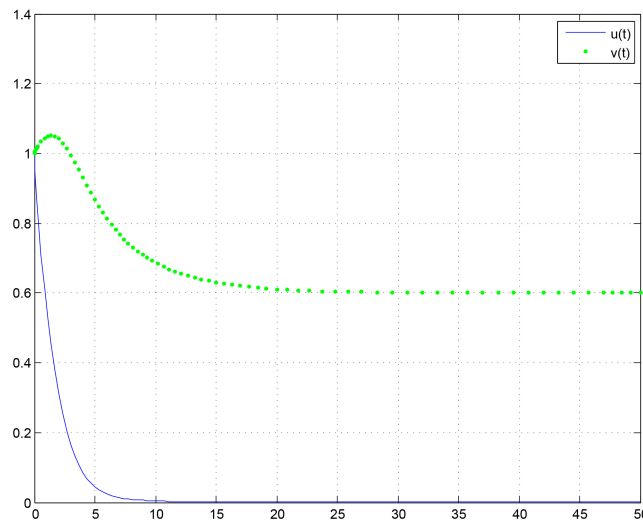


FIGURE 4.2 - $a = 1$, $b = 0.2$, $e1 = 0.5$, $e2 = 0.6$

tions 3.5 et 3.6)

Remarque 4.1 *Sous quelques valeurs des paramètres du modèle (4.2), on peut avoir numériquement une solution périodique du système, mais reste à montrer ça mathématiquement.*

