Remerciement

En premier lieu, je remercie Allah, le tout puissant, qui m'a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

Je remercie vivement, Monsieur le docteur Mekki HOUBAD, pour avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement.

Je remercie mes professeurs ; Monsieur le docteur Sidi Mohamed BOUGUIMA de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury, Messieurs : le Docteur Bachir MESSIRDI et le Docteur Abdllatif BENCHAIB pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à ce jury.

Enfin, je dédicace ce travail à ma famille et plus particulièrement à mon père, ma mère, mes frères et mes sœurs et j'oublie pas touts mes amis qui m'ont toujours encouragé et soutenu dans les difficultés en particulier Fatima, Soumia, Imene, Zaki et Abd rahman.

Introduction

La dynamique des fluides est l'étude des mouvements des fluides, qu'ils soient liquides ou gazeux.

On ne connait pas parfaitement les équations qui gouvernent les fluides, les équations de Navier-Stokes et ses dérivées ne sont pas valables pour tous les fluides. Le miel, le sang ou encore du cristal liquide n'obéissent plus aux équations de Navier-Stokes en raison des coefficients de viscosité supplémentaires. A l'heure actuelle, le problème reste ouvert.

Les équations les plus importantes sont : les équations de Navier-Stokes, qui sont des équations différentielles non linéaires décrivant le mouvement des fluides. Ces équations, lorsqu'elles ne sont pas simplifiées n'ont pas de solutions analytiques et ne sont donc utiles que pour des simulations numériques. Ces équations peuvent être simplifiées de diverses manières ce qui rend ces équations plus faciles à résoudre. Certaines simplifications permettent de trouver des solutions analytiques à des problèmes de dynamique des fluides.

Pour décrire mathématiquement la cinématique d'un fluide, c'est-à-dire le mouvement des particules, indépendamment des propriétés du fluide, on fait appel à la géométrie analytique. Deux systèmes cohabitent, l'un et l'autre présentant des avantages dans des situations particulières. Il s'agit de :

- la description lagrangienne.
- la description euclidienne.

Tandis que la première consiste à décrire les trajectoires suivies par les particules au cours du temps, la seconde décrit le champ de vitesses à un instant donné. Les deux descriptions sont alors liées mathématiquement par la relation des dérivées :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (V \cdot \nabla).$$

Où le terme D/Dt dérivée totale appelée ≪ dérivée particulaire ≫, ou encore ≪ dérivée lagrangienne ≫, représente la dérivée dans la description lagrangienne. Et le terme $\partial/\partial t$ dérivée partielle ou ≪ euclidienne ≫ représente la dérivée dans la description euclidienne.

Un fluide est appelé compressible si les changements de la densité du fluide ont des effets significatifs sur l'ensemble de la solution. Dans le cas contraire, il s'agit d'un fluide incompressible et les changements de densité sont ignorés.

Les problèmes dus à la viscosité sont ceux dans lesquels les frottements du fluide ont des effets significatifs sur la solution. Dans le cas où les frottements peuvent être négligés, le fluide est appelé non-visqueux. Les équations normalement utilisées pour l'écoulement d'un fluide non visqueux sont les équations d'Euler.

Une autre simplification des équations de la dynamique des fluides est de considérer toutes les propriétés du fluide comme étant constantes dans le temps. Ceci s'appelle alors un fluide stationnaire.

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité et de la conductivité thermique. Avec en plus l'hypothèse, de validité très générale, de conservation de la masse, le mouvement du fluide est donc isentropique. Mathématiquement cela revient à annuler des termes dans l'équation de Navier-Stokes, on obtient ainsi l'équation d'Euler des fluides. Ce sont le produit des coefficients de viscosité et de conductivité thermique (et pas seulement ces coefficients) avec respectivement les cisaillements de vitesse et les gradients thermiques, qui doivent être négligeables.

$$-\nabla p + \rho \cdot g = \rho \cdot a = DV/Dt.$$

- Le terme ρ correspond à la densité.
- Le terme $\rho \cdot g$ correspond aux forces de pesanteur subies par la particule fluide.
- Le terme $-\nabla p$ correspond aux forces de pression sur les surfaces de la particule.
- Le terme DV/Dt correspond à la variation de la quantité de mouvement par unité de volume de la particule.
- Le terme a correspond à l'accélération du fluide, donné par l'équation :

$$a = \frac{DV}{Dt} + (V \cdot \nabla)V.$$

Dans notre travail on va s'intéresser à l'étude d'un fluide parfait incompressible à une pression constante qui se traduit par les équations qui s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = 0 \tag{0.1}$$

$u \in \mathbb{R}^d$ représente la vitesse du fluide.

Le système précédemment mentionné est un système de Burger multidimensionnelle tel que :

$$u \cdot \nabla \ := \ \sum_{i=1}^{d} u_i \, \partial_i \ , \quad \partial_i \ := \ \frac{\partial}{\partial \, x_i}.$$

On complète (0.1) en fixant les valeurs de u à l'instant initial :

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{0.2}$$

Vu les résultats classiques donnés dans [5], si la condition initiale u_0 est régulière alors le problème de Cauchy définit par (0.1) et (0.2) admet localement une unique solution.

L'étude du système (0.1) est déjà traitée du point de vue d'existence et d'unicité de solutions. On connait les conditions pour lesquelles on a une existence globale dans le temps, dans la dimension deux [6], et dans la dimension trois de l'espace [1]. Dans [10] avec des données dans l'espace de Sobolev H^s avec $s > 1 + d/2$, on a un résultat d'existence des solutions de classe $\mathscr{C}^1$.

Vu les résultats de [8], le problème de Cauchy formé par le système quasi-linéaire hyperbolique (0.1) et d'une donnée initiale bornée, admet une solution de classe $\mathscr{C}^1$ qui peut être exprimée sous la forme :

$$u(t,x) = w\big(x - t\,u(t,x)\big).$$

Ainsi, cette solution est majorée par :

$$\mathbf{V} := \sup_{x \in \Omega_r^0} \|w(x)\| < \infty, \qquad \|w(x)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} w_i(x)^2}.$$

Ce qui permet d'établir l'existence de la solution sur des domaines de la forme :

$$\Omega_r^T := \left\{ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d; \quad |x| + t\mathbf{V} \le r \right\}, \quad T \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le système (0.1) est aussi traité avec une condition de divergence nulle de la solution à savoir div $u = 0$ et des données oscillantes de la forme :

$$w(x) = H^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \in]0,1], \quad H^\varepsilon(x,\theta) \in C^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^3) \tag{0.3}$$

tel que $\mathbb{T}$ est un tore et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Dans [4, 9] le système (0.1) complété par div $u = 0$ est considéré comme une variante d'un résultat standard dans l'optique géométrique non linéaire faible, dans [3, 7] on a une large classification des données initiales oscillantes.

Ce mémoire est basé sur l'article [2] dans lequel on s'intéresse au système (0.1) associé à une donnée initiale de la forme (0.3), l'objectif est d'identifier les familles de la forme (0.3) qui permet de récupérer une solution u^ε local dans le temps et dans l'espace du système (0.1) avec un temps de vie T^ε satisfait la condition :

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} T^\varepsilon = T > 0.$$

Table des matières

1

Existence et unicité de solutions classiques d'un système de Burger multidimensionnelle

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème de Cauchy formé par un système de Burger multidimensionnelle de la forme (1.1) et la donnée initiale $u(0, x)$ définie comme (1.2) avec $u(t, x) = (u_1(t, x), \cdots, u_d(t, x))^{\,t}$ est une fonction vectoriel de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $V = (V_1, V_2, \cdots, V_d)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, et $h(x) = (h_1(x), \cdots, h_d(x))^{\,t}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega_r^0; \mathbb{R}^d)$ avec $\Omega_r^0 \subset \mathbb{R}^d$ représente la boule de centre zéro et de rayon $r > 0$.

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{d} V_i(u)\partial_i u = 0 \tag{1.1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) = h(x) \tag{1.2}$$

le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité des solutions classiques pour le système mentionné précédemment.

Dans la deuxième section, on va donner tous les outils que nous allons utiliser dans ce qui suit.

Dans la troisième section on va étudier l'existence et l'unicité des solutions d'un système de Burger multidimensionnelle associé à une condition initiale régulière (de classe $\mathscr{C}^1$), lorsque cette condition est vérifiée le problème (1.1)-(1.2) admet une solution unique pour certains $t \geq 0$.

1.2 Notions préliminaire

Dans cette section on va commencer par énoncer le théorème du point fixe (théorème 1 page 2), qu'on va l'utiliser pour expliquer la démonstration du théorème d'inversion locale (théorème 2 page 2).

Définition 1 (Différentiabilité) *Une fonction $F : E \to E$ est dite différentiable en x_0 si et seulement s'il existe une application linéaire L_{x_0}(la différentiable) tel que :*

$$\mathit{lim}_{||h||_E \to 0} \frac{||\ F(x_0 + h) - F(x_0) - L_{x_0}\ ||_E}{||\ h\ ||_E} = 0.$$

Définition 2 (contraction) *Soit E un espace normé. Une application $T : E \to E$ est dite contractante s'il existe $k \in]0,1[$ tel que :*

$$\forall\, x, y \in E,\ \|\, T(x) - T(y)\,\|_E\ \leq k \,\|\, x - y\,\|_E\ .$$

Théorème 1 (Théorème du point fixe) *Soit E un espace de Banach et A une partie fermée de E. Une application $T : A \to A$ contractante admet un point fixe unique dans A. cela revient à dire qu'il existe un seul $a \in A$ tel que T(a) =a.*

1.2.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 2 (Théorème d'inversion local) *Soit E un espace de Banach et soit $F : E \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que :*

$$\begin{aligned} L_{x_0} : E &\to \mathscr{L}(E,E) \\ x_0 &\mapsto \quad L_{x_0} \end{aligned}$$

est inversible. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que F est bijective de $\bar{B}(x_0,\alpha)$ dans $\bar{B}(F(x_0),\beta)$.

