

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen
Faculté des sciences
Département des Mathématiques



Mémoire de Fin d'Etudes
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Analyse Numérique Des Equations Aux Dérivées
Partielles

Thème

**Méthodes Spectrales et Applications à des
Problèmes Hyperboliques et Paraboliques**

Présenté le 04 juillet 2016 par
Bouaricha Ilham

Devant le jury composé de:

Mme D. Hadj Slimane	Présidente	PROF.	Université de Tlemcen
M. F. Abi – Ayad	Examineur	MAA	Université de Tlemcen
M. R. Bentifour	Examineur	MAA	Université de Tlemcen
M. A. Bensedik	Encadrant	MCB	Université de Tlemcen

Année Universitaire: 2015-2016.

Remerciement

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à mon encadrant Monsieur **A. Bensedik**, pour avoir accepté de diriger ce travail. Son soutien, sa gentillesse, sa clairvoyance, ses compétences, m'ont été d'une aide inestimable.

Je tiens à remercier sincèrement les membres de jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier tous mes professeurs de mathématiques qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite dans mes études universitaires.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à tous mes camarades de Master 2 Option Analyse Numérique.

Je dédie ce mémoire :

À mes parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien.

À mes frères ainsi qu'à mes sœurs pour leur tendresse, leur complicité et leur présence malgré la distance qui nous sépare.

À **Fatima Zohra, Abdelwadoud, Youssef, Ishak et Safaa.**

À toute ma famille ainsi qu'à mes amis.

Table des Matières

Introduction	2
1 Préliminaires	4
1.1 Espaces de Hilbert	4
1.2 Polynômes de Tchebyshev	5
1.3 Polynômes trigonométriques	7
2 Méthodes spectrales	11
2.1 Exemples d'EDP	11
2.2 Principe des méthodes spectrales	13
2.3 Méthodes spectrales	14
2.3.1 Méthode de Galerkin	14
2.3.6 Méthode de Tau	16
2.4 Méthodes pseudo-spectrales	18
2.4.1 Méthode de Collocation	18
2.4.6 Méthode de Tau-Collocation	21
3 Méthode de Fourier-Galerkin	23
3.1 Introduction	23
3.2 Principe de la méthode	23
3.3 Application	24
3.4 Stabilité de la méthode	28
4 Méthode de Fourier-Collocation	32
4.1 Introduction	32
4.2 Principe de la méthode	32
4.3 Application	33
4.4 Stabilité de la méthode pour les problèmes hyperboliques	36
4.5 Stabilité de la méthode pour les problèmes paraboliques	42
Bibliographie	47

Introduction

Les méthodes spectrales consistent une classe de la discrétisation spatiale des équations différentielles, elles cherchent des solutions en termes d'une série de fonctions connues, régulières (les fonctions de base). A partir de ses fonctions on peut distinguer trois types de méthodes, à savoir Galerkin, Tau et Collocation [2].

Les méthodes spectrales sont particulièrement adaptées à l'étude des phénomènes de bifurcation (*Mc Haughlin et Orszag* [4]), elles sont utiles dans la dynamique des fluides numérique (*A. Libchaber* [5]), où les grands spectraux codes hydrodynamiques sont maintenant utilisés régulièrement pour étudier la turbulence et la transition (*Busse* [1]), la prévision numérique du temps et la dynamique des océans.

une premières des applications des méthodes spectrales aux EDPs est celle de *Silberman* (1954) pour la modélisation de la météorologie par l'approche de Galerkin, cependant, cette méthode n'est pas devenue pratique pour la résolution des problèmes non linéaires.

Après *Orszag et Eliassen* (1960 – 1970), *Machenhauer* et *Rasmussen* (1970) ont développé des méthodes de transformations pour évaluer la somme de convolution (les termes non linéaires).

La méthode de Tau est une modification de la méthode de Galerkin, qui est applicable à des problèmes avec des conditions aux limites non périodiques, elle peut être vue comme un cas particulier de la méthode de Petrov-Galerkin (*Zienkiewicz et Cheung* (1967), *Babuška et Aziz* (1972)).

Lanczos (1938) développa cette méthode (méthode de Tau), et *Orszag* (1971) l'a appliquée et dans ce cas les fonctions de base sont les polynômes de Tchebyshev qui produisent des solutions très précises à la dynamique des fluides.

La méthode de Collocation a été utilisée par *Slater* (1934) et par *Kantorovic* (1934) dans des applications spécifiques.

Frazer, Jones et Skan (1937) l'ont développée comme une méthode générale pour résoudre des EDOs, ils ont utilisé une variété de fonctions de base et une distribution arbitraire des points de Collocation.

Le travail de *Lanczos* (1938) fut le premier travail présentant un bon choix soit pour les fonctions de base, soit pour la distribution des points de Collocation.

La méthode de Collocation orthogonale a été reprise par *Clenshaw* (1957), *Clenshaw et Norton* (1963) et *Wright* (1964). Ces études portent sur l'application des polyômes de Tchebyshev à des problèmes initiaux, les premières applications de cette méthode pour des problèmes spatialement périodiques par *Kreiss et Olinger* (1972) (appelée méthode de Fourier) et *Orszag* (1972) (appelée méthode pseudo-spectrale).

La première évaluation mathématique de la théorie des méthodes spectrales se trouve dans la monographie de *Gottlieb et Orszag* (1977).

A partir de la fin des années (1980), les méthodes spectrales sont devenues l'outil numérique prédominant de base physique, de transition et de turbulence...[2].

Ce mémoire, basé essentiellement sur la lecture des documents [3] et [7], est présenté comme suit:

Dans le chapitre 1, On rappelle quelques outils de base et quelques résultats connus utilisés dans la suite de ce travail.

Dans le chapitre 2, On présente les méthodes spectrales: Galerkin, Tau, Collocation et Tau-Collocatin.

Dans le chapitre 3, On applique la méthode de Fourier-Galerkin a deux problèmes: linéaire et non linéaire.

On montre aussi la stabilité de cette méthode.

Dans le chapitre 4, On présente la méthode de Fourier-Collocation et ses applications, et on montre sa stabilité pour des problèmes hyperboliques et paraboliques.

Chapitre 1

Préliminaires

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.1 (*Produit scalaire*) [6]

Soit H un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

On dit que (\cdot, \cdot) est un produit scalaire sur H , si les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $u, v, w \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$: $(u, v) \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(\lambda u, v) &= \lambda (u, v). \\(u + v, w) &= (u, w) + (v, w). \\(u, v) &= \overline{(v, u)}. \\(u, u) &\geq 0. \\(u, u) &= 0 \Leftrightarrow u = 0.\end{aligned}$$

Définition 1.1.2 (*Espace préhilbertien*) [6]

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Théorème 1.1.3 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) [6]

Soit H un espace préhilbertien, alors pour tout $u, v \in H$ on a:

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}$$

$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ est la norme induite par le produit scalaire (\cdot, \cdot) sur H vérifiant

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Définitions [6]:

Soit H un espace vectoriel normé.

1. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tel que } \forall n, m \geq N, \|u_n - u_m\| < \epsilon.$$

2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H converge vers $u \in H$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

3. On dit que H est complet si toute suite de Cauchy de H est convergente.

Définition 1.1.4 (Espace de Hilbert)

Soit H un espace préhilbertien. On dit que H est un espace de Hilbert si il est complet par rapport à la norme associée.

1.2 Polynômes de Tchebyshev

Définition 1.2.1 Les polynômes de Tchebyshev sont définis sur $[-1, 1]$ par:

$$T_n(x) = \cos [n \arccos(x)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.2.2 Les polynômes de Tchebyshev sont encore définis par:

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta,$$

T_n est un polynôme de degré n :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1. \\ T_1(x) &= x. \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1. \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Relations de récurrence[7]:

les polynômes de Tchebyshev vérifient les relations de récurrence suivantes:

$$c_n T_{n+1}(x) + d_{n-1} T_{n-1}(x) = 2x T_n(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

et

$$c_n \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - d_{n-2} \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = 2T_n(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

avec

$$c_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ 2 & \text{si } m = 0 \\ 1 & \text{si } m > 0 \end{cases}, \quad d_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ 1 & \text{si } m \geq 0 \end{cases}.$$

Calcul des coefficients de Tchebyshev [7]:

Les deux relations de récurrence précédentes permettent de calculer les coefficients de développement $F(u(x)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n T_n(x)$ à partir des coefficients de $u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T_n(x)$.