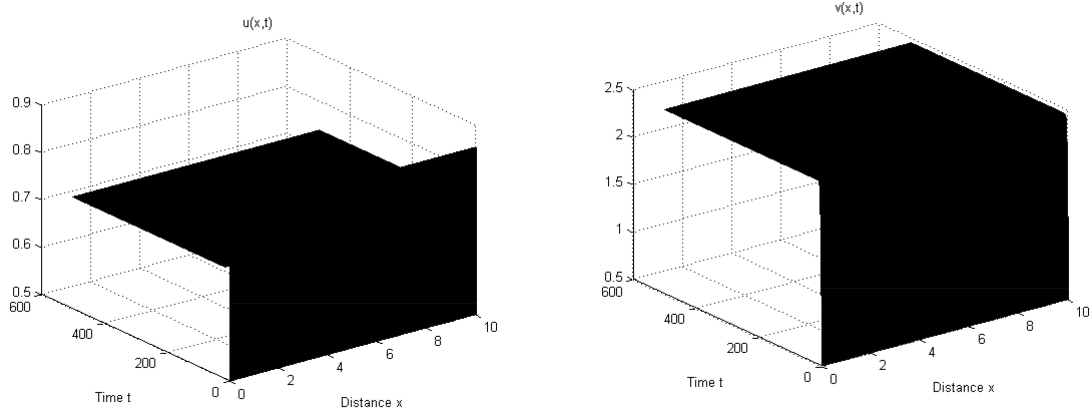


FIGURE 4.3 – $a = 0.2$, $b = 0.5$, $e1 = 1.1$, $e2 = 1.7$, $\delta = 0.5$

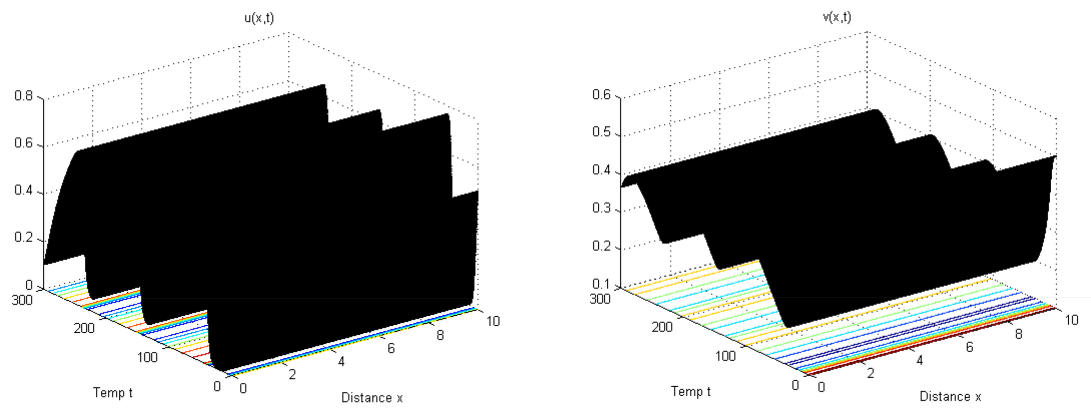


FIGURE 4.4 – $t \in [0, 300]$

Soient les paramètres suivants

$$a = 1.1, b = 0.02, e1 = 0.3, e2 = 0.1, \delta = 1.$$

Les figures (4.4 et 4.5) représentent des solutions périodiques du système (4.2) dans deux intervalles du temps $t \in [0, 300]$ et $t \in [0, 2000]$.

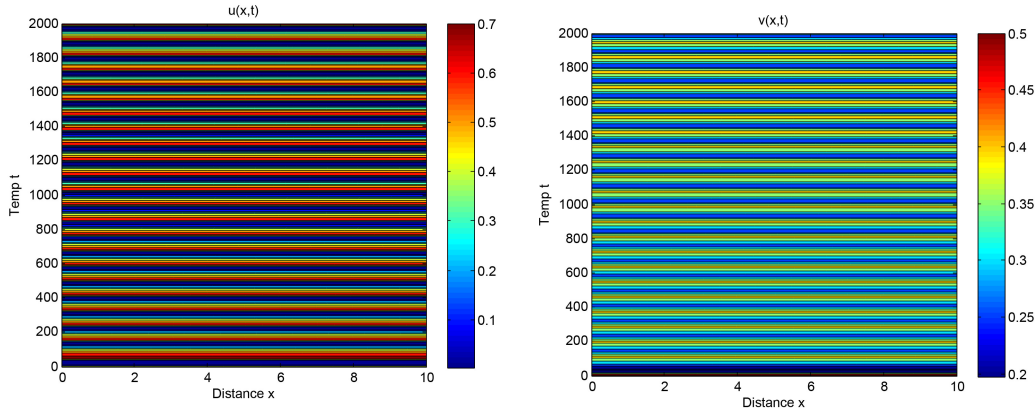


FIGURE 4.5 – $t \in [0, 2000]$

4.4 Points d'équilibre

Maintenant, pour calculer les points d'équilibre du système (4.2), on va résoudre le système

$$\begin{cases} \Delta u + f(u, v) = 0 \\ \delta \Delta v + g(u, v) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \Omega \\ \\ x \in \partial\Omega \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta u + f(u, v) = 0 \\ \Delta v + \frac{g(u, v)}{\delta} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \Omega \\ \\ x \in \partial\Omega \end{matrix}$$

Prenons $\Omega = [0, 10] \subset \mathbb{R}$.

Soient $N \in \mathbb{N}$, et $h = \frac{10}{N+1}$. Donc $\forall 1 \leq i \leq N$, $x_i = ih \in \Omega$ et $(u_i, v_i) \simeq (u(x_i), v(x_i))$ vérifie le problème (4.3).

On utilise la méthode de Newton pour calculer $F(U) = 0$, et $G(V) = 0$. Où $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$.