Preuve. On sait que F est bijective si et seulement si :

$$\forall y \in E,\ \exists!\ x \in E : \quad y = F(x).$$

soit $y \in E$, on veut montrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $y = F(x)$.
Ce qui revient à posé :

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Longleftrightarrow F(x) - y = 0. \\ &\Longleftrightarrow L_{x_0}^{-1}(F(x) - y) = 0. \\ &\Longleftrightarrow \underbrace{x - L_{x_0}^{-1}(F(x) - y)}_{=G(x)} = x \end{aligned} \tag{1.3}$$

L'équation (1.3) affirme que x est un point fixe pour la fonction G, et donc pour montrer que F est bijective il faut et il suffit de montrer que ce point fixe est unique, on va utiliser dans cette démonstration le théorème 1, pour cela on va passer par deux étapes :

1. *On montre qu'il existe un certain voisinage de x_0 qu'on le note par $\bar{B}(x_0,\alpha)$ tel que G soit stable sur ce voisinage.*
   Soit $\bar{B}(x_0,\alpha_1)$ un certain voisinage de x_0 et soit $\bar{B}(y_0,\beta_1)$ un certain voisinage de y_0, on choisit $(x,y) \in \bar{B}(x_0,\alpha_1) \times \bar{B}(y_0,\beta_1)$, alors :

$$\begin{aligned} G(x) - x_0 &= x - x_0 - L_{x_0}^{-1}\ (F(x) - F(x_0) + y_0 - y). \\ &= L_{x_0}^{-1}\ (L_{x_0}(x - x_0) - (F(x) - F(x_0)) + L_{x_0}^{-1}(y - y_0). \\ &= -L_{x_0}^{-1}\ (F(x) - F(x_0) - L_{x_0}(x - x_0)) + L_{x_0}^{-1}(y - y_0). \\ &\downarrow \boxed{\text{d'après la définition 1}} \\ &= -L_{x_0}^{-1}\ (\|\ x - x_0\ \|\ \varepsilon(x)) + L_{x_0}^{-1}(y - y_0). \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\| G(x) - x_0 \| \leq \| L_{x_0}^{-1} \| \, \| x - x_0 \| \, \| \varepsilon(x) \| + \| L_{x_0}^{-1} \| \, \| y - y_0 \| \quad (1.4)$$

D'après l'hypothèse (F est de classe $\mathscr{C}^1$) on en déduit que :

$$\lim_{x \to x_0} \| \varepsilon(x) \| = 0.$$

Ce qui traduit par :

$$\forall \, \delta > 0, \; \exists \, \eta_\delta > 0 \; : \| x - x_0 \| \leq \eta_\delta \implies \| \varepsilon(x) \| \leq \delta.$$

Ce qui tansforme (1.4) en :

$$\| G(x) - x_0 \| \leq \| L_{x_0}^{-1} \| \; (\eta_\delta \, \delta + \beta_1) \quad (1.5)$$

D'une part on a $x \in \bar{B}(x_0, \alpha_1)$ donc $\| x - x_0 \| \leq \alpha_1$ et d'autre part on a trouvé que $\| x - x_0 \| \leq \eta_\delta$, par conséquent il suffit de prendre :

$$0 < \alpha_1 \leq \eta_\delta \quad (1.6)$$

Pour assurer que $G(x) \in \bar{B}(x_0, \alpha_1)$, vu la relation (1.5), il suffit de prendre :

$$\| L_{x_0}^{-1} \| \; (\eta_\delta \, \delta + \beta_1) \leq \alpha_1 \implies \beta_1 \leq \frac{\alpha_1}{\| L_{x_0}^{-1} \|} - \eta_\delta \delta.$$

Enfin vu la relation (1.6) on a :

$$0 < \beta_1 \leq \frac{\alpha_1}{\| L_{x_0}^{-1} \|} - \alpha_1 \delta \quad (1.7)$$

2. *On montre qu'on peut choisir α_1 et β_1 de tel sorte que G soit contractante.*
   Soit $x, x' \in \bar{B}(x_0, \alpha_1)$,

$$\begin{aligned} G(x) - G(x') &= x - L_{x_0}^{-1}(F(x) - y) - x' + L_{x_0}^{-1}(F(x') - y). \\ &= (x - x') - L_{x_0}^{-1}(F(x) - F(x')). \\ &= (x - x') - L_{x_0}^{-1}(L_{x'}(x - x') + \| x - x' \| \, \varepsilon(x - x')). \\ &= L_{x_0}^{-1} \; [\, L_{x_0}(x - x') - L_{x'}(x - x') \,] - \| x - x' \| \, L_{x_0}^{-1} \, \varepsilon(x - x'). \\ &= L_{x_0}^{-1} \; [\, (L_{x_0} - L_{x'})(x - x') \,] - \| x - x' \| \, L_{x_0}^{-1} \, \varepsilon(x - x'). \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \| G(x) - G(x') \| \; &\leq \| L_{x_0}^{-1} \| \, \| L_{x_0} - L_{x'} \| \, \| x - x' \| + \\ &\qquad \| x - x' \| \, \| L_{x_0}^{-1} \| \, \| \varepsilon(x - x') \| \, . \end{aligned}$$

$$\leq \| x - x' \| \, \| L_{x_0}^{-1} \| \, (\| L_{x_0} - L_{x'} \| + \| \varepsilon(x - x') \|) \quad (1.8)$$

Or :

$$\begin{cases} \forall\ p>0,\ \exists\ \eta_p>0\ :||\ x-x'\ ||\leq\eta_p\ \Longrightarrow ||\ \varepsilon(x-x')\ ||\leq p \\ \qquad\qquad \exists\ \gamma_p>0\ :||\ x_0-x'\ ||\leq\gamma_p\ \Longrightarrow ||\ L_{x_0}-L_{x'}\ ||\leq p \end{cases} \tag{1.9}$$

On utilise (1.9), la relation (1.8) ce transforme en :

$$||\ G(x)-G(x')\ ||\leq 2p\ ||\ L_{x_0}^{-1}\ ||\ \ ||\ x-x'\ ||\ .$$

Pour que G soit contractante il suffit de choisir :

$$0<2p\ ||\ L_{x_0}^{-1}\ ||<1\Longrightarrow 0<p<\frac{1}{2\ ||\ L_{x_0}^{-1}\ ||}.$$

On choisit par exemple :

$$p=\frac{1}{3\ ||\ L_{x_0}^{-1}\ ||}.$$

On combine ceci avec les deux relations (1.6), (1.9) et le fait que :

$$||\ x-x'\ ||\leq 2\alpha_1,\quad ||\ x-x_0\ ||\leq\alpha_1.$$

Alors on en déduit qu'il suffit de choisir α_1 tel que :

$$0<\alpha_1<min\ \left(\ \eta_\delta,\frac{1}{2}\eta_p,\gamma_p\right).$$

Enfin vu la condition (1.7), il suffit de choisir β_1 tel que :

$$0<\beta_1\ \leq\frac{\alpha}{||\ L_{x_0}^{-1}\ ||}-\eta_{\delta_0}\delta.$$

□

1.2.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 3 *soient X, Y, Z trois espaces de Banach, et F une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie par :*

$$F:X\times Y\to\quad Z$$

$$(x,y)\ \mapsto F(x,y)$$

Soit (x_0,y_0) tel que $F(x_0,y_0)=0$, on suppose que $(\partial F/\partial y)_{x_0,y_0}\in\mathcal{L}(Y,Z)$ est inversible. Alors il existe $B_x(x_0,\alpha),B_y(y_0,\beta)$ et il existe une application unique

$$\varphi:B_x(x_0,\alpha)\to B_y(y_0,\beta)$$

$$x\quad\mapsto\quad\varphi(x)$$

tel que $F(x,\varphi(x))=0,\forall x\in B_x(x_0,\alpha)$, de plus φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$(D_x\varphi)(x)=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}_{(x,\varphi(x))}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x,\varphi(x))}.$$

Preuve. On pose :
$$g(x,y) = (x, F(x,y)).$$
En calculons le déterminant de la matrice jacobienne de g au point (x_0, y_0), on obtient :
$$\det Dg(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} I & 0 \\ D_x f(x_0,y_0) & D_y F(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \det D_y F(x_0,y_0) \neq 0$$
Par appliquation du théorème d'inversion local on a l'existence d'un voisinage $\mathscr{V}$ de (x_0, y_0) dans $X \times Y$ tel que g est bijective de $\mathscr{V}$ dans $g(\mathscr{V})$.

De plus vu que $g(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ donc $(x_0, 0) \in g(\mathscr{V})$. Soit mainenant $\mathscr{U}$ un voisinage de x_0 et $\mathscr{W}$ un voisinage de y_0 contient 0 tel que $\mathscr{U} \times \mathscr{W} \subset \mathscr{V}$.

Vu que g est bijective alors pour chaque $(x, 0)$ donné on a existence d'un unique (x, y) tel que $(x, 0) = g(x, y)$ ce qui définie une application ce classe $\mathscr{C}^1$ notée φ et vérifiée $y = \varphi(x)$.

