



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Physique des Plasmas

Par :

Mr LARBI Abdelmoumen

Sur le thème

Méthode de Calculs Analytiques Dans Un Système d'Electrons Fortement Liés : Electrons de Hall Quantique Fractionnaire

Soutenu publiquement en Décembre 2016 à Tlemcen devant le jury composé de :

| | | | |
|-----------------|-------------------------|----------------|--------------------|
| Mr T. BENOUAZ | professeur | UNIV. TLEMCCEN | PRESIDENT |
| Mr Z. BENTALHA | maitre de conférences A | UNIV. TLEMCCEN | DIRECTEUR DE THESE |
| Mr B. LASRI | professeur | UNIV. SAIDA | EXAMINATEUR |
| Mr R. BOUAMRANE | professeur | U.S.T.ORAN | EXAMINATEUR |
| Mr B. BOUHAFS | professeur | UNIV. TLEMCCEN | EXAMINATEUR |
| Mr S. BEKHECHI | professeur | UNIV. TLEMCCEN | EXAMINATEUR |

*Laboratoire Physique Théorique
Tlemcen - Algérie*

Résumé

After a deep literature review, we noticed that most of the calculations in the field of FQHE are numerical calculations, exact diagonalization or Monte Carlo simulations, and the only analytical calculation was limited to systems with up to $N = 4$ electrons. In this thesis we proposed an analytical calculation approach to determine the energy of the ground state for systems with a number $N > 4$ electrons. We have to calculate energies of interactions of the type electron-electron (ee), electron-background (eb) and background-background (bb), the sum of these energies in the ground state gives the ground state energy. This approach, based on complex polar coordinates, enabled us to calculate the energy of the ground state for systems with $N = 3, 4, 5$ and 6 electrons at filling factors $\nu = 1/3$ and $\nu = 1/5$. New results are obtained that are published in journals of international renown. This method of calculation appears powerful because it also allows us to derive energies of the excited states for systems with $N = 4, 5, 6, 7$ electrons. The values of the energy of the excited states showed differences between the theory of Laughlin and the theory of Jain, while they (differences) were imperceptible at the ground state level. We expect that this method of complex polar coordinates would be useful and practical in determining certain physical quantities such as the mean energy or the partition function of 2D Coulomb-type systems. The results with their corresponding comments are given in the last chapter. In the conclusion we mentioned other problems that can be treated by means of the approach proposed in this thesis.

Résumé

Après une étude bibliographique profonde, nous avons remarqué que la plupart des calculs effectués dans le domaine de l'EHQF sont des calculs numériques, diagonalisation exacte ou simulations de Monte Carlo, et que le seul calcul analytique existant se limitait à un système avec un nombre $N = 4$ électrons. Dans cette thèse nous nous sommes proposés de développer une approche basée sur des calculs analytiques pour déterminer les énergies de l'état fondamental pour des systèmes avec un nombre $N > 4$ électrons. Nous avons à calculer les énergies des interactions électron-électron (e-e), électron-background (e-b) et background-background (b-b), la somme de ces énergies dans l'état fondamental donne l'énergie du fondamental. Cette approche, basée sur les coordonnées polaires complexes, nous a permis de calculer l'énergie de l'état fondamental pour des systèmes avec $N = 3, 4, 5$ et 6 électrons à des facteurs de remplissage $\nu = 1/3$ et $\nu = 1/5$. Des résultats nouveaux sont obtenus et qui sont publiés dans des journaux de renommée internationale. Cette méthode de calcul s'avère puissante puisqu'elle a permis, entre autres, de déterminer les énergies des états excités pour des systèmes avec $N = 4, 5, 6, 7$ électrons. Les valeurs des énergies des états excités ont montré des différences entre la théorie de Laughlin et la théorie de Jain, alors qu'elles (les différences) étaient imperceptibles au niveau du fondamental. Nous nous attendons à ce que cette méthode des coordonnées polaires complexes soit utile et pratique dans le calcul de certaines grandeurs physiques telle que l'énergie moyenne ou la fonction de partition pour des systèmes de Coulomb bidimensionnels. Des résultats avec les commentaires correspondants sont donnés dans le dernier Chapitre. Dans la conclusion nous avons mentionné les autres problèmes qui peuvent être traités en moyennant la démarche proposée dans cette thèse.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique Théorique de Tlemcen sous la direction de Monsieur Zine el abidine Bentalha, Maître de conférence à l'Université de Tlemcen. J'ai bel et bien profité de sa lucidité et son professionnalisme dans mon travail sur l'effet Hall quantique fractionnaire qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement le Professeur T. Benouaz pour avoir accepté la présidence du jury, qui par sa grande expérience honore ce conseil.

Je dois également remercier vivement Monsieur R. Bouamrane, Professeur à l' Université des Sciences et Technologies d'Oran, ainsi que Monsieur B. Lasri, Professeur à l' Université de Saïda, pour avoir aimablement accepté d'examiner ce travail.

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements les plus sincères à Monsieur S. Bekhechi, Professeur à l'Université de Tlemcen, pour son humanisme, son support, et pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur B. Bouhafs, Professeur à l'Université de Tlemcen pour avoir volontairement accepté d'examiner ce travail.

Cette Thèse aurait difficilement vu le jour sans l'encouragement et le soutien des membres de ma petite famille. Merci à tous ceux qui ont participé de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 6 |
| 1.1 | Histoire de l'Effet Hall Quantique | 6 |
| 1.1.1 | Echantillons à effet Hall quantique | 7 |
| 1.1.2 | Effet Hall classique | 8 |
| 1.1.3 | Lien avec la mécanique quantique | 10 |
| 1.2 | Ordinateurs quantiques | 12 |
| 1.3 | Approches et Contributions | 14 |
| 2 | Particule chargée dans un champ magnétique | 15 |
| 2.1 | Traitement classique | 15 |
| 2.1.1 | Formalisme de Lagrange-Hamilton | 17 |
| 2.1.2 | Electron dans un champ magnétique et électrique | 18 |
| 2.2 | Traitement quantique | 19 |
| 2.2.1 | Fonctions d'onde dans la jauge de Landau | 21 |
| 2.2.2 | Fonctions d'onde dans la jauge symétrique | 22 |
| 3 | Effet Hall quantique entier | 25 |
| 3.1 | La découverte | 25 |
| 3.2 | Mécanisme de l'effet Hall quantique entier | 26 |
| 3.2.1 | Niveaux de Landau | 26 |
| 3.2.2 | Rôle du désordre | 28 |
| 3.2.3 | Les états de bord | 28 |
| 3.2.4 | Origine des plateaux | 31 |
| 4 | Théorie de Laughlin | 33 |
| 4.1 | Effet Hall quantique fractionnaire | 33 |
| 4.1.1 | Mise en évidence | 33 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.1.2 | Rôle des interactions | 35 |
| 4.2 | Fonction d'onde de Laughlin | 36 |
| 4.2.1 | Caractéristiques et expression | 36 |
| 4.2.2 | Les quasi-particules | 39 |
| 4.2.3 | Energie du fondamental | 40 |
| 5 | Généralisation de Jain-concept de fermion composite | 43 |
| 5.1 | Fermions composites-description qualitative | 43 |
| 5.2 | Faits expérimentaux | 44 |
| 5.3 | Formulations Théoriques | 45 |
| 5.3.1 | Fonction d'onde de Jain | 46 |
| 5.3.2 | Approche du champ moyen | 47 |
| 5.3.3 | Opérateur de projection P_{LLL} | 51 |
| 5.3.4 | quasi-trous et quasi-particules | 54 |
| 6 | Théorie de Chern-Simons | 57 |
| 6.1 | Topologie et statistique | 57 |
| 6.2 | Première quantification | 59 |
| 6.3 | Deuxième quantification | 61 |
| 6.4 | Transformations de Chern-Simons | 63 |
| 6.4.1 | Les anyons dans les théories de Chern-Simons | 65 |
| 6.4.2 | Fractionalisation de la charge | 66 |
| 7 | Calculs analytiques-Méthode des coordonnées complexes | 68 |
| 7.1 | Position de la méthode des coordonnées complexes | 69 |
| 7.2 | Potentiels d'interaction | 69 |
| 7.3 | Energie du fondamental | 72 |
| 7.3.1 | Interaction électron-électron | 72 |
| 7.3.2 | Interaction électrons-(arrière-plan) | 75 |
| 7.3.3 | Résultats et discussions | 76 |
| | Conclusion | 80 |
| | Appendice | 81 |
| 8 | Appendice | 82 |
| 8.1 | Appendice A | 82 |

| | |
|---------------------------|-----------|
| 8.2 Appendice B | 84 |
| Bibliographie | 84 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Histoire de l'Effet Hall Quantique

Dans sa thèse de Doctorat, Edwin Hall essayait de répondre à une question soulevée par Maxwell, qui consiste à savoir si la résistance est affectée ou non par un champ magnétique. Il a montré expérimentalement (1879) que sous un champ magnétique, un courant induit une tension dans la direction perpendiculaire, et que cette tension est proportionnelle au champ magnétique appliqué, c'est l'effet Hall classique. Cette découverte remarquable, bien avant la découverte de l'électron par J.J. Thomson (1897), a permis de déterminer la densité des porteurs de charge. Edwin Hall a aussi constaté que le signe des porteurs dépend du matériau. Ce signe anormal ne fut compris que cinquante ans plus tard quand apparaît la théorie des bandes avec son concept (nouveau) de porteurs de charge positif (trou ou hole en anglais). L'année 1980, cent ans plus tard, s'annonçait par une des découvertes les plus remarquables de la fin du XX^{ème} siècle en physique, à savoir l'effet Hall quantique entier [1, 2]. Sa caractéristique la plus spectaculaire est la mesure du rapport h/e^2 , avec une précision de 10^{-9} , h étant la constante de Planck et e la charge de l'électron. En 1983, alors qu'on venait de baptiser la découverte de 1980, le monde a été secoué encore une fois par une nouvelle découverte, de même ampleur que la précédente, c'est l'effet Hall quantique fractionnaire [3]. Les deux découvertes ont mérité le prix Nobel de physique (1985 et 1998). Actuellement, on voit bien que l'effet Hall n'est pas seulement une curiosité de laboratoire mais aussi il a des applications extrêmement importantes puisqu'il permet de détecter un champ magnétique ou ses variations par une simple mesure de tension.

En particulier, l'industrie automobile utilise des capteurs à effet Hall pour mesurer la vitesse de rotation des moteurs, des boîtes de vitesses, des cardans, etc. (4 milliards de sondes de Hall sont fabriquées par an ! [4]).

1.1.1 Echantillons à effet Hall quantique

La découverte des EHQE et EHQF est intimement liée au progrès dans la fabrication des échantillons et des gaz d'électrons 2D. Comme on possède depuis assez longtemps des couches métalliques d'assez bonne qualité, on pourrait se poser la question pourquoi ces effets ont été découverts si tard. Un raisonnement en ordre de grandeurs fournit la réponse : la densité électronique dans les métaux est essentiellement donnée par la densité d'atomes du réseau, avec un pas caractéristique de $a \leq 10^{-9} m$, la densité surfacique est alors nettement plus grande $n_e = 10^{18} m^{-2} = 10^{14} cm^{-2}$. La physique de l'effet Hall quantique se manifeste lorsque la densité électronique est de l'ordre de la densité de flux, $n_e \sim n_B = eB/h$, ce qui, avec $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ et $h = 6.6 \cdot 10^{-34} Js$, nécessiterait des champs magnétiques de l'ordre $1000 T$. Même les aimants les plus puissants, actuellement, ne dépassent pas les $40 T$ dans le régime continu et $80 T$ pour des champs pulsés. Des champs plus intenses ne sont accessibles que dans des expériences destructrices. Une grandeur utile pour caractériser les distances est la longueur magnétique, $l_B = \sqrt{\hbar/eB} = \frac{25.7 nm}{\sqrt{B(T)}}$, qui constitue la longueur minimale du système.

Des densités électroniques moins élevées, typiquement $n_e = 10^{11} cm^{-2}$, peuvent être atteintes dans des structures semiconductrices. Les échantillons utilisés pendant la découverte de l'EHQE étaient des MOSFET, FET pour transistor à effet champ, et MOS pour ses composantes métal-oxyde-semiconducteur. Le problème des MOSFET est le manque de séparation spatiale entre le gaz d'électrons 2D et les dopants qui agissent comme des diffuseurs. Cela conduit à un libre parcours moyen relativement court et donc à une basse mobilité des électrons 2D. Ce problème est contourné pour un gaz 2D qui se forme à l'interface d'une hétérostructure semiconductrice, comme par exemple dans le composé III-V GaAs/AlGaAs, ce qui permet d'avoir une grande mobilité par rapport aux MOSFET. Le progrès technologique dans la fabrication des hétérostructures semiconductrices a permis d'augmenter la mobilité électronique : l'EHQF a été découvert en 1983 dans un échantillon avec une mobilité $\mu \simeq 0.1 \cdot 10^6 cm^2/Vs$, tandis que les échantillons du même type (GaAs/AlGaAs) utilisés récemment ont une mobilité $\mu \simeq 0.3 \cdot 10^8 cm^2/Vs$ [5].

1.1.2 Effet Hall classique

Prenons un gaz de porteurs de charge $q_e = -e$ et de masse m , supposé bidimensionnel, comme indiqué sur la figure (1.1). En présence d'un champ magnétique \vec{B} , perpendiculaire au plan, les porteurs injectés dans la direction x subissent la force de Lorentz et leur trajectoire est courbée, ce qui conduit à une accumulation de charges sur les bords de l'échantillon. Ces charges induisent un champ électrique E_y ,

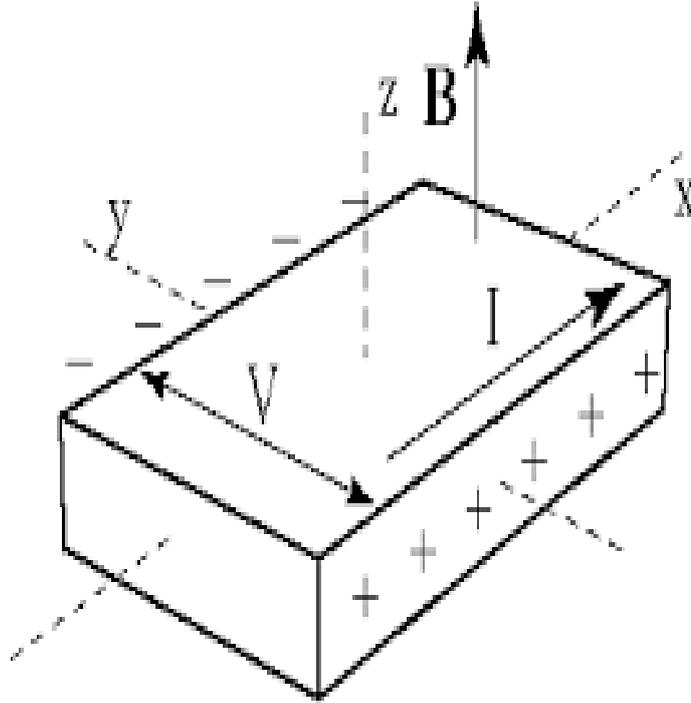


FIGURE 1.1 – Géométrie de l'effet Hall.

ce qui correspond à une tension $V = V_H$ le long de la direction y , où l'indice H pour désigner la tension de Hall. Un régime stationnaire est ainsi atteint, dans lequel le champ électrique compense la force de Lorentz et l'équation de mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q_e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - m \frac{\vec{v}}{\tau} = 0 \quad (1.1)$$

où le dernier terme, phénoménologique, représente un frottement dû au désordre comme dans le modèle de Drude. τ est appelé temps de relaxation ou temps de

collision. En projetant selon les deux directions x et y , on obtient

$$\begin{aligned} E_x + v_y B &= \frac{m v_x}{q_e \tau} \\ E_y - v_x B &= \frac{m v_y}{q_e \tau}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Il n'y a pas de courant dans la direction y ($v_y = 0$). Ainsi, la vitesse v_x reste inchangée $v_x = q_e \tau E_x / m$, ce qui conduit à une densité de courant constante, donnée par la formule de Drude

$$j_x = n_e q_e v_x = \frac{n_e q_e^2 \tau}{m} E_x \quad (1.3)$$

où n_e désigne la densité de porteurs. Le champ électrique induit selon y est donné par $E_y = v_x B$, ce qui correspond à une différence de potentiel V_H , donné par $V_H = d E_y$ où d est la largeur de l'échantillon. Le courant I_x selon x est donné par $I_x = d j_x = n_e q_e v_x d$. Par conséquent,

$$V_H = \frac{B}{n_e q_e} I_x, \quad (1.4)$$

ce qui définit une résistance transverse $R_H = V_H / I_x$, appelé résistance de Hall donnée par

$$R_H = \frac{B}{n_e q_e}. \quad (1.5)$$

La mesure de cette résistance permet de déterminer la densité et le signe des porteurs. L'effet Hall correspond à l'existence simultanée d'un courant et d'une tension dans des directions perpendiculaires. Pour décrire le transport électronique en présence d'un champ magnétique, il est nécessaire d'introduire le tenseur de conductivité $\bar{\sigma}$ tel que $\vec{j} = \bar{\sigma} \vec{E}$. On définit ainsi le tenseur de conductivité par

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \bar{\sigma} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

et le tenseur de résistivité

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \bar{\rho} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Dans le modèle de Drude, d'après (1.2), on a

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} 1/\sigma & -B/n_e q_e \\ B/n_e q_e & 1/\sigma \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

où $\sigma = n_e q_e^2 \tau / m$ est la conductivité de Drude en champ nul. L'inversion du tenseur de résistivité conduit à

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

$\omega_c = eB/m$ est la fréquence angulaire de cyclotron. Notons que la conductivité diagonale (longitudinale) s'annule en même temps que la résistivité longitudinale. L'effet Hall classique est encore utilisé pour mesurer la densité de porteurs dans des conducteurs, ainsi que pour déterminer si le courant est porté par des charges positives ou négatives.

1.1.3 Lien avec la mécanique quantique

Avec l'application de la mécanique quantique à la physique des métaux, à partir des années 1930, le physicien russe L. Landau [6] s'intéressa au traitement quantique d'un électron 2D dans un champ magnétique. Il trouva que les niveaux d'énergie successives de l'électron 2D sont séparés par un même pas d'énergie $\hbar\omega_c$, exactement comme dans le cas de l'oscillateur harmonique. La mécanique quantique d'un électron 2D a montré une très grande dégénérescence de chaque niveau de Landau. On compte le nombre $N_B = n_B S$ d'états par niveau de Landau (NL), où S désigne la surface du système et $n_B = B/\phi_0$ la densité de flux mesurée en unité de quantum de flux $\phi_0 = h/e$. Les électrons 2D ayant une statistique fermionique remplissent par ordre croissant les NL, il convient alors de définir un facteur de remplissage

$$\nu = \frac{n_e}{n_B}. \quad (1.10)$$

Ce traitement quantique sera traité dans le Chapitre 2. De plus, les paliers observés, dans la résistance de Hall, par v. Klitzing en 1980 [1] trouvent pleinement leurs explications dans la quantification de Landau. A basse température $k_B T \ll \hbar\omega_c$, la résistance de Hall est quantifiée $R_H = (h/e^2) \frac{1}{n}$ où n est un entier ($n = \mathcal{P}(\nu)$). Chaque palier dans la résistance de Hall est accompagné d'une résistance longitudinale nulle, et ainsi est observée la courbe en escalier dans la résistance de Hall (voir figure 1.2). Aujourd'hui en métrologie, la résistance du palier à $n = 1$ est utilisée comme étalon de résistance avec une valeur de $R_{K-90} = 25\,812.807 \Omega$. La résistance de Hall est indépendante du désordre, du nombre de porteurs, du champ magnétique et de la forme de l'échantillon. Ces observations expérimentales sont des effets quantiques

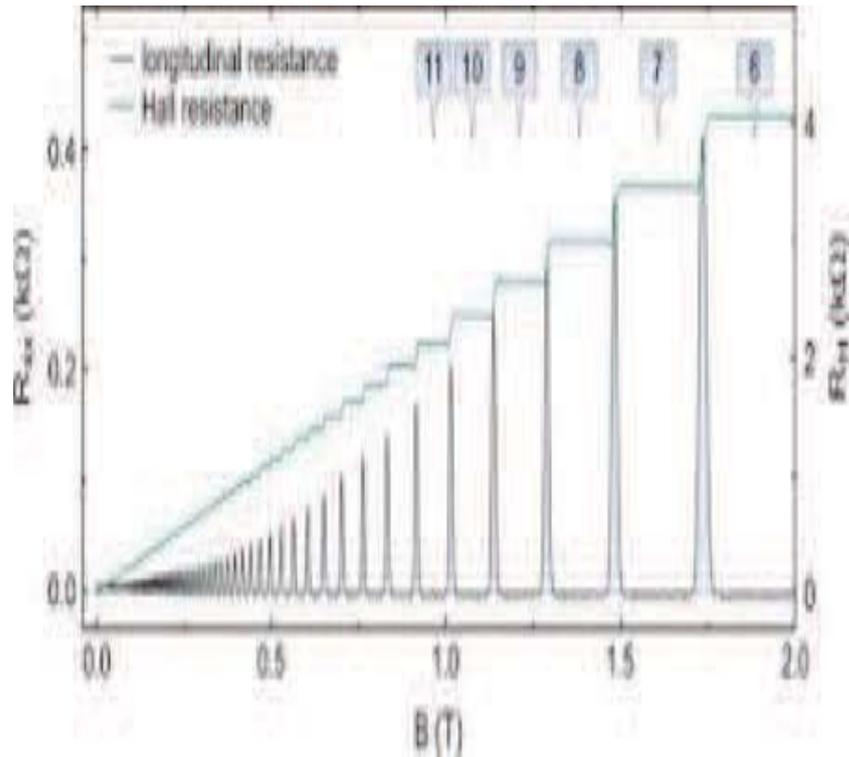


FIGURE 1.2 – Une courbe de démonstration qui montre la courbe en palier de l'effet Hall quantique entier lorsque le champ magnétique augmente et la densité de porteurs maintenue constante.

macroscopiques regroupées dans le phénomène de l'effet Hall quantique entier qui va être l'objet du Chapitre 3.

En 1983, D. Tsui, H. Stormer et A. Gossard découvrirent l'EHQF [3] qui se manifeste à des fractions magiques du facteur de remplissage dans le plus bas niveau de Landau. Les premiers états observés sont ceux à $\nu = 1/3$ et $\nu = 2/3$, et depuis toute une zoologie d'états a été observée. Dans ce cas de l'EHQF, l'énergie cinétique est une constante et l'interaction de Coulomb devient la seule échelle d'énergie qui lève la dégénérescence, les électrons 2D sont donc fortement corrélés. Actuellement notre compréhension de l'EHQF est due à une théorie proposée par R. Laughlin [7] (1983). Il considère que les électrons 2D forment un plasma de gaz incompressible dont les excitations élémentaires et collectives sont séparées de l'état fondamental par un gap. La théorie de Laughlin sera traitée dans le Chapitre 4.

Suite à la découverte d'autres états d'EHQF qui ne sont pas étudiés par la théorie de

Laughlin, plusieurs généralisations ont été proposées. B. Halperin généralisa la fonction d'onde de Laughlin au cas où les électrons ne sont pas polarisés [8] et en 1989 J. Jain proposa une généralisation pour inclure des états à $\nu = \frac{p}{2sp+1}$, s et p entier, en introduisant pour la première fois le concept de fermions composites (FC) [9, 10, 11, 12]. La théorie (FC) sera l'objet du Chapitre 5.

1.2 Ordinateurs quantiques

Un ordinateur quantique (anglais quantum computer), utilise les propriétés quantiques de la matière, telle la superposition et l'intrication afin d'effectuer des opérations sur des données. À la différence d'un ordinateur classique basé sur des transistors qui travaille sur des données binaires (codées sur des bits, valant 0 ou 1), l'ordinateur quantique travaille sur des quantum bits ou qubits dont l'état quantique peut posséder plusieurs valeurs. Bien que chaque expérience sur les qubits exploite souvent une technologie spécifique voir combine plusieurs technologies, représentant autant de modèles possible d'ordinateurs quantiques, on peut regrouper ces ordinateurs dans de grand catégories à savoir l'ordinateur à RMN à état liquide, l'ordinateur quantique optique, l'ordinateur quantique à points, l'ordinateur quantique à ions piégés, l'ordinateur quantique à diamants colorés, l'ordinateur quantique à semi-conducteurs et l'ordinateur quantique topologique (la liste n'est biensûr pas exhaustive, la recherche se poursuit). Parce que le dernier de la liste, l'ordinateur quantique topologique, a un rapport avec le thème de cette thèse, on va détailler un peu sur les concepts soutenant la construction d'une pareil machine.

Sur le plan théorique, un ordinateur quantique topologique utilise des anyons [13, 14, 15, 16], des quasiparticules évoluant dans un espace à deux dimensions spatiales. Les anyons ne sont ni des fermions (constituant la matière) ni des bosons (vecteurs d'interactions comme le photon), mais ils partagent les propriétés des fermions par le fait qu'ils ne peuvent occuper le même état quantique. Ainsi, les lignes d'univers de deux anyons ne peuvent pas se croiser ni fusionner. En revanche, elles peuvent s'entremêler et former des tresses appelées braids en trois dimensions (une temporelle et deux autres spatiales) et comporter des noeuds [17]. En 1997, le physicien et mathématicien russe Alexie Kitaev [18] a suggéré que ses tresses permettraient de fabriquer les portes logiques d'un ordinateur quantique topologique. En principe, les physiciens pourraient créer des anyons dans des systèmes supraconducteurs. En effet, des anyons pourraient



FIGURE 1.3 – Ordinateur quantique à silicium scalable "D-wave2" de 512 qubits fabriqué en 2013. Documents D-waves systems.

se former suite à l'excitation d'un gaz d'électrons soumis à un champ magnétique intense, transportant une unité fractionnaire de flux magnétique. Ce phénomène anormal est appelé l'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF). Ce gaz d'électrons serait ensuite placé en sandwich entre deux plaques semi-conductrices d'arséniure de gallium-alluminium (AlGaAs) créant l'espace bidimensionnel nécessaire aux anyons, le dispositif étant cryogénisé et soumis à un champ magnétique transversal. L'avantage de cet ordinateur basés sur des tresses quantiques et non pas sur des particules quantiques piégées est le fait que les paires d'anyons présentent en théorie une identité virtuellement immuable, ils sont bien plus stables, résistant beaucoup mieux à la décohérence que les qubits ordinaires. L'avantage de ce concept est que même dans l'éventualité où la plus petite perturbation provoquant la décohérence de la particule quantique et par la suite des erreurs dans les calculs, ces petites perturbations ne peuvent pas modifier les propriétés topologiques des tresses [19, 20, 21], et partant ne peuvent pas provoquer des erreurs dans les calculs. Le Chapitre 6 sera consacré à la

théorie de Chern-Simons pour décrire la physique des anyons.

1.3 Approches et Contributions

Après une étude bibliographique profonde, nous avons remarqué que la plupart des calculs effectués dans le domaine de l'EHQF sont des calculs numérique, diagonalisation exacte [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] ou simulation de Monte Carlo [29, 30, 31] et que le seul calcul analytique [32, 33, 34] se limitait à un système avec un nombre $N = 4$ électrons. Dans cette thèse nous nous sommes proposés de développer une approche de calcul analytique pour déterminer les énergies de l'état fondamental pour des systèmes avec un nombre $N > 4$ électrons. Nous avons à calculer les énergies des interactions électron-électron (e-e), électron-background (e-b) et background-background (b-b), la somme de ces énergies dans l'état fondamental donne l'énergie du fondamental. Cette approche, basée sur les coordonnées polaires complexes, nous a permis de calculer l'énergie de l'état fondamental pour des systèmes avec $N = 3, 4, 5$ et 6 électrons à des facteurs de remplissage $\nu = 1/3$ et $\nu = 1/5$, des résultats nouveaux sont obtenus et qui sont publiés dans des journaux de renommée internationale Ref.[35] et Ref.[36]. Cette méthode de calcul s'avère puissante puisqu'elle a permis, entre autres, la détermination des énergies des états excités pour des systèmes avec $N = 4, 5, 6, 7$ électrons (voir Ref.[37]). Les valeurs des énergies des états excités ont montré des différences entre la théorie de Laughlin et la théorie de Jain, alors qu'elles étaient imperceptibles au niveau du fondamental. Nous nous attendons à ce que cette méthode des coordonnées polaires complexes soit utile dans le calcul de certaines grandeurs physiques telle que l'énergie moyenne ou la fonction de partition pour des systèmes d'électrons bidimensionnels, comme le gaz de Dyson 2D. Des résultats avec les commentaires correspondants sont donnés dans le Chapitre 7. Dans la conclusion nous avons mentionné les autres problèmes qui peuvent être traités en moyennant la démarche proposée dans cette thèse.

Chapitre 2

Particule chargée dans un champ magnétique

Les théories des EHQE et EHQP sont basées sur la mécanique quantique d'une particule chargée 2D, se mouvant dans un plan (xy) traversé perpendiculairement par un champ magnétique. Ainsi avant de voir le comportement quantique de la particule, on va brièvement revoir son comportement classique.

