

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Modélisation mathématique des systèmes complexes

présenté par

FRIOUI Mohammed Nour

Soutenu le : 04-06-2016

Existence d'ondes progressives pour un modèle SIR avec diffusion

Soutenu devant le jury composé de :

M. A.MOUSSAOUI.	Pr. Université de Tlemcen.	Président
M. B.ABDELLAOUI.	Pr. Université de Tlemcen.	Examineur
M. S.E-H.MIRI.	MCA. Université de Tlemcen.	Examineur
M. T.M.TOUAOULA.	Pr. Université de Tlemcen.	Encadreur

Année Universitaire : 2015-2016.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mes très chers parents qui m'ont toujours soutenus , et qui ont tout sacrifié pour mes études, tout le mérite leurs revient. Qu'ils trouvent ici ma sincère reconnaissance et mon amour.

A mes deux chères sœurs.

A mes oncles, tantes, cousins, cousines paternelles et maternelles.

A ma grand-mère paternelle.

A mes chers amis et à tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH de m'avoir assisté pour réaliser ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à mon encadreur Monsieur Tarik Mohammed TOUAOULA Professeur à l'Université Abou Bekr Belkaid -Tlemcen, pour m'avoir permis d'effectuer ce travail sous sa direction et m'a offert la possibilité de travailler sur un sujet passionnant, mais aussi pour sa gentillesse, sa modestie et ces précieux conseils.

J'adresse toute ma gratitude et mes plus sincères remerciements à Monsieur Ali MOUSSAOUI professeur en mathématique à l'Université Abou Bekr Belkaid -Tlemcen et responsable du master, pour son soutien et encouragement durant nos deux ans du master et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

Je prie Monsieur Boumediane ABDELLAOUI Professeur en mathématique à l'Université Abou Bekr Belkaid -Tlemcen, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait d'examiner ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Sofiane El-Hadi MIRI Maître de conférences à l'Université Abou Bekr Belkaid -Tlemcen, pour la littérature qu'il m'a procuré, son soutien et aussi pour avoir accepté de faire partie du jury.

Il m'est agréable d'exprimer ma respectueuse gratitude et mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont soutenu, de près ou de loin pour mener ce travail à terme.

Table des matières

Introduction	5
1 Outils mathématiques	11
2 Modèle SIR structuré en âge et en espace	16
2.1 Présentation de l'étude et résultats principaux	18
2.2 L'existence d'onde progressive pour $R_0 > 1$	20
2.3 Non-existence d'onde progressive pour $R_0 \leq 1$	47
Bibliographie	49

Introduction

La propagation des ondes est observée dans de nombreux phénomènes mathématiques modélisés par des équations aux dérivées partielles, par exemple : la dynamique de population [7], l'épidémiologie [8].

L'étude des équations de réaction-diffusion nous permet de mieux comprendre les phénomènes de propagation grâce à l'existence de solutions particulières appelées ondes progressives.

L'équation de référence dans ce domaine

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{ru(1-u)}_{\text{partie reaction}} + \underbrace{d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{partie diffusion}}$$

a été introduite en 1937 par R.A Fisher [3] qui décrit la propagation de certains gènes dans une population, dont l'inconnue u représente la densité des gènes dominants, r désigne le taux de croissance et d le coefficient de diffusion.

La même année, A.N Kolmogorov, Petrovskii, et Piskunov ont également étudié cette équation avec un terme général de réaction

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

où f une fonction de classe $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$ et vérifie les propriétés suivantes :

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(u) > 0 \quad \forall 0 < u < 1 \quad \text{et} \quad f'(u) < f'(0) \quad \forall 0 < u < 1.$$

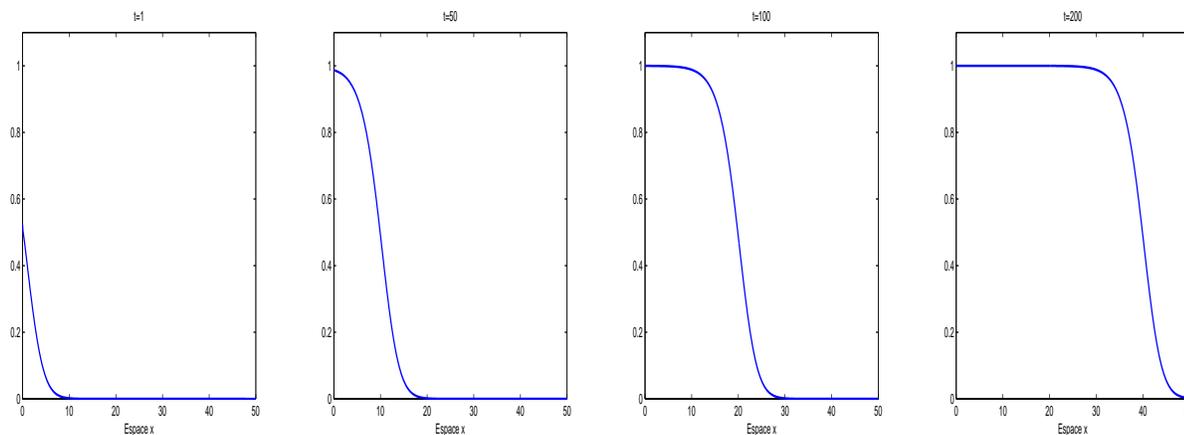


FIGURE 1 – Évolution de la solution de l'équation de Fisher par rapport au temps, avec $r = 1$ et $d = 1$.