Nous considérons le schéma de calcul numérique des dérivées suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(x_i) = u''(x_i) \simeq \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \\ \Delta v(x_i) = v''(x_i) \simeq \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} \end{cases} \quad i = 1..N$$

avec les conditions aux bords,

$$\begin{cases} u'(0) = u'(10) = 0 \\ v'(0) = v'(10) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = u_1 \\ u_N = u_{N+1} \\ v_0 = v_1 \\ v_N = v_{N+1} \end{cases}$$

donc, on obtient les deux systèmes suivants :

$$F(U) = \begin{pmatrix} \frac{-u_1 + u_2}{h^2} + u_1 \left(1 - u_1 - \frac{av_1}{u_1 + e_1}\right) \\ \vdots \\ \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + u_i \left(1 - u_i - \frac{av_i}{u_i + e_1}\right) \\ \vdots \\ \frac{u_{N-1} - u_N}{h^2} + u_N \left(1 - u_N - \frac{av_N}{u_N + e_1}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et

$$G(V) = \begin{pmatrix} \frac{-v_1 + v_2}{h^2} + \frac{b}{\delta}v_1 \left(1 - \frac{v_1}{u_1 + e_2}\right) \\ \vdots \\ \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} + \frac{b}{\delta}v_i \left(1 - \frac{v_i}{u_i + e_2}\right) \\ \vdots \\ \frac{v_{N-1} - v_N}{h^2} + \frac{b}{\delta}v_N \left(1 - \frac{v_N}{u_N + e_2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rappelons que la méthode de Newton pour calculer $f(x) = 0$ en dimension 1 est donné par,

$$x^{n+1} = x^n - \frac{1}{f'(x^n)}f(x^n)$$

et en dimension N ,

$$x^{n+1} = x^n - Df^{-1}(x^n).f(x^n)$$

où $n \in \mathbb{N}$, représente les itérations, et Df^{-1} est la matrice inverse de la matrice Jacobienne de f .

Appliquons sur notre système, on trouve,

$$\begin{cases} U^{n+1} = U^n - DF^{-1}(U^n)(F(U^n)) \\ V^{n+1} = V^n - DG^{-1}(V^n)(G(V^n)) \end{cases}$$

où $DF(U^n)$ (respectivement $DG(V^n)$) est la matrice Jacobienne de F (resp. G), calculer au point U^n (resp. V^n).

Donc,

$$DF(U^n) = A + \text{diag} \left(1 - 2u_i - \frac{av_i e_1}{(u_i + e_1)^2} \right)$$

et

$$DG(V^n) = A + \text{diag} \left(\frac{\beta}{\delta} \left(1 - \frac{2v_i}{u_i + e_2} \right) \right)$$

où A est la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{h^2} & 0 \\ \vdots & \cdots & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-1}{h^2} \end{pmatrix}.$$

On arrête notre algorithme quand

$$\| U^{n+1} - U^n \| < \varepsilon$$

$$\| V^{n+1} - V^n \| < \varepsilon$$

Utilisons **MATLAB** pour appliquée le schema, avec le choix de $N = 500$ et $\varepsilon = 0.01$, c'est à dire, le test d'arrêt est choisi comme suit :

$$\max\{ \| DG^{-1}(V^n)(G(V^n)) \|, \| DF^{-1}(U^n)(F(U^n)) \| \} < \varepsilon.$$

Commençons par les vecteurs initiaux,

$$U^0 = V^0 = (1, \dots, 1)^T$$

Après l'exécution, on obtient une solution du problème (4.3), point d'équilibre du système (4.2), ce qui est représentée dans la figure (4.6).