2.1 Traitement classique

Un électron de charge $q_e = -e$, de masse m et de vitesse \vec{v} soumis à un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ressent la force de Lorentz $q_e\vec{v} \wedge \vec{B}$, son équation du mouvement est alors

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q_e \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (2.1)$$

Ainsi pour déterminer les solutions des équations du mouvement (1.5), on va utiliser la variable $z = x + iy$, ce qui permet d'écrire (1.5) sous la forme simple

$$\ddot{z} = -i \frac{q_e B}{m} \dot{z}. \quad (2.2)$$

La solution analytique des équations du mouvement s'obtient par intégration directe, de sorte que

$$\dot{z} = \dot{z}_0 \exp(i\omega_c t) \quad (2.3)$$

$$z = \frac{1}{i\omega_c} \dot{z}_0 \exp(i\omega_c t) + z_0, \quad (2.4)$$

avec \dot{z}_0 ou bien v_0 la vitesse initiale, z_0 la position initiale et $\omega_c = \frac{eB}{m}$ la pulsation de cyclotron. Le mouvement classique consiste en des orbites cyclotrons, dont la trajectoire est un cercle de centre $\vec{R} = (X, Y, 0)$ et de rayon $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}/\omega_c$ (voir figure 2.1). Ces deux paramètres sont données par les conditions initiales. On peut

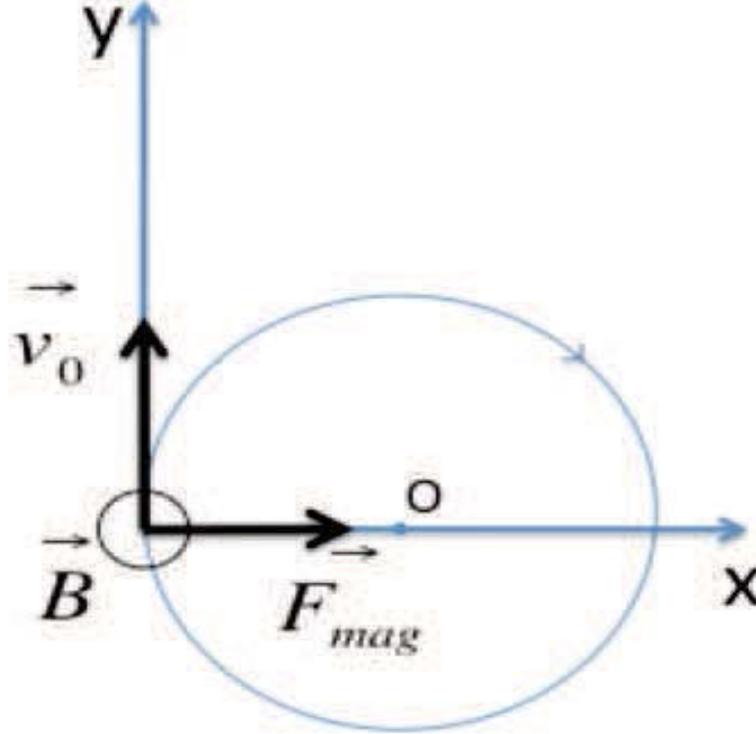


FIGURE 2.1 – *Mouvement cyclotron d'une particule chargée dans le plan (xy) soumise à un champ magnétique normal au plan (xy).*

ainsi exprimer la position et la vitesse de l'électron comme

$$\vec{r} = \vec{R} + (r_0 \cos(\omega_c t), r_0 \sin(\omega_c t), 0) \quad (2.5)$$

$$\vec{v} = (-r_0 \omega_c \sin(\omega_c t), r_0 \omega_c \cos(\omega_c t), 0). \quad (2.6)$$

Dans les coordonnées $\zeta, \eta, 0$ relatives au centre de l'orbite cyclotron, la solution devient

$$\vec{r} = (X + \zeta, Y + \eta, 0) \quad (2.7)$$

$$\vec{v} = \omega_c(-\eta, \zeta, 0). \quad (2.8)$$

On peut également déterminer les coordonnées du moment canonique, qui, dans la jauge symétrique $\vec{A} = B(-y/2, x/2, 0)$ sont données par

$$\vec{p} = \frac{q_e B}{2}(-Y + \eta, X - \zeta, 0). \quad (2.9)$$

L'énergie cinétique est donnée par $E_c = 1/2 m \omega_c^2 r_0^2$, de même la composante selon la direction z du moment angulaire est $L_z = \vec{r} \wedge \vec{P}|_z = 1/2 q_e B (R^2 - r_0^2)$. Nous avons ainsi complètement déterminé la dynamique classique d'un électron dans un plan traversé perpendiculairement par un champ magnétique.

2.1.1 Formalisme de Lagrange-Hamilton

Le but de la mécanique lagrangienne consiste à trouver une fonction \mathcal{L} (d'énergie) qui permet de reproduire les équations de mouvement du système classique. Cette fonction est définie dans l'espace de configuration (positions et vitesses), et satisfait les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (2.10)$$

pour tout indice i . Dans notre cas, la fonction appropriée est

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q_e (A_x(x, y) \dot{x} + A_y(x, y) \dot{y}) \quad (2.11)$$

où $\vec{A} = (A_x, A_y)$ est un potentiel vecteur constant dans le temps. Les moments conjugués utilisés dans la formulation hamiltonienne sont

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} + q_e A_x \quad (2.12)$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} + q_e A_y.$$

Les équations d'Euler-Lagrange (1.4) fournissent les équations du mouvement (1.5). Pour le traitement quantique d'un système à une particule, il est commode d'utiliser le formalisme hamiltonien qui consiste à trouver un hamiltonien à partir d'une transformation de Legendre du lagrangien

$$H(x, y, p_x, p_y) = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y - \mathcal{L}, \quad (2.13)$$

H est une fonction d'énergie définie dans l'espace des phases (positions/moments conjugués), après avoir remplacé les vitesses par les moments conjugués, on obtient

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q_e\vec{A})^2. \quad (2.14)$$

Il est bien de noter que cet hamiltonien peut être écrit comme

$$H = \frac{1}{2}m\omega_c^2(\eta_x^2 + \eta_y^2). \quad (2.15)$$

2.1.2 Electron dans un champ magnétique et électrique

On rajoute un champ électrique constant et uniforme \vec{E} dans la direction y , ce qui peut correspondre comme on va le voir plus bas à un potentiel de confinement dû aux bords de l'échantillon le long de la direction x . Les équations de mouvement sont données par

$$m\dot{v}_x = q_e B v_y \quad (2.16)$$

$$m\dot{v}_y = q_e E_y - q_e B v_x,$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{d\dot{z}}{dt} - i\omega_c \dot{z} = -i\frac{e}{m}E_y, \quad (2.17)$$

la solution sans second membre donne, $\dot{z} = a \exp(i\omega_c t)$, pour tenir compte du second membre, on ajoute une constante, qui est calculée égale à E_y/B , ainsi on a $\dot{z} = a \exp(i\omega_c t) + E_y/B$, pour un choix convenable de la constante a , on peut écrire

$$\dot{x} = -r_0\omega_c \sin(\omega_c t) + v_\perp \quad (2.18)$$

$$\dot{y} = r_0\omega_c \cos(\omega_c t),$$

avec $v_\perp = E_y/B$. On constate que le mouvement résulte de la superposition du mouvement de cyclotron décrit précédemment et d'un mouvement de dérive à la vitesse constante $\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$. Cette dérive a lieu par exemple le long des bords de l'échantillon. En effet en l'absence d'impuretés, le potentiel électrostatique que subit l'électron est uniforme au centre et s'incurve très fortement aux bords pour produire les parois de confinement. Cette variation spatiale du potentiel $U(x, y)$ est liée à un champ $\vec{E} = -\nabla U(x, y)$ perpendiculaire au bord rectiligne concerné. Dans notre cas, le champ

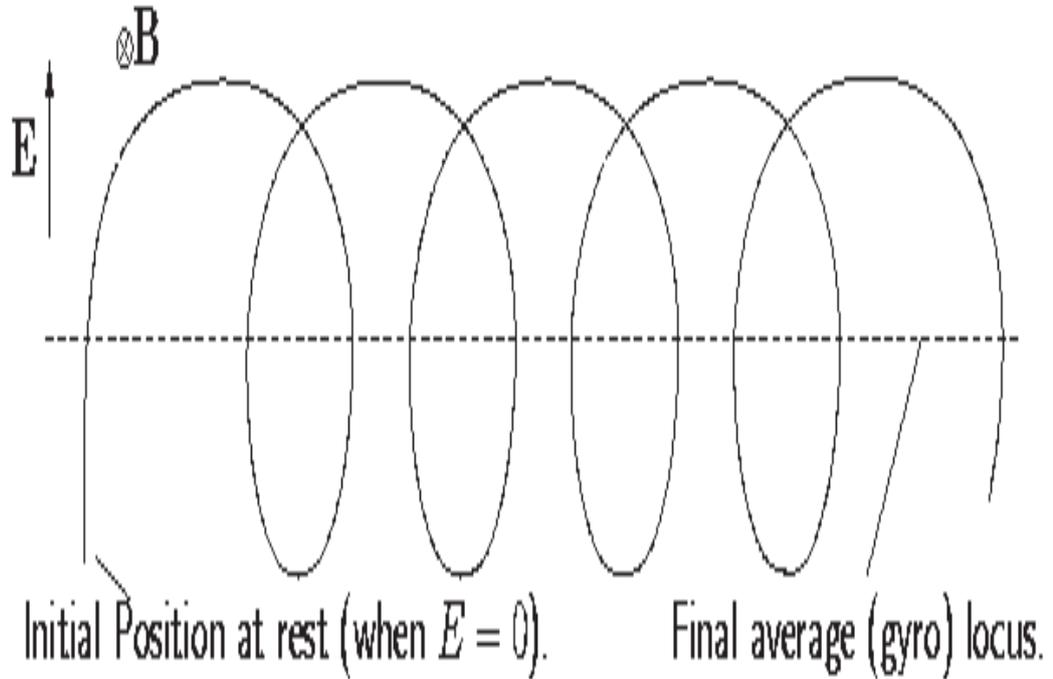


FIGURE 2.2 – La trajectoire cyclotron ne se ferme pas à cause de la vitesse de dérive $\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$.

électrique dû au bord est dirigé suivant la direction y , produisant un mouvement de dérive suivant la direction x (voir figure 2.2). Rappelons aussi que toutes les formules établit dans ce paragraphe ne sont valables que si la vitesse de la particule est petite devant la vitesse de la lumière c . pour que cette condition soit satisfaite, il faut que $|E_y/B| \ll c$. Les valeurs absolues de E_y et B peuvent être quelconques.

2.2 Traitement quantique

Dans le cadre de la mécanique quantique, toutes les grandeurs physiques rencontrées en mécanique classique deviennent des opérateurs (principe de correspondance) qui agissent dans un espace de Hilbert. Le formalisme hamiltonien nous permet d'introduire la quantification canonique, $[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar$ et $[x, y] = [x, p_y] = [y, p_x] = [p_x, p_y] = 0$. De $[x, y] = 0$, on peut déduire que $[\eta_x, \eta_y] = -[X, Y]$, et le fait que $[X, H] = [Y, H] = 0$ confirme que les composantes du centre de guidage

sont des constantes du mouvement comme dans le cas classique, l'expression de H est donnée par (2.14) ou (2.15). Un calcul simple montre que, indépendamment de la jauge, $[\eta_x, \eta_y] = -il_B^2$, où $l_B^2 = \hbar/eB$. Il est donc commode de considérer au lieu de la paire d'opérateurs (\vec{r}, \vec{p}) , la paire (η_x, η_y) . En effet la relation de commutation $[\eta_x, \eta_y] = -il_B^2$ autorise le choix de ces opérateurs canoniques. L'Hamiltonien s'exprime comme une combinaison linéaire de η_x^2 et η_y^2 , ce qui lui confère la même structure algébrique qu'un oscillateur harmonique à une dimension. On s'inspire alors du traitement quantique d'un oscillateur harmonique 1D en introduisant les opérateurs de création et d'annihilation a^+ et a ,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(\eta_x - i\eta_y) \\ a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(\eta_x + i\eta_y), \end{aligned} \tag{2.19}$$

avec $[a, a^+] = 1$. L'hamiltonien s'écrit alors comme

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}), \tag{2.20}$$

le spectre d'énergie est donné par $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$, où n est la valeur propre de l'opérateur a^+a , et représente le n^{ieme} niveau de Landau. Ce résultat est un invariant de jauge (ne dépend pas de la jauge utilisée). Maintenant comme le spectre énergétique est celui d'un oscillateur harmonique à 1D pour un problème à 2D, cela implique une dégénérescence des niveaux de Landau. Cette dégénérescence est dû à une autre paire de coordonnées canoniques ne figurant pas dans l'Hamiltonien (2.15), c'est la paire de coordonnées du centre de guidage, que nous avons désigné par R . Formellement, on peut voir ce système comme deux oscillateurs, dont l'Hamiltonien est

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) + \hbar\omega'(b^+b + \frac{1}{2}), \tag{2.21}$$

telle que la fréquence du deuxième oscillateur est nulle, $\omega' = 0$. Le deuxième nombre quantique m est donc la valeur propre de b^+b . Les opérateurs b et b^+ sont donnés par

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X + iY) \\ b^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X - iY), \end{aligned} \tag{2.22}$$

avec $[b, b^+] = 1$. Les états propres sont donc déterminés par les deux nombres quantiques n et m , associés aux deux sortes d'opérateurs d'échelle, pour des valeurs positives de n et m , on a

$$a = \sqrt{n} |n-1, m\rangle \quad (2.23)$$

$$b = \sqrt{m} |n, m-1\rangle \quad (2.24)$$

$$a^+ = \sqrt{n+1} |n+1, m\rangle \quad (2.25)$$

$$b^+ = \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle, \quad (2.26)$$

dans le cas où $n = 0$ ou $m = 0$, on pose $a |0, m\rangle = 0$ et $b |n, 0\rangle = 0$, les nombres négatifs sont exclus. Un état arbitraire peut être construit à partir de $|0, 0\rangle$

$$|n, m\rangle = \frac{(a^+)^n (b^+)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0, 0\rangle. \quad (2.27)$$

Les fonctions d'ondes, qui sont la représentation de ces états dans l'espace réel, dépendent de la jauge choisie pour le potentiel vecteur.

2.2.1 Fonctions d'onde dans la jauge de Landau

Une transformation de jauge sur le potentiel vecteur est donnée par $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, où χ est une fonction arbitraire. Le champ magnétique est un invariant de jauge, car le rotationnel d'un gradient est nul. Une jauge habituelle en physique non-relativiste est la jauge de Coulomb, $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$. Dans ce cas, la jauge n'est pas complètement fixée, mais les fonctions χ sont contraintes à être des fonctions harmoniques ($\Delta\chi = 0$). Deux jauges, souvent utilisées pour le traitement quantique du problème d'une particule chargée dans un champ magnétique, sont la jauge de Landau et la jauge symétrique. Dans la jauge de Landau, $\vec{A} = B(-y, 0, 0)$, et l'hamiltonien (2.14) prend la forme

$$H = \frac{1}{2m}(p_x - eBy)^2 + \frac{p_y^2}{2m}. \quad (2.28)$$

Cet hamiltonien ne contient pas explicitement la composante x , il commute ainsi avec p_x . Ceci permet de dire que p_x se conserve et prend les valeurs $\hbar k_x$. Alors si on effectue le changement de variables, $y' = y/l_B - l_B k_x$ et $p'_y = l_B p_y/\hbar$, on obtient

$$H = \hbar\omega_c \left(\frac{(y')^2}{2} + \frac{(p'_y)^2}{2} \right), \quad (2.29)$$

qui n'est autre que l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension, avec $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$. La dégénérescence est causée par la présence de p_x . Les fonctions

d'onde sont données, à un facteur de normalisation près, par

$$\psi = e^{ik_x x} \exp\left(-\frac{1}{2}(y/l_B - l_B k_x)^2\right) H_n(y/l_B - l_B k_x), \quad (2.30)$$

où H_n sont les polynôme d'Hermite. On voit bien que l'énergie ne dépend pas de k_x , alors que la position y dépend de k_x .

2.2.2 Fonctions d'onde dans la jauge symétrique

Dans la jauge symétrique $\vec{A} = B/2(-y, x, 0)$, les opérateurs dans (2.19) et (2.22) peuvent être écrits comme

$$a = \sqrt{2}\left(\frac{z}{4l_B} + l_B \bar{\partial}\right) \quad (2.31)$$

$$a^+ = \sqrt{2}\left(\frac{\bar{z}}{4l_B} - l_B \partial\right),$$

$$b = \sqrt{2}\left(\frac{\bar{z}}{4l_B} + l_B \partial\right) \quad (2.32)$$

$$b^+ = \sqrt{2}\left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial}\right),$$

où $z = x - iy$ est la position de l'électron dans le plan complexe, $\bar{z} = x + iy$ son complexe conjugué, $\partial_x = \partial + \bar{\partial}$, et $\partial_y = i(\bar{\partial} - \partial)$. Ainsi un état dans le plus bas NL est déterminé par l'équation différentielle

$$(z + 4l_B^2 \bar{\partial})\phi_{n=0}(z, \bar{z}) = 0, \quad (2.33)$$

la solution de l'équation (2.33) est une gaussienne multipliée par une fonction analytique $f(z)$, avec $\bar{\partial}f(z) = 0$,

$$\phi_{n=0}(z, \bar{z}) = f(z) \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}\right). \quad (2.34)$$

De la même façon, on trouve pour l'état $m = 0$,

$$(\bar{z} + 4l_B^2 \partial)\phi_{m=0}(z, \bar{z}) = 0, \quad (2.35)$$

dont la solution est

$$\phi_{m=0}(z, \bar{z}) = g(\bar{z}) \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}\right), \quad (2.36)$$

où la fonction $g(\bar{z})$ est anti-analytique, $\partial g(\bar{z}) = 0$. Un état $|0, 0\rangle$ doit être représenté par une fonction qui soit à la fois analytique et anti-analytique, et la seule fonction qui satisfasse à cela est une constante. Avec la normalisation, on obtient

$$\phi_{n=0,m=0}(z, \bar{z}) = \langle z, \bar{z} | 0, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l_B^2} \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}\right). \quad (2.37)$$

On détermine les fonctions d'onde des autres états par

$$\phi_{n,m}(z, \bar{z}) = \frac{(a^+)^n (b^+)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \phi_{0,0}(z, \bar{z}). \quad (2.38)$$

Il est facile de montrer que la densité de probabilité pour n quelconque et $m = 0$ est

$$|\phi_{n,m=0}|^2(z, \bar{z}) \sim \left(\frac{|z|^2}{2}\right)^n \frac{\exp(-z\bar{z}/2l_B^2)}{n!},$$

et qui présente un maximum de probabilité à $r_0 = \sqrt{2nl_B}$ (voir figure 2.3). On remarque que dans le cas où $n \neq 0$, la densité de probabilité (d) présente un anneau, et que la région de moindre probabilité augmente avec n .

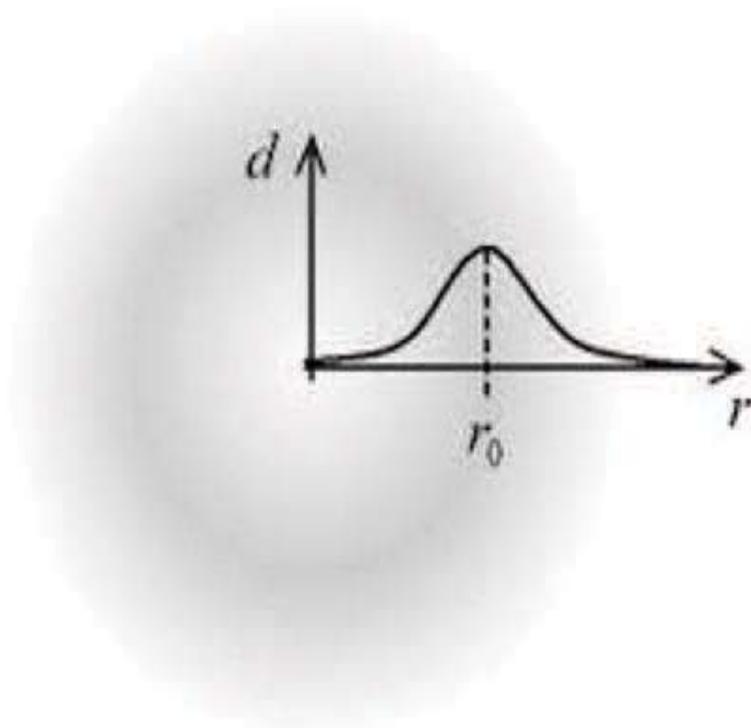


FIGURE 2.3 – Dans le cas où $n \neq 0$, la densité de probabilité (d) présente un anneau, pour signifier que la probabilité est faible au centre et devient maximum à la périphérie $r = r_0$.

Chapitre 3

Effet Hall quantique entier

3.1 La découverte

En 1980, K. von Klitzing effectue des mesures de transport sous champ magnétique sur des échantillons de Si-MOSFET, dans lesquels est réalisé un gaz bidimensionnel d'électrons. Ainsi sont mesurées la résistance longitudinale R_{xx} et la résistance de Hall $R_H = R_{xy}$ en fonction de la tension de grille qui permet de faire varier la densité de porteurs n_e , ici des électrons, sous champ magnétique constant. A basse température, il observe des oscillations de la résistance longitudinale avec le champ magnétique, connues depuis les années 1930 sous le nom d'oscillations de Shubnikov-de Haas, mais ici (expérience de K. von Klitzing), elles sont géantes, et pour certaines plages de n_e la résistance longitudinale s'annule alors que la résistance de Hall devient constante (voir figure 3.1). Von Klitzing réalise aussitôt que cette quantification de la résistance de Hall correspond à

$$R_H = \frac{h}{n e^2}, \quad (3.1)$$

et $R_L = 0$, avec n un entier naturel. La résistance de Klitzing $R_K = h/e^2 = 25812.807 \Omega$ est désormais un étalon de résistance. C'est aussi un facteur déterminant de la constante de structure fine. Nous avons représenté dans la figure (3.2) les variations de la résistance de Hall de l'effet Hall quantique entier avec l'intensité du champ magnétique.

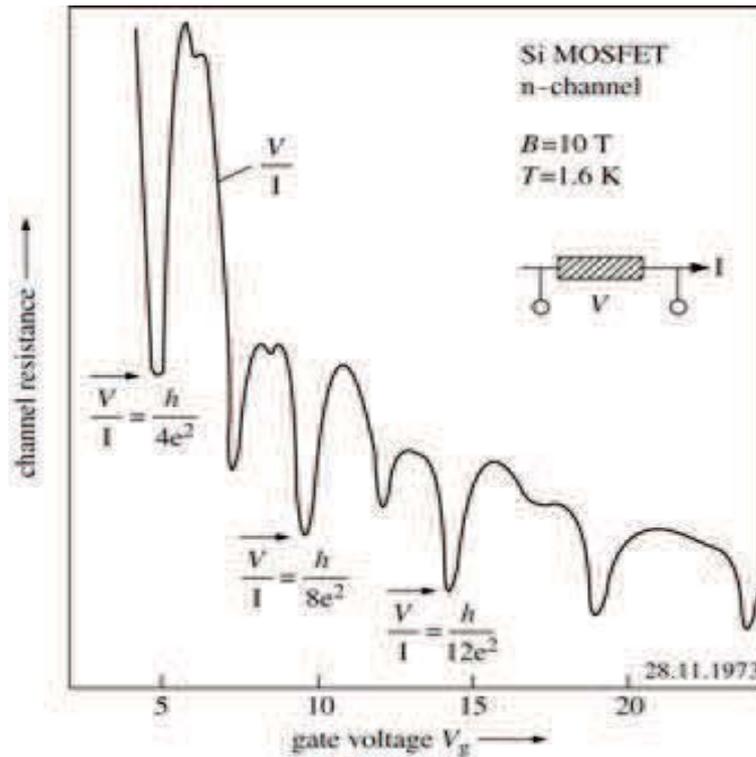


FIGURE 3.1 – Les valeurs observées de la résistance de Hall de l’effet Hall quantique entier en faisant varier le nombre de porteurs [38].

3.2 Mécanisme de l’effet Hall quantique entier

3.2.1 Niveaux de Landau

On va essayer de comprendre l’EHQE essentiellement en termes de considérations d’une seule-particule (en anglais : single-particle). Supposons alors que l’échantillon de Hall a une surface $L_x L_y$, traversé perpendiculairement par un champ magnétique fort $\vec{B} = (0, 0, B)$. L’équation du mouvement classique nous apprend que le mouvement est circulaire de rayon $R = mv/eB$, appelé rayon cyclotron et de pulsation $\omega_c = eB/m$, appelée pulsation de cyclotron. Pour des états électroniques dans une bande avec une relation de dispersion quadratique, la masse de l’électron libre est remplacée par la masse effective m^* . La description quantique de ce mouvement conduit à des trajectoires et des niveaux d’énergie quantifiés. Nous allons décrire le plus simplement possible cette quantification. La mécanique quantique nous apprend qu’un mouvement périodique est quantifié. La condition de quantification dite de Bohr-

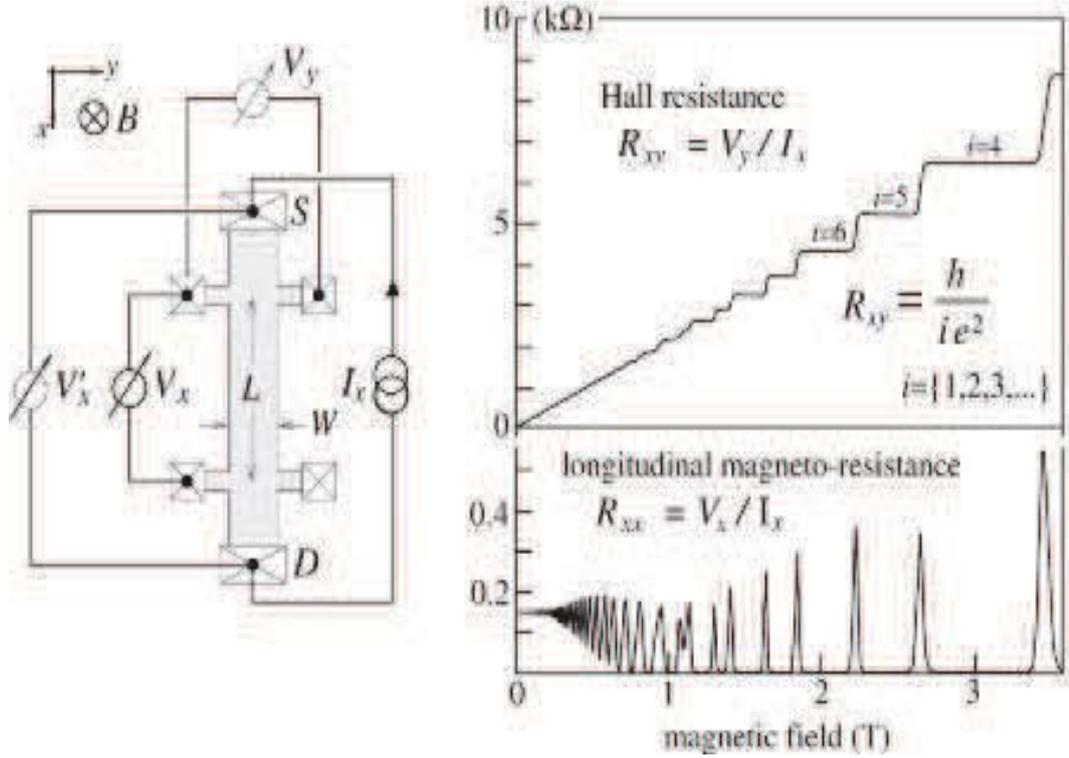


FIGURE 3.2 – Une mesure démonstrative de la résistance de Hall de l’effet Hall quantique entier en faisant varier le champ magnétique [39].

Sommerfeld (appliquée pour la première fois par Bohr en 1913 pour décrire l’électron de l’atome d’hydrogène) est formulée de sorte que pour une trajectoire périodique

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = (n + \gamma)h, \quad (3.2)$$

où n est un entier positif, et $0 \leq \gamma < 1$. Sachant que $\vec{p} = m\vec{v} + q_e\vec{A}$, $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$, et le contour fermé est une trajectoire circulaire de rayon R , la condition de quantification (3.2) conduit à

$$2\pi R(mv - \frac{1}{2}eBR) = (n + \gamma)h, \quad (3.3)$$

mais comme on a $R = mv/eB$, on peut facilement déduire que l’énergie $E = (1/2)mv^2$ est quantifiée,

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c, \quad (3.4)$$

où on a posé $\gamma = \frac{1}{2}$ car ce paramètre est purement quantique et ne peut pas être déterminé par un calcul classique. On remarque que le rayon cyclotron est aussi

quantifié $R = \sqrt{2n+1}l_B$. Ainsi en présence d'un champ magnétique fort, les niveaux d'énergie du gaz d'électrons bidimensionnel sont quantifiés en niveaux discrets appelés niveaux de Landau.