Exemples:

- $F(u(x)) = xu(x)$

$$xu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{[1]} T_n(x) \quad (1.3)$$

par l'utilisation de la relation (1.1) et l'identification avec (1.3) on trouve

$$b_n^{[1]} = \frac{1}{2} (c_{n-1} a_{n-1} + a_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $F(u(x)) = u'(x)$

$$u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} T_n(x)$$

par l'utilisation de la relation (1.2) on trouve que $a_n^{(1)}$ vérifient:

$$2u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n-1} a_{n-1}^{(1)} - a_{n+1}^{(1)} \right] \frac{T'_n(x)}{n}$$

en identifiant avec $u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T'_n(x)$, on obtient implicitement les $a_n^{(1)}$:

$$2na_n = c_{n-1} a_{n-1}^{(1)} - a_{n+1}^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

par récurrence, l'expression explicite est donnée par

$$a_n^{(1)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ \text{step2}}}^{\infty} p a_p. \quad (1.4)$$

• $F(u(x)) = u''(x)$, on a:

$$u''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} T_n(x)$$

on utilise la relation (1.4), on trouve l'expression explicite:

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ \text{step2}}}^{\infty} p(p^2 - n^2) a_p.$$

Remarque 1.2.3 La notation "step2" signifie que l'incrément de la sommation est 2.

Exemple 1.2.4 La somme $\sum_{\substack{p=3 \\ \text{step2}}}^{\infty} u_p$ est définie par:

$$\sum_{\substack{p=3 \\ \text{step2}}}^{\infty} u_p = u_3 + u_5 + u_7 + \dots$$

1.3 Polynômes trigonométriques

Définition 1.3.1 La série de Fourier $F(u)$ d'une fonction $u \in L^2 [0, 2\pi]$, est donnée par

$$F(u(x)) = \hat{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(nx)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) dx. \\ \hat{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(nx) dx. \\ \hat{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

Définition 1.3.2 On définit $F(u)$ par:

$$F(u(x)) = \sum_{|n| \leq \infty} \hat{u}_n \exp(inx)$$

où

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \exp(-inx) dx.$$

Les coefficients de Fourier:

• **Le cas continu:** Les coefficients de Fourier sont définis par:

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \exp(-inx) dx.$$

• **Le cas discret:** Pour définir les coefficients de Fourier dans ce cas, on fait appel à la formule quadratique.

Cette formule est basée sur le choix d'un nombre de points, pair ou impair, pour cela on définit deux expressions:

L'expression "pair": Les coefficients de Fourier \hat{u}_n sont définis par:

$$\hat{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \exp(-inx_j)$$

avec $x_j \in [0, 2\pi]$, est donné par:

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Théorème 1.3.3 [3]

La formule quadratique

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)$$

est exacte pour tous les polynômes trigonométriques $f(x) = \exp(inx)$, $|n| \leq N$.

Définition 1.3.4 [3]

L'interpolation de $u \in L^2 [0, 2\pi]$ sur l'espace $B_N = \langle \{\exp(inx), n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}\} \rangle$ est donnée par:

$$I_N(u(x)) = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} \hat{u}_n \exp(inx) \quad (1.5)$$

avec

$$\hat{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \exp(-inx_j). \quad (1.6)$$

Théorème 1.3.5 [3]

Soit la transformation de Fourier discrète définie par (1.5) et (1.6), pour toutes les fonction périodiques $u \in C_p^0 [0, 2\pi]$, on a

$$I_N u(x_j) = u(x_j), \quad x_j = \frac{2\pi}{N} j, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

L'expression "impair": Les coefficients de Fourier \hat{u}_n sont donnés par:

$$\hat{u}_n = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(x_j) \exp(-inx_j)$$

avec

$$x_j = \frac{2\pi}{N+1} j, \quad j = 0, \dots, N.$$

Théorème 1.3.6 [3]

La formule quadratique

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N f(x_j)$$

est exacte pour toutes les fonctions $f(x) = \exp(inx)$, $|n| \leq N$.

Définition 1.3.7 On peut aussi définir l'interpolation de u par:

$$I_N(u(x)) = \sum_{j=0}^N u(x_j) g_j(x)$$

avec g_j est le polynôme trigonometrique d'interpolation de Lagrange défini par:

$$g_j(x) = \frac{1}{N} \sin \left[N \frac{x - x_j}{2} \right] \cot \left[\frac{x - x_j}{2} \right].$$

Définition 1.3.8 *L'approximation de la dérivée de u en x_i est donnée sous forme matricielle suivante:*

$$\frac{d}{dx} I_N u |_{x_i} = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \frac{d}{dx} g_j(x) |_{x_i} = \sum_{j=0}^{N-1} D_{ij} u(x_j),$$

avec

$$D_{ij} = \frac{d}{dx} g_j(x) |_{x_i} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{2} \cot \left[\frac{x_i - x_j}{2} \right] & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

On définit la matrice de différentiation d'ordre 2 par:

$$D_{ij}^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} g_j(x) |_{x_i} = \begin{cases} -\frac{(-1)^{i+j}}{2} \left[\sin \left(\frac{x_i - x_j}{2} \right) \right]^{-2} & \text{si } i \neq j \\ -\frac{N^2+2}{12} & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Chapitre 2

Méthodes spectrales

Le but de ce chapitre est de présenter les méthodes spectrales couramment utilisées pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

On va considérer la formulation intrinsèque de ces méthodes et ses applications pratiques pour des problèmes définis sur des domaines bornés [7].

2.1 Exemples d'EDP

Voici quelques exemples d'équations sur lesquelles peuvent être testées les méthodes spectrales

Equation de poisson:

$$-\Delta u = f.$$

Equation de la chaleur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

Equation de réaction-diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

Equation de Burgers avec terme dissipatif:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

Equation de Kuramoto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f.$$

Equations de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u + f \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

Equation des ondes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f.$$

Equation de Klein-Gordon non linéaire:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = E(u).$$

Voici quelques exemples de domaines spatiaux et de condition aux limites:

a) Equation de la chaleur avec conditions aux limites périodiques:

$$x \in \Gamma \text{ cercle unité paramétré par } x \in [0, 2\pi], u(0) = u(2\pi).$$

Remarque 2.1.1 *Les fonctions définies sur Γ sont identifiées aux fonctions d'une variable réelle 2π -périodiques.*

b) Equation de la chaleur avec $x \in [0, \pi]$:

$$u(0) = g_1, u(\pi) = g_2.$$

c) Equation de Kuramoto avec $x \in [-1, 1]$, avec quatre conditions aux limites, par exemple:

$$\begin{cases} u(-1) = u(1) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1) = 0. \end{cases}$$

d) Equation de réaction-diffusion avec:

$$x \in [0, \pi] \text{ et } u(0) = g_1.$$

Remarque 2.1.2 *À noter qu'il faut ajouter une condition initiale à savoir*

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

pour toutes les équations données précédemment.

Formulation du problème:

Les équations précédentes peuvent être écrites sous la forme générale suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = F(u)(x, t) + f(x, t) & x \in \Omega, t \geq 0 \\ Su(x, t) = g(t) & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$.

On cherche $u(x, t)$ fonction du temps à valeurs dans un espace de Hilbert H muni de sa norme $\|\cdot\|$.

f est un élément de H .

F est une fonction de H dans H .

S est un opérateur de trace déterminant les conditions aux limites, on l'omettra si le domaine est périodique.

u_0 est la condition initiale.

Exemple 2.1.3 On considère l'équation de réaction-diffusion:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in [0, \pi], t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

L'espace fonctionnel est: $H = L^2(0, \pi)$.

Dans ce problème, on a:

$$\begin{aligned} F(u) &= -a \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ f &= 0 \\ Su(x, t) &= (u(0, t), u(\pi, t)) \end{aligned}$$

2.2 Principe des méthodes spectrales

Les méthodes spectrales permettent de traiter la dépendance spatiale [7], en décomposant les éléments de H sur une base de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, et on cherche:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \varphi_n(x)$$

élément de l'espace B_N engendré par les N premières fonctions de base de telle sorte que cette fonction approche la vraie solution du problème dans le sens suivant:

On définit le résidu associé à l'approximation u_N par

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - F(u_N) - f$$

ce résidu est nul si u_N est la vraie solution.