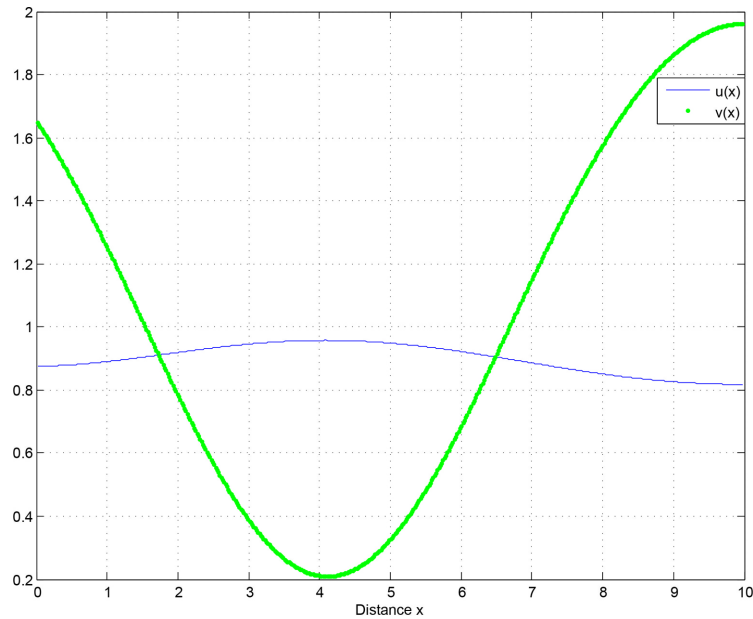


FIGURE 4.6 – $a = 0.2$, $b = 0.5$, $e_1 = 1.1$, $e_2 = 1.7$, $\delta = 1/2$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu les simulations numériques des deux systèmes :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \left(1 - u - \frac{av}{u + e_1} \right) = f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = bv \left(1 - \frac{v}{u + e_2} \right) = g(u, v) \end{cases} \quad x \in \Omega, t > 0$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \Delta v + g(u, v) \end{cases} \quad x \in \Omega, t > 0$$

Si

$$ae_2 < e_1 \text{ et } 1 \leq e_1 \leq e_2$$

alors, le point d'équilibre non-triviale

$$(u^*, v^*) = \left(\frac{(1 - e_1 - a) + ((1 - e_1 - a)^2 - 4(ae_2 - e_1))^{1/2}}{2}, u^* + e_2 \right)$$

est globalement asymptotiquement stable.

Sous quelques conditions, nous avons vu numériquement l'existence d'une solution périodique du deuxième système.

Par ce choix des paramètres :

$$a = 0.2; b = 0.5; e_1 = 1.1; e_2 = 1.7 \delta = \frac{1}{2},$$

et par la méthode de Newton (pour calculer $F(U) = 0$, et $G(V) = 0$), on a vu l'existence d'un point d'équilibre non-constant du système (4.2).

Chapitre 5

Points stationnaires non-triviaux d'un modèle avec diffusion non-linéaire

Sommaire

5.1	Introduction	35
5.2	Définitions et Notations	36
5.3	Présentation du modèle	38
5.4	Non-existence des Points stationnaires	39
5.5	Bornitude des points stationnaires	41
5.6	Conclusion	43

5.1 Introduction

Jusqu'ici, nous avons étudié le modèle de proie-prédateur avec des termes de diffusion linéaire Δu et Δv .

Δu implique que la probabilité de déplacement de la population u est équivalente dans toutes les directions, ce qui n'est pas toujours réaliste dans la nature, par exemple dans les rivières, les courants d'eaux, ou bien dans les forêts.

Dans ce cas, on utilise des modèles qui réalisent ce phénomène, c'est $\Delta(f(u))$ ou bien $\Delta(f(x)u)$.

Dans ce chapitre, nous étudions un modèle symbiotique avec diffusion non-linéaire, ce modèle est donné par,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(\lambda - u + bv) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta[(1 + \beta u)v] + v(\mu - v + cu) \\ u(0, x) = u_0(x) \\ v(0, x) = v_0(x) \\ u = v = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \geq 0, x \in \Omega \\ \\ x \in \Omega \\ \\ x \in \partial\Omega \end{array}$$

L'objectif du chapitre est d'étude de la non-existence du point de coexistence.