On utilise l'expression de g on obtient que :
$$F(x, \varphi(x)) = 0.$$
On calcule la matrice jacobienne de $F(x, \varphi(x))$ cela permet d'avoir
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x,\varphi(x))} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x,\varphi(x))} (D_x\varphi)(x) = 0.$$
vu que $(\partial F/\partial y)_{(x_0,y_0)}$ est inversible et le fait que $y_0 = \varphi(x_0)$ donc la matrice $(\partial F/\partial y)_{(x,\varphi(x))}$ est inversible dans un voisinage de x_0 ce qui donne que dans un certain voisinage de x_0 on a :
$$(D_x\varphi)(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}_{(x,\varphi(x))} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x,\varphi(x))}.$$
□

1.2.3 Orthogonalité et opérateur de projection orthogonale

Définition 3 (orthogonale d'un ensemble) *soit $u = (u_1, u_2, ..., u_d)^t \in \mathbb{R}^d$. On note $u^\perp$ ou $(u^\perp)^t$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^d$ composé avec les directions orthogonales au vecteur u, ce qui traduit par :*
$$u^\perp = (u^\perp)^t = \left\{ v = (v_1, v_2, ..., v_d)^t \in \mathbb{R}^d : \quad v \cdot u = \sum_{j=1}^{d} v_j u_j = 0 \right\}.$$
Définition 4 (projecteur orthogonale) *On appelle projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^d$ sur le sous espace vectoriel F, l'opérateur Π_F définit par la condition :*
$$u = \Pi_F\, u + (I - \Pi_F)u,$$
ou
$$\Pi_F\, u \in F, \quad (I - \Pi_F)u \in F^\perp.$$

Définition 5 (produit tensoriel de deux vecteurs) *soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$ tels que :*

$$u = (u_1, u_2, ..., u_d)^t, \quad v = (v_1, v_2, ..., v_d)^t.$$

On définit le produit tensoriel de u et v par :

$$u \otimes v = (u_i\ v_j)_{1\leq i,j\leq d} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_dv_1 & \cdots & u_dv_d \end{pmatrix}.$$

1.3 Étude d'existence et d'unicité de solutions classiques

Définition 6 (solutions classiques) *Soit $u_0 \in \mathscr{C}^1(\Omega_r^0\ ;\ \mathbb{R}^d)$, on dit que u est solution classique de (1.1) si :*

- *$u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.*
- *u vérifie (1.1).*

Définition 7 (Les caractéristiques) *On appelle courbe caractéristique associée à (1.1), la courbe*

$$(C) : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}^d$$

$$t \longmapsto X(t,x).$$

ou X vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t,x) = V(u(t,X(t,x))) \\ \\ X(0,x) = x. \end{cases}$$

Proposition 1 *Soit $u_0 \in \mathscr{C}^1(\Omega_r^0\ ;\ \mathbb{R}^d)$, si $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\ ;\ \mathbb{R}^d)$ vérifie (1.1), alors u est constante le long des caractéristiques et elle est donnée par :*

$$u(t,x) = h(x - V(u)t).$$

Preuve. Le calcule permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t,X(t,x))) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,X(t,x)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,X(t,x))\frac{dX}{dt}(t,x). \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,X(t,x)) + V(u(t,X(t,x)))\frac{\partial u}{\partial x}(t,X(t,x)). \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t > 0$, on obtient :

$$u(t,X(t,x)) = u(0,X(0,x)) = u(0,x) = u_0(x).$$

c_à_d que u est constante le long des caractéristiques.
On montre qu'elle s'écrit sous la forme :

$$u(t,x) = h(x - V(u(t,x))t).$$

En effet :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt}(t,x) = V(u(t,X(t,x))) \Longrightarrow X(t,x) &= V(u(t,X(t,x)))t + X(0,x).\\ &= V(u(t,X(t,x)))t + x.\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}u(t,X(t,x)) &= u(0,X(0,x)).\\ &= u(0,x) = u_0(x) = h(x).\\ &= h(X(t,x) - V(u(t,X(t,x))t).\end{aligned}$$

Enfin :

$$u(t,x) = h(x - V(u(t,x))t).$$

□

D'après la proposition 1, toute solution classique est constante le long des caractéristiques qui sont des droites. Le problème est qu'en général, il n'y a pas de solutions classiques pour tout temps même si la condition initiale est très régulière.

Théorème 4 (Existence et unicité de solutions classiques) *Soit $h \in \mathscr{C}^1(\Omega_r^0\ ;\ \mathbb{R}^d)$, alors il existe $T > 0$ tel que le système (1.1) admet une unique solution sur des domaines de la forme :*

$$\Omega_r^T = \left\{\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d : ||\ x\ || + \mathbf{V}t \leq r\ \right\} \quad \mathbf{V} = \sup_{x \in \Omega_r^0} ||\ V(h(x))\ ||\ .$$

Preuve. On a déjà montrer que u s'écrit sous la forme :

$$u = h(x - tV(u)).$$

On pose :

$$\begin{cases} F(t,u) = u - h(x - tV(u)) \\ \\ F(0,h) = h - h = 0. \end{cases}$$

le calcule de la matrice jacobienne de $F(t,u)$ donne :

$$D_uF(t,u) = I - t(Dh)(x - tV(u))D_uV, \quad D_uF(0,h) = I.$$

on remarque que $D_uF(0,h) = 1 \neq 0$ puisque u et h sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors $F(t,u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus l'application $D_uF(0,h)$ est inversible, alors en utilisant le théorème (3), il existe $T > 0$ et une unique solution u tel que

$$F(t,u) = 0 \quad \forall\, t \in [0,T].$$

De plus, on sait d'après ce qui précède que u s'écrit sous la forme :

$$u = h(x - tV(u)).$$

Donc pour que u soit définie il faut que $x - tV(u) \in \Omega_r^0$, on utilise la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \| x - tV(u) \| &\leq \| x \| + t \| V(u) \| . \\ &\leq \| x \| + t \ \| V(h) \| . \\ &\leq \| x \| + t \, \mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \sup_{y \in \Omega_r^0} \| V(h(y)) \| . \end{aligned}$$

Ainsi pour assurer que $x - tV(u) \in \Omega_r^0$ il suffit d'imposer la condition :

$$\| x \| + t \, \mathbf{V} \leq r.$$

Donc la solution existe dans des domaines de la forme :

$$\Omega_r^T = \left\{ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d : \quad \| x \| + t\mathbf{V} \leq r \right\}.$$

$\square$

2

Conditions de compatibilité

2.1 Introduction

Soit $\varepsilon \in]0,1]$, $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 2$ et soit la fonction $V \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, on considère le système de Burger définit par :

$$\partial_t u^\varepsilon + (V \circ u^\varepsilon \cdot \nabla_x) u^\varepsilon = 0 \tag{2.1}$$

On complète (2.1) à l'aide d'une famille de données initiales $\{u^\varepsilon(0,x)\}_{\varepsilon\in]0,1]}$:

$$u^\varepsilon(0,x) = h^\varepsilon(x) = H^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \tag{2.2}$$

définie dans la boule $B[0,r) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ || \ x \ || \leq r\}$ avec $|| \ x \ || := \left(\sum_{i=0}^{d} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$H^\varepsilon(x,\theta) \in \mathscr{C}^1(B(0,r] \times \mathbb{T};\mathbb{R}^d), \quad \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \varphi(x) \in \mathscr{C}^1(B(0,r];\mathbb{R}).$$

Et tel que :

$$H^\varepsilon(x,\theta) \ := \ H(x,\theta) + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \ H^j(x,\theta) + O(\varepsilon^{m+1}), \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

On fixe $r > 0$ et on travaille sur des domaines localisés en espace du type :

$$\Omega_r^T \ := \ \left\{ \ (\ t, x \ ) \ \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \ : \ \ || \ x \ || \ + \mathbf{V} \ t \ \leq \ r \ \right\} \ .$$

On pose $W \ := V \circ H$. On impose de plus la condition $\partial_\theta W \not\equiv 0$ et le caractère non stationnaire de la phase :

$$\nabla\varphi(x) \not\equiv 0 \quad \forall x \in \Omega_r^0.$$

La contrainte (2.1) forme un système hyperbolique quasi-linéaire, d'après le Théorème 4 page 7, ce système admet une vitesse de propagation finie contrôlée par :

$$\mathbf{V} \ := \mathrm{Sup}\left\{ \ | \ V \circ H^\varepsilon(x,\theta) \ | \ ; (\varepsilon, x, \theta) \in [0,1] \times \Omega_r^0 \times \mathbb{T} \ \right\}.$$

D'après le même théorème on peut conclure que pour chaque $\varepsilon \in]0,1]$, il existe $T^\varepsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) ait une solution unique $u^\varepsilon(t,x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega_r^{T^\varepsilon}$.

2.2 Analyse des conditions de compatibilité

On introduit les courbes $t \longmapsto (X(t;x,\lambda), u(t;x,\lambda))$ associées à l'intégration de (2.1) le long de leurs caractéristiques. Ils sont définies par les équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X = V(u), & X(0;x,\lambda) = x \\ \\ \dfrac{d}{dt}u = 0, & u(0;x,\lambda) = \lambda \end{cases}$$

Les solutions correspondantes sont :

$$X(t;x,\lambda) = x + tV(\lambda), \quad u(t;x,\lambda) = \lambda.$$

On définit :

$$\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) := X(t;x,h^\varepsilon(x)) = x + tW^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right), \quad W^\varepsilon := V \circ H^\varepsilon.$$

Toute solution de classe $\mathscr{C}^1$ de $(2.1) - (2.2)$ doit être soumis à la relation :

$$u^\varepsilon(t, \mathbb{X}^\varepsilon(t,x)) = u^\varepsilon(t, x + tV \circ h^\varepsilon(x)) = h^\varepsilon(x).$$

Fixons $\varepsilon \in]0,1]$, pour t assez petit, disons pour $t \in [0, \tilde{T}^\varepsilon]$ avec $\tilde{T}^\varepsilon > 0$, le théorème 3 nous garanti que l'application :

$$\mathbb{X}^\varepsilon_t : B(0,r] \to \mathbb{X}^\varepsilon(t, B(0,r])$$

$$x \quad \mapsto \quad \mathbb{X}^\varepsilon(t,x)$$

est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Ensuite, grâce à la définition de la vitesse maximale de propagation V, tout point (t, x) contenu dans $\Omega^{\tilde{T}^\varepsilon}$ est sur d'être réalisé sous la forme $(t,x) = (t, \mathbb{X}^\varepsilon(t,y))$ pour un certain unique $y \in B(0,r]$. Nous pouvons définir :

$$u^\varepsilon(t,x) := h^\varepsilon \circ (\mathbb{X}^\varepsilon_t)^{-1}(x), \quad (t,x) \in \Omega^{\tilde{T}^\varepsilon} \tag{2.3}$$