On impose à R_N d'être nul en projection sur B_N , cette projection P_N dépend de la méthode spectrale employée.

On remplace donc le problème initial (2.1) par le problème approché:

$$\text{trouver } u_N \in B_N \text{ telle que } P_N R_N = 0.$$

Cela revient à la résolution de N équations différentielles en temps dont les inconnues sont les $a_n(t)$.

Exemples de fonctions de base utilisées

- a) $H = L^2(\Gamma, \mathbb{C}) : (\varphi_k(x))_{k \in \mathbb{Z}} = (\exp(ikx))_{k \in \mathbb{Z}}$.
- b) $H = L^2(0, \pi) : (\varphi_n(x))_{n \geq 1} = (\sin(nx))_{n \geq 1}$ ou $(\varphi_n(x))_{n \geq 0} = (\cos(nx))_{n \geq 0}$.
- c) $H = L^2([-1, 1]) : (\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

2.3 Méthodes spectrales

2.3.1 Méthode de Galerkin

On applique la méthode de Galerkin lorsque les conditions aux limites sont périodiques ou homogènes.

Soit $B = \{v \in H, Sv = 0\}$ le sous-espace des fonctions de H vérifiant les conditions aux limites, les $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ forment une base de B .

P_N^\perp est la projection orthogonale de H sur B_N engendré par les N premières fonctions de base.

La méthode de Galerkin consiste à résoudre le problème approché

$$\text{Trouver } u_N = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \text{ dans } B_N \text{ telle que } P_N^\perp R_N = 0$$

$$\text{avec } R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - F(u_N) - f.$$

Remarque 2.3.2 *Pour des conditions aux limites non homogènes, B n'est plus un espace vectoriel mais un espace affine.*

Remarque 2.3.3 *Dans le cas où F est linéaire, on peut se ramener au cas homogène en retranchant une solution particulière.*

Exemple 2.3.4 *Equation de la chaleur,*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [0, \pi], t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Soit $H = L^2(0, \pi)$, on considère les fonctions de base $\varphi_n(x) = \sin nx$, $n \geq 1$ qui vérifient les conditions aux limites.

Puisque $f \in H$ alors $f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx$.

On cherche:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \sin nx.$$

Calculons le résidu:

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{\partial u_N}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - f \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{da_n}{dt} + \nu n^2 a_n \right) \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx. \end{aligned}$$

Dire que R_N est orthogonal à B_N revient à poser les N équations

$$\frac{da_n}{dt} = -\nu n^2 a_n + f_n \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

On pose $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \sin nx$, ce qui donne N conditions initiales

$$a_n(0) = a_n^0 \text{ pour } n = 1, \dots, N.$$

On résout alors ces N équations différentielles, soit par un schéma aux différences finies en temps soit analytiquement lorsque cela est simple comme ici:

Résolution des équations (2.2) sans second membre

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} &= -\nu n^2 a_n \Rightarrow \frac{dt}{a_n} \frac{da_n}{dt} = -\nu n^2 a_n \frac{dt}{a_n} \\ &\Rightarrow \frac{da_n}{a_n} = -\nu n^2 dt \\ &\Rightarrow \ln a_n(t) = -\nu n^2 t + c \quad \text{avec } c \text{ constante} \\ &\Rightarrow a_n(t) = K \exp(-\nu n^2 t) \quad (\text{avec ici } K = a_n(0)). \end{aligned}$$

Résolution des équations (2.2) Avec second membre, en fait varier la constante K , en posant:

$$a_n(t) = K(t) \exp(-\nu n^2 t) \Rightarrow \frac{da_n}{dt} = \frac{dK}{dt} \exp(-\nu n^2 t) - \nu n^2 K(t) \exp(-\nu n^2 t).$$

On remplace dans (2.2) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} \exp(-\nu n^2 t) &= f_n \\ \frac{dK}{dt} &= f_n \exp(\nu n^2 t) \\ k(t) &= \frac{f_n}{\nu n^2} (\exp(\nu n^2 t) - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$a_n(t) = a_n(0) \exp(-\nu n^2 t) + \frac{f_n}{\nu n^2} (1 - \exp(-\nu n^2 t)) \quad n = 1, \dots, N.$$

Remarque 2.3.5 La solution $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ se décompose avec les mêmes coefficients que ceux de la solution approchée u_N , par conséquent c'est la projection orthogonale de u sur B_N .

2.3.6 Méthode de Tau

On applique cette méthode pour des conditions aux limites non périodiques.

Soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une base orthogonale ne vérifiant pas les conditions aux limites, et si F contient des dérivations d'ordre K les conditions aux limites sont au nombre de K .

Donc, la méthode de Tau consiste à résoudre le problème approché

$$\text{Trouver } u_N = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \text{ dans } B_N \text{ telle que } \begin{cases} P_{N-K}^\perp R_N = 0 & N - K \text{ équations} \\ S u_N = 0 & K \text{ équations} \end{cases}$$

P_{N-K}^\perp désigne la projection orthogonale de H sur B_{N-K} .

Projecteur de la méthode de Tau

On cherche u_N dans l'espace affine de dimension $N - K$ des éléments B_N vérifiant les K conditions aux limites.

Exemple 2.3.7 *Equation de la chaleur*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [-1, 1], t \geq 0 \\ u(-1, t) = g_1, u(1, t) = g_2 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [-1, 1] \end{cases}$$

$H = L^2([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ avec comme fonctions de base les polynômes de Tchebyshev $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On cherche

$$u_N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n(x) \text{ dans } B_N$$

avec B_N de dimension $N + 1$ (notations spéciales à cet exemple).

On pose

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{(2)}(t) T_n(x)$$

les coefficients $a_n^{(2)}$ sont donnés par la formule

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ \text{step 2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p$$

$$\text{où } c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

d'où

$$R_N = \sum_{n=0}^N \left(\frac{da_n}{dt} - \nu a_n^{(2)} \right) T_n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n.$$

Comme $K = 2$, on pose que la projection de ce résidu est nulle sur B_{N-2}

$$\frac{da_n}{dt} = \nu a_n^{(2)} + f_n \quad n = 0, \dots, N-2 \quad : N-1 \text{ équations.}$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n T_n(-1) = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n = g_1 \\ \sum_{n=0}^N a_n T_n(1) = \sum_{n=0}^N a_n = g_2 \end{cases} : 2 \text{ équations.}$$

Ces $N + 1$ équations permettent de trouver les $N + 1$ inconnues $a_n(t)$, en utilisant les conditions initiales

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^N a_n^0 T_n(x).$$

2.4 Méthodes pseudo-spectrales

2.4.1 Méthode de Collocation

Les conditions d'applications pour cette méthode sont les mêmes que pour celle de Galerkin.

Pour cette méthode, les $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ forment une base complète de H et vérifient les conditions aux limites.

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$: N points dits de collocation dans Ω , tels que la matrice $M = (\varphi_n(x_i))_{\substack{n=1, N \\ i=1, N}}$ soit inversible.

La méthode de Collocation consiste à chercher

$$u_N = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \text{ dans } B_N$$

telle que son résidu R_N vérifie les N conditions

$$R_N(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

On peut aussi définir (2.3) comme

$$P_N^C R_N = 0$$

où P_N^C désigne la projection de Collocation définie comme suit:

Soit $v \in H$ et $v_i = v(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ les valeurs de cette fonction aux points de collocation.

En pratique, cette projection s'effectue à condition de savoir inverser la matrice

$$M = (\varphi_n(x_i))_{\substack{n=1, N \\ i=1, N}}.$$

Pour comprendre le mécanisme, introduisons deux isomorphismes:

$$\begin{aligned} \Phi_{sp} & : B_N & \longrightarrow S_p \\ w & = \sum_{n=1}^N b_n \varphi_n & \longmapsto (b_1, b_2, \dots, b_N) \end{aligned}$$

et l'autre

$$\begin{aligned} \Phi_{ph} : B_N &\longrightarrow P_h \\ w &\longmapsto (w_1, w_2, \dots, w_N) \quad \text{avec } w_i = w(x_i) \end{aligned}$$

on appelle S_p " l'espace spectral " et P_h " l'espace physique ".