5.2 Définitions et Notations

Avant d'étudier le modèle, nous proposons les définitions et les notations suivantes :

symbole	signification
$\lambda_1(a, b)$	la valeur propre principale du problème (5.1)
$\lambda_1(b)$	$\lambda_1(1, b)$
λ_1	la première valeur propre du laplacien, <i>i. e.</i> $\lambda_1(1, 0)$
θ_γ	la solution positive du problème (5.2)
a_M	$\max_{x \in \bar{\Omega}} a(x)$
Ω	un domaine borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$

Soient $a(x), b(x) \in C(\Omega)$, tel que $a(x) \geq C^{te} > 0$ et $b(x) \geq 0$.

Prenons le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta[a(x)u] + b(x)u = \lambda u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Théorème 5.1 [10]

La valeur propre principale $\lambda_1(a, b)$ du problème (5.1) est simple et positive, et sa fonction propre associée ϕ_1 est aussi positive dans Ω .

Maintenant, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w = w(\gamma - w) & x \in \Omega \\ w = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.2)$$

Pour ce problème, $w = 0$ est une solution. L'existence d'une solution strictement positive de classe $C^2(\bar{\Omega})$ dépend de la relation entre γ et la première valeur propre λ_1 du laplacien. Le théorème suivant détermine l'existence des solutions strictement positives.

Théorème 5.2 [10]

Le problème (5.2) a uniquement la solution triviale si $\gamma \leq \lambda_1$. par ailleurs si $\gamma > \lambda_1$ (5.2) a une unique solution positive.

Avant de montrer ce théorème, on va présenter un théorème sur l'existence des solutions dans les problèmes des valeurs propres pour l'utiliser dans la démonstration.

Théorème 5.3 [10]

Soient \tilde{u} et \hat{u} respectivement sous et sur-solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u, x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.3)$$

si f est Lipschitzienne par rapport u , et de classe C^1 pour \hat{u} , \tilde{u} , et si

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{f(u, x)}{u} \right] < 0$$

alors, il existe une unique solution de ce problème telle que :

$$\tilde{u} \leq u \leq \hat{u}$$

preuve du théorème (5.2) Soit u une solution positive du problème (5.2). On multiplie cette équation par ϕ , la fonction propre associée à λ_1 , et on intègre sur Ω .

$$-\int_{\Omega} \phi \Delta w = \int_{\Omega} \phi w(\gamma - w)$$

on applique la formule de Green, avec la condition $w = \phi = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient

$$\int_{\Omega} \phi w (\gamma - w) = - \int_{\Omega} w \Delta \phi = \int_{\Omega} w \lambda_1 \phi$$

ce qui donne

$$(\gamma - \lambda_1) \int_{\Omega} \phi w = \int_{\Omega} \phi w^2$$

il résulte que $w = 0$ si $\gamma \leq \lambda_1$, car $\phi > 0$ sur Ω

Si $\gamma > \lambda_1$, la démonstration est basée sur la méthode de sous et sur-solution.

Prenons $M \geq \gamma$ et $\delta > 0$, alors $\hat{w} = M$ est une sur-solution du problème (5.2), et si $\lambda_1 \leq \gamma - \delta$, alors $\check{w} = \delta\phi$ est une sous-solution.

En effet,

$$M(\gamma - M) \geq 0 = -\Delta w$$

et

$$-\delta\Delta\phi = \delta\lambda_1\phi \leq \delta\phi(\gamma - \delta\phi).$$

Grâce au théorème (5.3), il existe une unique solution du problème (5.2) vérifie

$$0 \leq \check{w} \leq w \leq \hat{w}.$$

5.3 Présentation du modèle

Le modèle qu'on a traité est un modèle qui est publié par M. Delgado, M. Montenegro, et A. Suárez (voir [7]).

Le modèle est donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(\lambda - u + bv) & t > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta[(1 + \beta u)v] + v(\mu - v + cu) & \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega \\ v(0, x) = v_0(x) & \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.4)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ est un domaine borné, avec $\partial\Omega \in C^1$. (i. e. $\partial\Omega$ représente un graph d'une fonction de classe C^1).