Ce qui donne une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega^{\tilde{T}^\varepsilon}$ du problème de Cauchy $(2.1)_{-}(2.2)$. La relation (2.3) implique que (où Co$[M]$ représente la co-matrice de M) :

$$D_x u^\varepsilon(t,x) := D_x h^\varepsilon \circ (\mathbb{X}^\varepsilon_t)^{-1}(x) \, \frac{\text{Co}[D_x \mathbb{X}^\varepsilon(t,x)]}{\det D_x \mathbb{X}^\varepsilon(t,x)} \tag{2.4}$$

La solution $u^\varepsilon(t,x)$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega_r^{T^\varepsilon}$ peut être prolongée dans le temps aussi longtemps que la matrice $D_x u^\varepsilon(t,x)$ est bornée. Compte tenu de la formule (2.4), pour récupérer un $u^\varepsilon(t,x)$ solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega_r^{T^\varepsilon}$, il est nécessaire et suffisante d'avoir :

$$\det D_x \mathbb{X}^\varepsilon(t,x) \neq 0 \tag{2.5}$$

la matrice jacobienne des caractéristiques est exprimée par :

$$D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = \varepsilon^{-1}\, t\, \partial_\theta W^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \otimes \nabla\varphi(x) + I + tD_xW^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \tag{2.6}$$

Vu que det $D_x\mathbb{X}^\varepsilon(0,x) = 1 > 0$ et vu la contrainte (2.5), pour prolonger la solution à une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ il suffit d'impose la condition :

$$\det D_x\, \mathbb{X}^\varepsilon(t,x) > 0, \quad \forall (t,x) \in \Omega_r^{T^\varepsilon}.$$

Par conséquent, la durée de vie d'une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur un domaine de propagation est limitée vers le bas par :

$$T^\varepsilon := \text{Sup}\ \{\ T > 0;\ D_x\, \mathbb{X}^\varepsilon(t,x) > 0,\ \forall\ (t,x) \in [0,T] \times B(0,r[\ \}.$$

Le terme singulier à savoir :

$$\varepsilon^{-1}\, t\, \partial_\theta W^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \otimes \nabla\varphi(x).$$

qui figure dans la relation (2.6) conduit généralement a la conclusion :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \text{Sup}\ T^\varepsilon = 0. \tag{2.7}$$

ce qui rendait l'étude asymptotique des solutions impossible.

L'objectif de ce chapitre est de donnée les conditions nécessaires et suffisantes pour ne pas avoir (2.7), par contre pour avoir la contrainte :

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\ T^\varepsilon = T > 0 \tag{2.8}$$

pour cela :

— Dans la section 2.3 : au niveau de la définition 8 on va donner la notion des données compatibles autrement dit des familles de données initiales qui permet d'avoir la contrainte (2.8), ensuite dans la proposition 2 on va récupérer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un couple de deux fonctions φ et W permet de construire une donnée initiale compatible de la forme (2.2), et finalement au niveau de la définition 9 on va fixer la notion des couples compatibles.

— Dans la section 2.4 : les conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité donner au niveau de la section 2.3 proposition 2 sont difficiles à travailler avec, pour cela on va travailler avec une sous-classe des couples compatibles qu'on appelle couples bien préparés et qu'on les caractérise par la définition 10, ensuite dans la proposition 3 on va caractériser la structure de la phase φ pour un tel couple et dans la proposition 4 on va expliquer la structure du profil W.

2.3 Notion de familles compatibles

Définition 8 *On considère les oscillations :*

$$h^\varepsilon(x) = H^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right).$$

auxquelles sont associées les courbes caractéristiques de (2.1) définies par :

$$\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) := X(t;x,u_0^\varepsilon) = x + tW^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right), \quad W^\varepsilon := V \circ H^\varepsilon \tag{2.9}$$

On dit que la famille $\{h^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]}$ est compatible, s'il existe un $T>0$ et une constante $c>0$ tel que :

$$\det D_x\, \mathbb{X}^\varepsilon(t,x) \geq c > 0,\ \forall\, (t,x,\varepsilon) \in [0,T]\ \times B(0,r[\,\times\,]0,1].$$

Proposition 2 *Étant données les oscillations suivantes :*

$$h^\varepsilon(x) = H^\varepsilon\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right), \quad W(x,\theta) := V \circ H(x,\theta).$$

La famille $\{h^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]}$ est compatible si est seulement si :

1. $\nabla\varphi(x)\cdot\partial_\theta W(x,\theta) \equiv 0.$

2. $(-1)^d \det\,[\,\Pi_{\partial_\theta W(x,\theta)^\perp}(I + t\,D_x W(x,\theta))\Pi_{\nabla\varphi(x)^\perp}] \geq 0.$

Preuve.
$\boxed{\textit{Montrons le sens direct}}$ Supposons que la famille $\{h^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]}$ est compatible c_a_d qu'il existe un $T>0$ et une constante $c>0$ tel que :

$$\det D_x\, \mathbb{X}^\varepsilon(t,x) \geq c > 0, \quad \forall\, (t,x,\varepsilon) \in [0,T]\ \times B(0,r[\,\times\,]0,1].$$

Et montrons qu'on a 1 et 2. On utilise la relation (2.9) qui définie les caractéristique $\mathbb{X}^\varepsilon(t,x)$ et sachant que :

$$W^\varepsilon = V \circ H^\varepsilon = V \circ (H^0 + O(\varepsilon)),$$

le développent de la matrice $D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x)$ donne :

$$\begin{aligned} D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) &= \frac{1}{\varepsilon}\,t\,\partial_\theta W^\varepsilon \otimes \nabla\varphi + t\,D_x W^\varepsilon + I. \\ &= I + tD_uV\ \left(D_x H^0 + \frac{1}{\varepsilon}\partial_\theta H^0 \otimes \nabla\varphi + O(\varepsilon)\right). \\ &= I + tD_uVD_xH^0 + \frac{1}{\varepsilon}tD_uV\partial_\theta H^0 \otimes \nabla\varphi + tO(\varepsilon). \\ &= I + tD_xW + \frac{1}{\varepsilon}t\partial_\theta W \otimes \nabla\varphi + tO(\varepsilon). \\ &= \frac{1}{\varepsilon}M_0 + M_1 + tO(\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.10}$$

ou M_0 et M_1 sont définies par :

$$M_0 = t\partial_\theta W \otimes \nabla\varphi, \quad M_1 = I + tD_x W.$$

• Étape 1 : Montrons que :

$$\nabla\varphi(x) \cdot \partial_\theta W(x,\theta) \equiv 0.$$

1. On montre que $\nabla\varphi \cdot \partial_\theta W$ est nécessairement positive.
   Par absurde, on suppose que $\nabla\varphi \cdot \partial_\theta W < 0$, et on considère la base formée par les vecteurs $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ tel que :

   $$e_1 = \partial_\theta W, \quad \{e_2, \cdots, e_d\} \subset \nabla\varphi\perp.$$

   le calcule donne :

   $$\begin{aligned} M_0 e_1 &= t\ \partial_\theta W \otimes \nabla\varphi\ \partial_\theta W \ = \ t\ \nabla\varphi \cdot \partial_\theta W\ \partial_\theta W \ = \ t\ \nabla\varphi \cdot \partial_\theta W\ e_1. \\ M_0 e_2 &= t\ \partial_\theta W \otimes \nabla\varphi\ e_2 \ = \ t\ (\nabla\varphi \cdot e_2)\ \partial_\theta W \ = \ 0. \\ &\vdots \\ M_0 e_d &= t\ \partial_\theta W \otimes \nabla\varphi\ e_d \ = \ t\ (\nabla\varphi \cdot e_d)\ \partial_\theta W \ = \ 0. \end{aligned}$$

   soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ vers la base $\{e_1, \cdots, e_d\}$, on utilise la formule de changement de base on a :

   $$M_0 = P^{-1} \begin{pmatrix} t\ \nabla\varphi \cdot \partial_\theta W & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} P, \quad M_1 = P^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}}_{= M^b} P$$

   On combine ces deux expressions avec la relation (2.10) on obtient que :

   $$D_x \mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = P^{-1} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}\ t\ \nabla\varphi \cdot \partial_\theta W + a_{11} & a_{12} \cdots a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2d} \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} \cdots a_{dd} \end{pmatrix} + tO(\varepsilon) \right] P$$

   et donc dans un premier temps le calcul du déterminant de $D_x \mathbb{X}^\varepsilon(t,x)$ donne :

   $$\det D_x \mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = \det \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}\ t\ \nabla\varphi \cdot \partial_\theta W + a_{11} & a_{12} \cdots a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2d} \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} \cdots a_{dd} \end{pmatrix} + tO(\varepsilon) \right]$$

   On utilise la linéarité du déterminant par rapport au colonnes, et on note par :

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + tO(\varepsilon) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_d^*$$

On obtient :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}t\ \nabla\varphi \cdot \partial_\theta W & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1d} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{d2} & \cdots & \tilde{a}_{dd} \end{pmatrix} + \det \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1d} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{d1} & \tilde{a}_{d2} & \cdots & \tilde{a}_{dd} \end{pmatrix}}^{= M^b + tO(\varepsilon)}}_{= C}$$

Ce qui peut être simplifier en :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon}\ t\ \nabla\varphi \cdot \partial_\theta W\ \det \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{d2} & \cdots & \tilde{a}_{dd} \end{pmatrix}}_{= M^{b'}} + C \tag{2.11}$$

On montre que pour certain $T > 0$ on a :

$$\forall t \in [0,T] : \quad \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{d2} & \cdots & \tilde{a}_{dd} \end{pmatrix} > 0$$

en effet :

$$\begin{aligned} M_1(t,x,\theta) = I + tD_xW(x,\theta) &\Longrightarrow M_1(0,x,\theta) = I \\ &\Longrightarrow \det M_1(0,x,\theta) = 1 \end{aligned}$$