De ces deux isomorphismes, on déduit un troisième isomorphisme de S_p dans P_h défini par:

$$\begin{aligned} \Psi : S_p &\longrightarrow P_h \\ b = (b_1, b_2, \dots, b_N) &\longmapsto w = (w_1, w_2, \dots, w_N) \\ \text{avec } w_i &= \sum_{n=1}^N b_n \varphi_n(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.2 [7] *On aura donc intérêt à disposer d'algorithmes rapides permettant d'appliquer la matrice M et son inverse à un vecteur, par exemple; l'algorithme de transformée de Fourier rapide.*

Etant donnée une fonction $v \in H$, les N valeurs $v_i = v(x_i)$ déterminent la projection $P_N^C(v)$ dans l'espace physique et en appliquant M^{-1} , on obtient ces coefficients dans l'espace spectral.

La puissance de la méthode de Collocation réside dans la simplicité de la projection des termes non linéaires, de plus toute fonction de B_N se projette en elle même.

On calcule donc facilement la projection de Collocation du résidu R_N , en effectuant des allers et retours entre l'espace spectral où sont calculées les dérivations et l'espace physique où sont projetés les termes non linéaires.

Remarque 2.4.3 *On aurait pu écrire les N équations différentielles dans l'espace physique en utilisant le même nombre de multiplications par M ou M^{-1} .*

Remarque 2.4.4 *Dans d'autres problèmes il faut étudier quel espace nécessaire pour faire le moins d'allers et retours, par exemple les équations de Navier-Stokes doivent être écrites dans l'espace spectral.*

Exemple 2.4.5 *Equation de Burgers avec terme dissipatif périodique:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in \Gamma, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Gamma \end{cases}$$

Où Γ cercle unité paramétré par $x \in [0, 2\pi]$.

$H = L^2(\Gamma, \mathbb{C})$, muni de la base $(\exp(ikx))$, $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $N = 2K + 1$.

Soit B_N engendré par : $(\exp(ikx))_{-K \leq k \leq K}$.

Sur $\Gamma = [0, 2\pi]$, les points de collocation sont choisis à intervalles réguliers:

$$x_j = \frac{2\pi j}{N} \quad j = 1, \dots, N,$$

donc la matrice M est donnée par:

$$\begin{aligned} M &= (\exp(ikx_j))_{\substack{k=1, N \\ j=1, N}} \\ &= \left(\exp\left(ik \frac{2\pi j}{N}\right) \right)_{\substack{k=1, N \\ j=1, N}}. \end{aligned}$$

L inconnue est:

$$u_N(x) = \sum_{k=-K}^K a_k \exp(ikx)$$

et il faut calculer la projection du résidu:

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} - f.$$

Les deux premiers termes appartiennent à B_N et sont invariants par P_N^C .

Pour projeter $u_N \frac{\partial u_N}{\partial x}$ qui n'est pas un élément de B_N , on procède comme suit:

Des $(a_k)_{-K \leq k \leq K}$ coefficients spectraux de u_N , on en déduit $(ika_k)_{-K \leq k \leq K}$ coefficients spectraux de $\frac{\partial u_N}{\partial x}$.

En appliquant la matrice M à ces deux vecteurs, on déduit:

$[u_N(x_i)]$, $i = 1, \dots, N$ et $[\frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i)]$, $i = 1, \dots, N$ les coefficients de u_N et $\frac{\partial u_N}{\partial x}$ dans l'espace physique.

Les coefficients de $P_N^C(u_N \frac{\partial u_N}{\partial x})$ dans l'espace physique sont

$$\left[u_N(x_i) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i) \right], i = 1, \dots, N.$$

En appliquant la matrice M^{-1} pour calculer les $(b_k)_{-K \leq k \leq K}$ coefficients spectraux de cette projection.

Le problème approché par la méthode de Collocation s'écrit alors dans l'espace spectral:

$$P_N^C R_N = 0,$$

c.à.d.

$$\frac{da_k}{dt} + b_k = -k^2 \nu a_k + f_k \quad k = -K, \dots, K.$$

2.4.6 Méthode de Tau-Collocation

Les conditions d'application pour cette méthode sont les même que pour celle de Tau.

Comme pour la méthode Tau, $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est une base orthogonale ne vérifiant pas les K conditions.

Comme pour la Collocation, $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont N points du domaine Ω et on sait appliquer rapidement la matrice $\bar{M} = (\varphi_n(x_i))_{\substack{n=1,N \\ i=1,N}}$ et son inverse.

On calcule la projection P_N^C avec des allers et retours entre l'espace spectral et l'espace physique.

La méthode de Tau-Collocation consiste à chercher $u_N \in B_N$ telle que

$$\begin{cases} P_{N-K}^\perp P_N^C R_N = 0 \\ Su_N = 0 \end{cases}$$

où P_{N-K}^\perp est la projection orthogonale de R_N sur B_{N-K} .

Interprétation intrinsèque

La méthode de Tau-Collocation consiste à chercher u_N dans l'espace affine de dimension $N - K$ des $u_N \in B_N$ vérifiant $B_N u = g$ tel que le résidu R_N annule la projection $P_{N-K}^\perp P_N^C$ de H sur B_{N-K} .

Exemple 2.4.7 *Equation de Burgers avec terme dissipatif non périodique*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [-1, 1], t \geq 0 \\ u(-1, t) = g_1, u(1, t) = g_2 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [-1, 1] \end{cases}$$

$H = L^2\left([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right); (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base des polynômes de Tchebyshev.

En choisissant comme points de Collocation les $x_j = \cos(j \frac{2\pi}{N+1})$, $j = 0, \dots, N$ et N pair.

On peut utiliser l'algorithme de transformation de Fourier rapide pour appliquer la matrice

$$\begin{aligned} M &= (T_n(x_j))_{\substack{n=1,N \\ j=1,N}} \\ &= (\cos[n \arccos x_j])_{\substack{n=1,N \\ j=1,N}} \\ &= \left(\cos nj \frac{2\pi}{N+1} \right)_{\substack{n=1,N \\ j=1,N}}. \end{aligned}$$

Les $N + 1$ équations du problème approché s'écrivent comme suit:

B_N étant de dimension $N + 1$,

Trouver $u_N = \sum_{n=0}^N a_n T_n$ dans B_N telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_n}{dt} + b_n = \nu a_n^{(2)} + f_n \quad n = 0, N - 2 \\ \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n = g_1 \\ \sum_{n=0}^N a_n = g_2 \end{array} \right.$$

avec $a_n^{(2)} = \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ \text{step 2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p$ et $c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$

b_n coefficients spectraux de $P_N^C \left(u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} \right)$.

Chapitre 3

Méthode de Fourier-Galerkin

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter la méthode de Fourier-Galerkin et ses applications pratiques, soit pour des problèmes linéaires ou bien non linéaires définis sur $[0, 2\pi]$ comme suit:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = Lu(x, t) & x \in [0, 2\pi], t \geq 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (3.1)$$

où L est une application aux dérivées partielles, et grâce à un théorème et un résultat dus à Hesthaven et al [3], on montrera la stabilité de cette méthode.

3.2 Principe de la méthode

Considérons le problème (3.1).

La méthode de Fourier-Galerkin consiste à chercher des solutions approchées sous la forme:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_n(t) \exp(inx),$$

dans l'espace

$$B_N = \left\langle \left\{ \exp(inx), -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} \text{ avec } N \text{ pair} \right\} \right\rangle$$

et les $a_n(t)$ sont les coefficients inconnus à déterminer par cette méthode.

Remarque 3.2.1 *Les coefficients $a_n(t)$ de l'approximation sont différents des coefficients de Fourier, mais ils sont égaux si cette approximation est la solution exacte du problème.*

Pour la méthode de Fourier-Galerkin, les coefficients $a_n(t)$ sont déterminés en imposant au résidu $R_N(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x, t) - Lu_N(x, t)$ d'être orthogonal à B_N .

C.à.d.

$$P_N R_N = 0$$

où P_N est la projection orthogonale sur B_N .