3.2.2 Rôle du désordre

Le désordre est dû au potentiel induit par les impuretés de substitution à l'origine du dopage du semiconducteur. On peut représenter l'effet du désordre par un potentiel $V(\vec{r})$ aléatoire à l'intérieur de l'échantillon et dont les variations spatiales sont lentes devant le rayon cyclotron ($l_B|\vec{\nabla}V| \ll \hbar\omega_c$). Ainsi localement une trajectoire cyclotron est soumise à un champ électrique $\vec{E} = \frac{1}{e}\vec{\nabla}V$ et acquiert donc une vitesse de dérive

$$\vec{v}_\perp = \frac{1}{e} \frac{(\vec{\nabla}V \wedge \vec{B})}{B^2}. \quad (3.5)$$

Par conséquent les orbites cyclotrons restent piégées le long des équipotentielles. Ces types de trajectoires ne peuvent pas contribuer au transport électronique, les états dans lesquels se trouvent ces électrons sont souvent qualifiés d'états localisés (voir figure 3.3). Cependant la résistance est nulle le long de la direction x , comment alors est transporté le courant dans cette direction. Cette question nous ramène à un paragraphe sur les états de bord.

3.2.3 Les états de bord

Ce qui caractérise un bord est l'existence d'un potentiel de confinement, soit $V(y)$, qui confine les électrons dans l'échantillon. Ce potentiel est rapidement croissant au bord. L'hamiltonien décrivant la géométrie d'un ruban infini selon la direction x avec des bords selon la direction y est de la forme

$$H = \frac{1}{2m}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - q_e A_x)^2 + \frac{1}{2m}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - q_e A_y)^2 + V(y), \quad (3.6)$$

où $V(y)$ est le potentiel de confinement. Dans la jauge de Landau $\vec{A} = B(-y, 0, 0)$, les fonctions d'onde solutions de l'équation de Schrodinger (3.6) sont de la forme $\psi = e^{ikx}\chi_k(y)$, où k est le vecteur d'onde selon la direction x . L'équation de Schrodinger est celle d'un oscillateur harmonique unidimensionnel dans un potentiel $V(y)$,

$$[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(y - y_c)^2 + V(y)]\chi_k(y) = E\chi_k(y), \quad (3.7)$$

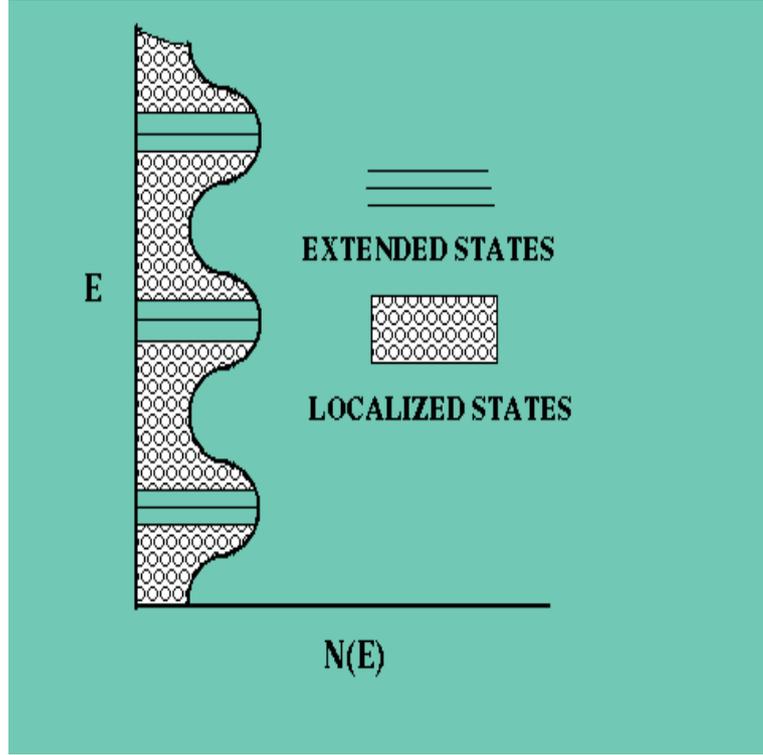


FIGURE 3.3 – Schématique montrant le profil de la densité d'états $N(E)$ en fonction de l'énergie E , où sont représentés les états localisés et les états délocalisés [40].

où $y_c = \hbar k / eB = k l_B^2$ est le centre de l'orbite cyclotron, et $\chi_{n,k}(y) = \exp(-u^2/2) H_n(u)$ avec $u = (y - y_c) / l_B$ et H_n est le polynôme d'Hermite. Au centre de l'échantillon, le potentiel $V(y)$ est nul et les niveaux d'énergie ne dépendent pas de la position y_c , $E_{n,k} = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c$. Près des bords, à cause du potentiel de confinement (voir figure 3.4), l'énergie augmente et dépend de k par l'intermédiaire de y_c ,

$$E_{n,k} = E_n(y_c(k)). \quad (3.8)$$

On peut modéliser le potentiel de confinement par

$$\begin{aligned} V(y) &= 0 & 0 < y < L_y \\ V(y) &= \infty & (y < 0) \text{ ou } (y > L_y). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dans le cas où $l_B \frac{\partial V}{\partial y} \ll \hbar \omega_c$, on peut exprimer l'énergie des niveaux de Landau par

$$E_{n,k} = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c + V(y_c). \quad (3.10)$$

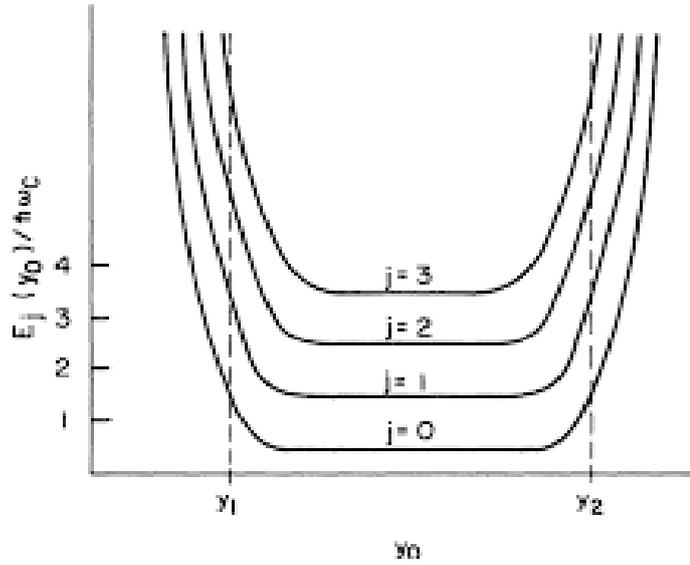


FIGURE 3.4 – L'énergie des niveaux de Landau augmente lorsque les trajectoires cyclotrons se rapprochent des bords.

Comme l'énergie dépend de y_c près des bords, les états associés ont une vitesse finie dans la direction x

$$v_k = \frac{\partial E_n(y_c)}{\hbar \partial k} = \frac{1}{eB} \frac{\partial E_n(y_c)}{\partial y_c}. \quad (3.11)$$

Dans le cas d'un potentiel lentement variable, $v_k = \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial y_c}$, ce qui s'interprète simplement comme la vitesse de dérive induite par le champ électrique $E_y = \frac{\partial V}{e \partial y}$ (voir figure 3.5). On remarque aussi sur la figure (3.2) que lorsque le niveau de Fermi se trouve au dessus du niveau n , il y a $i = n + 1$ états de bord au niveau de Fermi. Notons que les états de volume ne conduisent pas. Maintenant si on omet le terme $V(y_c)$ de la formule (3.10), on observe une dégénérescence des niveaux de Landau. Pour calculer cette dégénérescence g_n , on suppose des conditions aux limites périodiques dans la direction x , $\psi(0, y) = \psi(L_x, y)$. Ceci limitera les valeurs admissibles de k , le nombre de valeurs (désormais discrètes) de k dans l'intervalle Δk est égale à $\frac{L_x}{2\pi} \Delta k$. Seules sont admissibles les valeurs de k pour lesquelles le centre de l'orbite est à l'intérieur de $S = L_x L_y$, de la condition $0 < y_c < L_y$, on déduit que $\Delta k = \frac{eB}{\hbar} L_y$, ainsi le nombre d'états (pour n donné) est $g_n = g = \frac{eBS}{2\pi\hbar}$, ou bien

$$g = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad (3.12)$$

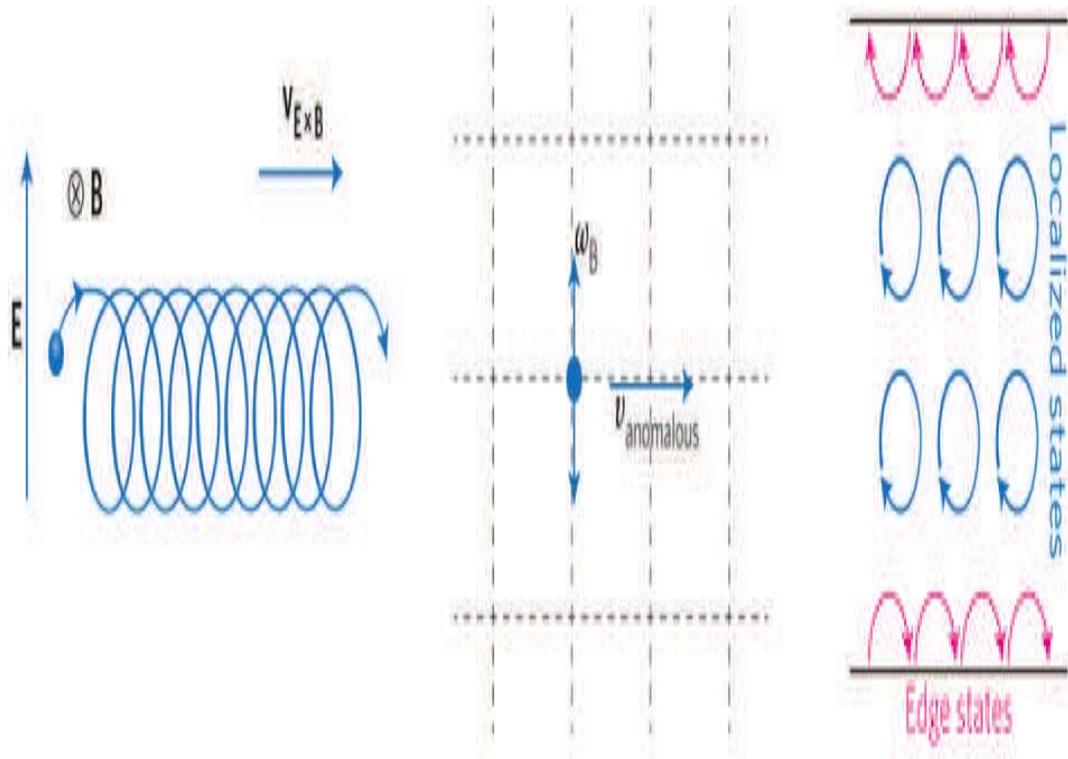


FIGURE 3.5 – on voit clairement que la conduction est essentiellement dû aux états de bord.

où ϕ est le flux magnétique à travers la surface de l'échantillon, et $\phi_0 = \frac{h}{e}$ est le quantum flux. Le rapport du nombre d'électrons N par la dégénérescence g , donne le facteur de remplissage $\nu = \frac{h}{eB} N_s$. Ainsi si nous avons n niveaux de Landau remplis, cela veut dire que la densité d'électrons $N_s = \frac{qn}{S} = n \frac{eB}{h}$.

3.2.4 Origine des plateaux

Pourquoi observe t-on des plateaux. Autrement, pourquoi lorsqu'on modifie le champ B ou de même le nombre de porteurs n_e , la résistance de Hall reste constante dans certaines plages de valeurs de B ou de n_e . Ceci devient possible grâce aux états piégés en volume dont le spectre forme un continuum en énergie. Ainsi lorsque le potentiel chimique varie continûment avec la variation de B ou n_e , le nombre d'états de bord i ne varie pas. De ce fait la résistance de Hall reste constante et la transmission de ces i états de bord est parfaite, ce qui implique une résistance longitudinale nulle. Cette situation se prolonge jusqu'à ce que le potentiel chimique se trouve dans une

région d'états délocalisés (voir figure 3.6). Il y a une valeur particulière, ou précisément

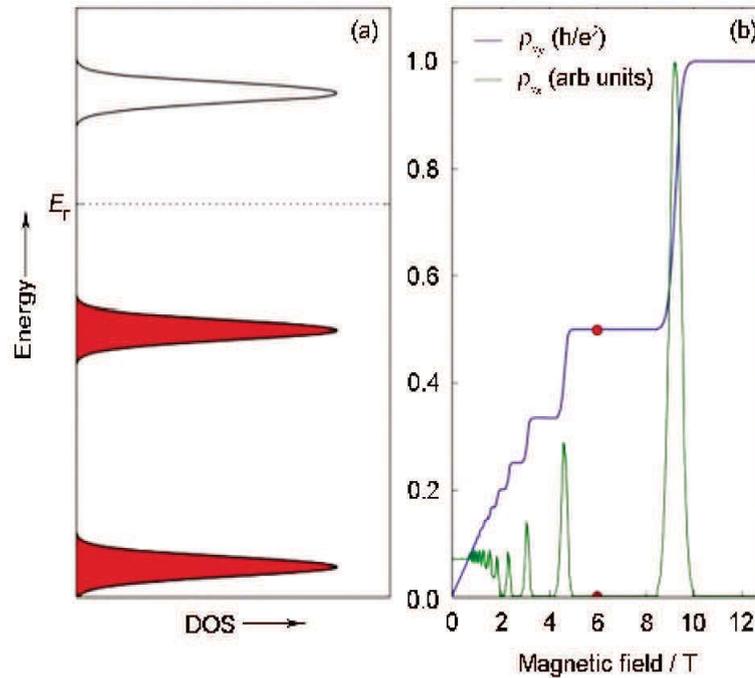


FIGURE 3.6 – on voit clairement que lorsque le potentiel chimique varie continûment dans une région d'états localisés, la résistance longitudinale ne change pas [41].

une porte étroite du potentiel chimique pour laquelle les états deviennent délocalisés dans des vallées qui relient deux crêtes successives de la densité d'états. Ainsi pour cette valeur du potentiel chimique, la résistance de Hall saute rapidement de i à $i - 1$ et la résistance longitudinale est finie puisque un des états de bord devient fortement diffusé par le potentiel de volume. Dans le régime de quantification de l'effet Hall, le courant longitudinal est porté par les états de bord dont la transmission est parfaite, ces états ne sont pas sensibles au désordre. On remarque que les états qui portent un courant positif et ceux portant un courant négatif sont séparés spatialement, ce qui explique la transmission parfaite des canaux.

Chapitre 4

Théorie de Laughlin

On sait maintenant que l'effet Hall quantique entier ($\nu = n$) est essentiellement basé sur deux points, à savoir la quantification en niveaux de Landau de sorte que le niveau fondamentale avec un nombre entier de niveaux de Landau complètement remplis est séparé par un gap des autres états, et les excitations élémentaires, qui sont obtenues lorsqu'on ajoute un électron ou un trou, sont localisées par les impuretés résiduelles dans l'échantillon et ne participent pas au transport électronique. Ce ne sont que les niveaux de Landau complètement remplis qui contribuent, chacun avec un quantum de conductance e^2/h , à la conduction. Cette formulation nous permet d'aborder l'effet Hall quantique fractionnaire qu'on observe à un remplissage partiel du plus bas niveau de Landau à $\nu = \frac{p}{2sp+1}$, avec p et s des entiers. Du point de vue énergie cinétique, tout les états à remplissage partiel sont hautement dégénérés, et il faudrait alors comprendre le rôle des interactions de Coulomb qui favorisent certaines superpositions de ces états sur d'autres. Ainsi, si sous certaines conditions les interactions lèvent complètement la dégénérescence et si l'état fondamental qui en résulte est séparé par un gap de toutes ses excitations, alors l'EHQF peut être expliqué avec un raisonnement parail à celui de l'EHQE.

4.1 Effet Hall quantique fractionnaire

4.1.1 Mise en évidence

Les progrès des techniques cryogéniques ainsi que l'usage d'hétérojonctions de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ de mobilité bien plus grande que les Si-MOS ont permis aux expérimentateurs de réaliser des mesures plus précises des conductivités

longitudinale et de Hall, dans la figure (4.1) est montrée une réalisation d'un gaz d'électrons 2D. Grâce à ces techniques, ils ont eu la surprise de découvrir de nou-

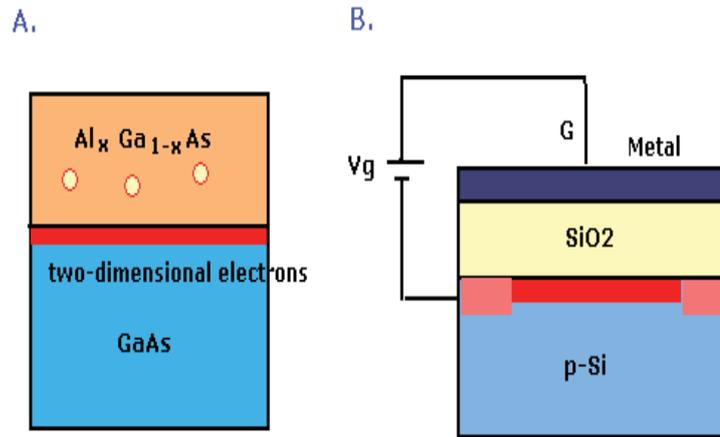


FIGURE 4.1 – La figure A est une hétérojonction semiconductrice du composé III-V $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$. $AlGaAs$ (couche du haut) donne les électrons à la couche inférieure. Ces électrons sont attirés par la force de Coulomb vers le haut, ce qui oblige les électrons à rester piégés entre les deux couches, ainsi est réalisé le gaz d'électrons 2D. La figure B représente une structure MOS, métal-oxyde-semiconducteur. Le dispositif MOS est fabriqué de silicium dopé de type-p ou de type-n. Il y a une couche de dioxyde de silicium isolante et une couche métallique au dessus du gaz d'électrons 2D.

veaux plateaux correspondant à une conductivité de Hall en fraction de e^2/h (voir figure 4.2), observés pour la première fois par *Tsui et al* [3] en 1982. Il apparaît de très nombreux plateaux dans la résistivité de Hall en fonction du champ magnétique à densité n_e fixée. Les premiers plateaux correspondent à une conductivité en multiple entier de e^2/h et les plateaux suivants se produisent à des fractions rationnelles de e^2/h de dénominateur impaire. La formation de ces plateaux et l'annulation de la résistivité longitudinale pour ces mêmes valeurs du champ correspondent à l'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF). L'effet Hall fractionnaire le plus typique se produit à $\nu = 1/3$ ou $\nu = 2/3$ et ces expériences sur l'E HQF montrent clairement les limitations de la théorie quantique à un corps. Seule la prise en compte des interactions entre électrons allait permettre d'interpréter ce phénomène.

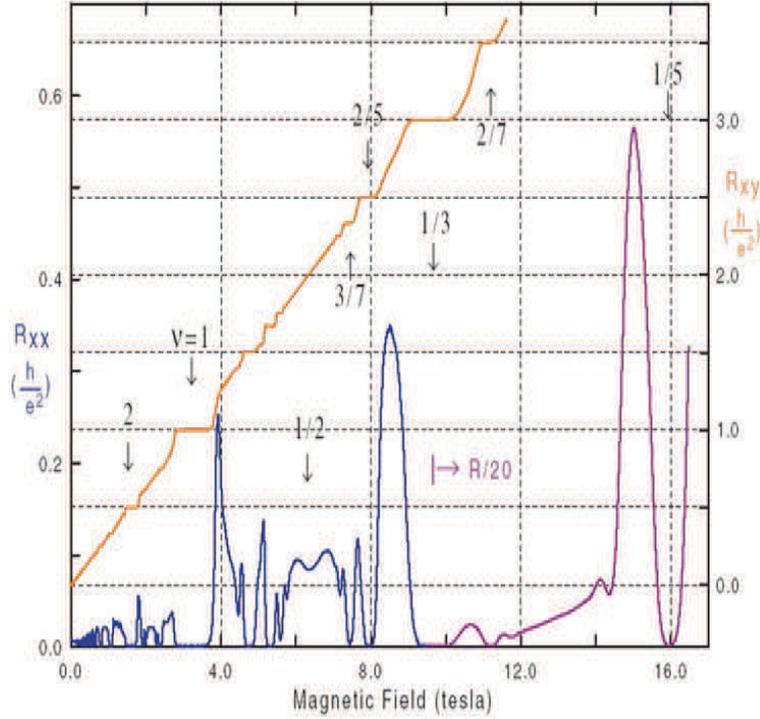


FIGURE 4.2 – Résistances longitudinale et de Hall en fonction du champ magnétique appliqué [42].

4.1.2 Rôle des interactions

Les résultats surprenants de l’EHQF concernant les fractions $\nu = 1/3$ et $\nu = 2/3$ apparaissent à champ magnétique suffisamment élevé (ou bien à densité électronique suffisamment basse) pour que les facteurs de remplissage soient inférieurs à 1. Dans ces conditions, les électrons n’occupent que partiellement le premier niveau de Landau. Il y a exactement un électron pour trois états électroniques à un corps à $\nu = 1/3$. Les états occupés sont les états de volume (loin des bords) qui présentent une dégénérescence totale en énergie. Il est clair que c’est l’interaction coulombienne entre les électrons qui est en mesure de lever cette dégénérescence afin de pouvoir expliquer la formation de plateaux aux fractions $\nu = 1/3$ et $\nu = 2/3$. Le traitement de l’effet Hall quantique fractionnaire apparaît comme un problème à N corps nécessairement plus complexe que l’effet Hall quantique entier qui est bien décrit via la résolution de l’équation de Schrodinger à une particule et le rôle du désordre.

4.2 Fonction d'onde de Laughlin

L'hamiltonien qui décrit le gaz d'électrons bidimensionnel dans une hétérostructure de GaAs-Ga_xAl_{1-x}As soumis à un champ magnétique très fort est donné par

$$H = \sum_j \left\{ \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla}_j - q_e \vec{A}_j)^2 + V(z_j) \right\} + \sum_{j>k} \frac{e^2}{\epsilon |z_j - z_k|}, \quad (4.1)$$

où l'indice j (k) parcourt les N électrons du système, V est le potentiel de neutralisation de charge uniforme, et ϵ est la constante diélectrique. Pour déterminer analytiquement le fondamental du système, Laughlin a utilisé la méthode variationnelle qui consiste à choisir une fonction d'onde d'essai ψ_m dépendant d'un paramètre m , comme candidat pour le fondamental. On calcul ensuite la valeur moyenne de l'hamiltonien $\langle \psi_m | H | \psi_m \rangle / \langle \psi_m | \psi_m \rangle$. L'énergie de cet état est toujours supérieure ou égale à l'énergie du fondamental. Après on fait varier m pour obtenir le minimum des valeurs moyennes, la fonction d'onde correspondante est alors approximativement la fonction d'onde du fondamental. Cependant, le choix de la fonction d'essai est essentiel dans cette approche.

4.2.1 Caractéristiques et expression

Comme illustration, on va donner les pas essentiels dans la construction de la fonction d'onde de Laughlin à travers la discussion d'une fonction d'onde à deux particules $\psi^2(z, z')$. Ainsi, la condition d'analyticité (2.34), pour la jauge symétrique, impose que $\psi^2(z, z') = \sum_{m,M} a_{m,M} (z + z')^M (z - z')^m \exp(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2} - \frac{z'\bar{z}'}{4l_B^2})$, avec m et M des entiers. Mais comme on cherche à décrire un état qui respecte l'invariance par translation et rotation pour un état liquide, on peut se limiter à des fonctions d'onde de la forme $\psi^2(z, z') = \sum_m a_m (z - z')^m \exp(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2} - \frac{z'\bar{z}'}{4l_B^2})$. Les électrons sont des fermions et la fonction doit donc être antisymétrique, ce qui limite le choix de m aux entiers impairs. Dans le cas général, la fonction d'onde à deux particules est une superposition des fonctions $\psi^2(z, z') \propto (z - z')^{2s+1} \exp(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2} - \frac{z'\bar{z}'}{4l_B^2})$.

Ainsi Laughlin a tenté une fonction d'essai sur la base d'un nombre de simplifications et d'approximations. Dans la jauge symétrique une fonction d'onde propre à un corps est donnée par (voir équation 2.34),

$$\psi(\mathbf{r}) = f(z) \exp(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}), \quad (4.2)$$

où f est une fonction polynômiale quelconque. La fonction d'onde à N électrons peut s'exprimer comme combinaison linéaire de déterminants de Slater à partir de la base

des fonctions à un corps

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = F(z_1, z_2, \dots, z_N) \exp\left(-\sum_i \frac{z_i \bar{z}_i}{4l_B^2}\right), \quad (4.3)$$

avec $F(z_1, z_2, \dots, z_N)$ un polynôme à plusieurs variables. Le terme général de cette fonction est de la forme $a \prod_i z_i^{m_i}$ avec a un coefficient, et qui représente le produit de N états à un électron ayant chacun un moment angulaire $\hbar m_i$. Le déterminant de Slater a donc un moment angulaire total $M\hbar = \sum_i m_i \hbar$. Comme l'hamiltonien conserve le moment angulaire total, on peut diagonaliser simultanément l'hamiltonien et l'opérateur moment angulaire total. Ce qui permet de restreindre la fonction d'essai de manière à ce que chaque terme du polynôme $F(z_1, z_2, \dots, z_N)$ ait le même degré total M . La fonction F est donc un polynôme homogène. Enfin, étant une fonction à N corps fermioniques, ψ_m est obligatoirement totalement antisymétrique. En plus de ces simplifications, il est évident que l'interaction coulombienne a tendance à séparer les électrons les uns des autres au maximum et que la fonction d'onde s'annulera lorsque les positions de deux électrons coïncident (principe d'exclusion de Pauli), en plus de la condition d'invariance par translation le polynôme $F(z_1, z_2, \dots, z_N)$ est choisi fonction uniquement de la distance inter-électronique $z_i - z_j$. Avec une pareille forme de F seront exclus les interactions à trois corps ou plus. C'est dans ce cadre que Laughlin a proposé sa fonction d'essai avec le seul paramètre entier impair $m = 2s + 1$, de sorte que

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{l_B}\right)^{2s+1} \exp\left(-\sum_i \frac{z_i \bar{z}_i}{4l_B^2}\right). \quad (4.4)$$

Le préfacteur dans la fonction de Laughlin est aussi appelé facteur de Jastrow, et de telles fonctions d'essai ont également été proposées pour la description de l'hélium (He) liquide [43]. Ainsi, pour expliquer le phénomène de l'effet Hall quantique fractionnaire, Laughlin a eu l'idée géniale d'interpréter le module carré de la fonction d'essai en terme de densité de probabilité, l'espace de configuration est l'espace 2D et l'intégral sur l'espace du module carré de la fonction d'essai est identifiée avec la fonction de partition \mathcal{Z} d'un système statistique classique ayant comme hamiltonien U_{cl} ,

$$\mathcal{Z} = \sum_C e^{-\beta U_{cl}} = \int d^2 z_1 d^2 z_2 \dots d^2 z_N |\psi_L(z_1, z_2, \dots, z_N)|^2, \quad (4.5)$$

où C représente les configurations. Ce qui permet d'écrire

$$-\beta U_{cl} = 2m \sum_{i < j} \ln \left| \frac{z_i - z_j}{l_B} \right| - \sum_j \frac{|z_j|^2}{2l_B^2}, \quad (4.6)$$

où $m = 2s + 1$. Un choix formel est de prendre la “température” $\beta = m$ afin d’obtenir

$$U_{cl} = -2 \sum_{i < j} \ln \left| \frac{z_i - z_j}{l_B} \right| + \frac{1}{m} \sum_j \frac{|z_j|^2}{2l_B^2}. \quad (4.7)$$

Comme l’équation différentielle de Poisson en 2D est

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(r),$$

alors une charge ponctuelle de charge unité satisfait

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -4\pi \delta^2(r).$$

A partir de l’identité

$$\Delta \ln(\mathbf{r}) = 2\pi \delta^2(r),$$

on déduit que la forme du potentiel coulombien d’une charge ponctuelle en 2D, à une constante près, est

$$V(\mathbf{r}) = -2 \ln r,$$

qui peut donc avoir une forme

$$V(\mathbf{r}) = -2 \ln \frac{r}{l_B}$$

en rapport avec cette analyse. Pour une densité de charge uniforme, on a

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -4\pi \bar{\rho},$$

dont la solution est

$$V(\mathbf{r}) = -\pi \bar{\rho} r^2,$$

comme $\Delta r^2 = 4$. Par conséquent, l’énergie électrostatique d’un ensemble de particules de charge e_j en interaction avec un arrière-plan de densité de charge uniforme $\bar{\rho}$ est donnée par (pour plus de détails voir [12]),

$$E_{el} = -2 \sum_{j < k} e_j e_k \ln \left| \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{l_B} \right| - \pi \bar{\rho} \sum_i e_i |r_i|^2. \quad (4.8)$$

Si dans (4.8), on met les charges $e_j = -1$, puis on compare les deux expressions (4.8) et (4.7), on vérifie facilement que

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2\pi m l_B^2}. \quad (4.9)$$

La neutralité de la charge implique que la densité des électrons est aussi $\bar{\rho}$. Le facteur de remplissage est défini comme le rapport du nombre des électrons par le nombre des états par niveau de Landau,

$$\nu = \frac{\bar{\rho}S}{BS}\phi_0 = \frac{1}{m} = \frac{1}{2s+1}. \quad (4.10)$$

Cela montre clairement que le seul paramètre variationnel s de la fonction d'onde de Laughlin (4.4) est intimement lié au facteur de remplissage ν donné par la relation (4.10).