Or :

$$M_1(t,x,\theta) = P^{-1}M^b(t,x,\theta)P, \quad M_1(0,x,\theta) = I$$

donc $M^b(0,x,\theta) = I$ ce qui donne que $M^{b'}(0,x,\theta) = I$, on peut donc conclure qu'il existe un $T > 0$ tel que

$$\forall t \in [0,T] : \quad \det M^{b'}(t,x,\theta) \geq \frac{1}{2},$$

Ce qui transforme (2.11) en :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) \leq \frac{1}{2\varepsilon}\ t\ \nabla\varphi \cdot \partial_\theta W + C$$

Quand ε tend vers zero on a :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) \leq 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse de compatibilité, on obtient donc :

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta W \geq 0. \tag{2.12}$$

2. On montre que $\nabla\varphi(x)\cdot\partial_\theta W(x,\theta)$ est nul :
   Vu que $W(x,\theta)$ est périodique par rapport à θ on peut conclure que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \nabla\varphi(x)\cdot\partial_\theta W(x,\theta)d\theta &= \nabla\varphi(x)\cdot W(x,\theta)\,\Big|_0^1 .\\ &= \nabla\varphi(x)\cdot W(x,1)-\nabla\varphi(x)\cdot W(x,0).\\ &= 0.\end{aligned}$$

   et enfin en utilisant (2.12) on obtient :

$$\nabla\varphi(x)\cdot\partial_\theta W(x,\theta)\equiv 0.$$

• Étape 2 : Montrons que

$$(-1)^d \det\,[\,\Pi_{\partial_\theta W(x,\theta)^\perp}(I+tD_xW(x,\theta))\Pi_{\nabla\varphi(x)^\perp}]\geq 0.$$

On sait que $\nabla\varphi\cdot\partial_\theta W\equiv 0$, on considère la base de $\mathbb{R}^d$ formée par les vecteurs $\{e'_1,e'_2,\cdots,e'_d\}$ tel que :

$$e'_1=\partial_\theta W,\quad e'_d=(\nabla\varphi)^t.$$

le calcule donne :

$$\begin{aligned}&M_0e'_1=t\,(\partial_\theta W\otimes\nabla\varphi)\,\partial_\theta W=t\,\nabla\varphi\cdot\partial_\theta W\,\partial_\theta W=0.\\ &M_0e'_2=t\,(\partial_\theta W\otimes\nabla\varphi)\,e'_2=t\,\nabla\varphi\cdot\partial_\theta W\,e'_2=0.\\ &\quad\vdots\\ &M_0e'_d=t\,(\partial_\theta W\otimes\nabla\varphi)\,\nabla\varphi=t\,\nabla\varphi\cdot\partial_\theta W\,\nabla\varphi=t\mid\nabla\varphi\mid^2\partial_\theta W=t\mid\nabla\varphi\mid^2 e'_1.\end{aligned}$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ vers la base $\{e'_1,e'_2,\cdots,e'_d\}$, on utilise la formule de changement des bases on a :

$$M_0=P^{-1}\begin{pmatrix}0\;0\cdots & t\mid\nabla\varphi\mid^2\\ 0\;0\cdots & 0\\ \vdots\;\vdots\;\ddots & \vdots\\ 0\;0\cdots & 0\end{pmatrix}P,\quad M_1=P^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1d}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2d}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{d1}&a_{d2}&\cdots&a_{dd}\end{pmatrix}}_{=M^b}P$$

Ce qui transforme la relation (2.10) en :

$$D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x)=P^{-1}\begin{pmatrix}\tilde a_{11}\;\tilde a_{12}\cdots & \tilde a_{1d}+\dfrac{1}{\varepsilon}t\mid\nabla\varphi\mid^2\\ \tilde a_{21}\;\tilde a_{22}\cdots & \tilde a_{2d}\\ \vdots\;\;\vdots\;\;\ddots & \vdots\\ \tilde a_{d1}\;\tilde a_{d2}\cdots & \tilde a_{dd}\end{pmatrix}P$$

tel que :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_d^* : \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij} + tO(\varepsilon)$$

le calcul de déterminant de $D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t, x)$ donne dans un premier temps :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1d} + \dfrac{1}{\varepsilon}t \mid \nabla\varphi \mid^2 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{d1} & \tilde{a}_{d2} & \cdots & \tilde{a}_{dd} \end{pmatrix}$$

On utilise la linéarité du déterminant on obtient que :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1d} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{d1} & \tilde{a}_{d2} & \cdots & \tilde{a}_{dd} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1d-1} & \frac{1}{\varepsilon}t \mid \nabla\varphi \mid^2 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2d-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{d1} & \tilde{a}_{d2} & \cdots & \tilde{a}_{dd-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det(M^b + tO(\varepsilon)) + (-1)^d \frac{1}{\varepsilon} t \mid \nabla\varphi \mid^2 \det \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2d-1} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \cdots & \tilde{a}_{3d-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{d1} & \tilde{a}_{d2} & \cdots & \tilde{a}_{dd-1} \end{pmatrix}}_{= M^{b''}}$$

$$= C + (-1)^d \frac{1}{\varepsilon} \mid \nabla\varphi \mid^2 \det M^{b''}.$$

On va montrer que :

$$M^{b''} = \Pi_{\partial_\theta W(x,\theta)^\perp}(I + t\, D_x W(x,\theta))\Pi_{\nabla\varphi(x)^\perp}.$$

En effet en éliminant la première ligne et la dernière colonne de la matrice M^b ce qui correspond à une projection sur ${e'_1}^\perp$ et ${e'_d}^\perp$.
On montre que pour un certain $T > 0$ on a :

$$(-1)^d det\ M^{b''} \geq 0.$$

Par absurde on suppose que :

$$(-1)^d det\ M^{b''} < 0.$$

Vu que :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = C + (-1)^d \frac{1}{\varepsilon} \mid \nabla\varphi \mid^2 \det M^{b''}.$$

Donc lorsque ε tend vers 0 on obtient que :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) \le 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse de compatibilité. On conclut donc que :

$$(-1)^d \det\left[\, \Pi_{\partial_\theta W(x,\theta)^\perp}(I + tD_xW(x,\theta))\Pi_{\nabla\varphi(x)^\perp}\right] \ge 0.$$

$\boxed{\textit{Montrons le sens indirect}}$ Supposons qu'on a 1 et 2 et montrons que la famille $\{h^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]}$ est compatible. On sait que :

$$D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = I + tD_xW + \frac{1}{\varepsilon}t\partial_\theta W \otimes (\nabla\varphi)^t$$

En utilisant 1 on trouve :

$$D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) = I + tD_xW, \quad D_x\mathbb{X}^\varepsilon(0,x) = I.$$

Vu que $\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(0,x) = 1 \neq 0$ on peut conclure l'existence d'un $c > 0$ et $T > 0$ tels que :

$$\det D_x\mathbb{X}^\varepsilon(t,x) \ge c > 0 \quad \forall t \in [0,T].$$

□

Définition 9 (couple compatible) *Un couple (φ, W) est dit compatible s'il vérifié les deux conditions 1 et 2 de la Proposition 2 page 12.*

2.4 Existence de familles compatibles

Dans cette section on va montrer l'existence des couples compatibles, pour cela on va étudier une certaine classe de couples compatibles qu'on va les caractériser par la définition suivante :

Définition 10 (couple bien préparé) *Le couple (φ, W) est dit bien préparé sur la boule $B(0,r)$ si $\varphi \in \mathscr{C}^2(B(0,r);\mathbb{R})$, $W \in \mathscr{C}^2(B(0,r)\times\mathbb{T};\mathbb{R}^d)$ et satisfont le système de contraintes suivant :*

$$\begin{cases} \partial_\theta W(x,\theta) \subset \nabla\varphi(x)^\perp \\ \\ \Pi_{\partial_\theta W(x,\theta)^\perp} D_xW(x,\theta)\Pi_{\nabla\varphi(x)^\perp} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Dans tout qui suit, on considère un couple (φ, W) bien préparé c_a_d satisfaisant les contraintes (2.13).

Proposition 3 *Soit $\varphi \in \mathscr{C}^2(B(0,r);\mathbb{R})$ et $W \in \mathscr{C}^1(B(0,r)\times\mathbb{T};\mathbb{R}^d)$. Et soit le sous espace vectoriel E de $\mathbb{R}^d$ engendré par les vecteurs $\partial_\theta W(x,\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{T}$. Alors l'application :$x \longmapsto E(x)$ est constante sur les surfaces de niveau de φ. Plus précisément, Il existe un champ de sous espaces vectoriels $t \longmapsto \mathbb{E}(t) \subset \mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que :*

$$E(x) = \mathbb{E}\circ\varphi(x) \quad \forall x \in B(0,r).$$

Preuve.
On pose :

$$E(x) := \big\{\partial_\theta W(x,\theta)\,;\ \theta \in \mathbb{T}\big\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Alors on a :

$$E(x) \equiv \Big\{\sum_{j=1}^{N} \mu_j\ \partial_\theta W(x,\theta_j)\,;\ \mu_j \in \mathbb{R},\ \theta_j \in \mathbb{T},\ N \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Cet espace vérifie les propriété suivantes :

$$\dim E(x) = J = Cst\,, \quad \partial_\theta W(x,\theta) \in E(x)\,, \quad E(x) \subset \nabla\varphi(x)^\perp.$$