Donc, si on exprime le résidu en termes de série de Fourier:

$$R_N(x, t) = \sum_{|n| \leq \infty} \hat{R}_n(t) \exp(inx)$$

et

$$\hat{R}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_N(x, t) \exp(-inx) dx.$$

Alors, les $N + 1$ coefficients $a_n(t)$ sont déterminés par la résolution de $N + 1$ équations différentielles ordinaires

$$\hat{R}_n(t) = 0 \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$$

avec les conditions initiales

$$u_N(x, 0) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_n(0) \exp(inx)$$

et

$$a_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \exp(-inx) dx.$$

3.3 Application

Dans cette section, on va traiter deux exemples définis sur $[0, 2\pi]$ de la forme (3.1) et obtenir leurs solutions par cette méthode.

Exemple 3.3.1 On considère l'équation de réaction-diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

avec l'hypothèse

$$g(x) = u(x, 0) \in C_P^\infty [0, 2\pi], \quad c \text{ et } \epsilon \text{ sont des constantes.}$$

On cherche

$$u_N(x, t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_n(t) \exp(inx)$$

de telle sorte que le résidu

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x, t) - c \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) - \epsilon \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x, t)$$

soit orthogonal à B_N .

On rappelle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} i n a_n(t) \exp(inx) \\ \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x, t) &= - \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} n^2 a_n(t) \exp(inx) \end{aligned}$$

d'où

$$R_N(x, t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left(\frac{da_n}{dt} - i n c a_n + \epsilon n^2 a_n \right) \exp(inx).$$

La méthode de Fourier-Galerkin consiste à résoudre les $N + 1$ équations

$$\frac{da_n}{dt} = (i n c - \epsilon n^2) a_n(t) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{a_n} &= (i n c - \epsilon n^2) dt \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \\ \ln(a_n(t)) &= (i n c - \epsilon n^2) t + c \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}; \quad c \text{ constante} \\ a_n(t) &= K \exp(i n c - \epsilon n^2) t, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned}$$

avec

$$K = a_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \exp(-inx) dx.$$

D'où, la solution est donnée sous forme

$$u_N(x, t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_n(t) \exp(inx)$$

et

$$a_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \exp(-inx + (inc - \epsilon n^2)t) dx \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}.$$

Dans ce cas, les coefficients $a_n(t)$ de l'approximation sont égaux aux coefficients de Fourier.

De plus; la solution approchée est la projection de la vraie solution, c.à.d.

$$P_N u(x, t) = u_N(x, t).$$

Exemple 3.3.2 On considère l'équation de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

avec des conditions initiales périodiques et régulières.

On cherche la solution sous la forme

$$u_N(x, t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_n(t) \exp(inx).$$

On impose au résidu:

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x, t) - u_N(x, t) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t)$$

d'être orthogonal à B_N .

Avec

$$\begin{aligned}
 u_N(x, t) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) &= \left(\sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_l(t) \exp(ilx) \right) \left(\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} ika_k(t) \exp(ikx) \right) \\
 &= \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} ika_k(t) a_l(t) \exp i(l+k)x \\
 &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} ika_k(t) \left(\sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_l(t) \exp i(l+k)x \right)
 \end{aligned}$$

si on pose $n = l + k$, alors

$$l = n - k$$

et donc; on obtient

$$\begin{aligned}
 u_N(x, t) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} ika_k(t) \left(\sum_{n-k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_{n-k}(t) \exp(inx) \right) \\
 &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+k}^{\frac{N}{2}+k} ika_k(t) a_{n-k}(t) \exp(inx)
 \end{aligned}$$

le résidu $R_N \notin B_N$.

La méthode de Fourier-Galerkin consiste à résoudre le problème approché suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_n}{dt} - \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} ika_k(t) a_{n-k}(t) = 0 \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \\ a_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \exp(-inx) dx. \end{array} \right.$$

Pour résumer, la méthode de Fourier-Galerkin est très efficace pour traiter des problèmes linéaires à coefficients constants, mais elle tend à devenir compliquée pour des problèmes non linéaires ou bien linéaires à coefficients dépendant de x .

3.4 Stabilité de la méthode

Nous considérons l'équation suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = Lu(x, t) \quad (3.2)$$

avec

$$u(., t) \in L^2[0, 2\pi].$$

D'après [3], le problème est bien posé si L est semi-borné dans un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire ($L^2[0, 2\pi]$) i.e.

$$L + L^* \leq 2\alpha I \text{ pour } \alpha \text{ constant,}$$

dans ce cas, la méthode de Fourier-Galerkin est stable.

D'abord, nous allons montrer que l'équation (3.2) est bien posée avec L semi-borné.

Pour montrer cela, nous estimons la dérivée de la norme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= \frac{d}{dt} (u, u) & (3.3) \\ &= \left(\frac{du}{dt}, u \right) + \left(u, \frac{du}{dt} \right) \\ &= (Lu, u) + (u, Lu) \\ &= (u, L^*u) + (u, Lu) \\ &= (u, (L^* + L)u) \leq \|u\| \|L^* + L\| \|u\| \leq 2\alpha \|u\|^2 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|u\| \|u\|) &\leq 2\alpha \|u\| \|u\| \\ \left(\frac{d}{dt} \|u\| \right) \|u\| + \|u\| \left(\frac{d}{dt} \|u\| \right) &\leq 2\alpha \|u\| \|u\| \\ 2 \|u\| \frac{d}{dt} \|u\| &\leq 2\alpha \|u\| \|u\| \\ \frac{d}{dt} \|u\| &\leq \alpha \|u\|. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la norme est bornée, en effet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\| &\leq \alpha \|u\| \Rightarrow \frac{d(\|u\|)}{\|u\|} \leq \alpha dt \\ &\Rightarrow \ln(\|u\|) \leq \alpha t + c \quad (c \text{ constant}) \\ &\Rightarrow \|u\| \leq k \exp(\alpha t) \end{aligned}$$

d'où:

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\| \exp(\alpha t)$$

donc le problème est bien posé.

Dans ce qui suit, on considère un exemple spécifique d'un opérateur semi-borné dans $L^2 [0, 2\pi]$.

Exemple 3.4.1 *Considérons l'opérateur:*

$$L = a(x) \frac{\partial}{\partial x}$$

dans $L^2 [0, 2\pi]$; où $a(x)$ est une fonction périodique avec une dérivée bornée périodique.

L'opérateur adjoint L^* obtenu par une intégration par parties:

$$\begin{aligned} (Lu, v)_{L^2[0, 2\pi]} &= \int_0^{2\pi} a(x) \frac{\partial u}{\partial x} v(x) dx \\ &= - \int_0^{2\pi} u(x) \frac{\partial}{\partial x} (a(x)v(x)) dx \\ &= - \int_0^{2\pi} u(x) \left[\frac{\partial a}{\partial x} v(x) + a(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx \\ &= \left(u, - \left(\frac{\partial a}{\partial x} I + a \frac{\partial}{\partial x} \right) v \right)_{L^2[0, 2\pi]} \\ &= (u, L^* v)_{L^2[0, 2\pi]} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} L^* &= - \left(\frac{\partial a}{\partial x} I + a(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= -a'(x)I - a(x) \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

D'où

$$L + L^* = -a'(x)I$$

et étant donné que la dérivée de $a(x)$ est bornée $|a'(x)| \leq 2\alpha$, on aura:

$$L + L^* \leq 2\alpha I.$$

Remarque 3.4.2 La méthode de Fourier-Galerkin est stable si l'opérateur L est semi-borné.

Théorème 3.4.3 [3]

Soit le problème:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = Lu(x, t)$$

où l'opérateur L est semi-borné dans $L^2 [0, 2\pi]$, alors la méthode de Fourier-Galerkin est stable.