4.2.2 Les quasi-particules

Une propriété remarquable du liquide de Laughlin est qu'il possède des excitations élémentaires de charge fractionnaire. Laughlin a montré qu'un état excité peut être obtenu, et ce en insérant un flux tube ponctuel dans le fluide incompressible, puis en faisant augmenter le flux à travers le tube adiabatiquement depuis zéro jusqu'à un quantum flux e/h , une excitation serait produite. Cette expérience de pensée a permis à Laughlin d'introduire le concept de quasi-particule, auquel faudrait-il trouver une fonction d'onde d'essai. Cette fonction est de la forme

$$\psi_{qh}^L(z_0, z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i \left(\frac{z_i - z_0}{l_B} \right) \psi^L(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (4.11)$$

où l'on a un zéro en plus en z_0 . En développant formellement la fonction de Laughlin en puissances,

$$\psi^L(z_1, z_2, \dots, z_N) = \sum_{\{m_i\}} a_{m_1, \dots, m_N} z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N} \exp\left(-\sum_j \frac{|z_j|^2}{4l_B^2}\right), \quad (4.12)$$

on déduit que

$$\psi_{qh}^L = \sum_{\{m_i\}} a_{m_1, \dots, m_N} z_1^{m_1+1} \dots z_N^{m_N+1} \exp\left(-\sum_j \frac{|z_j|^2}{4l_B^2}\right), \quad (4.13)$$

ainsi toutes les particules ont leur moment angulaire déplacé de $m_i \rightarrow m_i + 1$. Comme, dans la jauge symétrique, la position d'une particule se trouve sur un anneau de rayon $\sqrt{2m_i + 1}l_B$, on peut dire que la position $z_0 = 0$ représente un trou ou plus précisément un quasi-trou (quasi-hole en anglais). Afin de simplifier, on peut écrire

$$\psi_{qh}^L(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i \left(\frac{z_i}{l_B} \right) \psi^L(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (4.14)$$

pour le quasi-trou, et

$$\psi_{qh}^L(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i \left(\frac{l_B \partial}{\partial z_i} \right) \psi^L(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (4.15)$$

pour la quasi-particule. Ces fonctions décrivent le quasi-trou et la quasi-particule à l'origine. Prenons le cas simple d'un quasi-trou à \mathbf{r}_0 , la fonction d'onde associée est donnée par $\psi_{qh}^L = \prod_i \left(\frac{z_i - z_0}{l_B} \right) \psi^L$, et nous avons $|\psi_{qh}^L|^2 = e^{-\beta E}$, mais comme $\beta = m$, l'énergie électrostatique sera donnée par

$$E_{qh-el} = -2 \sum_{j < k} \ln \left| \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{l_B} \right| - \frac{2}{m} \sum_j \ln \left| \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0}{l_B} \right| + \frac{1}{2ml_B^2} \sum_i |r_i|^2. \quad (4.16)$$

Cette expression de l'énergie représente un système de particules de charge $e_j = -1$ en interaction avec un arrière-plan de densité de charge uniforme $\bar{\rho} = \frac{1}{2\pi ml_B^2}$ et une particule extérieure de charge $-\frac{1}{m}$ à $z_0 = 0$. Ainsi un résidu de $1/m$ d'un électron se trouve au voisinage de z_0 , donnant une charge fractionnaire $e^* = e/m$ (l'écrantage du plasma neutre oblige la fractionalisation de la charge de la quasi-particule). Dans la figure 4.3, on donne une schématique de la fractionalisation de l'électron en trois. Une autre manière plus directe de voir cette fractionalisation consiste à introduire m quasi-hole à la même position

$$\psi_{qh-m}^L(z_0, z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i \left(\frac{z_i - z_0}{l_B} \right)^m \psi^L(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (4.17)$$

ce qui revient à avoir une fonction de Laughlin avec $N+1$ électrons, le dernier électron étant situé à la position z_0 . Ainsi on a besoin de m quasi-trous pour ajouter un électron dans le liquide de Laughlin. Des calculs numériques [44, 45, 46, 47, 48] ont montré que le coût en énergie pour créer de telles quasi-particules est non nul, ce qui signifie que l'état fondamental décrit par la fonction de Laughlin a un gap par rapport à ces excitations élémentaires.

4.2.3 Énergie du fondamental

Le succès du travail du Laughlin ne se limite pas à la fonction d'onde qu'il a proposé mais aussi il a montré que l'énergie qui correspond à cet état variationnel est plus basse que l'énergie de l'état fondamental du cristal de Wigner [49]. Ce dernier a été proposé comme un état fondamental parce que ses corrélations sont favorables à la minimisation de la répulsion coulombienne. L'énergie du fondamental du fluide de

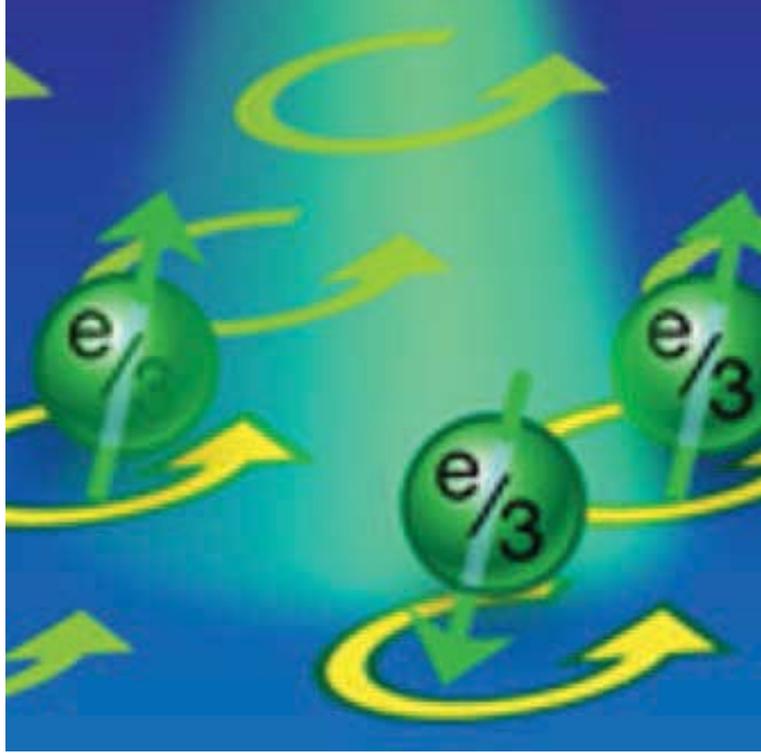


FIGURE 4.3 – Schématique de la fractionalisation de l'électron au facteur de remplissage $\nu = 1/3$.

Laughlin sera déterminée à partir de la valeur moyenne de l'hamiltonien dans l'état de Laughlin ψ^L

$$\frac{\langle \psi^L | H | \psi^L \rangle}{\mathcal{Z}} = \frac{n_e S}{2} \int d^2|z| \frac{e^2}{\epsilon|z|} g(|z|), \quad (4.18)$$

avec

$$g(|z|) = \frac{N(N-1)}{n_e^2 \mathcal{Z}} \int d^2 z_3 \cdots d^2 z_N |\psi^L(z_1 = 0, z_2 = |z|, z_3, \cdots z_N)|^2 \quad (4.19)$$

la fonction de corrélation de paires. Dans cette expression est utilisée l'invariance par translation et rotation et le fait qu'on a $N(N-1)/2$ possibilités de choisir les paires $z_i = z_1$ et $z_j = z_2$. Dans l'étude des liquides ordinaires, on divise cette expression par le nombre total de particules, ici $N = n_e S$ et on choisit l'énergie du liquide homogène non-corrélé $E_0 = \frac{n_e}{2} \int d^2 r \frac{e^2}{\epsilon r}$ comme énergie de référence. L'énergie par particule du liquide de Laughlin s'écrit (pour plus de détails voir [5, 50])

$$E^L = \frac{n_e}{2} \int d^2|z| \frac{e^2}{\epsilon|z|} [g(|z|) - 1]. \quad (4.20)$$

Il a été montré aussi que $g(|z|)$ prend la forme

$$g(|z|) = (1 - e^{-|z|^2/2}) + \sum_{m=1}^{\sim} \frac{2c_m}{m!} \left(\frac{|z|^2}{4}\right)^m e^{-|z|^2/4}. \quad (4.21)$$

La tilde sur le signe somme montre que la sommation est sur les m impairs seulement. La fonction de corrélation de paires est principalement utilisée dans l'étude des propriétés des fluides [51], elle exhibe entre autres, une probabilité minimale d'avoir un électron dans le voisinage immédiat d'un autre électron et un maximum, à distance finie, de probabilité de trouver une deuxième particule. Ce maximum se déplace vers des distances plus grandes et devient plus accentué lorsque s augmente, c'est à dire quand la densité électronique diminue. Cela donne un ordre à courte portée qui devient plus important à basse densité où est prévue la formation d'un cristal de Wigner [49].

Chapitre 5

Généralisation de Jain-concept de fermion composite

Un fermion composite est une entité topologique qui désigne l'état d'un électron auquel est attaché un nombre pair de quanta de flux magnétique [12], appelés parfois vortex. Les fermions composites ont été envisagées pour la première fois dans le cadre de l'effet Hall quantique fractionnaire [28, 12], mais par la suite sont devenus des entités utiles pour expliquer beaucoup d'autres phénomènes et effets dans le champ vaste de la matière condensée. Ces vortex sont un exemple de défaut topologique et se produisent dans d'autres situations comme les vortex quantiques d'Abrikosov dans les supraconducteurs de type II et les vortex classiques qu'on trouve dans les transitions de Berezinski-Kosterlitz-Thouless du modèle XY 2D [52, 53, 54].

5.1 Fermions composites-description qualitative

Quand les électrons sont confinés dans un plan 2D, refroidi à des températures très basses et soumis à un champ magnétique intense, leur énergie cinétique est gelée en raison de la quantification des niveaux de Landau. Leur comportement dans de telles conditions est gouverné par la seule répulsion coulombienne, et ainsi produisent un fluide quantique fortement corrélé. Des expériences ont montré que les électrons minimisent leurs interactions en attachant des vortex quantiques et deviennent des fermions composites [12]. L'interaction entre les fermions composites eux-mêmes est souvent négligeable à une bonne approximation, ce qui les rend les quasi-particules physiques de ce liquide quantique. Un signe de la présence des fermions composites,

responsable du comportement inattendu du système de Hall, est la présence d'un champ magnétique effectif, plus faible que le champ magnétique appliqué. Le champ magnétique ressenti par les fermions composites est $B^* = B - 2s\rho\phi_0$, B champ magnétique extérieur, ρ densité de particules, $2s$ nombre de vortex attachés au fermion composite, et ϕ_0 un quanta de flux magnétique. Le champ magnétique effectif est une manifestation directe de l'existence des fermions composites, et incarne également une différence fondamentale entre les électrons et les fermions composites. Parfois, il est dit que les électrons avalent $2s$ quanta de flux pour se transformer en fermion composite et ressentir le champ magnétique résiduel B^* . Le comportement des fermions composites est le même que celui des électrons dans un champ magnétique effectif B^* . En cela, les fermions composites forment des niveaux de Landau dans un champ effectif B^* , appelés niveaux Lambda Λ , et le facteur de remplissage est aussi donné par $\nu = \frac{\rho\phi}{|B^*|}$. Ceci donne une relation entre les facteurs de remplissage des électrons et fermions composites $\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* \pm 1}$.

5.2 Faits expérimentaux

le but principal de la théorie (FC) est de transformer un système d'électrons de Hall fortement corrélés dans un champ extérieur B en un système de fermions composites faiblement corrélés dans le champ effectif B^* . Ceci permet de donner une explication basée sur le comportement d'une seule particule pour un problème compliqué à N corps. Nous citons ici quelques faits expérimentaux dûs à la présence des fermions composites. Quand le champ magnétique effectif disparaît pour une valeur du champ appliqué $B = 2s\rho\phi_0$, dans ce cas le facteur de remplissage devient $\nu = \frac{1}{2s}$. Les fermions composites forment la mer de Fermi [55, 56, 57]. Cette mer de Fermi a été observée dans un nombre d'expériences où est mesuré aussi le vecteur d'onde de Fermi [58, 59, 60, 61]. Maintenant si B est écarté légèrement de la valeur qui donne $B^* = 0$, les fermions composites exécutent des orbites cyclotrons semi-classiques. Ceux là ont été observé par couplage d'ondes de surface acoustiques [58], des pics de résonance dans des superréseaux antidot [59], et par focalisation magnétique [60, 61, 62]. La mesure du rayon des orbites cyclotrons est compatible avec le rayon dû à un champ B qui donne $B^* = 0$. Outre les orbites cyclotroniques, la résonance cyclotron des fermions composites a été également observée par photoluminescence [63]. Si on augmente un peu plus le champ magnétique extérieur de sa valeur qui donne $B^* = 0$, des oscillations quantiques sont observées qui sont périodiques de période en $1/B^*$.

Ceux ci sont les oscillations de Shubnikov-de Haas des fermions composites [64, 65]. Ces oscillations sont dûes à la quantisation des orbites cyclotrons semi-classiques des fermions composites en niveaux de Landau. A partir des expériences de type Shubnikov-de Haas, il est possible de déduire la masse effective et la durée de vie des fermions composites. Quand B augmente assez, ou bien, le désordre et la température diminuent, les fermions composites exhibent l'effet hall quantique entier des fermions composites, c'est à dire $\nu^* = n$, le facteur de remplissage sera donné par la séquence de Jain $\nu = \frac{n}{2sn \pm 1}$. Les fractions observées expérimentalement et qui ne font pas partie de séquence Jain, correspondent à des situations où les fermions composites sentent une faible interaction entre eux, et les choses se compliquent un peu plus [66]. Les fractions pour lesquelles le dénominateur est un nombre pair ont été observées comme $\nu = 5/2$ [67]. Dans ce dernier, le second niveau de Landau est à moitié rempli, mais l'état ne peut pas être une mer de Fermi, car la mer de Fermi est sans gap et ne peut montrer aucun effet de Hall quantique. Cet état est vu comme un supraconducteur des fermions composites [68, 69] apparaissant suite à une interaction attractive faible entre les fermions composites à $\nu = 5/2$. La formation de paires de fermions composites ouvre un gap et produit l'EHQF. Les excitations neutres des états de Hall quantiques fractionnaires sont appelées excitons des fermions composites, et qui sont dûes à la formation de paires trou-particule [70, 71, 72, 73]. Un autre fait expérimental est le spin des fermions composites qui a été observé dans la mer de Fermi des fermions composites ainsi que dans l'EHQF à des champs magnétiques appliqués relativement faibles [74, 75, 76].

5.3 Formulations Théoriques

La fonction de Laughlin décrit avec succès la séquence $\nu = \frac{1}{2s+1}$, mais ne donne pas d'explications pour les états fractionnaires qui ont été découverts par la suite comme $\nu = \frac{2}{5}$ qui fait partie de la séquence $\nu = \frac{p}{2sp+1}$. En premier temps, pour expliquer ces nouveaux états fractionnaires, Haldane [22] et Halperin [77] ont proposé une image hiérarchique, selon laquelle les quasi-particules de Laughlin, à des densités suffisamment élevées, forment à leur tour un liquide incompressible afin de minimiser la répulsion coulombienne dû à leur charge e^* . Comme illustration, $\nu = \frac{2}{5} = \frac{1}{3-\frac{1}{2}}$, pour un état parant $\nu = \frac{1}{3}$ (voir figure 5.1).

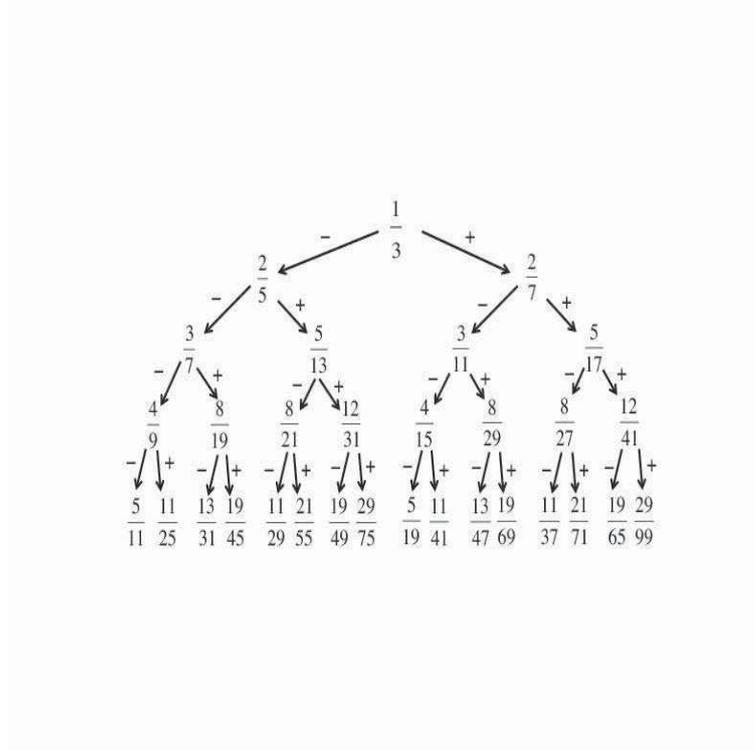


FIGURE 5.1 – Schématique de l’arbre de fractionalisation d’après Haldane et Halperin.

5.3.1 Fonction d’onde de Jain

Une autre alternative a été proposée par Jain en 1989 [10] évoquant le concept de fermions composites pour la première fois, son idée repose sur une réinterprétation de la fonction d’onde de Laughlin à savoir

$$\psi^L(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{l_B} \right)^{2s} \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{l_B} \right) \exp\left(-\sum_i \frac{z_i \bar{z}_i}{4l_B^2}\right), \quad (5.1)$$

présente deux facteurs, le premier est $\prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{l_B} \right)^{2s}$ auquel est attaché $2s$ quanta de flux (vortex d’ordre $2s$) aux positions des particules, le deuxième est

$$\chi_{\nu^*=1}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{l_B} \right) \exp\left(-\sum_i \frac{z_i \bar{z}_i}{4l_B^2}\right), \quad (5.2)$$

interprété comme la fonction d’onde d’un niveau de Landau virtuel complètement rempli, avec un facteur de remplissage virtuel $\nu^* = 1$ [9, 10]. En effet, dans le cas

$\nu = 1$, la fonction d'état d'un système d'électrons est donnée par le déterminant de Slater, appelé aussi déterminant de Vandermonde,

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j) = \det \begin{pmatrix} z_1^0 & z_1^1 & \cdots & z_1^{N-1} \\ z_2^0 & z_2^1 & \cdots & z_2^{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_N^0 & z_N^1 & \cdots & z_N^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

La généralisation de Jain consiste à remplacer $\chi_{\nu^*=1}$ par $\chi_{\nu^*=p}$, pour comptabiliser les p niveau de Landau virtuels complètement remplis,

$$\psi^J(z_1, z_2, \dots, z_N) = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{l_B} \right)^{2s} \chi_{\nu^*=p}(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (5.4)$$

où l'opérateur \mathcal{P}_{LLL} assure que l'état reste dans le niveau de Landau le plus bas parce que $\chi_{\nu^*=p}$ contient des composantes dans les niveaux de Landau supérieures. La valeur de ν peut être déterminée en comptant la puissance maximale d'un z_i , dans ce cas on a $2s(N-1) + \frac{N}{p}$, on trouve $\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2s(N-1) + \frac{N}{p}} = \frac{1}{2s+1/p}$, ou bien

$$\frac{1}{\nu} = 2s + \frac{1}{p}. \quad (5.5)$$

En confrontant les résultats de la fonction de Jain et ceux de la diagonalisation exacte, Jain et autres ont trouvé un très bon overlap (parfait accord) [12], justifiant la construction (5.4). Maintenant, la relation (5.5) peut être écrite en terme d'un champ magnétique effectif B^* vu par les fermions composites

$$B^* = B - 2s\nu B = B - 2sn_e\phi_0, \quad (5.6)$$

la situation semble comme si à chaque électron est attaché $2s$ quanta de flux magnétique réduisant ainsi le champ magnétique de B à B^* (voir figure 5.2). Ce qui permet aussi d'écrire

$$\frac{1}{\nu^*} = \frac{1}{\nu} - 2s. \quad (5.7)$$

5.3.2 Approche du champ moyen

Dans cette approche, les particules sentent le champ réduit B^* et portent $2s$ quanta de flux magnétique. Le potentiel vecteur \mathbf{a} , qui permet d'attacher $2s$ quanta de flux aux électrons est donné par

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = \frac{2s}{2\pi} \phi_0 \sum_j^l \nabla_j \theta_{ji} \quad (5.8)$$

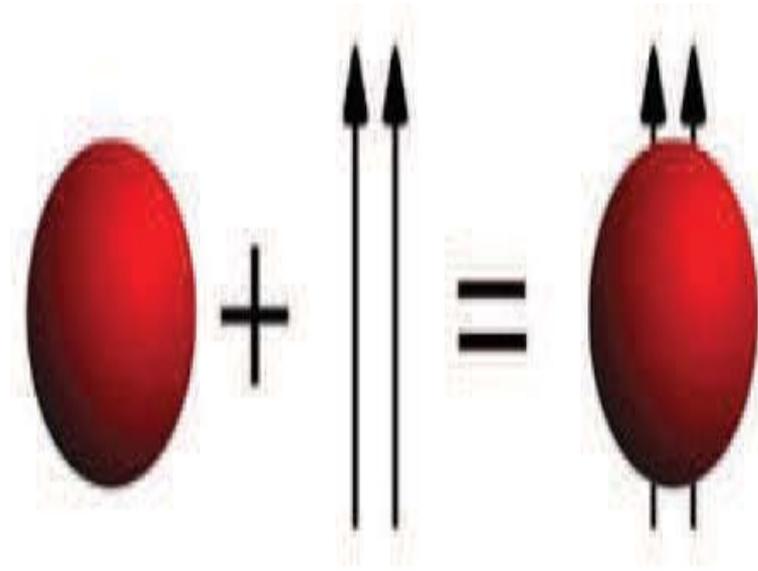


FIGURE 5.2 – Schématique de transformation d'un électron en un fermion composite.

où le prime sur le signe somme désigne $i \neq j$, et

$$\theta_{jk} = i \ln \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|}, \quad (5.9)$$

est l'angle entre les particules j et k . On remarque que $\theta_{jk} = \theta_{kj} \pm (2m + 1)$, m entier. Mais on est plutôt concerné, dans cette approche, par le gradient de l'angle θ_{jk} , c'est à dire

$$\nabla_j \theta_{jk} = \nabla_j \theta_{kj}. \quad (5.10)$$

Ce gradient produit un champ magnétique

$$\mathbf{b}_i = \nabla_i \wedge \mathbf{a}_i = 2s\phi_0 \sum_l' \delta^2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l), \quad (5.11)$$

qui permet à chaque électron d'avaler un tube de flux magnétique d'intensité $2s\phi_0$. Cette image laisse supposer que l'hamiltonien des fermions composites dans le champ moyen est

$$H^* = \frac{1}{2m_b} \sum_i (\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}_i^* + e\mathbf{a}_i), \quad (5.12)$$

où le le potentiel vecteur A^* produit le champ magnétique uniforme B^* . On suppose que les fermions composites sont des particules libres, ainsi l'équation de Schrödinger

s'écrit

$$H^* \psi^* = E^* \psi^*. \quad (5.13)$$

Le potentiel vecteur \mathbf{a} peut être éliminé par une transformation de jauge, qui permet d'avoir

$$\psi^* = \chi \prod_{j < k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2s}, \quad (5.14)$$

avec χ vérifiant l'équation de Schrödinger

$$\frac{1}{2m_b} \sum_i (\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}_i^*) \chi = E^* \chi, \quad (5.15)$$

qui correspond à un système d'électrons de Hall sans interactions à $\nu^* = p$, dont la solution est connue. En particulier, la fonction d'onde de l'état fondamental est $\chi_{\pm p}(B^*)$, qui n'est autre que le déterminant de Slater où p niveau de Landau virtuels sont complètement remplis, la solution est donc le produit des deux parties, c'est à dire $\psi^* = \chi_{\pm p}(B^*) \prod_{j < k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2s}$. Seulement pour que ψ^* décrit correctement le système d'électrons de Hall, il suffit d'omettre le terme dans le dénominateur $|z_j - z_k|^{2s}$ [9], ce qui donne

$$\Psi_{\frac{p}{2sp+1}}(B) = \chi_{\pm p}(B) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2s}. \quad (5.16)$$

Mais comme le mélange avec les niveaux de Landau élevés n'est pas complètement éliminé dans (5.16), et qu'un état totalement confiné dans le plus bas niveau de Landau s'avère très utile, Jain a proposé d'introduire un opérateur de projection \mathcal{P}_{LLL} qui permet de projeter l'état (5.16) dans le plus bas niveau de Landau, et ainsi on arrive à la fameuse fonction d'onde de Jain décrivant l'état fondamental d'un système d'électrons à $\nu = \frac{p}{2sp+1}$

$$\psi^J(z_1, z_2, \dots, z_N) = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{l_B} \right)^{2s} \chi_{\pm p}(z_1, z_2, \dots, z_N). \quad (5.17)$$

Mais surtout retenons que l'effet Hall quantique fractionnaire des électrons est, d'après Jain, l'effet Hall quantique entier des fermions composites (voir dans la figure 5.3 une caricature de l'idée de Jain). Dans ce qui suit, on va donner des résultats qui concernent l'énergie cinétique E_c et l'énergie d'interaction V pour les fonctions d'onde projetées et ceux non-projetées à divers valeurs du facteur de remplissage [12],

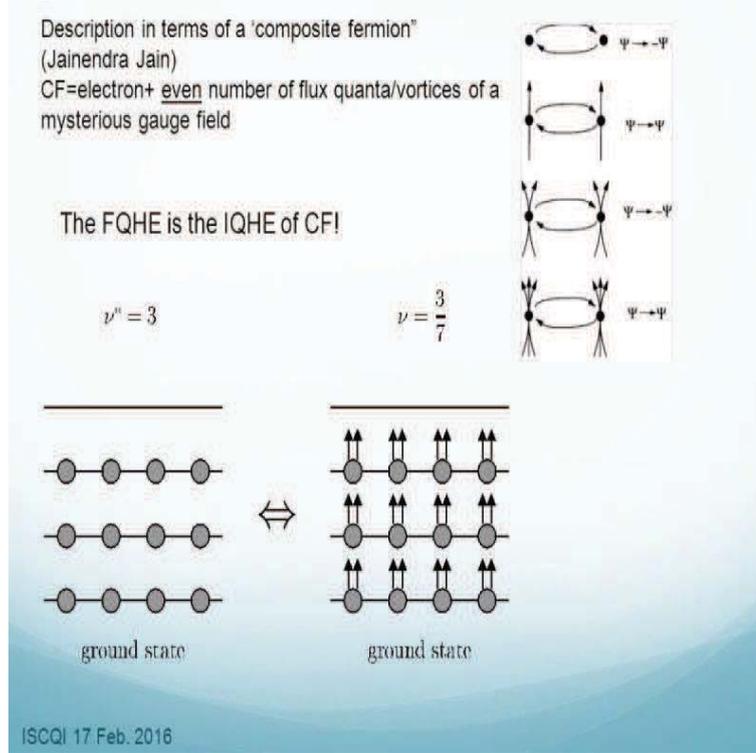


FIGURE 5.3 – L'EHQF des électrons est l'EHQE des fermions composites d'après Jain. Une illustration de l'idée à $\nu = \frac{3}{7}$ est donnée.

| ν | 1/3 | 2/5 | 3/7 | 4/9 |
|------------|---------|---------|---------|---------|
| V^* | -0.3619 | -0.3848 | -0.3947 | -0.4007 |
| E_c^* | 0.335 | 0.408 | 0.430 | 0.459 |
| V^{np} | -0.4098 | -0.4489 | -0.4644 | -0.4734 |
| E_c^{np} | 0 | 0.0403 | 0.0575 | 0.0701 |
| V^p | -0.4098 | -0.4328 | -0.4423 | -0.4474 |
| E_c^p | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V^{WC} | -0.3885 | -0.4130 | -0.4225 | -0.4275 |
| E_c^{WC} | 0 | 0 | 0 | 0 |

TABLE 5.1 – Les énergies d'interaction V et cinétique E_c calculées, dans cet ordre, pour le champ moyen, fonction d'onde non-projetée, fonction d'onde projetée, et pour le cristal de Wigner en unité $e^2/\epsilon l_B$.