Soit $\{v_j\}_{j=1}^{d-1}$ la base de $\nabla\varphi^\perp$ définie comme suit :

$$v_k \ = \ (v_k^1, \cdots, v_k^{d-1}) \ = \ -\,\delta^{(k)} \ + \ \frac{\partial_k\varphi(x)}{\partial_d\varphi(x)}\,\delta^{(d)}\ , \quad k = 1\cdots d-1.$$

tel que $\delta^{(k)}$ est le k -ème vecteur de la base canonique.
Par permutation des composantes de $\mathbb{R}^d$, on peut établir que :

$$\nabla\varphi(x)^\perp = \ E(x) \oplus < v_1(x), \cdots, v_{d-J-1}(x) > .$$

Soit $\{e_j(x)\}_{j=1}^{J}$ une base de $E(x)$ définie par :

$$e_j(x) = v_{d-j}(x) + \sum_{k=1}^{d-J-1} \alpha_j^k(x)\ v_k(x)\,, \quad 1 \le j \le J.$$

La première condition dans le système (2.13) affirme que :

$$\partial_\theta W \in E(x) \subset \nabla\varphi^\perp.$$

Ce qui donne :

$$\partial_\theta W(x,\theta) = \sum_{j=1}^{J}\ \partial_\theta w_j^*(x,\theta)\ e_j(x).$$

Et par suite on peut décomposer W sous la forme :

$$W(x,\theta) = \bar{W}(x) + \sum_{j=1}^{J}\ w_j^*(x,\theta)\ e_j(x).$$

En utilisant la formule :

$$D_x\alpha(x)\ e(x) \ = \ e(x) \otimes \nabla\alpha(x) + \alpha(x) D_x e(x).$$

On obtient que :

$$D_x W = D_x \bar{W} + \sum_{j=1}^{J} e_j(x) \otimes \nabla w_j^* + w_j^* D_x e_j.$$

Et puis en utilisant la contrainte :

$$\Pi_{\partial_\theta W^\perp} D_x W \; \Pi_{\nabla\varphi^\perp} = 0.$$

On trouve que :

$$\begin{aligned} &\Pi_{\partial_\theta W^\perp} D_x \bar{W} \; \Pi_{\nabla\varphi^\perp} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{J} \left(\Pi_{\partial_\theta W^\perp} e_j(x) \otimes \nabla w_j^* \Pi_{\nabla\varphi^\perp} + w_j^* \Pi_{\partial_\theta W^\perp} D_x e_j \Pi_{\nabla\varphi^\perp} \right) = 0 \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Or on sait que $E(x) \subset \{\partial_\theta W, \quad \theta \in \mathbb{T}\}$ donc $\partial_\theta W^\perp \subset E(x)^\perp$ on combine ceci avec le fait que e_j est un élément de $E(x)$ on en déduit que :

$$\Pi_{\partial_\theta W^\perp} e_j(x) = 0.$$

Ce qui transforme l'équation (2.14) en :

$$\Pi_{\partial_\theta W^\perp} D_x \bar{W} \; \Pi_{\nabla\varphi^\perp} + \sum_{j=1}^{J} w_j^* \Pi_{\partial_\theta W^\perp} D_x e_j \Pi_{\nabla\varphi^\perp} = 0. \qquad (2.15)$$

Et on utilise le fait que $\partial_\theta W^\perp \subset E(x)^\perp$, la relation (2.14) ce simplifier en :

$$\Pi_{E(x)^\perp} D_x \bar{W} \; \Pi_{\nabla\varphi^\perp} + \sum_{j=1}^{J} w_j^* \Pi_{E(x)^\perp} D_x e_j \Pi_{\nabla\varphi^\perp} = 0.$$

Par séparation de la partie oscillante et la partie non oscillante on a :

$$\sum_{j=1}^{J} w_j^* \Pi_{E(x)^\perp} D_x e_j \Pi_{\nabla\varphi^\perp} = 0. \qquad (2.16)$$

Or $\dim E(x) = J$ donc il existe $\theta_i^x \in \mathbb{T}$ avec $1 \leq i \leq J$ tel que la famille $\{W(x;\theta_i^x), \; i = 1 \cdots J\}$ soit une base de $E(x)$, et donc :

$$\det \left(w_i^*(x, \theta_j^x) \right)_{1 \leq i,j \leq J} \neq 0, \qquad (2.17)$$

la relation (2.16) peut être mise sous la forme :

$$\begin{pmatrix} w_1^*(x,\theta_1^x) & \cdots & w_d^*(x,\theta_1^x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_d^*(x,\theta_1^x) & \cdots & w_d^*(x,\theta_d^x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{E(x)^\perp} D_x e_1 \Pi_{\nabla\varphi^\perp} \\ \vdots \\ \Pi_{E(x)^\perp} D_x e_d \Pi_{\nabla\varphi^\perp} \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.18)$$

On combine (2.17) avec (2.18) on en déduit que :

$$\Pi_{E(x)^{\perp}} D_x e_j \Pi_{\nabla\varphi^{\perp}} = 0, \quad \forall j = 1 \cdots J \tag{2.19}$$

L'espace vectoriel $E(x)^{\perp}$ est de dimension $d-J$, il est engendré par le vecteur $e_d(x) := \nabla\varphi$ et les $d-J-1$ vecteurs :

$$e_j(x) = -\delta^{(j-J)} + \sum_{k=1}^{J} \alpha_k^{(j-J)}(x)\delta^{(d-k)}; \quad j \in [J+1, d-1].$$

Ce qui transforme (2.19) en

$$e_l^t D_x e_j \Pi_{\nabla\varphi^{\perp}} = 0, \quad \forall j = 1, \cdots, J \quad l = J+1, \cdots, d. \tag{2.20}$$

Le calcule de $D_x e_j$ donne pout tout $j = 1, \cdots, J$:

$$\begin{aligned} D_x e_j = & \sum_{k=1}^{d-J-1} \nabla\alpha_j^k(x) v_k(x) \\ & + \left[\sum_{k=1}^{d-J-1} \alpha_j^k(x) \nabla\left(\frac{\partial_t\varphi(x)}{\partial_k\varphi(x)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial_t\varphi(x)}{\partial_{d-j}\varphi(x)}\right)\right] \delta^{(d)}, \end{aligned}$$

pour $l = J+1, \cdots, d-1$ on a :

$$e_l(x)^t D_x e_j = \nabla\alpha_j^{l-J}(x).$$

Ce qui transforme (2.20) en :

$$\nabla\alpha_j^{l-J}(x)\Pi_{\nabla\varphi^{\perp}} = 0, \quad \forall j = 1 \cdots J; \quad l = J+1, \cdots, d-1; \quad \forall x \in \Omega_r^0.$$

On peut donc affirmer que :

$$\nabla\alpha_j^{l-J}(x) \in \text{Vect}\,\langle\nabla\varphi\rangle\,, \quad \forall j = 1 \cdots J; \quad l = J+1, \cdots, d-1, \quad \forall x \in \Omega_r^0.$$

Ce qui revient a dire que les α_j^k sont des fonction de φ autrement dit, on peut toujours trouver une fonction $Z \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tel que :

$$\alpha_j^k = Z_j^k(\varphi).$$

Donc les coordonnées α_j^k des vecteurs e_j sont des fonctions de φ, d'où l'existence d'une application $\mathbb{E} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tel que :

$$E(x) = \mathbb{E} \circ \varphi(x), \quad \forall x \in \Omega_0^r.$$

□

Proposition 4 *soit (φ, W) un couple compatible, Alors il existe deux fonctions à valeurs vectorielles :*

$$W_{||} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^d), \quad W_{\perp} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$$

et une fonction scalaire :

$$\psi \in \mathscr{C}^1(\Omega^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$$

ajustées de manière à ce que :

$$W_{||}(t,s) \in \mathbb{E}(t), \quad W_{\perp}(t) \in \mathbb{E}(t)^{\perp}$$

et tel que le profil W se décompose de la manière suivante :

$$W(x,\theta) = W_{||}(\varphi(x), \psi(x,\theta)) + W_{\perp}(\varphi(x)).$$

Preuve. $\mathbb{R}^d$ est un espace euclidien donc :

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{E}(\varphi) \oplus \mathbb{E}(\varphi)^{\perp}.$$

Soit $\{z_j(\varphi)\}_{j=1}^J$ une base orthonormal de $\mathbb{E}(\varphi)$ et soit $\{e_k(\varphi)\}_{k=J+1}^d$ une base orthonormal de $\mathbb{E}(\varphi)^{\perp}$, ce qui permet d'écrire :

$$W = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} w_j(x,\theta) z_j(\varphi)}_{=W_1} + \underbrace{\sum_{k=J+1}^{d} w_k(x) e_k(\varphi)}_{=W_2}.$$

On utilise le fait que $\nabla\varphi \perp \mathbb{E}(\varphi)$, le calcule fournit :

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta W = \sum_{j=1}^{J} \partial_\theta w_j(x,\theta) \nabla\varphi \cdot e_j(\varphi) = 0.$$

On utilise la formule :

$$D_x v(\varphi) = v'(\varphi) \otimes \nabla\varphi$$

On a :

$$D_x z_j(\varphi) = z_j'(\varphi) \otimes \nabla\varphi, \quad D_x e_k(\varphi) = e_k'(\varphi) \otimes \nabla\varphi$$

Ce qui permet d'exprimer la matrice jacobienne de W sous la forme :

$$D_x W = \sum_{j=1}^{J} z_j(\varphi) \otimes \nabla w_j(x,\theta) + w_j(x,\theta) z_j'(\varphi) \otimes \nabla\varphi$$
$$+ \sum_{k=J+1}^{d} e_k(\varphi) \otimes \nabla w_k(x) + w_k(x) e_k'(\varphi) \otimes \nabla\varphi.$$