Démonstration : D'abord, on montre que:

$$P_N = P_N^*.$$

On a

$$\begin{aligned} (u, P_N v) &= (u, P_N v) + (P_N u, P_N v) - (P_N u, P_N v) \\ &= (P_N u, P_N v) + (u - P_N u, P_N v), \end{aligned}$$

le second terme de 2^{eme} membre est un produit scalaire de la projection de v sur l'espace B_N avec la projection de u sur le complémentaire de l'espace B_N d'où:

$$(u - P_N u, P_N v) = 0$$

donc:

$$(u, P_N v) = (P_N u, P_N v).$$

De même, en constatant que:

$$(P_N u, v) = (P_N u, P_N v)$$

on trouve:

$$\begin{aligned} (u, P_N v) &= (P_N u, v) \\ (P_N^* u, v) &= (P_N u, v) \end{aligned}$$

d'où:

$$P_N^* = P_N.$$

Maintenant, on remarque que la méthode de Fourier-Galerkin consiste à déterminer $u_N \in B_N$ de telle sorte que:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} = L_N u_N = P_N L P_N u_N, \text{ où } L_N = P_N L P_N.$$

Car:

$$\begin{aligned} P_N R_N &= 0 \Rightarrow P_N \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} - L u_N \right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial u_N}{\partial t} - P_N L u_N = 0 \quad \text{car } \frac{\partial u_N}{\partial t} - L u_N \in B_N \\ &\Rightarrow \frac{\partial u_N}{\partial t} - P_N L P_N u_N = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_N}{\partial t} = P_N L P_N u_N. \end{aligned}$$

Notons que:

$$\begin{aligned} L_N + L_N^* &= P_N L P_N + P_N^* L^* P_N^* \\ &= P_N L P_N + P_N L^* P_N \\ &= P_N (L + L^*) P_N \leq 2\alpha P_N \end{aligned}$$

à condition que L soit semi-borné.

Et d'après l'équation (3.3), on trouve:

$$\|u_N(t)\| \leq \|u_N(0)\| \exp(\alpha t).$$

■

Chapitre 4

Méthode de Fourier-Collocation

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente la méthode de Fourier-Collocation et quelques applications. On présentera aussi la stabilité de cette méthode pour des problèmes hyperboliques et paraboliques.

4.2 Principe de la méthode

La méthode de Fourier-Collocation consiste à remplacer l'opérateur de la projection orthogonale P_N par l'opérateur d'interpolation I_N (voir Théorème 1.3.5).

La méthode de Fourier-Collocation consiste à rendre nul le résidu R_N en quelques points y_j appelés points de collocation.

Remarque 4.2.1 *En général, les points de collocation y_j sont différents des points d'interpolation:*

$$x_j = \frac{2\pi}{N}j \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

On considère le problème général suivant: trouver $u(x, t) \in L^2 [0, 2\pi]$, périodique telle que,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = Lu(x, t) & x \in [0, 2\pi], t \geq 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

La méthode de Fourier-Collocation consiste à chercher u_N dans l'espace

$$B_N = \left\langle \left\{ \cos nx, 0 \leq n \leq \frac{N}{2} \right\} \cup \left\{ \sin nx, 1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \right\} \right\rangle, \quad N \text{ pair}$$

L'inconnue u_N est donnée sous la forme:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_n(t) \exp(inx),$$

on peut aussi exprimer u_N sous la forme:

$$u_N(x, t) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) g_j(x)$$

où g_j est le polynôme d'interpolation de Lagrange pour un nombre pair de points.

La méthode de Fourier-Collocation consiste à déterminer u_N dans B_N de telle sorte que le résidu

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x, t) - Lu_N(x, t)$$

vérifie les N conditions

$$R_N(y_j, t) = 0 \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (4.1)$$

cela revient à résoudre les N équations pour déterminer les N termes $u_N(x_j, t)$ de la solution numérique.

On peut aussi remplacer le système (4.1) par le système suivant:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}(y_j, t) - I_N Lu_N(y_j, t) = 0, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (4.2)$$

4.3 Application

Dans les exemples qui vont suivre, les points de collocation sont les mêmes points d'interpolation.

Exemple 4.3.1 On considère l'équation de réaction-diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

avec

$$u(., t) \in C_P^\infty [0, 2\pi], \text{ et } c, \epsilon \text{ sont des constantes.}$$

On cherche

$$u_N(x, t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_n(t) \exp(inx) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) g_j(x)$$

de telle sorte que le résidu:

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x, t) - c \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) - \epsilon \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x, t)$$

vérifie l'équation (4.1).

Puisque $x_j = y_j$ alors (4.1) devient:

$$R_N(x_j, t) = 0 \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Si on travaille avec (4.2), on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{du_N}{dt}(x_j, t) - I_N \left(c \frac{\partial}{\partial x} u_N(x_j, t) + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_N(x_j, t) \right) &= 0 \\ \frac{du_N}{dt}(x_j, t) - c I_N \frac{\partial}{\partial x} u_N(x_j, t) - \epsilon I_N \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_N(x_j, t) &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème (1.3.5), on obtient:

$$\frac{du_N}{dt}(x_j, t) = c I_N \frac{\partial}{\partial x} I_N u_N(x_j, t) + \epsilon I_N \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_N u_N(x_j, t) \quad (4.3)$$

où:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I_N u_N(x_j, t) &= \sum_{k=0}^{N-1} u_N(x_k, t) \frac{dg_k(x)}{dx} \Big|_{x_j} = \sum_{k=0}^{N-1} D_{jk}^{(1)} u_N(x_k, t). \\ \frac{d^2}{dx^2} I_N u_N(x_j, t) &= \sum_{k=0}^{N-1} u_N(x_k, t) \frac{d^2 g_k(x)}{dx^2} \Big|_{x_j} = \sum_{j=0}^{N-1} D_{jk}^{(2)} u_N(x_k, t). \end{aligned}$$

Les $D^{(1)}$ et $D^{(2)}$ sont les matrices de différentiation définies dans [3] par:

$$D_{jk}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j+k}}{2} \cot \left[\frac{x_j - x_k}{2} \right] & \text{si } j \neq k \\ 0 & \text{si } j = k \end{cases}$$

et

$$D_{jk}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{(-1)^{j+k}}{2} \left[\sin \left(\frac{x_j - x_k}{2} \right) \right]^{-2} & \text{si } j \neq k \\ -\frac{N^2 + 2}{12} & \text{si } j = k \end{cases}$$

Donc; (4.3) devient

$$\frac{du_N}{dt}(x_j, t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(cD_{jk}^{(1)} + \epsilon D_{jk}^{(2)} \right) u_N(x_k, t). \quad (4.4)$$

Si on note par $U(t)$ le vecteur dont les composantes sont les inconnues $u_N(x_j, t)$,

$$U(t) = (u_N(x_0, t), u_N(x_1, t), u_N(x_2, t), \dots, u_N(x_{N-1}, t))^{\top}$$

(4.4) devient

$$\frac{dU(t)}{dt} = D_N^{jk} U(t) \quad (4.5)$$

avec:

$$D_N^{jk} = cD_{jk}^{(1)} + \epsilon D_{jk}^{(2)} = \begin{cases} c \frac{(-1)^{j+k}}{2} \cot \left[\frac{x_j - x_k}{2} \right] - \epsilon \frac{(-1)^{j+k}}{2} \left[\sin \left(\frac{x_j - x_k}{2} \right) \right]^{-2} & \text{si } j \neq k \\ -\epsilon \frac{N^2 + 2}{12} & \text{si } j = k \end{cases}.$$

Et la solution de (4.5) :

$$U(t) = (\exp(D_N^{jk} t)) U(0)$$

et

$$\begin{aligned} U(0) &= (u_N(x_0, 0), u_N(x_1, 0), u_N(x_2, 0), \dots, u_N(x_{N-1}, 0))^{\top} \\ &= (u_N(x_0), u_N(x_1), u_N(x_2), \dots, u_N(x_{N-1}))^{\top} \end{aligned}$$

d'où

$$u_N(x_j, t) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left[(cD_{jk}^{(1)} + \epsilon D_{jk}^{(2)}) t \right] u_N(x_k, 0).$$

Finalement, la solution du problème est donnée par:

$$\begin{aligned} u_N(x, t) &= \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) g_j(x) \\ \text{avec } u_N(x_j, t) &= \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left[(cD_{jk}^{(1)} + \epsilon D_{jk}^{(2)}) t \right] U(0). \end{aligned}$$

Exemple 4.3.2 On considère l'équation de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

On cherche

$$u_N(x, t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_n(t) \exp(inx) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) g_j(x)$$

de telle sorte que le résidu

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x, t) - u_N(x, t) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t)$$

vérifie les N équations suivantes:

$$R_N(x_j, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{du_N}{dt}(x_j, t) - u_N(x_j, t) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) \Big|_{x_j} = 0.$$

Cela revient à la résolution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{du_N}{dt}(x_j, t) = u_N(x_j, t) \sum_{k=0}^{N-1} D_{jk}^{(1)} u_N(x_k, t) \\ u_N(x_j, 0) = u_0(x_j) \end{cases}.$$

4.4 Stabilité de la méthode pour les problèmes hyperboliques

Pour la méthode de Galerkin, le fait que l'opérateur L est semi-borné, à savoir $L + L^* \leq 2\alpha I$, était suffisant pour garantir la stabilité de la méthode numérique, cependant, ce n'est pas le cas pour la méthode de Collocation.