En l'absence de la population u , l'équation de v devient logistique. De même, en l'absence de la population v , l'équation de u devient logistique (sous forme du problème (5.2)).

Le terme $\Delta[(1 + \beta u)v]$ signifie que la population u fait obstacle au déplacement des individus de la population v .

Les points stationnaires du modèle (5.4) sont les solutions du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = u(\lambda - u + bv) & x \in \Omega \\ -\Delta[(1 + \beta u)v] = v(\mu - v + cu) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.5)$$

Le modèle (5.4) a trois types des points stationnaire :

- Le point stationnaire trivial $(0, 0)$.
- Les points stationnaire semi triviaux $(0, \theta_\mu)$ et $(\theta_\lambda, 0)$.
- Le point stationnaire non-trivial (u^*, v^*) , ce point est appelé point de coexistence, et notre objectif est d'étude la non-existence de ce dernier point.

Rappelons que θ_μ (resp. θ_λ) est positive si $\mu > \lambda_1$ (resp. $\lambda > \lambda_1$), (voir le théorème 5.1), sinon, $\theta_\mu \equiv 0$ (resp. $\theta_\lambda \equiv 0$).

D'autre part, si $\beta = 0$, le modèle (5.4) devient un modèle classique de Lotka-Volterra.

Les cas de la non-existence du point de coexistence sont donnés dans le théorème suivant :

Théorème 5.4

1. Si $\mu \leq \lambda_1$ et $\beta\lambda_1 \geq c$, alors, (5.5) n'a pas d'équilibre de coexistence.
2. Si $\mu, \lambda \leq \lambda_1$ et $b(c - \beta\lambda_1) < 1$, (5.5) n'a pas d'équilibre de coexistence.

5.4 Non-existence des Points stationnaires

Soient φ_1, u, v des fonctions propres associées à λ_1 . On multiplie la première équation du problème (5.5) par $k\varphi_1$, et la deuxième par φ_1 , on intègre et on somme les deux équations, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \varphi_1 [k\Delta u + \Delta v + \beta\Delta(uv)] = \int_{\Omega} \varphi_1 [ku(\lambda - u + bv) + v(\mu - v + cu)]$$

remplaçons l'opérateur laplacien par sa valeur propre, on trouve :

$$\int_{\Omega} \varphi_1 [k\lambda_1 u + \lambda_1 v + \beta\lambda_1 uv] = \int_{\Omega} \varphi_1 [\lambda k u + \mu v] + \int_{\Omega} \varphi_1 u^2 \left[-\left(\frac{v}{u}\right)^2 + (kb + c - \beta\lambda_1) \frac{v}{u} - k \right]$$

ce qui donne,

$$\int_{\Omega} \varphi_1 [(\lambda_1 - \lambda)ku + (\lambda_1 - \mu)v] = \int_{\Omega} \varphi_1 u^2 \left[-\left(\frac{v}{u}\right)^2 + (kb + c - \beta\lambda_1) \frac{v}{u} - k \right]$$

Soit

$$f(r) = -r^2 + (kb + c - \beta\lambda_1)r - k,$$

alors

$$f(0) = -k, \quad f'(0) = kb + c - \beta\lambda_1,$$

et le maximum de f sur \mathbb{R} est atteint quand

$$r = r_M = \frac{1}{2}(kb + c - \beta\lambda_1).$$

Donc,

(1) Si $\beta\lambda_1 \geq c$, donc pour $k = 0$, $f(r) < 0$, $\forall r > 0$, ($\max_{\mathbb{R}_+} f(r) = f(0) = 0$), il résulte que

$$(\lambda_1 - \mu) \int_{\Omega} \varphi_1 v < 0 \Rightarrow \lambda_1 - \mu < 0$$

(contradiction avec l'hypothèse).

(2) On cherche un $k > 0$, tel que $f(r) < 0$, $\forall r > 0$. On sait que si $f(r) = 0$ a une solution double, ou n'a pas de solution, alors $f(r) \leq 0$.