Ce qui donne que :

$$
\begin{aligned}
D_x W \Pi_{\nabla\varphi^\perp} &= \sum_{j=1}^{J} z_j(\varphi)\otimes \nabla w_j(x,\theta)\Pi_{\nabla\varphi^\perp} + w_j(x,\theta) z_j'(\varphi)\underbrace{\nabla\varphi^t \Pi_{\nabla\varphi^\perp}}_{=0} \\
&\quad + \sum_{k=J+1}^{d} e_k(\varphi)\otimes \nabla w_k^t(x)\Pi_{\nabla\varphi^\perp} + w_k(x) e_k'(\varphi)\underbrace{\nabla\varphi^t \Pi_{\nabla\varphi^\perp}}_{=0}. \\
&= \sum_{j=1}^{J} z_j(\varphi)\otimes \nabla w_j(x,\theta)\Pi_{\nabla\varphi^\perp} \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=J+1}^{d} e_k(\varphi)\otimes \nabla w_k(x)\Pi_{\nabla\varphi^\perp} \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Soit $(x,\theta)\in\Omega_r^0\times\mathbb{T}$ tel que $\partial_\theta W\neq 0$ sans perte de généralité on peut supposer que $\partial_\theta W_J\neq 0$, on remarque que :

$$
\partial_\theta W^\perp = \text{Vect}\left\langle e_{J+1}(\varphi),\cdots,e_d(\varphi),f_1,\cdots,f_{J-1}\right\rangle.
$$

$$
f_i = \partial_\theta w_J(x,\theta) z_i(\varphi) - \partial_\theta w_i(x,\theta) z_J(\varphi), \quad i = 1\cdots J-1.
$$

On combine ceci avec la relation (2.21) cela permet d'avoir que :

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\partial_\theta W^\perp} D_x W \Pi_{\nabla\varphi^\perp} &= \sum_{k=J+1}^{d} \Pi_{\partial_\theta W^\perp} e_k(\varphi)\otimes\nabla w_k(x,\theta)\Pi_{\nabla\varphi^\perp} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{J}\Pi_{\partial_\theta W^\perp} z_j(\varphi)\otimes\nabla w_j(x)\Pi_{\nabla\varphi^\perp} \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Or on sait que :

$$
\Pi_{\partial_\theta W^\perp} u = \sum_{k=J+1}^{d}(e_k\cdot u)e_k + \sum_{k=1}^{J-1}(f_k\cdot u) f_k.
$$

Ce qui donne que :

$$
\Pi_{\partial_\theta W^\perp} e_j(\varphi) = \sum_{k=J+1}^{d}(e_k\cdot e_j(\varphi))e_k + \sum_{k=1}^{J-1}(f_k\cdot e_j(\varphi)) f_k = e_j.
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\partial_\theta W^\perp} z_l(\varphi) &= \sum_{k=J+1}^{d}(e_k\cdot z_l(\varphi))e_k + \sum_{k=1}^{J-1}(f_k\cdot z_l(\varphi)) f_k. \\
&= \sum_{k=1}^{J-1}(f_k\cdot z_l(\varphi)) f_k.
\end{aligned}
$$

De plus la valeur de $f_k\cdot z_l(\varphi)$ peut être exprimer par :

$$f_k \cdot z_l(\varphi) = \partial_\theta w_J(x,\theta) z_k(\varphi) \cdot z_l(\varphi) - \partial_\theta w_k(x,\theta) z_J(\varphi) \cdot z_l(\varphi).$$

$$= \begin{cases} \partial_\theta w_J(x,\theta) \; si \; k = l \\ \\ 0 \qquad\qquad si \; k \neq l. \end{cases}$$

On utilise ces informations, la contrainte (2.22) se simplifier en :

$$\begin{aligned} \Pi_{\partial_\theta W^\perp} D_x W \Pi_{\nabla\varphi^\perp} = & \sum_{k=J+1}^{d} e_k(\varphi) \otimes \nabla w_k(x,\theta) \Pi_{\nabla\varphi^\perp} \\ & + \sum_{j=1}^{J-1} \partial_\theta w_J(x,\theta) f_j(\varphi) \otimes \nabla w_j(x) \Pi_{\nabla\varphi^\perp}. \\ = & \sum_{k=J+1}^{d} e_k(\varphi) \otimes \nabla w_k(x,\theta) \Pi_{\nabla\varphi^\perp} \\ & + \sum_{j=1}^{J-1} \partial_\theta w_J(x,\theta) [\partial_\theta w_J(x,\theta) z_i(\varphi) \\ & - \partial_\theta w_i(x,\theta) z_J(\varphi)] \otimes \nabla w_j(x) \Pi_{\nabla\varphi^\perp}. \end{aligned}$$

On utilise le fait que $\{z_j(\varphi)\}_{j=1}^{J}$ est une base orthonormal du sous espace vectoriel $\mathbb{E}(\varphi)$ et que $\{e_k(\varphi)\}_{k=J+1}^{d}$ est une base orthonormal du sous espace vectoriel $\mathbb{E}(\varphi)^\perp$, on obtient que :

$$\nabla w_k^t(x,\theta) \Pi_{\nabla\varphi^\perp} = 0, \quad \forall k = J+1 \cdots d \tag{2.23}$$

$$\partial_\theta w_J(x,\theta) \nabla w_j(x,\theta) - \partial_\theta w_j(x,\theta) \nabla w_J(x,\theta) = 0, \;\; \forall j = 1 \cdots J-1 \tag{2.24}$$

La relation (2.23) affirme que $\nabla w_k \in \mathbb{E}(\varphi)$, donc :

$$w_k(x) = \tilde{w}_k(\varphi(x)), \quad \forall k = J+1 \cdots d$$

Maintenant on considère l'ensemble :

$$\mathcal{G}_t = \left\{ x \in \Omega_r^0 : \quad \varphi(x) = t \right\}.$$

Et l'application :

$$\begin{array}{rl} \Gamma_t : \mathcal{G}_t \times \mathbb{T} \to & \mathbb{R}^J \\ (x,\theta) & \to (w_1, \cdots, w_J)^t \end{array}$$

La relation (2.24) affirme que Γ_t est du rang un ce qui permet de conclure qu'il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$ tel que :

$$\Gamma_t(x,\theta) = \tilde{\Gamma}_t(\psi(x,\theta)) = \tilde{\Gamma}(t, \psi(x,\theta)).$$

Donc :

$$w_j(x,\theta) = \tilde{w}_j(t, \psi(x,\theta)), \quad \forall j = 1 \cdots J, \quad \forall (x,\theta) \in \mathcal{G}_t \times \mathbb{T}.$$

Donc :

$$w_j(x,\theta) = \tilde{w}_j(\varphi(x), \psi(x,\theta)), \quad \forall j = 1 \cdots J, \quad \forall (x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}$$

$$W = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} \tilde{w}_j(\varphi(x), \psi(x,\theta)) z_j(\varphi)}_{= W_{||} \in \mathbb{E}(\varphi)} + \underbrace{\sum_{k=J+1}^{d} \tilde{w}_k(\varphi(x)) e_k(\varphi)}_{= W_{\perp} \in \mathbb{E}(\varphi)^{\perp}}$$

□

3

Propagation

Le but de ce chapitre est d'expliquer comment la donnée initiale oscillante $h^\varepsilon(x)$ est transformée par l'équation d'évolution (2.1). Ci-dessous, nous considérons cette question dans un contexte simplifiée, en ne regardant que des solutions d'ondes simples.

Définition 11 *Soit* $\varepsilon \in]0,1]$. *Nous disons que* $u^\varepsilon \in \mathscr{C}^1(\Omega_r^{T^\varepsilon};\mathbb{R})$ *est une onde simple si elle peut être mise sous la forme suivante :*

$$u^\varepsilon(t,x) = \mathbf{H}\left(t, x, \frac{\phi(t,x)}{\varepsilon}\right), \quad \mathbf{H} \in \mathscr{C}^1(\Omega_r^{T^\varepsilon} \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^d), \quad \phi \in (\Omega_r^{T^\varepsilon}, \mathbb{R}).$$

Théorème 5 *Supposons que le couple :*

$$(\varphi, W) \in \mathscr{C}^2(B(0,r];\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^1(B(0,r] \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^d), \quad W = V \circ H \tag{3.1}$$

est bien préparé, alors le problème de Caushy formé par le système (à priori surdéterminé) :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{H} + V \circ \mathbf{H} \cdot \nabla_x \mathbf{H} = 0 \\ \partial_t \phi + \langle V \circ \mathbf{H} \rangle \cdot \nabla_x \phi = 0 \\ (V \circ \mathbf{H})^* \cdot \nabla_x \phi = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

avec la donnée initiale :

$$\mathbf{H}(0,x,\theta) = \mathbf{H}(x,\theta), \quad \phi(0,x) = \varphi(x) \tag{3.3}$$

admet une solution unique sur $\Omega^T \times \mathbb{T}$ *pour certains* $T > 0$. $\forall \varepsilon \in]0,1]$ *l'onde simple*

$$u^\varepsilon = \mathbf{H}\left(t, x, \frac{\phi(t,x)}{\varepsilon}\right).$$

ainsi récupérée est solution de (2.1) sur Ω^T. *De plus,* $\forall\ t \in [0,T]$, *le couple* $(\phi(t,.), \mathbf{H}(t,.))$ *est compatible.*

Preuve. Composez l'équation première de (3.2) avec $D_u V \circ \mathbf{H}$ afin d'extraire :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + V \circ \mathbf{W} \cdot \nabla_x \mathbf{W} = 0 \\ \partial_t \phi + (\bar{\mathbf{W}} \cdot \nabla_x)\phi = 0 \\ \mathbf{W}^* \cdot \nabla_x \phi = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{W} = V \circ \mathbf{H} \tag{3.4}$$

Avec :

$$\langle W\rangle(x) = \bar{W}(x) := \int_{\mathbb{T}} W(x,\theta)d\theta, \quad W^*(x,\theta) := W(x,\theta) - \bar{W}(x,\theta).$$