Pour établir la stabilité de la méthode pseudo-spectrale, on exploite les propriétés des matrices de différentiation ou les règles de quadrature pour les polynômes trigonométriques.

Pour la méthode de Collocation discrète, on définit le produit scalaire discret par:

$$(f_N, g_N)_N = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N f_N(x_j) g_N(x_j)$$

et la norme associée:

$$\|f_N\|_N^2 = (f_N, f_N)_N$$

avec $f_N, g_N \in B_N$, et les points $x_j, j = 0, \dots, N$ sont en nombre impair, c.à.d. N pair.

Comme conséquence de l'application de la formule de quadrature pour les fonctions trigonométriques (voir le théorème 1.3.6), on a

$$(f_N, g_N)_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_N g_N dx \quad , \quad \|f_N\|_{L^2[0,2\pi]} = \|f_N\|_N .$$

Donc, dans B_N les produits scalaires continu et discret sont les mêmes.

A noter que la situation est différente pour un nombre pair de points, en effet, si $f_N, g_N \in B_N$ et nous avons un nombre pair de points x_j , le produit scalaire discret n'est pas égal au produit scalaire continu.

En utilisant le fait que $f_N \in L^2[0, 2\pi]$, on peut montrer qu'il existe $K > 0$ tel que

$$K^{-1} \|f_N\|_{L^2[0,2\pi]}^2 \leq \|f_N\|_N^2 \leq K \|f_N\|_{L^2[0,2\pi]}^2$$

par conséquent, les normes continue et discrète sont uniformément équivalentes.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la méthode de Fourier-Collocation basée sur un nombre pair de points qui sont les points de collocation, en général ce sont les mêmes points d'interpolation $y_j = x_j$, $j = 0, \dots, N - 1$.

Considérons le problème hyperbolique périodique suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (4.6)$$

avec

$$0 < \frac{1}{K} \leq |a(x)| \leq K$$

On montre la stabilité dans le cas où $a(x)$ est strictement positive, le même résultat peut être obtenu dans le cas où $a(x)$ est strictement négative.

Remarque 4.4.1 *On n'a pas forcément la stabilité dans le cas où la fonction a passe par zéro (lorsque $a(x)$ change de signe).*

Pour cela on va discuter deux cas:

• **1^{er} cas:** Si $a(x)$ ne change pas de signe ($a(x) > 0$ ou $a(x) < 0$)

Théorème 4.4.2 [3] *Sous forme scalaire.*

La méthode pseudo-spectrale de Fourier appliquée au problème hyperbolique à coefficients variables (4.6) avec $0 < \frac{1}{K} \leq |a(x)| \leq K$ est stable:

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, t) \leq K^2 \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, 0).$$

Démonstration : Dans la méthode de Collocation, la solution approchée $u_N \in B_N$ vérifie:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}(x_j, t) + a(x_j) \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j} = 0. \quad (4.7)$$

Puisque la fonction a est uniformément bornée, a^{-1} existe. On multiplie l'équation (4.7) par $a(x_j)^{-1} u_N(x_j, t)$ et on somme sur tous les points de collocation, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N(x_j, t) \frac{d}{dt} u_N(x_j, t) &= - \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j} \\ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} \frac{d}{dt} u_N^2(x_j, t) &= - \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j, t) &= - \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j} \end{aligned}$$

en utilisant la forme quadratique et à cause de la périodicité de u_N , on obtient:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j, t) = - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_N(x) \frac{\partial u_N}{\partial x} dx = 0$$

ainsi, la somme ne change pas par rapport au temps

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j, t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j, 0).$$

Enfin, on constate que puisque $\frac{1}{K} \leq |a(x)| \leq K$, on a:

$$\frac{1}{K} \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, t) \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j, t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j, 0) \leq K \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, 0)$$

d'où

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, t) \leq K^2 \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, 0).$$

Ce qui donne

$$\|u_N(x, t)\|_N \leq K \|u_N(x, 0)\|_N.$$

■

Une autre méthode permettant de prouver la stabilité est basée sur la représentation matricielle de la méthode de Fourier-Collocation.

L'approximation de Fourier-Collocation pour des problèmes hyperboliques à coefficients variables peut être écrite comme

$$\frac{dU_N(t)}{dt} + ADU_N(t) = 0 \quad (4.8)$$

avec U_N le vecteur dans les composantes sont les $u_N(x_j, t)$, et A la matrice diagonale définie par $A_{jj} = a(x_j)$.

D est la matrice de différentiation donnée par

$$D_{ij} = \frac{d}{dx} g_j(x) |_{x_i}$$

avec D est antisymétrique ($D^\top = -D$), c'est le point essentiel pour prouver la stabilité, et indépendamment de l'utilisation d'un nombre pair ou impair des points de collocation.

La solution de l'équation (4.8) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dU_N(t)}{dt} &= -ADU_N(t) \Rightarrow \frac{dU_N(t)}{u_N(t)} = -ADdt \\ &\Rightarrow \ln(U_N(t)) = -ADt + c \text{ avec } c \text{ constante} \\ &\Rightarrow U_N(t) = C \exp(-ADt) \end{aligned}$$

or $C = U_N(0)$, donc

$$U_N(t) = U_N(0) \exp(-ADt).$$

Dans ce cas, la stabilité signifie que l'exponentielle de la matrice est bornée indépendamment du nombre de points i.e.

$$\|\exp(-ADt)\| \leq K(t) \text{ dans } L^2$$

en d'autres termes

$$\exp(-ADt) \exp(-(AD)^\top t) \leq K^2(t).$$

Théorème 4.4.3 *Sous forme matricielle.*

La méthode pseudo-spectrale de Fourier appliquée au problème hyperbolique à coefficients variables (4.6) avec $0 < \frac{1}{K} \leq |a(x)| \leq K < \infty$ est stable:

$$\|\exp(-ADt)\| \leq K.$$

Démonstration : On a:

$$-AD = -A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}} \text{ et donc: } \exp(-ADt) = A^{\frac{1}{2}} \exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t)A^{-\frac{1}{2}}$$

par l'utilisation de la définition de l'exponentielle d'une matrice

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Puisque D est antisymétrique on a

$$(A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}})^{\top} = A^{\frac{1}{2}}D^{\top}A^{\frac{1}{2}} = -A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}$$

donc:

$$\begin{aligned} \left\| \exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t) \right\|^2 &= \exp\left(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t\right) \exp\left(\left(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}\right)^{\top} t\right) \\ &= \exp\left(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}\right)t \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc

$$\left\| \exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t) \right\| = 1$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\exp(-ADt)\| &\leq \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\| \left\| \exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t) \right\| \left\| A^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\leq \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\| \left\| A^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq \sqrt{K} \sqrt{K} = K. \end{aligned}$$

Notons que cette preuve de stabilité est valable pour $\exp(ADt)$, c.à.d pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

La même preuve de stabilité pour $\exp(-DA^{\frac{1}{2}}t)$, qui est la solution de:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a(x)u}{\partial x} = 0.$$

■

•**2^{eme} cas:** Si $a(x)$ change de signe:

En général, la méthode de Fourier-Collocation appliquée à des problèmes hyperboliques à coefficients variables, comme l'équation (4.6) avec $a(x)$ qui change de signe, n'est pas stable; mais on peut trouver des techniques pour stabiliser cette méthode.

On considère la forme antisymétrique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial(a(x)u)}{\partial x} - \frac{1}{2}a_x(x)u(x,t) = 0, \quad (4.9)$$

l'approximation de Fourier-Collocation pour cette équation est stable.