5.3.3 Opérateur de projection P_{LLL}

Pour s'assurer que l'état fondamental est exactement confiné dans le niveau de Landau le plus bas (lowest Landau level : LLL en anglais), on doit donc supprimer les amplitudes mixtes qui mélangent les niveaux de Landau bas avec les niveaux de Landau supérieurs, une tâche qui peut être accomplie en utilisant l'opérateur P_{LLL} . Ce dernier est un outil essentiel dans la théorie de Jain sans quoi il serait impossible de prédire les effets quantiques du phénomène de Hall. Il faut souligner ici que c'est dans cet état du niveau de Landau le plus bas que les coordonnées spatiales deviennent non-commutatives, et là la mécanique quantique est la seule issue qui cadre le phénomène.

Brève description de l'opérateur P_{LLL}

Lorsqu'un opérateur $V(z, \bar{z})$ agit sur un état- LLL , le nouveau état possède une amplitude de mixage avec les niveaux de Landau supérieurs. Cependant, pour la physique il est plus commode de travailler avec la version projetée de l'opérateur $V(z, \bar{z})$, qu'on note $V_p(z, \bar{z})$ et défini par

$$\langle \phi | V_p(z, \bar{z}) | \phi' \rangle = \langle \phi | V(z, \bar{z}) | \phi' \rangle,$$

avec $|\phi\rangle$ et $|\phi'\rangle$ des fonctions d'onde- LLL arbitraires. On peut montrer que (dans ce paragraphe on prend $l_B = 1$) [12]

$$V_p(z, \bar{z}) = e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} : V(\bar{z} \rightarrow 2\frac{\partial}{\partial z}, z) : e^{\frac{z\bar{z}}{4}},$$

où le symbole d'ordre normal $::$ signifie que pour tout terme, \bar{z} est mis à gauche et remplacé par la dérivée $2\frac{\partial}{\partial z}$ qui n'agit pas sur les gaussiennes. Un développement de $V(z, \bar{z})$ permet d'écrire

$$V(z, \bar{z}) = \sum_{j,k} C_{jk} \bar{z}^j z^k.$$

La projection- LLL de $V(z, \bar{z})$ est par définition donnée par

$$e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \sum_{j,k} C_{jk} \left(2\frac{\partial}{\partial z} \right)^j z^k e^{\frac{z\bar{z}}{4}}.$$

Quand V_p agit sur une fonction d'onde-*LLL* quelconque de la forme $z^n e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$, on obtient une fonction d'onde-*LLL*. En effet les dérivations ne produisent pas des termes contenant des \bar{z} . Il est possible de montrer que $V(z, \bar{z})$ et $V_p(z, \bar{z})$ ont des éléments de matrice identiques dans le niveau de Landau le plus bas, soit [12]

$$\begin{aligned}
\langle m|V(z, \bar{z})|n\rangle &= \sum_{j,k} C_{jk} \int d^2\mathbf{r} \bar{z}^m e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} (\bar{z}^j z^k) z^n e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \\
&= \sum_{j,k} C_{jk} \int d^2\mathbf{r} \bar{z}^m z^k z^n \left(-2\frac{\partial}{\partial z}\right)^j e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \\
&= \sum_{j,k} C_{jk} \int d^2\mathbf{r} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \bar{z}^m \left(2\frac{\partial}{\partial z}\right)^j z^k z^n \\
&= \sum_{j,k} C_{jk} \int d^2\mathbf{r} \bar{z}^m e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \left[e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left(2\frac{\partial}{\partial z}\right)^j z^k e^{\frac{z\bar{z}}{4}} \right] z^n e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \\
&= \langle m|V_p(z, \bar{z})|n\rangle.
\end{aligned}$$

La projection des coordonnées x et y dans le niveau de Landau le plus bas donne

$$\begin{aligned}
x_p &= e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{z}{2}\right) e^{\frac{z\bar{z}}{4}} \\
y_p &= e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left(\frac{-i\partial}{\partial z} + i\frac{z}{2}\right) e^{\frac{z\bar{z}}{4}},
\end{aligned}$$

qui ne commutent plus à cause de

$$[x_p, y_p] = i \cdot 1$$

ici 1 n'est autre que l_B^2 après restauration des unités. Ainsi après la projection dans le niveau de Landau le plus bas, x et y ne commutent plus, et se comportent comme deux variables canoniques conjuguées auxquelles est applicable le principe d'incertitude de Heisenberg,

$$\Delta x_p \Delta y_p \geq \frac{1}{2} \cdot 1,$$

avec Δx_p et Δy_p les déviations standards des coordonnées x et y pour une fonction d'onde donnée qui en dépend. Il est donc impossible de décrire une fonction d'onde dans le niveau de Landau le plus bas où x et y sont nettement défini.

Mécanisme de la méthode de projection

La projection-*LLL* est la terminologie qui indique une opération qui transforme une fonction d'onde non-projetée de la forme $\psi_\nu^J = \chi_{\nu^*} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p}$ en une fonction

d'onde projetée. Le facteur χ_{ν^*} est en général une superposition de déterminants de Slater. Il faut noter que le produit de deux fonction d'ondes projetées (F.O._{LLL}) est F.O._{LLL}. De la même façon la projection-LLL du produit d'une F.O._{LLL} par une fonction d'onde dans un niveau de Landau superieur est donnée par

$$P_{LLL}\eta_{n,m}(\mathbf{r})\eta_{0,m'} = \hat{\eta}_{n,m}(\mathbf{r})\eta_{0,m'},$$

où $\hat{\eta}_{n,m}(\mathbf{r}) =: \eta_{n,m}(\bar{z} \rightarrow 2\frac{\partial}{\partial z}, z) :$, de sorte que

$$P_{LLL}\bar{z}^n z^m = e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left(2\frac{\partial}{\partial z}\right)^n z^m.$$

On peut voir cela facilement si on remarque que

$$\bar{z}^n z^m e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} = a_0 z^{m-n} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} + \text{termes des N.L. superieurs},$$

et a_0 est déterminé en multipliant les deux membres par \bar{z}^{m-n} ensuite on intègre sur la position. Formellement on a,

$$\begin{aligned} \int d^2\mathbf{r} \bar{z}^{m-n} \bar{z}^n z^m e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} &= \int d^2\mathbf{r} \bar{z}^{m-n} \left(-2\frac{\partial}{\partial z}\right)^n z^m e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \\ &= \int d^2\mathbf{r} \bar{z}^{m-n} \left[\left(2\frac{\partial}{\partial z}\right)^n z^m\right] e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la projection de $z^{m-n} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$ sur $\bar{z}^n z^m e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$ est la même que sa projection sur $e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left(2\frac{\partial}{\partial z}\right)^n z^m$. Maintenant pour projeter, il y a deux manières de procéder. La première est directe :

$$P_{LLL} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \chi(\eta) \prod_{j<k} (z_j - z_k)^{2p} = e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \hat{\chi}(\hat{\eta}) \prod_{j<k} (z_j - z_k)^{2p}.$$

La seconde se fait par partie On remarque d'abord que

$$\prod_{j<k} (z_j - z_k)^{2p} = \prod_{j \neq k} (z_j - z_k)^p \equiv \prod_j \mathcal{J}_j^p,$$

où $\mathcal{J}_j = \prod'_k (z_j - z_k)$, et le prime sur le signe produit signifie que $j \neq k$. Le facteur de Jastrow peut être écrit comme

$$\begin{aligned} \psi^J &= \begin{vmatrix} \eta_1(\mathbf{r}_1) & \eta_1(\mathbf{r}_2) & \cdots \\ \eta_2(\mathbf{r}_1) & \eta_2(\mathbf{r}_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \prod_{j<k} (z_j - z_k)^{2p} \\ &= \begin{vmatrix} \eta_1(\mathbf{r}_1)\mathcal{J}_1^p & \eta_1(\mathbf{r}_2)\mathcal{J}_2^p & \cdots \\ \eta_2(\mathbf{r}_1)\mathcal{J}_1^p & \eta_2(\mathbf{r}_2)\mathcal{J}_2^p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant on projette chaque élément dans le déterminant de la façon suivante

$$P_{LLL}\psi^J = \begin{vmatrix} \hat{\eta}_1(\mathbf{r}_1)\mathcal{J}_1^p & \hat{\eta}_1(\mathbf{r}_2)\mathcal{J}_2^p & \cdots \\ \hat{\eta}_2(\mathbf{r}_1)\mathcal{J}_1^p & \hat{\eta}_2(\mathbf{r}_2)\mathcal{J}_2^p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix},$$

avec $\hat{\eta}_{n,m}$ donnée par

$$\hat{\eta}(\mathbf{r}_j) = N_{n,m} \frac{(-)^n}{n!} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} z^m \frac{\partial^n}{\partial z^n},$$

et $N_{n,m}$ un facteur de normalisation. Il faut souligner ici que sans l'opérateur de projection P_{LLL} , la théorie des fermions composites n'aurait pas vu le jour.

5.3.4 quasi-trous et quasi-particules

Les excitations des états de l'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = \frac{p}{2sp \pm 1}$ se déterminent par analogie avec les excitations des états de l'effet Hall quantique entier à $\nu^* = p$. Pour ce dernier, lorsqu'on ajoute un électron au niveau de Landau le plus bas, non-occupé, il se produit une quasi-particule ayant la même charge que l'électron. De la même manière, lorsqu'on enlève un électron du niveau de Landau le plus haut, complètement rempli, il se produit un trou (voir une illustration dans la figure 5.4). Désignons les fonctions d'ondes de ces états par χ_p^{qp} et χ_p^{qh} . Une quasi-particule de CF est l'état où un fermion composite occupe seul un niveau de Landau virtuel Λ vide, et un quasi-trou de CF est l'état où un fermion composite manque d'un niveau de Landau virtuel complètement rempli. Les fonctions d'onde associées sont données par

$$\Psi_{\frac{p}{2sp+1}}^{CF-qp} = \mathcal{P}_{LLL} \chi_p^{qp} \chi_1^{2s} \quad (5.18)$$

$$\Psi_{\frac{p}{2sp+1}}^{CF-qh} = \mathcal{P}_{LLL} \chi_p^{qh} \chi_1^{2s}. \quad (5.19)$$

Comme ceux écrits précédemment, ces fonctions d'ondes n'ont pas de paramètres ajustables. Les CF-quasiparticules et les CF-quasitrous sont des images des états de l'effet Hall quantique entier auxquels est ajouté ou ôté un électron d'un état de HQE avec n niveau de Landau remplis. Les CF-quasiparticules et les CF-quasitrous sont souvent appelés quasiparticules et quasitrous. Les CF-quasiparticules et les CF-quasitrous ont les propriétés topologiques de la charge locale fractionnaire et la statistique de tresage fractionnaire. Il convient de noter qu'une paire $qp - qh$ de CF peut être formée, on l'appelle exciton de CF (voir figure 5.5). La fonction d'onde d'un exciton est [12],

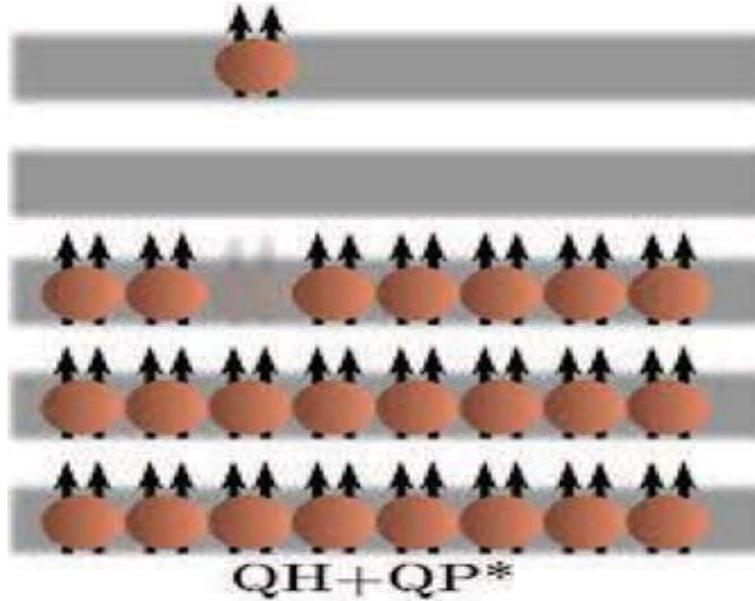


FIGURE 5.4 – Schématique montrant une quasi-particule et un quasi-trou.

$$\Psi_{\frac{2sp+1}{p}}^{CF-ex} = \mathcal{P}_{LLL} \chi_p^{ex} \chi_1^{2s}. \quad (5.20)$$

Pour une géométrie sphérique, la fonction χ_p^{ex} est un état propre du moment angulaire orbital total. L'énergie d'un CF-exciton est la somme de l'énergie propre de la CF-quasiparticule, l'énergie propre du CF-quasitrou, et leurs énergie d'interaction. Quand la distance entre la CF-quasiparticule et le CF-quasitrou est assez grande, le troisième terme peut être négligé.

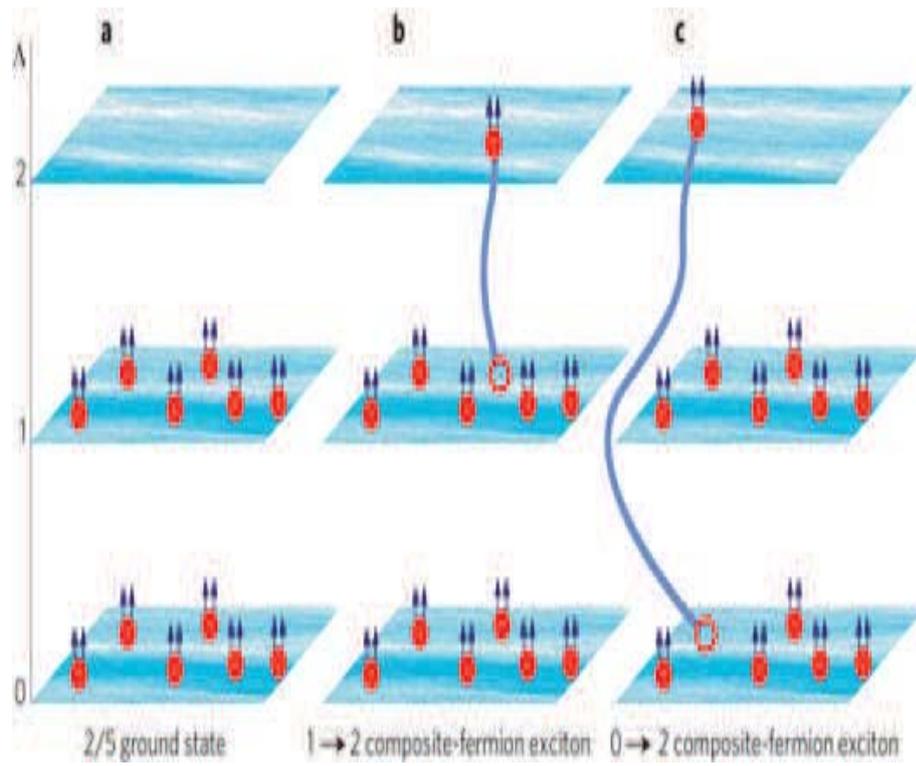


FIGURE 5.5 – Schématique montrant la formation de paires d'excitons.

Chapitre 6

Théorie de Chern-Simons

En physique un anyon [13, 15, 78] est un type de quasi-particule qui apparaît uniquement dans des systèmes 2D (bidimensionnels) qui ne sont ni des bosons ni des fermions, mais c'est chose quelconque (any thing en anglais), devenu anyon, c'est donc une quasi-particule avec une statistique arbitraire. Echanger deux de ces quasi-particules, cause une phase globale mais n'affecte pas les observables. Les anyons abéliens sont mis en évidence, et jouent un rôle important pour expliquer le phénomène de l'effet Hall quantique fractionnaire (une schématique (6.1) montrant le tressage de deux anyons). Les anyons non-abéliens ne sont pas encore mis en évidence mais c'est un domaine de recherche très actif.

6.1 Topologie et statistique

Dans cet section on va brièvement revoir [79] les aspects les plus essentiels de la statistique des anyons. En première quantisation, le concept des statistiques est lié aux propriétés des fonctions d'ondes décrivant les systèmes de particules identiques suite à un interchange de deux de ces particules. Ainsi les fonctions d'ondes totalement symétriques décrivent les bosons, et celles totalement antisymétriques décrivent les fermions. Cependant, la situation se complique un peu quand il s'agit de systèmes à deux dimensions. Là il y a plusieurs possibilités, et la fonction d'onde pour un système de particule identique n'est ni symétrique ni antisymétrique, mais acquiert une phase généralisant le signe plus des bosons ou le signe moins des fermions. On dit alors que la fonction d'onde décrit les anyons. Une fonction d'onde typique des anyons de

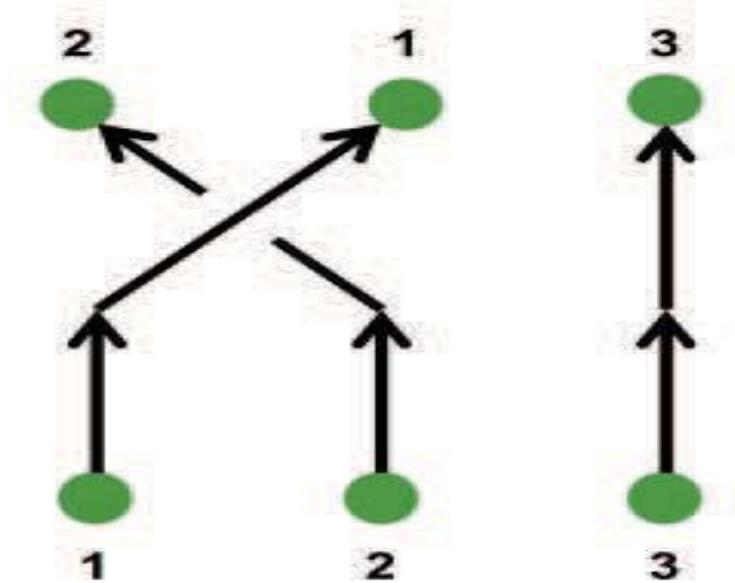


FIGURE 6.1 – Schématique montrant trois éléments du groupe de tresse.

statistique ν peut être donnée par [80]

$$\psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^\nu f(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N), \quad (6.1)$$

où $z_j = x_j + iy_j$ est la position de la particule j dans le plan complexe, et f est une fonction univoque symétrique par rapport à toutes les permutations. Quand on interchange la particule i avec la particule j , la fonction d'onde acquiert une phase $e^{i\pi\nu}$ ou $e^{-i\pi\nu}$ selon que l'échange est fait dans le même sens ou le sens contraire d'une aiguille d'une montre. Donc, pour $\nu \neq 0, 1(\text{mod } 2)$, il faudrait spécifier pas seulement la permutation mais aussi l'orientation de l'interchange, pour dire le tressage (braiding en anglais) (la figure 6.2 montre un type de tressage). Ce dernier est un élément essentiel qui permet de distinguer entre les anyons d'un côté et les fermions et bosons de l'autre côté. A présent, considérons un système avec N particules indiscernables en mouvement dans \mathbf{R}^d . L'espace de configuration de ce système est $M_N^d = \frac{(\mathbf{R}^d)^N - \Delta}{S_N}$, avec Δ l'ensemble de tous les points dans $(\mathbf{R}^d)^N$ qui ont au moins deux coordonnées égales et S_N est le groupe de permutation de N objets. L'ensemble des points dans Δ est exclus à cause du principe d'exclusion de Pauli, et on divise par S_N car deux configurations qui ne diffèrent que par une permutation sont identiques (particules indiscernables). Selon que $d > 2$ ou $d = 2$, la topologie de M_N^d varie. Pour le cas

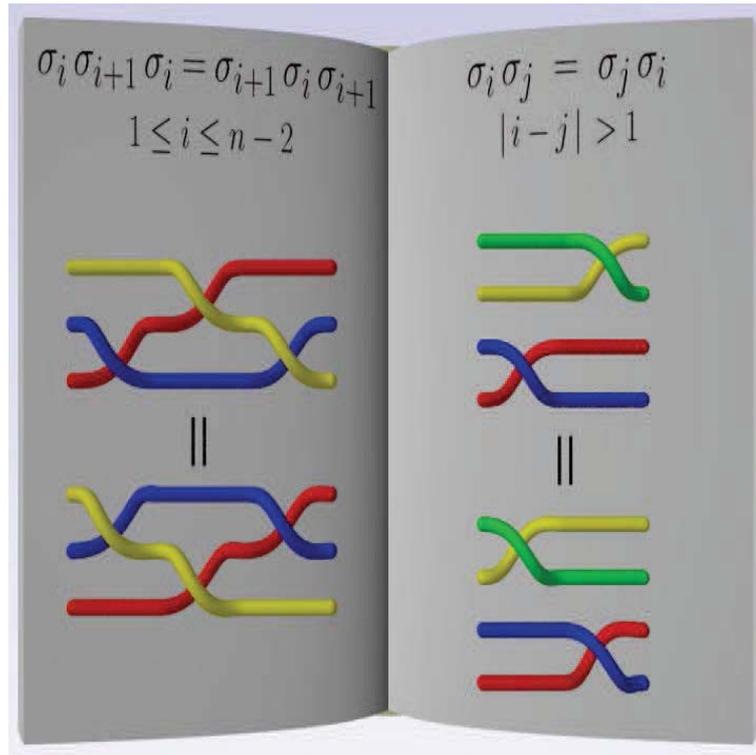


FIGURE 6.2 – Schématique montrant deux opérations différentes de tressage.

$d > 2$, le groupe fondamental de M_N^d est juste le groupe de permutation S_N . Au contraire, pour $d = 2$, le groupe fondamental de M_N^d est le groupe de tresse de N objets B_N [17, 81]. Ce dernier permet l'existence d'une statistique arbitraire dans $d = 2$, c'est la statistique des anyons.

6.2 Première quantification

Considérons un système de N particules ponctuelles non-relativistes en mouvement dans un plan, ayant la masse m et la charge q_e , dont les coordonnées \vec{r}_i et les vitesses \vec{v}_i représentent les variables dynamiques. On suppose aussi que ses particules sont des fermions sans spin. Dans cette section, on va considérer que ($\hbar = c = 1$). La dynamique du problème est défini de l'action S , telle que

$$S = \int dt L, \quad (6.2)$$

$$L = \sum_{I=1}^N \frac{1}{2} m \vec{v}_I(t)^2 - V(\vec{r}_I(t), \dots, \vec{r}_N(t)), \quad (6.3)$$

avec $V(\vec{r}_I(t), \dots, \vec{r}_N(t))$ le potentiel d'interaction. Ce système exhibe un courant j^μ qui se conserve, dont les composantes sont la densité de matière et la densité de courant données par

$$j^0(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) = \sum_I \delta(\vec{x} - \vec{r}_I(t)), \quad (6.4)$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{I=1}^N \vec{v}_I(t) \delta(\vec{x} - \vec{r}_I(t)), \quad (6.5)$$

et vérifient l'équation de continuité $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Par ailleurs, on suppose que le courant j^μ est couplé à un champ de jauge A_ν de sorte que

$$S_{int} = -q_e \int d^3x j^\mu A_\mu, \quad (6.6)$$

quant à la dynamique de A_μ , elle est déterminée par l'action de Chern-Simons

$$S_{CS} = \frac{k}{2} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma, \quad (6.7)$$

où k est une constante de couplage. Par conséquent, l'action totale de ce système est donnée par

$$S_{tot} = S + S_{int} + S_{CS}. \quad (6.8)$$

S_{tot} est invariant sous les transformations de jauge. Dans la suite, on montre que le champ de Chern-Simons introduit une interaction statistique entre les particules [?]. Si on fait varier S_{tot} en variant A_0 , on obtient une relation entre le champ magnétique $B \equiv \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2$ et la densité de matière ρ , de sorte que

$$B = -\frac{q_e}{k} \rho. \quad (6.9)$$

Cette dernière équation permet de dire qu'à chaque particule est attaché un flux magnétique. Maintenant, considérons la jauge de Weyl $A_0 = 0$ et la condition subsidiaire $\partial_i A^i = 0$, on peut résoudre l'équation (6.9) et obtenir $A^i(x)$. La solution est donnée par

$$A^i(x) = \sum_{I=1}^N A_I^i(\vec{x}, t), \quad (6.10)$$

avec

$$A_I^i(\vec{x}, t) = A_I^i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))|_{\vec{r}_I=\vec{x}} \quad (6.11)$$

$$A_I^i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = -\frac{q_e}{2\pi k} \sum_{J \neq I} \epsilon^{ij} \frac{r_{jI} - r_{jJ}}{|\vec{r}_I - \vec{r}_J|^2}. \quad (6.12)$$

Maintenant, avec cette solution du potentiel vecteur, l'hamiltonien n'est autre que

$$H = \sum_{I=1}^N \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_I - q_e A_I^i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \right)^2 - V(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)). \quad (6.13)$$

Cette forme de l'hamiltonien montre clairement que la dynamique de Chern-Simons produit un potentiel vecteur qui n'est pas local pour chacune des particules. Ceci permet créer un champ magnétique B qui s'annule partout sauf aux endroits de localisation des particules. Ainsi ce type de quasi-particule possède en plus de la charge q_e , un flux magnétique $\phi = -\frac{q_e}{k}$. La statistique correspondante se manifeste à travers le mécanisme d'Aharonov-Bohm : quant deux particules s'interchange, il prennent une phase comme la charge de l'une des particules tourne autour du flux de l'autre. Une autre forme du potentiel vecteur est

$$A_I^i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{q_e}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial r_{iI}} \sum_{J \neq I} \theta_{IJ} \quad (6.14)$$

$$\theta_{IJ} = \tan^{-1} \left(\frac{r_{2I} - r_{2J}}{r_{1I} - r_{1J}} \right), \quad (6.15)$$

où θ_{IJ} est de rotation de la particule I par rapport à la particule J . Maintenant le lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned} L' &= L + q_e \sum_{I=1}^N \vec{v}_I \vec{A}_I(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \\ &= L - \frac{q_e^2}{2\pi k} \sum_{I < J} (v_I^i - v_J^i) \frac{\partial}{\partial r_I^i} \theta_{IJ}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

où la propriété $\frac{\partial}{\partial r_I^i} \theta_{IJ} = -\frac{\partial}{\partial r_J^i} \theta_{IJ}$ a été utilisée. Mais comme $(v_I^i - v_J^i) \frac{\partial}{\partial r_I^i} \theta_{IJ} = \frac{d}{dt} \theta_{IJ}$, on peut mettre L' sous la forme

$$L' = L - \nu' \sum_{I < J} \frac{d}{dt} \theta_{IJ}. \quad (6.17)$$

Ainsi l'action S_{tot} décrit un système de particules, appelées anyons, caractérisé par une statistique arbitraire $\nu' = \frac{q_e^2}{2\pi k}$.

6.3 Deuxième quantification

Le même résultat est obtenu dans le cadre du formalisme de seconde quantification. Maintenant, la matière (fermions non-relativistes) est caractérisée par un champ

$\psi(\vec{x}, t)$ de masse m et de charge q_e qui est couplé à un champ de jauge $A_\mu(\vec{x}, t)$ plus un terme cinétique de Chern-Simons. L'action s'écrit alors comme

$$S = \int d^3x \int \left[i\psi^\dagger D_0\psi + \frac{1}{2m}(D_1^2 + D_2^2)\psi + \frac{k}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha\partial_\beta A_\gamma \right], \quad (6.18)$$

où $D_\mu = \partial_\mu + iq_e A_\mu$ est la dérivée covariante. En variant S par variation de A_μ , on trouve

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma = \frac{q_e}{k}j^\alpha, \quad (6.19)$$

de sorte que le courant j^α est explicitement donné par

$$j^0 = \psi^\dagger\psi \equiv \rho \quad (6.20)$$

$$j^i = \frac{i}{2m} \left(\psi^\dagger D^i\psi - (D^i\psi)^\dagger\psi \right). \quad (6.21)$$

Ici j^0 et j^i sont des opérateurs et vérifient, comme dans le cas classique, l'équation de continuité $\partial_0\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$. Le tenseur de Chern-Simons $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est complètement déterminé par les composantes du courant. De la même manière, on a $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{q_e}{k}\rho$, et avec la condition $\partial_i A^i = 0$, on trouve la solution

$$A^i(x) = \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{q_e}{k} \int d^2y G(\vec{x} - \vec{y}) \rho(y) \right), \quad (6.22)$$

avec G la fonction de Green qui satisfait l'équation différentielle

$$\Delta G(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (6.23)$$

Dont la solution est

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x} - \vec{y}|. \quad (6.24)$$

Maintenant, la solution A^i peut être écrite comme

$$A^i(x) = \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{q_e}{k} \int d^2y \ln |\vec{x} - \vec{y}| \rho(y) \right), \quad (6.25)$$

ou bien également

$$A^i(x) = \frac{q_e}{k} \int d^2y \frac{\partial}{\partial x_i} \theta(\vec{x} - \vec{y}) \rho(y), \quad (6.26)$$

où $\theta(\vec{x} - \vec{y})$ est l'angle sous lequel \vec{x} est vu par \vec{y} , donné par $\tan^{-1} \left(\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} \right)$. Examinons quelques propriétés de la fonction $\theta(\vec{x} - \vec{y})$. On réalise vite qu'elle est non univoque, c'est à dire qu'elle est multivaluée. il est donc nécessaire de faire une coupure, et choisir un axe de référence. On montre que [79]

$$A^i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda(x), \quad (6.27)$$

avec

$$\Lambda(x) = \frac{q_e}{k} \int d^2y \theta(\vec{x} - \vec{y}) (\rho(y) - \rho_0), \quad (6.28)$$

où ρ_0 est une constante. Il est possible de généraliser le résultat précédent et écrire [?]

$$A^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Lambda(x). \quad (6.29)$$

Cette dernière équation montre que le potentiel de Chern-Simons dans ce modèle est un champ de jauge pure. Comme dans le cas classique, le vecteur potentiel décrit des flux magnétiques ponctuels attachés à chacune des particules, comme on peut le vérifier simplement en calculant l'invariant de jauge $\oint_{c_I} \vec{dl} \cdot \vec{A}$, où c_I est un contour fermé entourant la particule I .