Celle-ci doit être associée à la donnée initiale :

$$\mathbf{W}(0,x,\theta) = W(x,\theta), \quad \phi(0,x) = \varphi(x).$$

Et puisque le couple (φ, W) est bien préparé, on peut écrire W sous la forme :

$$W(x,\theta) = W_{||}(\varphi(x), \psi(x,\theta)) + W_{\perp}(\varphi(x)).$$

Résolvons localement dans le temps, disons sur Ω^T pour certains $T > 0$, la loi de conservation scalaire :

$$\partial_t \phi + W_{\perp}(\phi) \cdot \nabla_x \phi = 0 \tag{3.5}$$

Rappelons que $E(x) = \mathbb{E} \circ \varphi(x)$ est engendré par les J vecteurs :

$$e_j(x) = Z_j \circ \varphi(x).$$

Fixons $j \in [1, J]$ et calculons :

$$\begin{aligned}
[\partial_t + W_{\perp}(\phi) \cdot \nabla_x](Z_j \circ \phi \cdot \nabla_x \phi) &= [\partial_t + W_{\perp}(\phi) \cdot \nabla_x](Z_j(\phi) \cdot \nabla_x \phi). \\
&= [\partial_t Z_j(\phi) + W_{\perp}(\phi) \cdot \nabla_x Z_j(\phi)] \cdot \nabla_x \phi \\
&\quad + Z_j(\phi) \cdot [\partial_t \nabla_x \phi + \nabla_x(\nabla_x \phi) W_{\perp}(\phi)]. \\
&= [\partial_t \phi + W_{\perp}(\phi) \cdot \nabla_x \phi] Z_j'(\phi) \cdot \nabla_x \phi \\
&\quad + Z_j(\phi) \cdot [\partial_t \nabla_x \phi + \nabla_x(\nabla_x \phi) W_{\perp}(\phi)]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

On utilise la relation (3.5) pour remplacer $\partial_t \phi$ par $-W_{\perp}(\phi) \cdot \nabla_x \phi$, on trouve :

$$\partial_t \nabla_x \phi = \nabla_x(-W_{\perp}(\phi) \cdot \nabla_x \phi) = -(\nabla_x \phi \otimes W_{\perp}'(\phi)) \nabla_x \phi - \nabla_x(\nabla_x \phi) W_{\perp}(\phi).$$

On combine ceci avec la relation (3.5), cela transforme la contrainte (3.6) en :

$$[\partial_t + W_{\perp}(\phi) \cdot \nabla_x](Z_j \circ \phi \cdot \nabla_x \phi) + (\nabla_x \phi \cdot W_{\perp}' \circ \phi)\ (Z_j \circ \varphi \cdot \nabla_x \phi) = 0 \tag{3.7}$$

En utilisant l'information suivante :

$$\phi(0,x) = \varphi(x) \quad et \quad \nabla \varphi(x) \in E(x)^{\perp}, \quad \forall x \in \Omega_r^0.$$

On obtient :

$$(Z_j \circ \phi \cdot \nabla_x \phi)(0,x) = 0, \quad \forall (j,x) \in [1,J] \times B(0,r].$$

On combine ceci avec l'équation (3.7) cela permet de conclure que cette identité de polarisation se propage dans le temps autrement dit :

$$Z_j \circ \phi(t,x) \cdot \nabla_x \phi(t,x) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times B(0,r].$$

Ce qui est équivalent à dire que :

$$\nabla_x \phi(t,x) \subset \mathbb{E} \circ \phi(t,x)^{\perp}, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times B(0,r].$$

Introduisons la fonction :

$$\tilde{W}(t,s) := W_{||}(t,s) + W_{\perp}(t), \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

Et la loi de conservation scalaire :

$$\partial_t \Psi + \tilde{W}(\phi(t,x),\Psi) \cdot \nabla_x \Psi = 0. \tag{3.8}$$

On associé (3.8) à la condition initiale :

$$\Psi(0,x,\theta) = \psi(x,\theta), \quad \psi \in \mathscr{C}^1(B(0,r] \times \mathbb{T};\mathbb{R}). \tag{3.9}$$

Dans (3.8), la variable θ joue le role d'un paramètre. Pout $T > 0$ petit, le problème de Caushy (3.8)-(3.9) a une solution locale sur Ω^T. Finallement definons le profile $\mathbf{W}$ par :

$$\mathbf{W}(t,x,\theta) := \tilde{W}(\phi(t,x),\Psi(t,x,\theta)), \quad \mathbf{W}(0,x,\theta) = W(x,\theta).$$

Par construction, on a :

$$\mathbf{W}^*(t,x,\theta) = W_{||}(\phi(t,x),\Psi(t,x,\theta))^*.$$

Et puisque $W_{||} \in \mathbb{E}(t)$ et $\nabla_x \phi(t,x) \subset \mathbb{E} \circ \phi(t,x)^{\perp}$ alors :

$$\mathbf{W}^*(t,x,\theta) \cdot \nabla_x \phi(t,x) = 0, \quad \forall (t,x) \in \Omega^T.$$

En utilisant (3.5), on obtient :

$$\partial_t \phi + \mathbf{W} \cdot \nabla_x \phi = \partial_t \phi + W_{\perp} \circ \phi \cdot \nabla_x \phi = 0.$$

Et par (3.8), on peut déduire :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{W} \cdot \nabla_x \mathbf{W} = \partial_s \tilde{W}(\partial_t \Psi + \mathbf{W} \cdot \nabla_x \Psi) = 0, \quad \mathbf{W}(0,x,\theta) = W(x,\theta).$$

Pour résumer, nous avons construit des fonctions ϕ et $\mathbf{W}$ satisfaisant (3.4).
Maintenant on va s'itéresser à (3.2). Tout d'abord, résoudre séparément (sur Ω^T avec $T > 0$) le problème de Cauchy :

$$\partial_t \mathbf{H} + V \circ \mathbf{H} \cdot \nabla_x \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H}(0,x,\theta) = H(x,\theta) \tag{3.10}$$

Notons que l'expression $\tilde{\mathbf{W}} := V \circ \mathbf{H}$ est par construction soumis à :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{W}} + \tilde{\mathbf{W}} \cdot \nabla_x \tilde{\mathbf{W}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{W}}(0,x,\theta) = W(x,\theta) \tag{3.11}$$

Les problèmes de Cauchy (3.8) et (3.11) sont faits des mêmes contraintes quasi-linéaires et les mêmes données initiales. donc les solutions de classe $\mathscr{C}^1$ correspondant doit coincident, et nous avons nécessairement $\tilde{\mathbf{W}} = V \circ \mathbf{H} \equiv \mathbf{W}$ on Ω^T.

Brièvement, l'équation premiere de (3.2) est vérifié car c'est précisément (3.10) tandis que les deux autres conditions de (3.2) sont satisfiés car ils correspondent exactement aux deux dernières conditions de (3.4). Ceci explique pourquoi le système (3.2) - (3.3) a une solution unique sur Ω^T pour certains $T > 0$.
Finalement définons l'onde simple :

$$u^\varepsilon := \mathbf{H}\left(t, x, \frac{\phi(t,x)}{\varepsilon}\right).$$

Et calculons :

$$\begin{aligned}\partial_t u^\varepsilon + V(u^\varepsilon) \cdot \nabla_x u^\varepsilon = (\partial_t \mathbf{H} + V \circ \mathbf{H} \cdot \nabla_x \mathbf{H}) \left(t, x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \left[\, \partial_t \phi + V \circ \mathbf{H} \cdot \nabla_x \phi) \partial_\theta \mathbf{H} \,\right] \left(t, x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

Le fait que $u^\varepsilon(t,x)$ est une solution de (2.1) devient une conséquence directe des équations de (3.2). En outre, la définition de $\mathbf{W}$ indique clairement que la structure (3.1) est conservée pour $t \in [0,T]$. Par conséquent, pour tout $t \in [0,T]$, la trace $(\phi(t,.), \mathbf{W}(t,.))$ est toujours bien préparé. □

Bibliographie

1. J. T. Beale, T. Kato, and A. Majda. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3- d euler equations. *Commun. Math. Phys.*, 94 :61–66, 1984.
2. C.Cheverry and M.Houbad. Compatibility conditions to allow some large amplitude wkb analysis for burger's type systems. *Phys. D*, 237(10- 12) :1429–1443, 2008.
3. M.Houbad C.Cheverry. A class of large amplitude oscillating solutions for three dimentional euler equations. *Communication on Pure and Applied Analysis*, 11(5) :1661–1697, 2012.
4. J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves. *Duke Math. J.*, 70(2) :373–404, 1993.
5. A. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, volume 53 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1984.
6. Andrew J. Majda and Andrea L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
7. M.Houbad. *Oscillations, feuilletages, lois de Burger*. PhD thesis, University of Rennes 1, France, October 2010.
8. F. Poupaud. Global smooth solutions of some quasi-linear hyperbolic systems with large data. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 8(4) :649–659, 1999.
9. S. Schochet. The weak vorticity formulation of the 2-d euler equations and concentration-cancellation. *Comm. Partial Differential Equations*, 20 :1077–1104, 1995.
10. Denis Serre. *Systems of conservation laws. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Hyperbolicity, entropies, shock waves, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.

Résumé
Dans ce document on va étudier le système de burger multidimensionnelle.

$$(\mathcal{B}) \qquad \partial_t u^\varepsilon \ + \ (\ u^\varepsilon \cdot \nabla \ ) \ u^\varepsilon \ \equiv \ 0.$$

associé à une condition initiale $u^\varepsilon(0,x) = h(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon})$ avec $\varepsilon \in]0,1]$. le but est de chercher des conditions de compatibilités sur la donnée initiale pour avoir existence et unicité de solutions pour $(\mathcal{B})$ lorsque ε tend vers zéro.

Abstract
In this documents we study the burger multidimentionnel system.

$$(\mathcal{B}) \qquad \partial_t u^\varepsilon \ + \ (\ u^\varepsilon \cdot \nabla \ ) \ u^\varepsilon \ \equiv \ 0.$$

associated with an initial condition $u^\varepsilon(0,x) = h(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon})$. The goal is to fixe a compatibilities conditions to have the existence and uniqueness of the solutions of $(\mathcal{B})$ when ε tend to zero.