On cherche les valeurs de $k > 0$ de telle sorte que $f(r) = 0$ n'a pas de solution, c'est à dire, sa discriminant est strictement négatif.

$$\Delta_k = (kb + c - \beta\lambda_1)^2 - 4k = b^2 k^2 + (2b(c - \beta\lambda_1) - 4)k + (c - \beta\lambda_1)^2 < 0$$

comme $b^2 \geq 0$, on cherche une condition de telle sorte que $\Delta_k = 0$ a deux solutions.

Le discriminant de l'équation $\Delta_k = 0$ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta &= (b(c - \beta\lambda_1) - 2)^2 - (b(c - \beta\lambda_1))^2 \\ &= -4b(c - \beta\lambda_1) + 4 \\ &= 4(1 - b(c - \beta\lambda_1)) \\ \Delta &> 0 \Rightarrow b(c - \beta\lambda_1) < 1 \end{aligned}$$

Pour $b(c - \beta\lambda_1) < 1$, soient k_1, k_2 deux solutions de $\Delta_k = 0$, avec $k_1 < k_2$, donc $\exists k_0 \in]0 + \infty[\cap]k_1, k_2[$, tel que $f(r) < 0, \forall r > 0$, et ensuite,

$$(\lambda_1 - \lambda)k_0 \int_{\Omega} \varphi_1 u + (\lambda_1 - \mu) \int_{\Omega} \varphi_1 v < 0.$$

Finalement, si $\lambda, \mu \leq \lambda_1$, (5.5) n'a pas d'équilibre de coexistence.

5.5 Bornitude des points stationnaires

Pour transformer le système (5.5), considérons le changement de variable suivant :

$$w = (1 + \beta u)v$$

on obtient le système modifié suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u \left(\lambda - u + \frac{bw}{1 + \beta u} \right) & \text{sur } \Omega \\ -\Delta w = \frac{w}{1 + \beta u} \left(\mu - \frac{w}{1 + \beta u} + cu \right) & \text{sur } \Omega \\ u = w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.6)$$

Et on définit, $\forall b \in L^\infty(\Omega)$, le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \xi = \frac{(\mu + cu)^2}{4} & \text{sur } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On note par ξ sa solution.

La proposition suivante montre la bornitude des points stationnaires de coexistence quand ils existent.

proposition 5.1

Soit (u, w) un équilibre de coexistence de (5.6), alors

1. $\theta_\lambda \leq u \leq u_M \leq \lambda + \frac{bw_M}{1 + \beta u_M}$.
2. $w_M \leq (1 + \beta u_M)(\mu + cu_M)$.
3. $w(x) \leq \xi(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}$.

Démonstration

$$-\Delta u = u(\lambda - u + bv) \leq u(\lambda - u)$$

car $bv \geq 0$, donc u est une sur solution de l'équation (5.2) avec $\gamma = \lambda$, et (5.2) a une unique solution positif θ_λ .

ce qu'il résulte l'inégalité $\theta_\lambda \leq u$.

Soit $x_u, x_w \in \Omega$ tels que :

$$u(x_u) = \max_{x \in \Omega} u(x) = u_M,$$

$$w(x_w) = \max_{x \in \Omega} w(x) = w_M.$$

Donc, $-\Delta u(x_u) \geq 0$ et $-\Delta w(x_w) \geq 0$, et du système (5.6) on obtient

$$\begin{cases} \lambda - u_M + \frac{bw_M}{1 + \beta w_M} \geq 0 \\ \mu - \frac{w_M}{1 + \beta u_M} + cu_M \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_M \leq \lambda + \frac{bw_M}{1 + \beta w_M} \\ w_M \leq (\mu + cu_M)(1 + \beta u_M) \end{cases}$$