6.4 Transformations de Chern-Simons

Comme on peut le voir à partir de (6.13), l'hamiltonien d'un système de N électrons dans un champ magnétique dans la formulation de seconde quantification peut être exprimé par

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (6.30)$$

où le terme cinétique H_0 est donné par

$$H_0 = \int d^2r \psi^\dagger(\mathbf{r}) \frac{[-i\hbar\nabla - q_e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2m} \psi(\mathbf{r}), \quad (6.31)$$

et H_{int} est le terme d'interaction entre les électrons. Une transformation de Chern-Simons est une transformation unitaire singulière telle que

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp \left[-i\nu' \int d^2r' \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \right] \psi_{CS}(\mathbf{r}), \quad (6.32)$$

où $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ est l'angle entre le vecteur \mathbf{r} et l'axe x . Cette transformation est singulière car l'angle $\theta(\mathbf{r})$ n'est pas défini en $\mathbf{r} = 0$. On fait remarquer que la densité ρ est invariante sous cette transformation, c'est à dire $\rho = \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \psi_{CS}^\dagger(\mathbf{r})\psi_{CS}(\mathbf{r})$. Le gradient dans (6.31) agit aussi sur la phase de ses transformations, de sorte que

$$\begin{aligned} \nabla\psi(\mathbf{r}) = \\ e^{-i\nu' \int d^2r' \theta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')} \left[\nabla - i\nu' \nabla \int d^2r' \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \right] \psi_{CS}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6.33)$$

De cette façon peut définir un nouveau champ de jauge (potentiel vecteur), qui est précisément le champ de Chern-Simons

$$\mathbf{A}_{CS}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{e}\nu'\nabla \int d^2r'\theta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}'). \quad (6.34)$$

Ce potentiel vérifie bien la jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}_{CS}(\mathbf{r}) = 0$, ce qui permet de réécrire le hamiltonien cinétique sous la forme

$$H_0 = \int d^2r \psi_{CS}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{[-i\hbar\nabla - q_e\mathbf{A}(\mathbf{r}) - q_e\mathbf{A}_{CS}(\mathbf{r})]^2}{2m} \psi_{CS}(\mathbf{r}), \quad (6.35)$$

quant à l'hamiltonien d'interaction H_{int} ne change pas car il dépend de la densité, elle même invariante sous les transformations de Chern-Simons. Pour analyser ce nouveau champ, il convient de connaître le champ magnétique correspondant $\mathbf{B}_{CS} = \nabla \wedge \mathbf{A}_{CS}(\mathbf{r})$. Maintenant les équations de Cauchy-Riemann permettent d'écrire pour la fonction $z = re^{i\theta}$ (voir Appendice),

$$\partial_x \ln r(x, y) = \partial_y \theta(x, y) \quad (6.36)$$

$$\partial_y \ln r(x, y) = -\partial_x \theta(x, y), \quad (6.37)$$

avec les équations (6.36) et (6.37), il devient facile de calculer

$$[\nabla \wedge \nabla \theta(\mathbf{r})]_z = \Delta \ln r = 2\pi \delta^{(2)}(\mathbf{r}). \quad (6.38)$$

On voit que le rotationnel du gradient ne donne pas zéro comme il devrait être, ceci est due au fait que $\theta(\mathbf{r})$ est singulière en $\mathbf{r} = 0$. On peut aussi vérifier que $\Delta \theta(\mathbf{r}) = 0$ (jauge de Coulomb dans les théories de Chern-Simons). A présent de l'équation (6.38), on peut déduire le champ B_{CS} , soit

$$\mathbf{B}_{SC} = -\frac{\hbar}{e}\nu' \int d^2r' \nabla \wedge \nabla \theta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') = -\frac{h}{e}\nu'\rho(\mathbf{r})\mathbf{e}_z, \quad (6.39)$$

avec $e = |q_e|$. Il est constructive de faire remarquer que le champ magnétique \mathbf{B}_{CS} est un opérateur, contrairement au champ magnétique extérieur \mathbf{B} qui est classique (non-quantique). Dans l'approximation du champ moyen, la densité dans (6.39) peut être remplacée par sa valeur moyenne $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = n_e$, ce qui permet une renormalisation du champ extérieur

$$B^* = B - \frac{h}{e}\nu'n_e, \quad (6.40)$$

qui devient en terme de facteur de remplissage $B^* = B(1 - \nu'\nu)$. Pour $\nu' = 2s$, on retrouve la théorie des fermions composites de Jain [10].

6.4.1 Les anyons dans les théories de Chern-Simons

Le but de ce paragraphe est de montrer certains aspects statistiques de la fonction d'onde ψ_{CS} en utilisant l'opérateur statistique

$$\tau(\mathbf{r}) = \int d^2r' \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \quad (6.41)$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \psi_{CS}(\mathbf{r}_1) \psi_{CS}(\mathbf{r}_2) &= e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_1)} \psi(\mathbf{r}_1) e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_2)} \psi(\mathbf{r}_2) \\ &= e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_1)} e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_2)} e^{-i\nu'\tau(\mathbf{r}_2)} \psi(\mathbf{r}_1) e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_2)} \psi(\mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (6.42)$$

En utilisant la formule de Hausdorff

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2} [A, [A, B]] + \dots, \quad (6.43)$$

et la loi de commutation

$$\begin{aligned} [\tau(\mathbf{r}_2), \psi(\mathbf{r}_1)] &= \int d^2r' \theta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') [\psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'), \psi(\mathbf{r}_1)] \\ &= -\theta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1), \end{aligned} \quad (6.44)$$

on parvient à écrire

$$e^{-i\nu'\tau(\mathbf{r}_2)} \psi(\mathbf{r}_1) e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_2)} = e^{-i\nu'\theta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \psi(\mathbf{r}_1). \quad (6.45)$$

Cette dernière équation (6.45) permet pour l'expression (6.42) d'écrire

$$\psi_{CS}(\mathbf{r}_1) \psi_{CS}(\mathbf{r}_2) = e^{i\nu'\theta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_1)} e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_2)} \psi(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2), \quad (6.46)$$

soit en interchangeant \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , on trouve

$$\psi_{CS}(\mathbf{r}_2) \psi_{CS}(\mathbf{r}_1) = e^{i\nu'\theta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_2)} e^{i\nu'\tau(\mathbf{r}_1)} \psi(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_1), \quad (6.47)$$

en tenant compte également de $\psi(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) = -\psi(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_1)$, $\theta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \theta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \pi$, et $[\tau(\mathbf{r}_1), \tau(\mathbf{r}_2)] = 0$, on montre que

$$\psi_{CS}(\mathbf{r}_1) \psi_{CS}(\mathbf{r}_2) = -e^{i\nu'\pi} \psi_{CS}(\mathbf{r}_2) \psi_{CS}(\mathbf{r}_1). \quad (6.48)$$

De la même manière, on trouve

$$\psi_{CS}(\mathbf{r}_1) \psi_{CS}^\dagger(\mathbf{r}_2) + e^{i\nu'\pi} \psi_{CS}^\dagger(\mathbf{r}_2) \psi_{CS}(\mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (6.49)$$

Les transformations de Chern-Simons sont là pour changer la statistique entre les particules.

6.4.2 Fractionalisation de la charge

Les propriétés statistiques abordées précédemment sont intimement liées à l'effet d'Aharonov-Bohm. Manifestement, quand une particule de charge e^* se meut sur un chemin $\partial\Sigma = c$ entourant une surface Σ à l'intérieur de laquelle se trouve un flux magnétique, elle acquiert une phase Γ telle que

$$\Gamma = -\frac{e^*}{\hbar} \oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_{CS}(\mathbf{r}) = -\frac{e^*}{\hbar} \int_{\Sigma} d^2r B_{CS}(\mathbf{r}). \quad (6.50)$$

Dans ce modèle, le flux magnétique est produit par le champ de Chern-Simons. Il est clair que la phase est un opérateur comme \mathbf{B}_{CS} est lui même un opérateur (proportionnel aux fluctuations). Cependant, dans l'approximation du champ moyen, on a $B_{CS} = \frac{\hbar}{e} \nu' n_e$, et ainsi

$$\Gamma = 2\pi \frac{e^*}{e} \nu' N_{\Sigma}, \quad (6.51)$$

où N_{Σ} est le nombre d'électrons contenus dans la surface Σ . Ainsi trois cas se présentent. Un premier cas est celui où la particule qui se meut sur le chemin c contournant le liquide de Laughlin soit un électron de charge (en valeur absolue) $e^* = e$, et acquiert donc une phase qui est multiple de $\Gamma = 2\pi\nu'$. Soit le cas où ν' est un entier comme dans la théorie de Laughlin, la phase reste toujours un multiple de 2π , mais la charge de la quasi-particule est fractionnaire, $e^* = \frac{e}{\nu'}$. Dans le dernier cas, on suppose que le liquide de Laughlin contient un certain nombre de quasi-particules contournées par le chemin c qu'emprunte une autre quasi-particule, en termes de transformations de Chern-Simons cela se traduit par un facteur statistique $U_v(\mathbf{r}) = e^{iq \int d^2r' \theta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho_v(\mathbf{r}')} \rho_v(\mathbf{r}')$, où ρ_v la densité de quasi-particules de vorticité $q = \pm 1$. Pour une seule particule en \mathbf{r}_0 , $\rho_v = \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. En termes de transformation de jauge, on a $\mathbf{A}_{CS} \rightarrow \mathbf{A}_{CS} - \frac{\hbar}{e} q \nabla \int d^2r' \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_v(\mathbf{r}')$, et le lien du champ magnétique avec les densités devient

$$\mathbf{B}_{CS} = \nabla \wedge \mathbf{A}_{CS}|_z = -\frac{\hbar}{e} \nu' \rho(\mathbf{r}) + \frac{\hbar q}{e} \rho_v(\mathbf{r}). \quad (6.52)$$

Le premier terme est la phase qu'on connaît, à savoir la phase acquise par une quasi-particule sur un chemin ferm e dans le liquide de Laughlin (Σ). Le deuxième terme est un ajout de phase $\Delta\Gamma$ due à la présence de quasi-particules dans Σ . Supposons que l'on ait une quasi-particule à la position $\mathbf{r}_v \in \Sigma$, alors on a

$$\Delta\Gamma = \frac{e^*}{\hbar} \int_{\Sigma} \frac{\hbar q}{e} d^2r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_v) = 2\pi \frac{e^*}{e} q = 2\pi \frac{q}{2s+1}, \quad (6.53)$$

o'ù on a pris $e^* = \frac{e}{2s+1}$ (quasi-particule de Laughlin). On voit clairement que de la fractionalisation de la charge résulte une statistique fractionnaire, à savoir l'angle $\alpha = \frac{q}{2s+1}$. Il est à souligner que la mise en évidence de la statistique fractionnaire est un sujet de recherche actuel prometteur. Dans l'effet Hall quantique fractionnaire la charge fractionnaire a été déjà mise en évidence dans des mesures de bruit [82, 83]. Ce type d'expériences consiste à rapprocher à un endroit les deux bords par une tension de grille latérale, lorsque les bords sont suffisamment proches, une quasi-particule sur un bord peut être diffusée sur l'autre, et sa charge se manifeste dans des mesures de bruit dû à cette rétro-diffusion. De cette manière, la charge des quasi-particules, pour $\nu = \frac{1}{3}$, est mesurée égale à $\frac{q_e}{3}$, alors que pour $\nu = \frac{2}{5}$ la charge est $\frac{q_e}{5}$.

Chapitre 7

Calculs analytiques-Méthode des coordonnées complexes

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, la découverte de l'EHQF [3] avait produit une vraie révolution dans les idées dans le domaine de la matière condensée. Depuis ce temps, plusieurs concepts décrivant l'état de la matière ont été proposés, comme le fluide quantique incompressible [7], les fermions composites [12], les bosons composites [84], les anyons [85], qui émanent tous de théories élégantes avec des mathématiques sophistiqués. A présent, il existe deux théories de l'EHQF mondialement acceptées. La théorie de Laughlin [7] qui décrit l'état fondamental comme un fluide quantique incompressible, et parvient à expliquer avec succès la nature des états pour $\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$. Ensuite vient la théorie de Jain construite sur la base du concept des fermions composites qui sont des entités topologiques caricaturant l'idée d'un électron auquel est attaché un nombre pair de flux magnétiques. Ce modèle a donné des résultats très satisfaisants concernant la séquence $\nu = \frac{p}{2sp+1}$, s et p entiers. Dans la théorie de Laughlin le fluide quantique incompressible est formé d'électrons fortement corrélés interagissant avec un champ magnétique fort, alors que dans la théorie de Jain il s'agit de fermions composites faiblement corrélés interagissant avec un champ magnétique réduit. Le calcul de l'énergie du fondamental des états de Hall quantiques fractionnaires était l'objet de plusieurs travaux de recherche utilisant des méthodes de calcul variées, comme la diagonalisation exacte [28] ou les simulations de Monte Carlo [29, 30, 31]. Ces méthodes utilisent des calculs numériques, et on peut se demander s'il n'est pas possible d'effectuer des méthodes de calcul analytiques dont les résultats, même pour des petits systèmes, peuvent être utilisés comme un instrument de comparaison fiable.

7.1 Position de la méthode des coordonnées complexes

Dans la littérature, on rencontre un seul travail où un calcul analytique a été développé [32]. Seulement, la méthode utilisée se voit limitée pour aller au delà de $N = 4$ électrons. Dans les références [32, 33], l'auteur a utilisé les coordonnées polaires ordinaires (y compris pour les coordonnées de Jacobi). On s'aperçoit que les intégrandes dans les intégrales multiples de l'énergie moyenne présentent une dépendance explicite sur les angles des différentes particules du système (voir équation (21) dans [32]). Cette difficulté apparante peut être surmontée en utilisant les coordonnées polaires complexes (y compris pour les coordonnées de Jacobi), et c'est à travers cette idée que vient principalement la contribution du travail Ref.[35]. Dans la référence [35], la dépendance explicite sur les angles a été éliminée complètement à l'aide des coordonnées complexes. Une facilité pour effectuer les calculs ainsi que pour étendre les calculs à des systèmes avec un nombre $N > 4$ électrons est vite aperçu. La méthode décrite dans [35] a permis de calculer l'énergie du fondamental pour des systèmes avec $N = 3, 4, 5, 6$ électrons et $\nu = \frac{1}{3}$. Etendre la méthode de calcul pour le cas $\nu = \frac{1}{5}$ est directe et simple (voir Ref.[36]).

7.2 Potentiels d'interaction

Considérons un système avec N électrons de charge ($q_e = -e$) immergé dans un arrière-plan neutralisant de charge uniforme positive Ne (voir figure 7.1). On peut modéliser le plan par un disque, dont la surface est donnée par $S_N = \pi R_N^2$, R_N est le rayon du disque. Ce disque est traversé perpendiculairement par les lignes d'un champ magnétique fort $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. La physique de ce fluide de Hall quantique est gouvernée par le potentiel d'interaction suivant

$$V = V_{ee} + V_{eb} + V_{bb}, \quad (7.1)$$

où V_{ee} est le potentiel d'interaction électron-électron, V_{eb} le potentiel d'interaction électron-(arrière-plan), et V_{bb} est le potentiel d'interaction (arrière-plan)-(arrière-plan). L'expression de chacune des interactions est donnée par

$$V_{ee} = \sum_{i < j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (7.2)$$

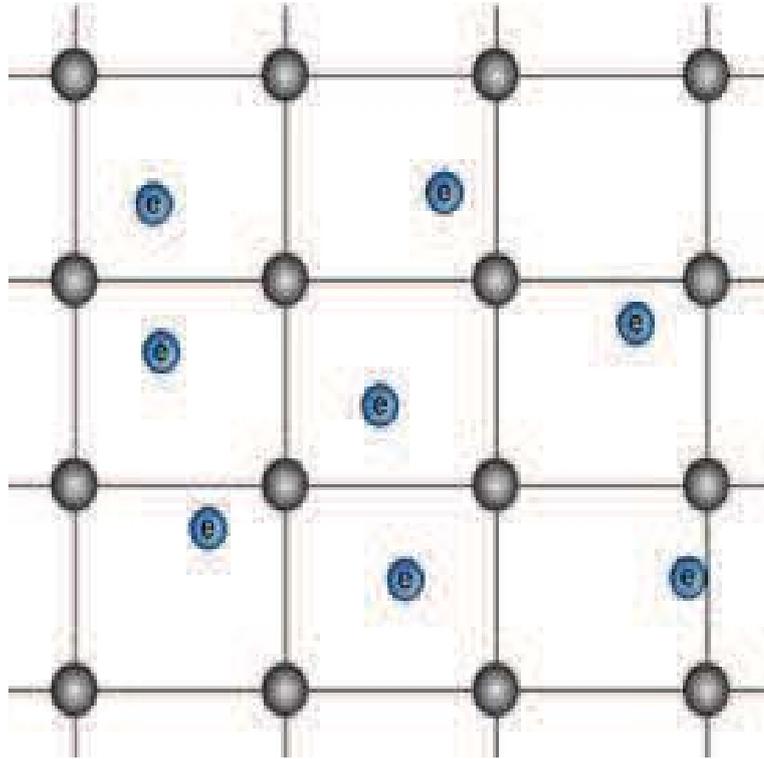


FIGURE 7.1 – Une schématique montrant le background formé d'ions chargés positivement et des électrons neutralisants.

$$V_{eb} = -\rho \sum_{i=1}^N \int_{S_N} d^2r \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}, \quad (7.3)$$

et

$$V_{bb} = \frac{\rho^2}{2} \int_{S_N} d^2r \int_{S_N} d^2r' \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (7.4)$$

où \mathbf{r}_i (ou bien \mathbf{r}_j) désigne le vecteur position de l'électron, alors que \mathbf{r} et \mathbf{r}' représentent des points dans l'arrière-plan. La densité de charge est donnée par $\rho(B)$ défini comme le nombre d'électrons par unité de surface, son expression peut être aussi écrite comme

$$\rho = \frac{\nu}{2\pi l_B^2}, \quad (7.5)$$

avec $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ la distance magnétique, B l'intensité du champ magnétique, et $\nu = \frac{1}{m}$, m entier impair, est le facteur de remplissage. Le potentiel d'interaction (arrière-plan)-(arrière-plan) peut être calculé classiquement sans faire intervenir la fonction d'onde. Un calcul élémentaire permet d'avoir

$$V_{bb} = \frac{8e^2}{3\pi} \frac{N}{R_N}, \quad (7.6)$$

avec $R_N = \sqrt{2Nm} l_B$. Maintenant, le calcul de V_{ee} et V_{eb} dépend de la nature de la fonction d'onde caractérisant le système d'électrons. Pour une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ donnée, nous avons

$$\langle V_{ee} \rangle = \frac{\langle \psi | V_{ee} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (7.7)$$

$$\langle V_{eb} \rangle = \frac{\langle \psi | V_{eb} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (7.8)$$

D'une manière explicite,

$$\langle \psi | V_{ee} | \psi \rangle = \frac{N(N-1)}{2} \int d^2r_1 \dots d^2r_N \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2, \quad (7.9)$$

$$\langle \psi | V_{eb} | \psi \rangle = -\rho N \int d^2r_1 \dots d^2r_N |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \int_{S_N} d^2r \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}, \quad (7.10)$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int d^2r_1 \dots d^2r_N |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2, \quad (7.11)$$

avec

$$\int_{S_N} d^2r \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} = 2\pi R_N \int_0^\infty \frac{dq}{q} J_1(q) J_0\left(\frac{q}{R_N} r_1\right), \quad (7.12)$$

où les $J_n(x)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre n . Seulement comme est montré dans Ref.[35], la meilleur façon de faire beaucoup de simplifications dans les calculs revient à remplacer les coordonnées polaires réelles par les coordonnées polaires complexes, ainsi on doit effectuer le changement suivant $\mathbf{r}_k \rightarrow z_k$ pour représenter la position des électrons.

7.3 Energie du fondamental

L'énergie de l'état fondamental d'un système d'électrons de Hall quantique, se calcule en calculant les énergies V_{ee} et V_{eb} , ensuite en faisant la somme des trois énergies V_{ee} , V_{eb} et V_{bb} on arrive à déterminer l'énergie du fondamental.

7.3.1 Interaction électron-électron

A présent, nous allons présenter un calcul démonstratif, pour cela prenons le cas de $N = 3$ électrons et $\nu = \frac{1}{3}$. Pour une fonction d'onde de Laughlin, on a

$$\psi(3) = P(3) \exp\left(-\sum_k \frac{|z_k|^2}{4l_B^2}\right), \quad (7.13)$$

où $P(3)$ est la partie de Jastrow de la fonction d'onde de Laughlin qui est donnée par

$$P(3) = (z_1 - z_2)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_2 - z_3)^3. \quad (7.14)$$

En représentation complexe, les expressions 7.9 et 7.11 prennent les formes suivantes

$$\langle \psi | V_{ee} | \psi \rangle = \frac{N(N-1)}{2} \int d^2 z_1 \dots d^2 z_N \frac{e^2}{|z_1 - z_2|} |\psi(z_1, \dots, z_N)|^2, \quad (7.15)$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int d^2 z_1 \dots d^2 z_N |\psi(z_1, \dots, z_N)|^2, \quad (7.16)$$

avec

$$\begin{aligned} |\psi(3)|^2 &= \exp\left(-\sum_k \frac{|z_k|^2}{2l_B^2}\right) (z_1^6 \bar{z}_1^6 z_2^3 \bar{z}_2^3 + 9z_1^6 \bar{z}_1^6 z_2^2 \bar{z}_2^2 z_3 \bar{z}_3 + \\ &9z_1^6 \bar{z}_1^6 z_2 \bar{z}_2 z_3^2 \bar{z}_3^2 + z_1^6 \bar{z}_1^6 z_3^3 \bar{z}_3^3 + 9z_1^5 \bar{z}_1^5 z_2^4 \bar{z}_2^4 + \\ &36z_1^5 \bar{z}_1^5 z_2^3 \bar{z}_2^3 z_3 \bar{z}_3 + 36z_1^5 \bar{z}_1^5 z_2 \bar{z}_2 z_3^3 \bar{z}_3^3 + 225z_1^4 \bar{z}_1^4 z_2^2 \bar{z}_2^2 z_3^3 \bar{z}_3^3 + \\ &9z_1^5 \bar{z}_1^5 z_3^4 \bar{z}_3^4 + 9z_1^4 \bar{z}_1^4 z_2^5 \bar{z}_2^5 + 225z_1^4 \bar{z}_1^4 z_2^3 \bar{z}_2^3 z_3^2 \bar{z}_3^2 + \\ &9z_1^4 \bar{z}_1^4 z_3^5 \bar{z}_3^5 + z_1^3 \bar{z}_1^3 z_2^6 \bar{z}_2^6 + 36z_1^3 \bar{z}_1^3 z_2^5 \bar{z}_2^5 z_3 \bar{z}_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 225z_1^3\bar{z}_1^3z_2^4\bar{z}_2^4z_3^2\bar{z}_3^2 + 9z_1^2\bar{z}_1^2z_2^6\bar{z}_2^6z_3\bar{z}_3 + 9z_1\bar{z}_1z_2^6\bar{z}_2^6z_3^2\bar{z}_3^2 + \\
& 225z_1^3\bar{z}_1^3z_2^2\bar{z}_2^2z_3^4\bar{z}_3^4 + 36z_1^3\bar{z}_1^3z_2\bar{z}_2z_3^5\bar{z}_3^5 + z_1^3\bar{z}_1^3z_3^6\bar{z}_3^6 + \\
& 225z_1^2\bar{z}_1^2z_2^4\bar{z}_2^4z_3^3\bar{z}_3^3 + 225z_1^2\bar{z}_1^2z_2^3\bar{z}_2^3z_3^4\bar{z}_3^4 + 9z_1^2\bar{z}_1^2z_2\bar{z}_2z_3^6\bar{z}_3^6 + \\
& 36z_1\bar{z}_1z_2^5\bar{z}_2^5z_3^3\bar{z}_3^3 + 36z_1\bar{z}_1z_2^3\bar{z}_2^3z_3^5\bar{z}_3^5 + 9z_1\bar{z}_1z_2^2\bar{z}_2^2z_3^6\bar{z}_3^6 + \\
& z_2^6\bar{z}_2^6z_3^3\bar{z}_3^3 + 9z_2^5\bar{z}_2^5z_3^4\bar{z}_3^4 + \\
& 9z_2^4\bar{z}_2^4z_3^5\bar{z}_3^5 + z_2^3\bar{z}_2^3z_3^6\bar{z}_3^6), \tag{7.17}
\end{aligned}$$

où les termes de $|\psi(3)|^2$ ayant la forme $z_1^{n_1}\bar{z}_1^{m_1}z_2^{n_2}\bar{z}_2^{m_2}z_3^{n_3}\bar{z}_3^{m_3}$ avec au moins un des $n_i \neq m_i$ sont omis à cause de la relation clé

$$\int d^2z_i z_i^m \bar{z}_i^n e^{-z_i\bar{z}_i} = \pi \delta_{mn} \Gamma(1+n), \tag{7.18}$$

qui rend nulle l'intégrale de ce type de termes. Il faut souligner ici que la formule (7.18) est la principale raison de l'avantage de la méthode des coordonnées complexes [?]. Maintenant, on doit passer par les transformations de Jacobi pour se débarrasser du terme $|z_1 - z_2|$ dans le dénominateur de l'expression (7.15), pour ce cas on a

$$\begin{aligned}
Z_1 &= z_1 - z_2 \\
Z_2 &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3 \\
Z_3 &= \frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{3} + \frac{z_3}{3} - z_4 \\
Z_4 &= \frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} + \frac{z_4}{4}. \tag{7.19}
\end{aligned}$$

De la même façon les coordonnées inter-particules $z_i - z_j$ peuvent être exprimées en termes des coordonnées de Jacobi de la manière suivante

$$\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= Z_1 \\
z_1 - z_3 &= Z_2 + \frac{Z_1}{2} \\
z_1 - z_4 &= Z_3 + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_1}{2} \\
z_2 - z_3 &= Z_2 - \frac{Z_1}{2} \\
z_2 - z_4 &= Z_3 + \frac{Z_2}{3} - \frac{Z_1}{2} \\
z_3 - z_4 &= Z_3 - 2\frac{Z_2}{3}. \tag{7.20}
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de transformer $P(3)$ en $P_J(3)$ dont la forme est

$$P_J(3) = Z_1^3 \left(Z_2 + \frac{Z_1}{2}\right)^3 \left(Z_2 - \frac{Z_1}{2}\right)^3, \tag{7.21}$$

et la fonction d'onde devient

$$\psi_J(3) = P_J(3) \exp\left(-\frac{|Z_1|^2}{8l_B^2} - \frac{|Z_2|^2}{6l_B^2} - \frac{3|Z_3|^2}{4l_B^2}\right). \tag{7.22}$$

Maintenant, il est démonstratif de développer (7.21) en puissances de Z_1^n , avec n prenant les valeurs $\{3, 5, 7, 9\}$ pour le cas $N = 3$ électrons, ainsi on peut écrire

$$P_J(3) = \sum_{n=3}^9 \mathcal{B}_n(Z_2) Z_1^n, \quad (7.23)$$

où les \mathcal{B}_n sont des coefficients fonctions de la seule variable Z_2 qui peuvent être tirés de (7.23) de cette manière

$$\mathcal{B}_n(Z_2) = \frac{1}{\pi \Gamma(1+n)} \sum_{m=3}^9 \mathcal{B}_m(Z_2) \int d^2 Z_1 Z_1^m \bar{Z}_1^n e^{-Z_1 \bar{Z}_1}. \quad (7.24)$$

L'intégration dans (7.24) peut être facilement effectuer à l'aide de la formule clé (7.18). Dans l'intégrand des formules (7.9) et (7.10), on rencontre l'expression de $|\psi(3)|^2$, qui elle est fonction de $P_J \bar{P}_J$, où \bar{P}_J est le conjugué complexe de P_J . En demandant que soit satisfaite la loi clé (7.18), il ne reste dans l'intégrand que les termes qui ont la même puissance en Z_i et \bar{Z}_i . C'est pour cette raison que la dépendance sur les angles disparaît. Cette indépendance sur les angles facilite énormément le calcul exacte des intégrales multiples sur plusieurs variables d'expressions compliquées (voir Ref.[35]). Par exemple l'intégrale de la formule (7.15) prend la forme simple

$$\begin{aligned} \langle \psi_J | V_{ee} | \psi_J \rangle &= e^2 \frac{N(N-1)}{2} \\ &\sum_{n=3}^9 \mathcal{D}_n \int d^2 Z_1 (Z_1 \bar{Z}_1)^{n-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{|Z_1|^2}{4l_B^2}\right), \end{aligned} \quad (7.25)$$

avec \mathcal{D}_n donné par

$$\mathcal{D}_n = \int d^2 Z_2 d^2 Z_3 \mathcal{B}_n \bar{\mathcal{B}}_n \exp\left(-\frac{|Z_2|^2}{3l_B^2} - \frac{3|Z_3|^2}{2l_B^2}\right). \quad (7.26)$$

De la même façon la norme $\langle \psi_J | \psi_J \rangle$ est trouvée égale à

$$\langle \psi_J | \psi_J \rangle = \sum_{n=3}^9 \mathcal{D}_n \int d^2 Z_1 (Z_1 \bar{Z}_1)^n \exp\left(-\frac{|Z_1|^2}{4l_B^2}\right). \quad (7.27)$$

Quand on divise (7.25) par 7.27), on obtient l'énergie d'interaction électron-électron pour un système avec $N = 3$ électrons

$$E_{ee} = 3 \frac{2\,198\,645\sqrt{\pi}}{16\,252\,928} \frac{e^2}{l_B} \approx 0.719316 \frac{e^2}{l_B},$$

un résultat qui coïncide parfaitement avec le résultat de [32].