Théorème 4.4.4 *La méthode pseudo-spectrale de Fourier appliquée au problème hyperbolique à coefficients variables (4.9) est stable:*

$$\|u_N(t)\|_N \leq e^{\alpha t} \|u_N(0)\|_N$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2} \max_x |a_x(x)|.$$

Démonstration : Dans la méthode de Fourier-Collocation, on cherche un polynôme satisfaisant à l'équation:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} \Big|_{x_j} + \frac{1}{2}a(x_j)\frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial I_N[a(x)u_N]}{\partial x} \Big|_{x_j} - \frac{1}{2}a(x_j)u_N(x_j,t) = 0. \quad (4.10)$$

En multipliant (4.10) par $u_N(x_j)$ et en sommant sur tous les points de collocation, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, t) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} a(x_j)u_N(x_j) \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j) \frac{\partial I_N[a(x)u_N]}{\partial x} \Big|_{x_j} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} a_x(x_j)u_N^2(x_j) \end{aligned}$$

dans le deuxième terme, on a $\frac{I_N \partial I_N[a(x)u_N]}{\partial x} \in B_N$, et d'après le théorème (1.3.6) on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j) \frac{\partial I_N[a(x)u_N]}{\partial x} \Big|_{x_j} &= \frac{N}{4\pi} \int_0^{2\pi} u_N(x,t) I_N \frac{\partial I_N[a(x)u_N(x)]}{\partial x} dx \\ &= -\frac{N}{4\pi} \int_0^{2\pi} I_N[a(x)u_N(x)] I_N \frac{\partial u_N}{\partial x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} a(x_j)u_N(x_j) \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, t) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} a_x(x_j) u_N^2(x_j, t) \\
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_N\|_N^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} a_x(x_j) u_N^2(x_j, t) \\
&\leq \frac{1}{2} |a_x(x)| \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, t) \\
&\leq \frac{1}{2} \max_x |a_x(x)| \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j, t) \\
&\leq \frac{1}{2} \max_x |a_x(x)| \|u_N\|_N^2 \\
&\leq \alpha \|u_N\|_N^2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_N\|_N^2 &\leq \alpha \|u_N\|_N^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \|u_N\|_N \leq \alpha \|u_N\|_N \\
&\Rightarrow \|u_N(t)\|_N \leq \|u_N(0)\|_N \exp(\alpha t)
\end{aligned}$$

d'où la stabilité. ■

4.5 Stabilité de la méthode pour les problèmes paraboliques

On considère le problème parabolique suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = b(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (4.11)$$

avec $b(x) > 0$ et $g(x)$ est une fonction périodique et régulière.

Théorème 4.5.1 [3]

L'approximation de Fourier-Collocation pour des problèmes paraboliques (4.11) est stable:

$$\|u_N(t)\|_N \leq \sqrt{\frac{\max b(x)}{\min b(x)}} \|u_N(0)\|_N.$$

Démonstration : Méthode 1: Sous forme matricielle.

L'approximation de Fourier-Collocation pour le problème parabolique est donnée par

$$\frac{dU(t)}{dt} = BD^{(2)} \frac{dU(t)}{dt} \quad (4.12)$$

avec U un vecteur dans les composantes sont $u_N(x_j, t)$.

B est une matrice diagonale positive définie par $B_{jj} = b(x_j)$.

$D^{(2)}$ est défini par

$$D_{ij}^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} g_j(x) |_{x_i} .$$

Pour établir la stabilité de la méthode de Fourier-Collocation, on définit cette matrice comme

$$D^{(2)} = D \cdot D$$

cette définition reste valable, si la méthode est basée sur un nombre impair de points.

On multiplie l'équation (4.12) par $U^\top B^{-1}$, on trouve

$$\begin{aligned} U^\top B^{-1} \frac{dU}{dt} &= U^\top D^{(2)} U = U^\top D D U \\ &= (D^\top U)^\top (D U) = -(D U)^\top (D U) \leq 0, \end{aligned}$$

à conditions que D soit antisymétrique.

On a donc

$$\frac{d}{dt} U^\top B^{-1} U \leq 0$$

et

$$\frac{1}{\max b(x)} \|u_N(t)\|_N^2 \leq U^\top(t) B^{-1} U(t) \leq U^\top(0) B^{-1} U(0) \leq \frac{1}{\min b(x)} \|u_N(0)\|_N^2$$

d'où

$$\|u_N(t)\|_N \leq \sqrt{\frac{\max b(x)}{\min b(x)}} \|u_N(0)\|_N .$$

Méthode 2: On obtient le même résultat pour la forme scalaire.

La méthode de Fourier-Collocation consiste à chercher

$$u_N(x, t) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) g_j(x)$$

telle que

$$\frac{\partial u_N(x, t)}{\partial t} |_{x_j} = b(x_j) \frac{\partial^2 u_N(x, t)}{\partial x^2} |_{x_j} . \quad (4.13)$$

On multiplie l'équation (4.13) par $b(x_j)^{-1}u_N(x_j, t)$ et on somme sur tous les points de collocation, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{b(x_j)} u_N^2(x_j, t) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) \frac{\partial^2 u_N(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x_j}. \quad (4.14)$$

On réalise que la somme $\sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) \frac{\partial^2 u_N(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x_j}$ est un polynôme d'ordre $2N$, et la forme quadratique basée sur un nombre pair des points x_j n'est pas exacte, donc on ne peut pas passer à l'intégrale.

Pour résoudre ce problème, on définit la dérivée seconde par:

$$I_N \frac{d}{dx} I_N \frac{d}{dx} I_N$$

c.à.d.

$$\frac{\partial^2 u_N(x, t)}{\partial x^2} = I_N \frac{\partial}{\partial x} I_N \frac{\partial}{\partial x} u_N(x, t) \in B_{N-1}.$$

Si on remplace dans l'équation (4.14), on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{b(x_j)} u_N^2(x_j, t) &= \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j, t) \left(I_N \frac{\partial}{\partial x} I_N \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j} \right) \\ &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_N(x, t) I_N \left(I_N \frac{\partial}{\partial x} I_N \frac{\partial u_N}{\partial x} \right) dx \\ &= -\frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_N \frac{\partial u_N}{\partial x} I_N \frac{\partial u_N}{\partial x} dx \\ &= -\sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x_j} \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{b(x_j)} u_N^2(x_j, t) \leq 0,$$

on a

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{b(x_j)} u_N^2(x_j, t) \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{b(x_j)} u_N^2(x_j, 0)$$

et

$$\frac{1}{\max b(x)} \|u_N(x, t)\|_N^2 \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{b(x_j)} u_N^2(x_j, t) \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{b(x_j)} u_N^2(x_j, 0) \leq \frac{1}{\min b(x)} \|u_N(x, 0)\|_N^2$$

d'où

$$\|u_N(x, t)\|_N \leq \sqrt{\frac{\max b(x)}{\min b(x)}} \|u_N(x, 0)\|_N$$

donc, on a la stabilité. ■

Conclusion:

Les méthodes spectrales consistent à chercher les solutions d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles en terme de séries de fonctions régulières connues, ces méthodes ont montré leur fiabilité et leur importance dans la résolution numérique des EDPs.

Ces méthodes sont particulièrement utiles dans la dynamique numérique des fluides, en turbulence, en transition et la prédiction numérique de la météologie.

Bibliographie

- [1] F. H. Busse, Non linear properties of thermal convection, Prog. phys. 41 (1978) 1929-1967.
- [2] C. Canuto, M.Y.Hussaini, A.Quarteroni, T.A.Zang, Spectral methods, Fundamentals in single domains, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006).
- [3] J. Hesthaven, S. Gottlieb and D. Gottlieb, Spectral Methods for Time-Dependent Problems, Cambridge University Press (2007).
- [4] J. B. Mc Laughlin, S. A. Orszag, Transition from periodic to chaotic thermal convection, J. Fluid Mech. 122 (1982) 123-142.
- [5] A. Libchaber, A Rayleigh Bénard experient: Helium in a small box non linear phenomena at phase transition and instabilites, Edited by T.Riste, Plenum Publishing Corporation (1982).
- [6] S. Niçaise, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, (2000).
- [7] O.Thual, Introduction Aux Méthodes Spectrales, Polycopié (1996), ENS (EEIH), Toulouse.