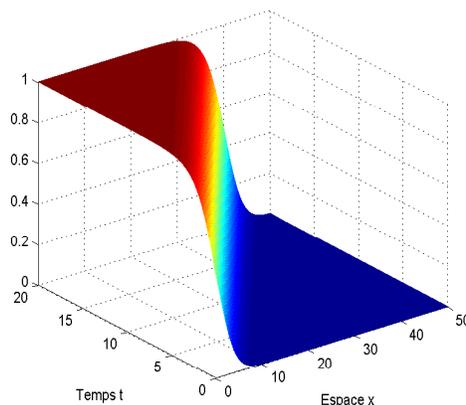


FIGURE 2 – la solution numérique de l'équation de Fisher en 3D.

Ensuite de nombreux travaux ont été publiés sur la théorie de combustion (Zeldovich et Frank-Kamenetski [?], Zeldovich et Semenov [11]).

Dans le livre de B.H. Gilding et R. Kersner [4], on trouve une sélection de différents modèles de réaction-diffusion qui ont marqué l'histoire des ondes progressives.

L'étude des ondes et leurs propagation connaît un développement rapide, au vue du nombre de documents qui ne cesse d'augmenter depuis quelques années. Elle est devenue une partie essentielle de l'analyse mathématique des équations paraboliques non-linéaires.

Ce sont des solutions particulières invariantes par translation en espace, caractérisant le comportement asymptotique.

Une telle solution s'écrit sous la forme suivante :

$$u(t, x) = v(x - ct) \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0,$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante qui représente la vitesse de l'onde. Si de plus

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} v(z) = v_{\pm} \quad \text{telle que } v_+ \neq v_-, \quad z = x - ct.$$

Alors l'onde est dite de type front (voir figure 3).

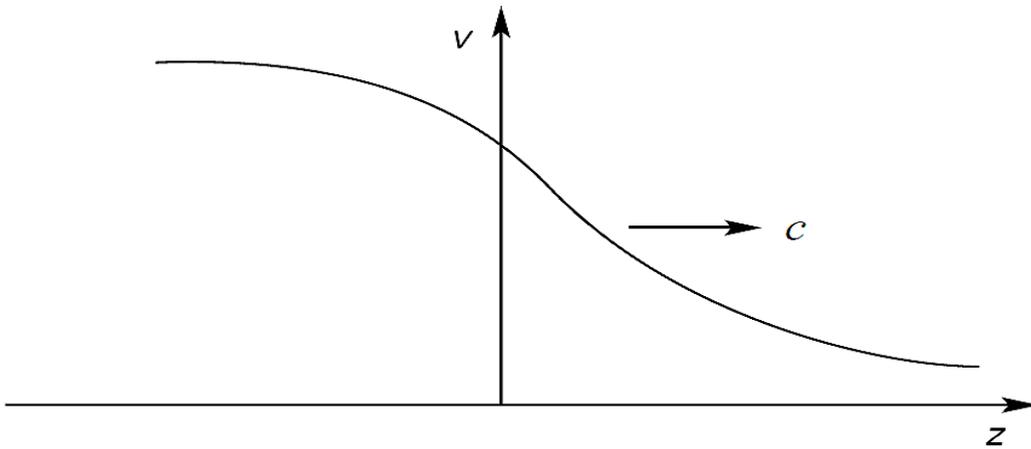


FIGURE 3 – Profil d'une onde progressive de type front.

Modèle SIR simple avec diffusion

C'est un modèle épidémiologique compartimental. La population est divisée en trois compartiments d'individus : les individus susceptibles S, infectés I et rétablis R.

On suppose que la durée de la maladie est assez brève, ainsi on néglige les phénomènes démographiques (naissances, décès, immigration).

Les individus infectés sont tous contagieux et chaque personne qui a guéri de cette maladie est immunisée.

Le schéma suivant représente les interactions entre chaque compartiment :



β :taux de contamination.

α : taux de guérisons.

On s'intéresse aussi à la répartition spatiale des individus susceptibles, infectés et rétablis, on rajoute donc une composante spatiale à S, I et R. Comme c'est le cas dans la peste noire (voir Murray [8]), les individus sains et infectés se déplacent tous les deux.