Pour le troisième point de la proposition, on a

$$\max_{w \in \mathbb{R}} \left[w \left(\frac{\mu + cu}{1 + \beta u} - \frac{w}{(1 + \beta u)^2} \right) \right] = \frac{(\mu + cu)^2}{4}$$

donc

$$w \left(\frac{\mu + cu}{1 + \beta u} - \frac{w}{(1 + \beta u)^2} \right) \leq \frac{(\mu + cu)^2}{4}.$$

Comme w est une solution de l'équation

$$-\Delta w = w \left(\frac{\mu + cu}{1 + \beta u} - \frac{w}{(1 + \beta u)^2} \right)$$

$\frac{(\mu + cu)^2}{4}$ devient une sur solution de l'équation, ce qui donne l'inégalité

$$w(x) \leq \xi_{(\mu+cu)^2/4}(x).$$

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu deux cas de la non-existence des points stationnaires non-triviaux (strictement positifs) du système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(\lambda - u + bv) & t \geq 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta[(1 + \beta u)v] + v(\mu - v + cu) & \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega \\ v(0, x) = v_0(x) & \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

Nous avons vu, aussi la bornitude de ces points quand ils existent. On a utilisé la démonstration par absurde pour montrer la non-existence, et la méthode de sous et sur-solution pour la bornitude.

Conclusion générale

Ce mémoire fait l'objet d'une étude de deux systèmes, un système avec le terme de diffusion linéaire, et un autre système avec un terme de diffusion non-linéaire.

On a commencé par un système dynamique de proie-prédateur. On a étudié les points d'équilibre, les conditions pour avoir la stabilité locale et globale de ces points, et aussi la bornitude de la solution du système (l'existence globale de la solution).

Ensuite, on a ajouté le terme de réaction-diffusion, et on a fait la même étude, les différents types des points d'équilibre, la coexistence du système, et les conditions de la stabilité globale.

Par des méthodes numériques, on a vu l'existence des points d'équilibre non-constants.

d'une autre partie, on a fait l'étude d'un système avec diffusion non-linéaire. On a vu deux cas de la non-existence des points d'équilibre non-nuls. Aussi, on a vu la bornitude des points stationnaires non-constants quand ils existent.

Bibliographie

- [1] P. Auger et C. Lett et J. C. Poggiale, Modélisation Mathématiques en Écologie, DUNOD, 2010.
- [2] M. A. Aziz-Alaoui, Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model, CHAOS SOLUTIONS and FRACTALS, vol. 19, no. 14, pages 1275-1293, 2002.
- [3] M. Daher Okiye and M.A. Aziz-Alaoui, On the dynamics of a predator-prey model with the Holling-Tanner functional response, MIRIAM Editions, 5^{eme} édition, Capasso, Proc. ESMTB conf., vol. 9, pages 270-278, 2002.
- [4] M. A. Aziz-Alaoui et M. Daher Okiye, Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes, Applied Mathematics Letters, vol. 7, no. 16, pages 1069-1075, 2003.
- [5] Baba Issa Camara et M. A. Aziz-Alaoui, DYNAMICS OF A PREDATOR-PREY MODEL WITH DIFFUSION, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, vol. 10, no. 15, pages 897-906, 2008.
- [6] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et application, Masson, Paris, 2^{eme} édition, 1983.
- [7] M. Delgado, M. Montenegro, et A. Suárez, A Lotka-Volterra symbiotic model with cross-diffusion, J. Differential Equations, vol. 19, no. 246, pages 2131-2149, 2009.
- [8] H. K. Khalil, Nonlinear systems, Macmillan, New York, 1992.
- [9] V. Křivan, Prey-Predator Models, Population Dynamics, vol. 4, Oxford, pages 2929-2940, 2008
- [10] C. V. Pao, Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Springer-Street, New York, 1992.

- [11] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, 3^{eme} édition, 2006.
- [12] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer-Verlag, New York, 2^{eme} édition, 1983.