7.3.2 Interaction électrons-(arrière-plan)

Pour calculer $\langle V_{eb} \rangle$, on n'a pas besoin des coordonnées de Jacobi, il est possible de travailler avec $P(3)$ directement. Développons $P(3)$ en puissance de z_1 ,

$$P(3) = \sum_{n=0}^6 \mathcal{B}_n(z_2, z_3) z_1^n, \quad (7.28)$$

où $n = 0$ ($n = 6$) désigne le la puissance minimum (maximum) de z_1 . La fonction d'onde est juste $\psi(3) = P(3) \exp(-\frac{|z_1|^2}{4l_B^2} - \frac{|z_2|^2}{4l_B^2} - \frac{|z_3|^2}{4l_B^2})$. Il est facile de voir que $\langle \psi | V_{eb} | \psi \rangle$ prend la forme suivante

$$\langle \psi | V_{eb} | \psi \rangle = \frac{-2N^2}{R} \sum_{n=0}^6 \mathcal{G}(n) \int D_p z \mathcal{B}_n \bar{\mathcal{B}}_n \exp(-\frac{|z_2|^2}{2l_B^2} - \frac{|z_3|^2}{2l_B^2}), \quad (7.29)$$

avec $D_p z = d^2 z_2 d^2 z_3$,

$$\mathcal{G}(n) = \int dr_1 \int \frac{dq}{q} J_1(q) J_0(\frac{q}{R} r_1) r_1^{2n+1} \exp(-\frac{r_1^2}{2l_B^2}), \quad (7.30)$$

et $|z_i| = r_i$. On peut montrer que [86]

$$\mathcal{G}(n) = (2l_B^2)^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right) \text{MeijerG} [\{\{1\}, \{1\}\}, \{\{1/2, n+1\}, \{-1/2\}\}, Nm]. \quad (7.31)$$

Dans ce cas démonstratif, on a $N = 3$ et $m = 3$. MeijerG est la fonction Meijer G [86], son expression est formellement donnée par

$$\text{MeijerG} [\{\{1\}, \{1\}\}, \{\{1/2, n+1\}, \{-1/2\}\}, Nm] = G_{23}^{21} \left(Nm \middle| \begin{matrix} 1, 1 \\ \frac{1}{2}, n+1, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right).$$

Dans les coordonnées z , la norme prend la forme suivante

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{n=0}^6 \int D_p z \mathcal{B}_n \bar{\mathcal{B}}_n \exp(-\frac{|z_2|^2}{2l_B^2} - \frac{|z_3|^2}{2l_B^2}) \int d^2 z_1 (z_1 \bar{z}_1)^n \exp(-\frac{|z_1|^2}{2l_B^2}). \quad (7.32)$$

Comme dans le cas de l'interaction électron-électron, l'énergie de l'interaction électrons-(arrière-plan) est déterminée à travers le rapport

$$E_{eb} = \frac{\langle \psi | V_{eb} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (7.33)$$

explicitement, on a

$$E_{eb} = -3 \frac{e^2}{l_B e^{9/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{2974101}{39680} I_0(9/2) + \frac{3605523}{39680} I_1(9/2) \right] \approx -3.679464 \frac{e^2}{l_B}, \quad (7.34)$$

en accord avec le résultat de [32].

7.3.3 Résultats et discussions

Dans cette partie, on va exposer l'essentiel des résultats obtenus en rapport avec l'énergie de l'état fondamental d'un système d'électrons de Hall quantique fractionnaire. Pour un facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$ et un nombre $N = 2, 3, 4, 5, 6$ électrons sont données les valeurs des énergies des interactions (arrière-plan)-(arrière-plan), électron-électron, électrons-(arrière-plan). La somme de ces trois énergies donne l'énergie de l'état fondamental. Les résultats trouvés sont dans le tableau 7.1, et avec eux les résultats E_A dans la référence [32] pour la comparaison.

Dans la figure (7.2) est montrée une comparaison entre les résultats de ce travail

| N | E_{bb} | E_{eb} | E_{ee} | E | E_A |
|-----|----------|------------|----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.98014 | -2.02115 | 0.276946 | -0.764064 | -0.764064 |
| 3 | 1.800633 | -3.679464 | 0.719316 | -1.159515 | -1.159515 |
| 4 | 2.772256 | -5.638272 | 1.310596 | -1.55542 | -1.55542 |
| 5 | 3.874345 | -7.856335 | 2.030715 | -1.951275 | ———— |
| 6 | 5.092956 | -10.306452 | 2.864394 | -2.349102 | ———— |

TABLE 7.1 – L'énergie de l'état fondamental $E = E_{ee} + E_{eb} + E_{bb}$ (en unités de e^2/l_B) est calculée pour les états de Laughlin ($\nu = \frac{1}{3}$), et des systèmes avec jusqu'à $N = 6$ électrons. Les mêmes valeurs E_A de l'énergie du fondamental sont obtenues dans Ref.[32].

avec ceux dans Ref.[30] où est considéré un calcul basé sur les simulations de Monte Carlo. Cette comparaison montre une concordance entre les deux approches. Etendre cette méthode de calcul pour le cas $\nu = \frac{1}{5}$ a été faite dans Ref.[36]. Les résultats sont montrés dans les tableaux (7.2) et (7.3). On voit clairement, dans les tableaux (7.1, 7.2 et 7.3), l'avantage de la méthode des coordonnées polaires complexes [35, 36] sur la méthode utilisant les coordonnées polaires réelles [32, 33]. Dans la figure (7.3) sont montrées deux courbes, pour la comparaison, d'un côté les résultats de la méthode des coordonnées polaires complexes pour $\nu = \frac{1}{5}$ [36] et de l'autre les résultats de Ref.[30] où est considérée une approche basée sur les simulations de Monte Carlo à $\nu = \frac{1}{5}$. Cette comparaison a montré une parfaite concordance entre les deux approches. Vu les résultats satisfaisants obtenus avec la méthode des coordonnées polaires complexes. On s'attend à généraliser cette méthode pour d'autres systèmes de Coulomb 2D, comme le gaz d'électrons 2D, le graphène, ou puits quantiques 2D...etc. Avant de ter-

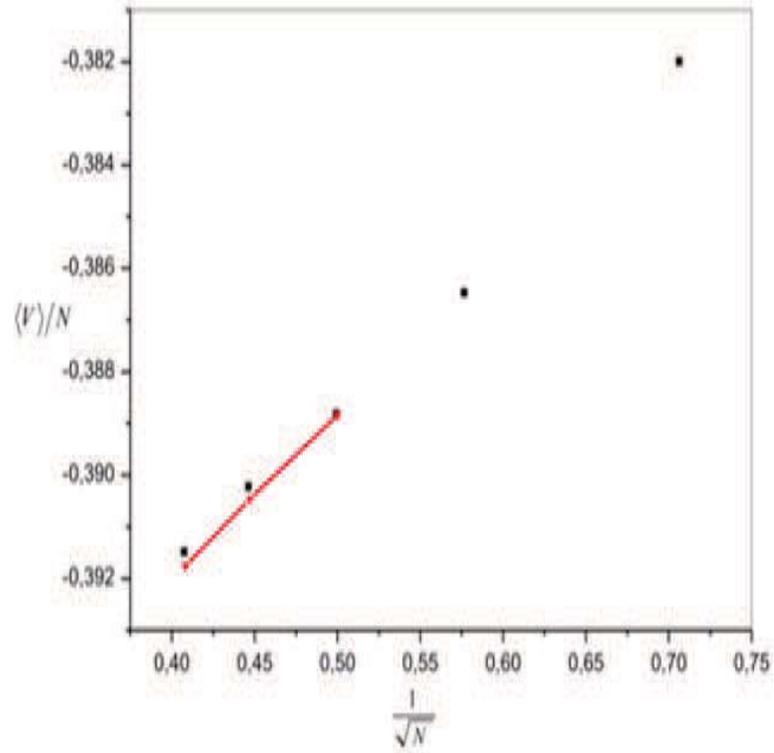


FIGURE 7.2 – Des résultats analytiques exactes obtenus par la méthode des coordonnées complexes dans une géométrie de disque et l'état de Laughlin $\nu = 1/3$. L'énergie potentiel par particule $\varepsilon = \langle V \rangle / N$ est tracée comme une fonction de $1/\sqrt{N}$ pour des systèmes avec $N = 2, 3, 4, 5$ et 6 électrons. La ligne est une partie d'un fit de moindre-carré (voir Ref.[30]). Les énergies sont en unités de e^2/l_B .

| N_e | E_{bb} | E_{eb} | E_{ee} | E | E_A |
|-------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| 3 | 1.394763 | -2.911356 | 0.554745 | -0.961848 | -0.961848 |
| 4 | 2.14738 | -4.4429 | 1.009184 | -1.286336 | -1.286312 |
| 5 | 3.001055 | -6.17325 | 1.566615 | -1.60558 | ———— |
| 6 | 3.944988 | -8.082144 | 2.209278 | -1.927878 | ———— |

TABLE 7.2 – *L'énergie de l'état fondamental $E = E_{ee} + E_{eb} + E_{bb}$ (en unités de e^2/l_B) est obtenu dans l'état de Laughlin à $\nu = \frac{1}{5}$ pour des systèmes avec jusqu'à $N = 6$ électrons. Les valeurs E_A sont les énergies du fondamental par un calcul analytique moyennant les coordonnées polaires ordinaires à $\nu = \frac{1}{5}$ dans Ref.[33].*

| N_e | E_{eb} | E_{ebA} | E_{ee} | E_{eeA} |
|-------|-----------|-----------|----------|-----------|
| 3 | -2.911356 | -2.911356 | 0.554745 | 0.554745 |
| 4 | -4.4429 | -4.442876 | 1.009184 | 1.009184 |
| 5 | -6.17325 | ———— | 1.566615 | ———— |
| 6 | -8.082144 | ———— | 2.209278 | ———— |

TABLE 7.3 – *Les énergies d'interaction électron-électron et électrons-(arrière-plan) sont données (en unités de e^2/l_B) à $\nu = \frac{1}{5}$, désignées par E_{ee} et E_{eb} . Leurs analogues, qu'on désigne par E_{eeA} et E_{ebA} , sont données dans Ref.[33].*

miner ce paragraphe, on donne les expressions analytiques trouvées pour les énergies d'interaction électrons-background, $E_{eb}(4)$, $E_{eb}(5)$, et $E_{eb}(6)$, soient

$$E_{eb}(4) = -\frac{3^7 e^2}{640 \times 2766887264 e^6 l_B} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [-4069333409925 I_0(6) + 4478198326949 I_1(6)], \quad (7.35)$$

$$E_{eb}(5) = -\frac{3e^2}{1718536372224 e^{15/2} l_B} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [-60904709460939925 I_0(15/2) + 65453547890073563 I_1(15/2)], \quad (7.36)$$

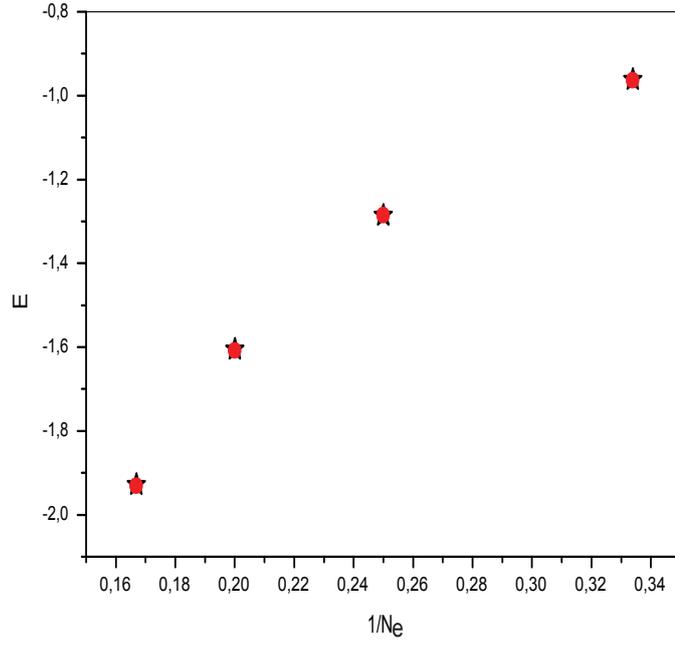


FIGURE 7.3 – Des résultats analytiques exactes pour le fondamental obtenus par la méthode des coordonnées polaires complexes dans une géométrie de disque et l'état de Laughlin $\nu = 1/5$. L'énergie du fondamental E est tracée comme une fonction de $1/N$ pour des systèmes avec $N = 2, 3, 4, 5$ et 6 électrons. Les étoiles désignent les résultats dans Ref.[36], et les disques, ceux de Ref.[30] par la méthode de Monte Carlo. Les énergies sont en unités de e^2/l_B .

$$\begin{aligned}
 E_{eb}(6) = & -\frac{9e^2}{9278461711902310400 e^9 l_B} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
 & [-2274996342475647272594191 I_0(9) + \\
 & 2413336234783834479505131 I_1(9)]. \tag{7.37}
 \end{aligned}$$

où les $I_n(x)$ sont les fonctions de Bessel modifiées de premier type d'ordre n .

Conclusion

Dans ce travail, une présentation basée sur une étude bibliographique profonde a été faite, qui peut permettre d'avoir une vue générale et globale sur la réalité du problème de l'effet Hall quantique entier et fractionnaire. De plus, une méthode de calcul analytique originale a été élaborée. Cette méthode est basée sur les coordonnées polaires complexes où toutes les expressions sont transformées en des fonctions complexes. Nous avons montré que toutes les expressions à calculer ne dépendent pas des angles que font les électrons entre eux, ce qui a permis d'éviter d'intégrer sur des fonctions trigonométriques très compliquées, ainsi les calculs deviennent rapides (gagner du temps) et la taille du système peut augmenter. Les résultats trouvés sont en parfait accord avec les résultats obtenus avec des approches numériques. Des expressions analytiques sont données pour la première fois pour l'énergie d'interaction électrons-background $E_{eb}(3)$, $E_{eb}(4)$, $E_{eb}(5)$, et $E_{eb}(6)$. De la même façon nous avons obtenu des résultats analytiques exactes pour l'énergie d'interaction électron-électron $E_{ee}(3)$, $E_{ee}(4)$, $E_{ee}(5)$, et $E_{ee}(6)$. Ceci montre clairement que la méthode des coordonnées polaires complexes est la manière la plus adéquate pour faire des calculs rapides et faciles dans le domaine de l'effet Hall quantique fractionnaire. La présente méthode de calcul peut être facilement généraliser à des systèmes de taille plus grande $N > 6$ électrons, les mêmes étapes de calculs se répètent pour un nombre N donné. Il est important de souligner qu'il n'y a aucune limitation mathématique pour étendre ces calculs à des N très grands (de type : fonction à intégrer singulière ou autres), il suffit juste d'une machine puissante pour aller plus loin dans les calculs. Ceci nous permet d'envisager d'avoir des valeurs thermodynamiques exactes pour des grandeurs clés comme les énergies du fondamental ou d'excitations. On prévoit une adaptation de la méthode des coordonnées polaires complexes à développer des calculs analytiques dans divers systèmes de Coulomb 2D, le gaz de Dyson 2D en est un exemple. Des travaux récents utilisant la méthode des coordonnées polaires complexes pour calculer les énergies des états excités à une seule quasiparticule et deux quasiparticules,

ont donné des résultats très satisfaisants et qui ont permis entre autres de comparer les deux théories compétitives de l'effet Hall quantique fractionnaire, la théorie de Laughlin et celle des fermions composites de Jain.

Chapitre 8

Appendice

8.1 Appendice A

Nous allons donner dans cet annexe la méthode de résolution de l'équation de Schrödinger, pour un électron 2D soumis à un champ magnétique uniforme. L'expression de l'hamiltonien dans les coordonnées polaires réelles est

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{1}{2} m^* \omega^2 r^2 - i\hbar\omega \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (8.1)$$

Les solutions vérifient l'équation aux valeurs propres,

$$H\psi = E\psi, \quad (8.2)$$

où ψ est la fonction d'onde propre de l'électron, et E son énergie. Comme φ est une coordonnée cyclique, L_z est alors une quantité qui se conserve, c'est à dire $[H, L_z] = 0$, ce qui permet d'introduire la séparation de variables comme

$$\psi_m(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(r) e^{im\varphi}. \quad (8.3)$$

Il est important de noter que dans un espace 2D, le moment angulaire est juste $|m|$, et m la projection z du moment angulaire (z est l'axe perpendiculaire au plan de l'électron), qui prend seulement deux valeurs $\pm |m|$.

Premier cas : $m \geq 0$

Dans ce cas, la fonction d'onde normalisée est

$$\psi_{n,m}(r, \varphi) = \frac{(-1)^m}{n!} \sqrt{\frac{(n-m)!}{2^m n!}} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{4l_B^2}\right) \left(\frac{r}{l_B}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{2l_B^2}\right), \quad (8.4)$$

où L_n^m sont les polynômes de Laguerre associés (PLA). Si on prend $z = x + iy$, l_B et $\hbar\omega_c$ égales à 1, alors

$$\psi_{n,m}(z, \bar{z}) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{(n-m)!}{2^m n!}} z^m \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4}\right) L_n^m\left(\frac{z\bar{z}}{2}\right). \quad (8.5)$$

Lorsque $m = n$, on obtient

$$\psi_n(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}\pi n!}} z^n \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4}\right). \quad (8.6)$$

Le second cas : $m \leq 0$

La fonction d'onde normalisée est,

$$\psi_{n,m=-|m|}(r, \varphi) = \frac{(-1)^{|m|}}{(n+|m|)!} \sqrt{\frac{n!}{2^{|m|}(n+|m|)!}} \frac{e^{-i|m|\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{4l^2}\right) \left(\frac{r}{l}\right)^{|m|} L_{n+|m|}^{|m|}\left(\frac{r^2}{2l^2}\right). \quad (8.7)$$

De la même façon, on pose $z = x - iy$ pour joindre la notation de Jain, alors

$$\psi_{n,m=-|m|}(z, \bar{z}) = \frac{(-1)^{|m|}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(n+|m|)!} \sqrt{\frac{n!}{2^{|m|}(n+|m|)!}} z^{|m|} \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4}\right) L_{n+|m|}^{|m|}\left(\frac{z\bar{z}}{2}\right), \quad (8.8)$$

qui coïncide avec la solution de Jain,

$$\eta_{n,m} = N_{n,m} \bar{z}^{-m} e^{(z\bar{z}/4)} \left(\frac{\partial}{\partial(z\bar{z}/2)}\right)^n \left(\frac{z\bar{z}}{2}\right)^{n+m} e^{-(z\bar{z}/2)}. \quad (8.9)$$

Maintenant, si on prend $t = z\bar{z}/2 = r^2/2$, on trouve

$$\eta_{n,m} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi 2^m n! (n+m)!}} z^m e^{-(z\bar{z}/4)} \left[t^{-m} e^t \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t} t^{n+m} \right) \right], \quad (8.10)$$

où est utilisée la forme standard des PLA, à savoir

$$L_n^m(t) = (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!} e^{t^2} t^{-m} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} e^{-t^2}. \quad (8.11)$$

On remarque qu'il y a une dégénérescence infini, c'est à dire pour un n donné, ou ce qui revient au même, pour une énergie de Landau $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$ donnée, on a $m \in \{\dots, -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n\}$.

8.2 Appendice B

Dans cette partie de l'annexe, nous allons rappeler brièvement quelques notions sur les fonctions complexes. Dans cette section, on prend $z = x + iy$ et \bar{z} son conjugué complexe. On peut séparer chaque fonction complexe en une partie réelle et imaginaire

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (8.12)$$

et la condition d'analyticité $\partial_{\bar{z}}f = 0$ se traduit par

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) \quad (8.13)$$

$$\partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y), \quad (8.14)$$

qui ne sont autres que les équations différentielles de Cauchy-Riemann. Au lieu d'utiliser les coordonnées cartésiennes x et y , on peut aussi travailler avec la représentation polaire

$$f(x, y) = w(x, y)e^{i\chi(x, y)}, \quad (8.15)$$

avec $w(x, y)$ et $\chi(x, y)$ des fonctions réelles. La condition d'analyticité devient

$$\partial_x \ln w(x, y) = \partial_y \chi(x, y) \quad (8.16)$$

$$\partial_y \ln w(x, y) = -\partial_x \chi(x, y). \quad (8.17)$$

Pour le cas simple $f(z) = z = re^{i\theta}$, et par application directe de (8.16) et (8.17) on obtient

$$\partial_x \ln r(x, y) = \partial_y \theta(x, y) \quad (8.18)$$

$$\partial_y \ln r(x, y) = -\partial_x \theta(x, y). \quad (8.19)$$

Ce qui permet de calculer $\nabla \wedge \nabla \theta(\mathbf{r})|_z = (\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x) \theta(\mathbf{r}) = 2\pi \delta^{(2)}(\mathbf{r})$.

Bibliographie

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda, et M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45** 494 (1980)
- [2] K. von Klitzing, Rev. Mod. Phys. **58** 519 (1980)
- [3] D.C. Tsui, H.L. Stormer, et A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48** 1559 (1982)
- [4] C. Fermon et M.P. Lecoœur, Reflets de la Physique, **18** 8 (2010), ou bien consulter le site <http://dx.doi.org/10.1051/refdp/2010002>
- [5] www.equipes.lps.u-psud.fr/GOERBIG/CoursEHQ2006.pdf
- [6] L.D. Landau et E.M. Lifschitz, *Mécanique Quantique*, MIR, Moscow 1967
- [7] R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50** 1395 (1983)
- [8] B.I. Halperin, Helv. Phys. Rev. Acta. **56** 75 (1983)
- [9] J.K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63** 199 (1989)
- [10] J.K. Jain, Phys. Rev. B **41** 7653 (1990)
- [11] J.K. Jain, Science **266** 1199 (1994)
- [12] J.K. Jain, *Composite Fermions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2007
- [13] J.M. Leinaas et J. Myrheim, Nuovo Cim. B **37** 1 **41**(1977)
- [14] G.A. Goldin, R. Menikoff, et D.H. Sharp, J. Math. Phys. **22** 1664 (1981)
- [15] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49** 957 (1982)
- [16] D.P. Arovas, J.R. Schrieffer, et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **53** 722 (1984)
- [17] C. Kassel et V. Tuarev, *Braid groups*, Springer, New York 2008
- [18] A. Kitaev, Ann. Phys. **303** 2 (2003)
- [19] A. Stern, Nature **464** 187 (2010)
- [20] M. Freedman, A. Kitaev, M.J. Larsen, et Z.Wang, Bull. Am. Math. Soc. **41** 31 (2003)
- [21] J.K. Pachos, *Introduction to topological quantum computation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2012
- [22] F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51** 605 (1983)

- [23] F.D.M. Haldane et E.H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. **54** 237 (1985)
- [24] G. Fano, F. Ortolani, et E. Coulombo, Phys. Rev. B **34** 2670 (1986)
- [25] N. D'Ambrumenil, R. Morf, Phys. Rev. B **40** 6108 (1989)
- [26] Song He, S.H. Simon, et B.I. Halperin, Phys. Rev. B **50** 1823 (1994)
- [27] R.E. Prange et S. Girvin, *The quantum Hall effect*, 2ème éd. Springer Verlag, New York 1990
- [28] Z.F. Ezawa, *quantum Hall effects*, 2ème éd. World Scientific, Singapore 2008
- [29] J.M. caillol, D. Levesque, J.J. Weis, J.P. Hansen, J. Stat. Phys. **28** 325 (1992)
- [30] O. Ciftja et C. Wexler, Phys. Rev. B **67** 075304 (2003)
- [31] R. Morf et B.I. Halperin, Phys. Rev. B **33** 2221 (1986)
- [32] O. Ciftja, Physica B **404** 227 (2009)
- [33] O. Ciftja, Physica B **404** 2244 (2009)
- [34] O. Ciftja, Phys. Lett. A **374** 981 (2010)
- [35] Z. Bentalha, L. Moumen, et T. Ouahrani, Cent. Eur. J. Phys. **12** 511 (2014)
- [36] M.A. Ammar, Z. Bentalha, et S. Bekhechi, Cond. Matt. Phys. **19** 33702 (2016)
- [37] Z. Bentalha, Physica B **492** 27 (2016)
- [38] K. von Klitzing, Phil. Trans. R. Soc. A **363** 2203 (2005)
- [39] J. Weis et K. von Klitzing, Phil. Trans. R. Soc. A **369** 3954 (2011)
- [40] www.twinkletoesengineering.info/quantum_hall.htm
- [41] wikipedia.org/wiki/Quantum_Hall_effect
- [42] power.itp.ac.cn/~txiang/Emergent/QHE.htm
- [43] R.P. Feynman, Phys. Rev. **91** 1291 (1953)
- [44] M. Kasner et W. Apel, Phys. Rev. B **48** 11435 (1993)
- [45] U. Girlich et M. Hellmund, Phys. Rev. B **49** R17488 (1994)
- [46] V.M. Alverdian et N.E. Bonesteel, Phys. Rev. B **58** 1451 (1998)
- [47] R. Morf, N. D'Ambrumenil, et S. Das Sarma, Phys. Rev. B **66** 075408 (2002)
- [48] H. Fukuyama, P.M. Platzman, et P.W. Anderson, Phys. Rev. B **19** 5211 (1979)
- [49] G.S. Jeon et J.K. Jain, Phys. Rev. B **68** 165346 (2003)
- [50] D. Yoshioka, *The Quantum Hall Effect*, Springer, Berlin 2002
- [51] R.P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Westview Press, USA 1998
- [52] V.L. Berezinski, Sov. Phys. JETP, **32** 493 (1971)

- [53] V.L. Berezinski, Sov. Phys. JETP, **34** 610 (1972)
- [54] J.M. Kosterlitz et D.J. Thouless, J. Phys. C, **6** 1181 (1973)
- [55] B.I Halperin P.A. Lee, N. Read, Phys. Rev. B **47** 7312 (1993)
- [56] L. Landau, Sov. Phys. JETP, **3** 920 (1957)
- [57] L. Landau, Sov. Phys. JETP, **5** 101 (1957)
- [58] R.L. Willett *et al.*, Phys. Rev. Lett. **71** 3846 (1993)
- [59] W. Kang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **71** 3850 (1993)
- [60] V.J. Goldman, B. Su, et J. Jain, Phys. Rev. Lett. **72** 2065 (1994)
- [61] J.H. Smet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** 2272 (1996)
- [62] J.H. Smet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83** 2620 (1999)
- [63] I.V. Kukushkin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98** 066403 (2007)
- [64] D.R. Leadly *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72** 1906 (1994)
- [65] R.R. Du *et al.*, Sol. State comm. **90** 71 (1994)
- [66] W. Pan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90** 016801 (2003)
- [67] R. Willett *et al.*, Phys. Rev. Lett. **59** 1776 (1987)
- [68] G. Moore et N. Read, Nuc. Phys. B **360** 362 (1991)
- [69] N. Read et D. Green, Phys. Rev. B **61** 10267 (2000)
- [70] V.W. Scarola, K. Park, et J. Jain, Phys. Rev. B **61** 13064 (2000)
- [71] M. Kang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86** 2637 (2001)
- [72] I. Dujoune *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95** 056808 (2005)
- [73] F. Schulze *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93** 026801 (2004)
- [74] R.R. Du *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75** 3926 (1995)
- [75] I.V. Kukulich *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82** 3665 (1999)
- [76] S. Melinte *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84** 354 (2000)
- [77] B.I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52** 1583 (1984)
- [78] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48** 114 (1982)
- [79] A. Lerda, *Anyons Quantum Mechanics of particles of Fractional Statistics*, Springer, Berlin 1992
- [80] M. Frau, A. Lerda, et S. Sciuto, arXiv : hep-th/9407161 (1994)
- [81] L. Jacak, P. Sitko, K. Wieczorek, et A. Wojs, *Quantum Hall Systems : Braid groups, Composite Fermions, and Fractional Charge*, Oxford Univ. Press, New York 2003

- [82] R. de-Picciotto *et al.*, Nature **389** 162 (1997)
- [83] L. Saminadayar *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79** 2526 (1997)
- [84] S.H. Simons, E.H. Rezayi, et M.V. Milovanovic, Phys. Rev. Lett. **91** 046803 (2003)
- [85] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyons superconductivity*, World Scientific, Singapore 1990
- [86] I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York 1980

A new method of calculation in the Fractional Quantum Hall Effect regime

Research Article

Zine el abidine Bentalha ^{1*}, Larabi Moumen ¹, Tarik Ouahrani ^{1,2}

¹ *Laboratoire de Physique Théorique,
Université de Tlemcen, B.P. 230, 13000 Tlemcen Algeria*

² *École Préparatoire Sciences et Techniques,
département de Physique B.P. 230, 13000 Tlemcen Algeria*

Received 9 November 2013; accepted 23 April 2014

Abstract:

The electron-electron and electron-background interaction energies are calculated analytically for systems with up to $N = 6$ electrons. The method consists of describing the position vectors of electrons using complex coordinates and all the interaction energies with complex notation, whereby simplifications become possible. As is known, in this type of calculation, complicated expressions involving integrals over many variables are encountered and the trick of using complex coordinates greatly facilitates the exact calculation of various quantities. Contrary to previous analytical calculations, using complex coordinates avoids complicated trigonometric functions from appearing in the integrand, simplifying the exact evaluation of the integrals. The method we have used can be straightforwardly extended to larger systems with $N > 6$ electrons.

PACS (2008): 73.43.-f, 73.43.Cd, 71.10.Ca, 02.70.Wz

Keywords: Quantum Hall effect • 2D electron gas • many-body wave function • strongly correlated systems
© Versita sp. z o.o.

1. Introduction

Since the discovery of the Fractional Quantum Hall Effect (FQHE) [1], the interest in the topic of strongly correlated two-dimensional electron systems (2DES) has not ceased to grow. Novel electronic states have been proposed in this field of research, including the incompressible quantum fluid [2], composite Fermions [3–6], composite Bosons [7], and anyons [8, 9], all originating from elegant theories

involving sophisticated mathematics. Probably the most well-established theoretical idea in the domain of FQHE is due to Laughlin [2] who described the ground state as an incompressible quantum fluid and successfully clarified the nature of states at filling factors $\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$. In reality 2DES have unusual properties that cannot be incorporated into a unique general theory that applies to any filling factor, but, in spite of that, Laughlin's idea remains irreproachable theoretically. For the other filling fractions $\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$ (referred to as Jain sequence), Jain advanced the novel idea [3–6] that the Fractional QHE of electrons is a manifestation of the integral QHE [10, 11], but for composite Fermions, which are electrons carrying

*E-mail: z_bentalha@yahoo.fr

an even number of vortices of the many-body wave function. In other words, the incompressible quantum fluid, in Laughlin theory, consists of strongly correlated electrons interacting with a strong magnetic field whereas in Jain theory it consists of weakly correlated composite Fermions interacting with a reduced magnetic field.

Exact diagonalization of small systems of electrons [12–17] has been done to validate both Laughlin and Jain theories. In general these numerical calculations employ spherical geometry [18, 19] although the wave functions adopted in both theories are written in disk geometry. Recently, analytical methods using various 2D-geometries have been proposed [20, 21]. The main purpose of these studies was to find exact results that can be used as instruments to test the accuracy of various computational methods used in the domain of FQHE. Moreover, it is well known that the theory of FQHE depends basically on three types of interaction energy, namely the electron–electron, electron–background and background–background interaction potentials. The latter is determined classically without using the wave function of the electron system. The two others are quantum operators acting on wave functions and are in general determined via numerical calculations with either exact diagonalization [12–17] or Monte Carlo simulations [22–24].

In this work we propose an analytical method based on complex polar coordinates to calculate the electron–electron and electron–background interaction energies for systems with several electrons. The main purpose of this study is to show that a complex coordinate framework is the most convenient platform to do fast and accurate FQHE calculations. Exact analytical results are obtained for systems with up to $N = 6$ electrons in disk geometry at filling factor $\nu = \frac{1}{3}$. These calculations can be extended straightforwardly to larger systems with $N > 6$ electrons. The results we obtained coincide exactly with the analytical results of Ref. [21] for $N = 2, 3, 4$ electrons. For $N = 5$ and 6 electrons, our results agree well with the results found in Ref. [23] using the method of Monte Carlo simulations.

The paper is organized as follows. In section 2, the necessary theoretical basis is presented. In section 3, the formulation in terms of complex coordinates is given, and illustrated for the specific case of $N = 3$ electrons. We give some concluding remarks in section 4.

2. Theoretical basis

Within a disk geometry we consider $N(\geq 2)$ electrons of charge $(-e_0)$ embedded in a uniform neutralizing background disk of positive charge Ne_0 and area $S_N = \pi R_N^2$,

where R_N is the radius of the disk. This 2D electronic system is subjected to a strong perpendicular uniform magnetic field \mathbf{B} in the z direction. For a symmetric gauge ($\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$), and fully polarized electrons of mass m_e , the quantum Hamiltonian of the system can be written as

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m_e} (-i\hbar \nabla_j + \frac{e_0}{c} \mathbf{A}_j)^2 + V_{ee} + V_{eb} + V_{bb} \quad (1)$$

where $\nabla_j = (\frac{\partial}{\partial r_j} \mathbf{u}_{r_j} + \frac{\partial}{r_j \partial \varphi_j} \mathbf{u}_{\varphi_j})$ represents the gradient operator, $\mathbf{A}_j = \frac{B}{2} r_j \mathbf{u}_{\varphi_j}$ the gauge potential of the j th electron whereas V_{ee} , V_{eb} and V_{bb} are the electron–electron, electron–background and background–background interaction potentials, respectively. Their corresponding expressions are,

$$V_{ee} = \sum_{i<j}^N \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2)$$

$$V_{eb} = -\rho \sum_{i=1}^N \int_{S_N} d^2r \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}, \quad (3)$$

$$V_{bb} = \frac{\rho^2}{2} \int_{S_N} d^2r \int_{S_N} d^2r' \frac{e_0^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4)$$

where \mathbf{r}_i (or \mathbf{r}_j) denotes the electron vector position while \mathbf{r} and \mathbf{r}' are background coordinates. S_N is the area of the disk and ρ the density of the system (number of electrons per unit area) that can also be defined as

$$\rho = \frac{\nu}{2\pi l^2} \quad (5)$$

with $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{e_0 B}}$ being the magnetic length, c the speed of light and B the magnetic field strength. The filling factor ν is given by the ratio of the number of electrons to the number of flux quanta penetrating the sample ($\nu = \frac{N}{\phi/\phi_0}$) with $\phi_0 = h \frac{c}{e_0}$ the quantum flux. The quantity ν is called the filling factor because it equals the number of occupied Landau levels for non interacting electrons at a given magnetic field.

The background–background interaction potential, Eq. (4), can be calculated classically without using the wave function of the electron system, and thus the introduction of complex coordinates leaves the problem of calculating V_{bb} unchanged. Its value is determined analytically [21] and is given by

$$V_{bb} = \frac{8}{3\pi} \frac{e_0^2 (\rho S_N)^2}{R_N}. \quad (6)$$

Henceforth our concern will only be with V_{ee} and V_{eb} . For a given wave function $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, the electron-electron and electron-background interaction energies are defined by [21],

$$\langle V_{ee} \rangle = \frac{N(N-1)}{2} \frac{\int d^2r_1 \dots d^2r_N \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2}{\int d^2r_1 \dots d^2r_N |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2} \quad (7)$$

$$\langle V_{eb} \rangle = -\rho N \frac{\int d^2r_1 \dots d^2r_N |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \int_{S_N} d^2r \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}}{\int d^2r_1 \dots d^2r_N |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2} \quad (8)$$

Taking into account the fact that [20, 25]

$$\int_{S_N} d^2r \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} = 2 \frac{e_0^2 S_N}{R_N} \int_0^\infty \frac{dq}{q} J_1(q) J_0\left(\frac{q}{R_N} r_1\right) \quad (9)$$

the expression for $\langle V_{eb} \rangle$ can also be written as

$$\langle V_{eb} \rangle = \frac{-2e_0^2 N \rho S_N}{R_N} \frac{\int_0^\infty dq \frac{J_1(q)}{q} \int d^2r_1 \dots d^2r_N |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 J_0\left(\frac{q r_1}{R_N}\right)}{\int d^2r_1 \dots d^2r_N |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2} \quad (10)$$

where $J_n(x)$ are n-th order Bessel functions.

To write Eqs. (7) and (10) in complex notation, change $\mathbf{r}_k \rightarrow z_k = (x_k + iy_k = r_k e^{i\varphi_k})_{k=1, \dots, N}$, to obtain

$$\langle V_{ee} \rangle = \frac{N(N-1)}{2} \frac{\int d^2z_1 \dots d^2z_N \frac{e_0^2}{|z_1 - z_2|} |\psi(z_1, \dots, z_N)|^2}{\int d^2z_1 \dots d^2z_N |\psi(z_1, \dots, z_N)|^2} \quad (11)$$

$$\langle V_{eb} \rangle = \frac{-2e_0^2 N \rho S_N}{R_N} \frac{\int_0^\infty dq \frac{J_1(q)}{q} \int d^2z_1 \dots d^2z_N |\psi(z_1, \dots, z_N)|^2 J_0\left(\frac{q|z_1|}{R_N}\right)}{\int d^2z_1 \dots d^2z_N |\psi(z_1, \dots, z_N)|^2} \quad (12)$$

With this change of variable, the Laughlin wave function finds its original form

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^3 e^{-\sum_{k=1}^N \frac{z_k \bar{z}_k}{4l^2}} \quad (13)$$

and its corresponding norm is given by $\langle \psi | \psi \rangle$.

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int d^2z_1 \dots d^2z_N \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3 \prod_{i < j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^3 e^{-\sum_k |z_k|^2 / 2l^2} \quad (14)$$

simplified greatly using the following rule:

$$\int d^2z z^m \bar{z}^n e^{-zz} = \pi \delta_{mn} \Gamma(1+n) \quad (15)$$

In fact the key rule Eq. (15) greatly facilitates the evaluation of all the integrals in connection with this work. A wide class of correlators in 2d models [26] can be evaluated in this way. Taking into consideration Eq. (15) one can verify that the formula Eq. (14), for $N = 3$ simplifies to

$$\langle \psi(3) | \psi(3) \rangle = \int d^2z_1 d^2z_2 d^2z_3 \mathcal{P}(3) e^{-\sum_{k=1}^3 |z_k|^2 / 2l^2} \quad (16)$$

3. Complex coordinate method for $N=3$ electrons

To show the method of calculation, we will focus on the case of $N = 3$ electrons. The integral Eq. (14) can be

with

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(3) = & z_1^6 z_1^6 z_2^3 z_3^3 + 9z_1^6 z_1^6 z_2^2 z_2 z_3 z_3 + 9z_1^6 z_1^6 z_2 z_2 z_3^2 z_3^2 + z_1^6 z_1^6 z_3^3 z_3^3 + 9z_1^5 z_1^5 z_2^4 z_2^4 + 36z_1^5 z_1^5 z_2^3 z_2 z_3 z_3 + 36z_1^5 z_1^5 z_2 z_2 z_3^3 z_3^3 + 9z_1^5 z_1^5 z_3^4 z_3^4 \\
 & + 9z_1^4 z_1^4 z_2^5 z_2^5 + 225z_1^4 z_1^4 z_2^3 z_2^2 z_3^2 z_3^2 + 225z_1^4 z_1^4 z_2^2 z_2 z_3^3 z_3^3 + 9z_1^4 z_1^4 z_3^5 z_3^5 + z_1^3 z_1^3 z_2^6 z_2^6 + 36z_1^3 z_1^3 z_2^5 z_2 z_3 z_3 + \\
 & + 225z_1^3 z_1^3 z_2^4 z_2 z_3^2 z_3^2 + 225z_1^3 z_1^3 z_2^3 z_2 z_3^4 z_3^4 + 36z_1^3 z_1^3 z_2 z_2 z_3^5 z_3^5 + z_1^3 z_1^3 z_3^6 z_3^6 + 9z_1^2 z_1^2 z_2^6 z_2^6 z_3 z_3 + \\
 & + 225z_1^2 z_1^2 z_2^4 z_2 z_3^3 z_3^3 + 225z_1^2 z_1^2 z_2^3 z_2 z_3^4 z_3^4 + 9z_1^2 z_1^2 z_2 z_2 z_3^6 z_3^6 + 9z_1 z_1 z_2^6 z_2^6 z_3^2 z_3^2 + 36z_1 z_1 z_2^5 z_2 z_3^3 z_3^3 + 36z_1 z_1 z_2^3 z_2 z_3^5 z_3^5 \\
 & + 9z_1 z_1 z_2^2 z_2 z_3^6 z_3^6 + z_2^6 z_2^6 z_3^3 z_3^3 + 9z_2^5 z_2^5 z_3^4 z_3^4 + 9z_2^4 z_2^4 z_3^5 z_3^5 + z_2^3 z_2^3 z_3^6 z_3^6 \tag{17}
 \end{aligned}$$

where the terms having the form $z_1^{n_1} z_1^{m_1} z_2^{n_2} z_2^{m_2} z_3^{n_3} z_3^{m_3}$ with at least one $n_i \neq m_i$ are all vanishing according to Eq. (15). Thus, it becomes easy to compute the value of the norm

$$\langle \psi(3) | \psi(3) \rangle = \pi^3 (l^2)^{12} (3\ 291\ 217\ 920). \tag{18}$$

Similarly let us calculate the electron–electron interaction energy per particle $\epsilon_{ee} = \langle V_{ee} \rangle / 3$. We choose to work with Jacobi complex coordinates instead of ordinary Jacobi coordinates so as to make possible use of Eq. (15). Jacobi complex coordinates are defined by

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= z_1 - z_2 \\
 Z_2 &= \frac{z_1 + z_2}{2} - z_3 \\
 Z_3 &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}
 \end{aligned} \tag{19}$$

and other useful relations are given by

$$\int \prod_{k=1}^N d^2 z_k = \int \prod_{k=1}^N d^2 Z_k \quad N \geq 2 \tag{20}$$

Also, one can easily derive the inter-particle coordinates in terms of Jacobi complex coordinates

$$\begin{aligned}
 z_1 - z_2 &= Z_1 \\
 z_1 - z_3 &= \frac{Z_1}{2} + Z_2 \\
 z_2 - z_3 &= -\frac{Z_1}{2} + Z_2
 \end{aligned} \tag{21}$$

with the help of Eq. (15) and the substitution of Eq. (21), one can transform $\mathcal{P}(3)$ to $\mathcal{P}'(3)$ such that

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}'(3) = & \frac{1}{(64)^2} Z_1^9 Z_1^9 + \frac{9}{(16)^2} Z_1^7 Z_1^7 Z_2^2 Z_2^2 \\
 & + \frac{9}{16} Z_1^5 Z_1^5 Z_2^4 Z_2^4 + Z_1^3 Z_1^3 Z_2^6 Z_2^6. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Thus the expression of the electron–electron interaction energy will take the following form:

$$\langle V_{ee} \rangle = 3 e_0^2 \frac{\int d^2 Z_1 d^2 Z_2 d^2 Z_3 \mathcal{P}'(3) Z_1^{-\frac{1}{2}} Z_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{3|Z_1|^2}{2l^2} - \frac{|Z_2|^2}{3l^2} - \frac{|Z_3|^2}{4l^2}}}{\langle \psi | \psi \rangle} \tag{23}$$

and its value per electron is:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ee} &= e_0^2 \frac{\pi^3 \sqrt{\pi} (l)^{21} 890\ 451\ 225 / 2}{\pi^3 (l)^{22} 3\ 291\ 217\ 920} \\
 &= \frac{2\ 198\ 645 \sqrt{\pi} e_0^2}{16\ 252\ 928 l} \approx 0.239772 \frac{e_0^2}{l}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

This agrees with the result in Ref. [21].

Now let us calculate the electron–background interaction energy per particle $\epsilon_{eb} = \langle V_{eb} \rangle / 3$.

$$\epsilon_{eb} =$$

$$\frac{-6e_0^2 \int_0^\infty dq \frac{J_1(q)}{q} \int d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 \mathcal{P}(3) e^{-\frac{|z_1|^2}{2l^2} - \frac{|z_2|^2}{2l^2} - \frac{|z_3|^2}{2l^2}} J_0\left(\frac{q|z_1|}{R}\right)}{R \langle \psi | \psi \rangle} \tag{25}$$

where R is the radius of the disk for $N = 3$ electrons and $\mathcal{P}(3)$ is given by Eq. (17). After a straightforward calculation, we obtain:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{eb} &= -\frac{e_0^2}{l e^{9/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{2\ 974\ 101}{39\ 680} I_0(9/2) + \frac{3\ 605\ 523}{39\ 680} I_1(9/2) \right] \\
 &\approx -1.226488 \frac{e_0^2}{l} \tag{26}
 \end{aligned}$$

where $I_n(x)$ are n-th order modified Bessel functions of the first kind [27] and $(\ln(e) = 1)$. As expected the obtained result coincides exactly with the result of Ref. [21].

In what follows, we give the various expressions of ϵ_{eb} for $N = 2, 4, 5$ and 6 electrons,

$$\epsilon_{eb}(2) = -\frac{e_0^2}{64 e^3 l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[-93 I_0(3) + 377 I_1(3) \right], \tag{27}$$

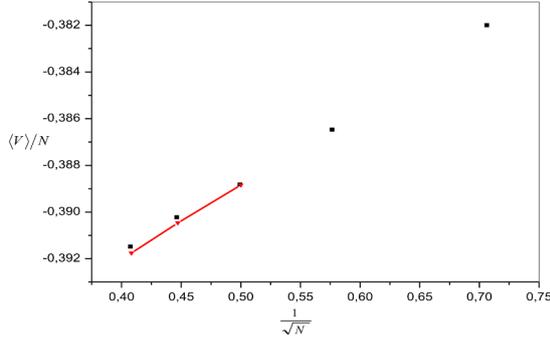


Figure 1. Exact analytical results by the method of complex coordinates in disk geometry for the Laughlin state at $\nu = 1/3$. The potential energy per particle, $\epsilon = \langle V \rangle / N$, is plotted as a function of $1/\sqrt{N}$ for systems with $N = 2, 3, 4, 5$ and 6 electrons. The line is a part of the least-square fit of Ref. [23]. Energies are in units of e_0^2/l .

$$\epsilon_{eb}(4) = -\frac{3^6 e_0^2}{640 \times 2766887264 e^6 l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [-4069333409925 I_0(6) + 4478198326949 I_1(6)], \quad (28)$$

$$\epsilon_{eb}(5) = -\frac{e_0^2}{1718536372224 e^{15/2} l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [-60904709460939925 I_0(15/2) + 65453547890073563 I_1(15/2)]. \quad (29)$$

$$\epsilon_{eb}(6) = -\frac{3e_0^2}{9278461711902310400 e^9 l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [-2274996342475647272594191 I_0(9) + 2413336234783834479505131 I_1(9)]. \quad (30)$$

The values of various interaction energies are given in Table 1. The ground state energy ϵ , which is defined by

Table 1. Ground-state energy per electron $\epsilon = \epsilon_{ee} + \epsilon_{eb} + \epsilon_{bb}$ (in units of e_0^2/l) for Laughlin states with filling factor $\nu = \frac{1}{3}$ corresponding to systems with $N = 2, 3, 4, 5$ and 6 electrons in a disk geometry. The last two values of the sixth column are derived by fitting the data resulting from a Monte Carlo simulation method [23]. ϵ_{MS} is the ground state energy per particle by the Monte Carlo method.

| N | ϵ_{bb} | ϵ_{eb} | ϵ_{ee} | ϵ | ϵ_{MS} |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|------------|-----------------|
| 2 | 0.490070 | -1.010575 | 0.138473 | -0.382032 | - |
| 3 | 0.600211 | -1.226488 | 0.239772 | -0.386505 | - |
| 4 | 0.693064 | -1.409568 | 0.327649 | -0.388855 | -0.38884 |
| 5 | 0.774869 | -1.571267 | 0.406143 | -0.390255 | -0.390466 |
| 6 | 0.848826 | -1.717742 | 0.477399 | -0.391517 | -0.391758 |

($\epsilon = \epsilon_{ee} + \epsilon_{eb} + \epsilon_{bb}$), calculated in this work for $N = 5$ and 6 electrons agrees well with that in Ref. [23] (see Table 1). The values are approximated numerically up to six digits after the decimal point. To compare our results for $\epsilon(5)$ and $\epsilon(6)$ with the results reported in Ref. [23], we need to plot only a part of the least-square fit full line of Ref. [23], (see Fig. 1).

4. Concluding remarks

In this work and within the theory of FQHE, we proposed a method of calculation based on complex coordinates. The electron–electron and electron–background interaction energies are computed for systems with up to $N = 6$ electrons. The method outlined in this paper, in which the position vectors of electrons are taken to be complex coordinates and all interactions are written in complex notation, simplifies calculation by avoiding integrals of complicated trigonometric functions. The results we found coincide with the results of Ref. [21] for $N = 2, 3$ and 4 electrons and with the results reported in Ref. [23] for $N = 5$ and 6 electrons. New expressions are presented for $\epsilon_{eb}(3)$, $\epsilon_{eb}(4)$, $\epsilon_{eb}(5)$, $\epsilon_{ee}(5)$, $\epsilon_{eb}(6)$ and $\epsilon_{ee}(6)$. This shows clearly that the method of complex coordinates is a particularly convenient way to do easy Fractional Quantum Hall Effect calculations. The present calculation can be straightforwardly extended to larger systems with $N > 6$ electrons, the same steps of calculus repeat themselves for any given N . It can easily be seen that there is no mathematical limit to extending the calculation beyond $N > 6$ electrons and we believe that only a powerful computer is required to go further. This will allow bulk regime (thermodynamic limit) values for key quantities such as various interaction energies to be obtained. We point out that in carrying out the numerical computation we used MATHEMATICA software [28] and we remarked that for $N > 4$ the computation is fast and straightforward.

References

- [1] D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. 48 1559 (1982)
- [2] R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50 1395 (1983)
- [3] J.K. Jain, Phys. Rev. Lett. 63 199 (1989)
- [4] J.K. Jain, Composite Fermions (Cambridge University Press, Cambridge 2007)
- [5] J.K. Jain, Phys. Rev. B 41 7653 (1990)
- [6] J.K. Jain, Science 266 1199 (1994)
- [7] S.H. Simon, E.H. Rezayi, M.V. Milovanovic, Phys. Rev. Lett. 91 046803 (2003)

- [8] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 49 957 (1982)
- [9] D.P. Arovas, J.R. Schrieffer, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 53 722 (1984)
- [10] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45 494 (1980)
- [11] K. von Klitzing, Rev. Mod. Phys. 58 519 (1986)
- [12] F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. 51 605 (1983)
- [13] F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. 54 237 (1985)
- [14] G. Fano, F. Ortolani, E. Colombo, Phys. Rev. B 34 2670 (1986)
- [15] N. D'Ambrumenil, R. Morf, Phys. Rev. B 40 6108 (1989)
- [16] Song He, S.H. Simon, B.I. Halperin, Phys. Rev. B 50 1823 (1994)
- [17] R.E. Prange, S. Girvin, The Quantum Hall Effect, 2nd edition (Springer Verlag, New York, 1990)
- [18] T.T. Wu, C.N. Yang, Nucl. Phys. B 107 365 (1976)
- [19] T.T. Wu, C.N. Yang, Phys. Rev. D 16 1018 (1977)
- [20] O. Ciftja, Phys. Lett. A 374 981 (2010)
- [21] O. Ciftja, Physica B 404 227 (2009)
- [22] J.M. Caillol, D. Levesque, J.J. Weis, J.P. Hansen, J. Stat. Phys. 28 325 (1982)
- [23] O. Ciftja, C. Wexler, Phys. Rev. B 67 075304 (2003)
- [24] R. Morf, B.I. Halperin, Phys. Rev. B 33 2221 (1986)
- [25] O. Ciftja, J. Computer-Aided Mater. Des 14 37 (2007)
- [26] Sh. Shakirov, Phys. Lett. A 375 984 (2011)
- [27] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, New York, 1980)
- [28] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 4.0, Champaign, Illinois (1999)

Résumé

Après une étude bibliographique profonde, nous avons remarqué que la plupart des calculs effectués dans le domaine de l'EHQF sont des calculs numériques, diagonalisation exacte ou simulations de Monte Carlo, et que le seul calcul analytique existant se limitait à un système avec un nombre $N = 4$ électrons. Nous nous sommes proposé de développer une approche basée sur des calculs analytiques pour déterminer les énergies de l'état fondamental pour des systèmes avec un nombre $N > 4$ électrons. Nous avons à calculer les énergies des interactions électron-électron, électron-background et background-background, la somme de ces énergies dans l'état fondamental donne l'énergie du fondamental. Cette approche, basée sur les coordonnées polaires complexes, nous a permis de calculer l'énergie de l'état fondamental pour des systèmes avec $N = 3, 4, 5$ et 6 électrons à des facteurs de remplissage $\nu = 1/3$ et $\nu = 1/5$. Nous nous attendons à ce que cette méthode des coordonnées polaires complexes soit utile et pratique dans le calcul de certaines grandeurs physiques telles que l'énergie moyenne ou la fonction de partition pour des systèmes de Coulomb bidimensionnels.

Mots clés : Effet Hall quantique et fractionnaire-théorie de Laughlin-gaz bidimensionnel- système fortement corrélé

Summary

After a thorough bibliographic study, most of the calculations carried out in the EHQF domain were numerical calculations, exact diagonalization or Monte Carlo simulations, and the only existing analytical calculation was limited to a system with a number $N = 4$ electrons. We proposed to develop an approach based on analytical calculations to determine the energies of the ground state for systems with a number $N > 4$ electrons. We have to calculate the energies of electron-electron interactions, electron-background and background-background, the sum of these energies in the fundamental state gives the energy of the fundamental. This approach, based on complex polar coordinates, allowed us to calculate the energy of the ground state for systems with $N = 3, 4, 5$ and 6 electrons at filling factors $\nu = 1/3$ and $\nu = 1/5$. We expect this method of complex polar coordinates to be useful and practical in the calculation of certain physical quantities such as mean energy or partition function for two-dimensional Coulomb systems.

Key words: Quantum and fractional Hall effect - Laughlin-two-dimensional gas theory - highly correlated system

ملخص

الدقيق أو محاكاة مونت والحسابات العددية، FQHE بعد مراجعة الأدب العميق، لاحظنا أن معظم العمليات الحسابية في مجال اقتراحنا على تطوير نهج قائم على الإلكترونات $N = 4$ كارلو، وحساب تحليلي فقط الحالية اقتصر على نظام مع عدد لدينا لحساب طاقات التفاعلات بين الإلكترونات > 4 حسابات تحليلية لتحديد الطاقة في دولة أرض الواقع لنظم مع عدد N هذا الإلكترونات، الإلكترون الخلفية والخلفية، خلفية، ومجموع هذه الطاقات في دولة أرض الواقع يعطي طاقة الأرض و 4 و 5 و $N = 3$ النهج، استنادا إلى الإحداثيات القطبية المعقدة، مكنتنا من حساب الطاقة في دولة أرض الواقع لأنظمة مع ونحن نتوقع أن هذا الأسلوب الإحداثيات القطبية المعقدة هو مفيد وعملي. $\nu = 1/5$ و $\nu = 1/3$ الإلكترونات ملء عامل في حساب بعض الكميات الفيزيائية مثل متوسط الطاقة أو دالة قسم نظم كولوم ثنائية الأبعاد كلمات البحث: الغاز منظومة مترابطة بقوة - تأثير هول الكم وكسور نظرية لافلين