On considère le modèle SIR avec diffusion suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = d_s \Delta_x S - \beta SI, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_i \Delta_x I + \beta SI - \alpha SI, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = d_r \Delta_x R + \alpha SI, \\ S(0, x) \geq 0, I(0, x) \geq 0 \text{ et } R(0, x) \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

d_s , d_i et d_r sont les coefficients de diffusion, on remarque que la population totale du modèle 1 sans diffusion reste constante (i.e $S+I+R=N=cste$). On trouve l'étude mathématique de ce système dans [8].

On note $R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$ taux de reproduction de base. Il représente le nombre moyen d'individus infectés engendrés par un seul individu infecté durant sa période d'infectiosité. La solution de notre système est observée numériquement sous forme d'ondes progressives.

L'étude numérique du modèle est réalisée par une approximation des solutions en utilisant un schéma aux différences finies. Pour simplifier l'étude, on va considérer le modèle en dimen-

sion une, i.e les individus se déplacent sur une droite. Il est préférable de prendre des conditions de Neumann.

les simulations numériques montrent deux types d'évolution de la population, suivant les paramètres β et α .

Si $R_0 \leq 1$ la maladie ne se propage pas, car un seul individu infecté contamine moins d'un individu sain.

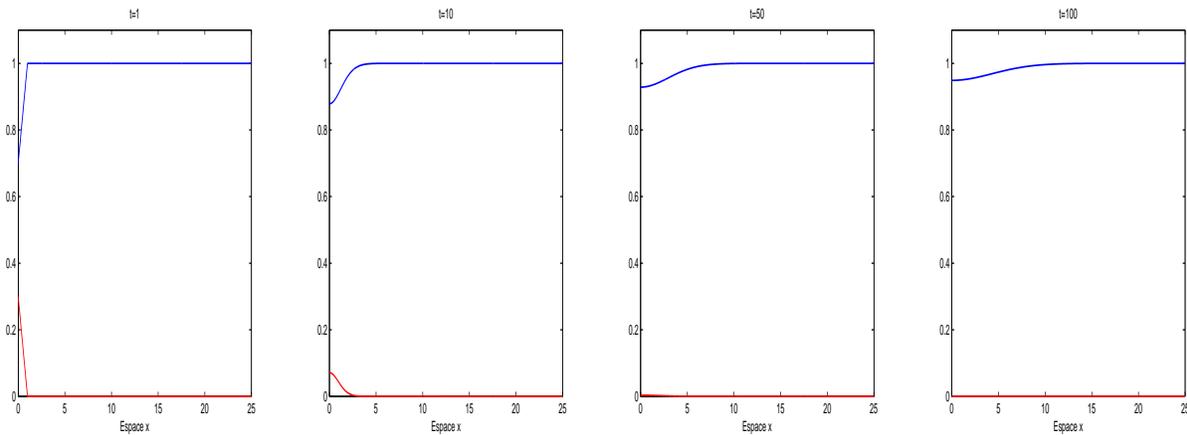


FIGURE 4 – L'évolution spatiale des individus susceptibles (courbe bleue) et infectés (courbe rouge), avec $\beta = 1$ et $\alpha = 2$.

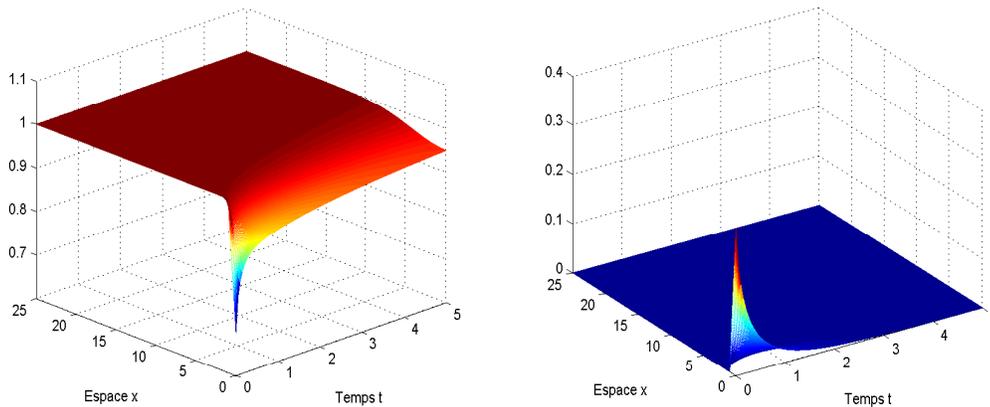


FIGURE 5 – La solution numérique du système en 3D, à gauche les individus susceptibles et à droite les individus infectés.

Si $R_0 > 1$ la maladie peut se propager au sein de la population.

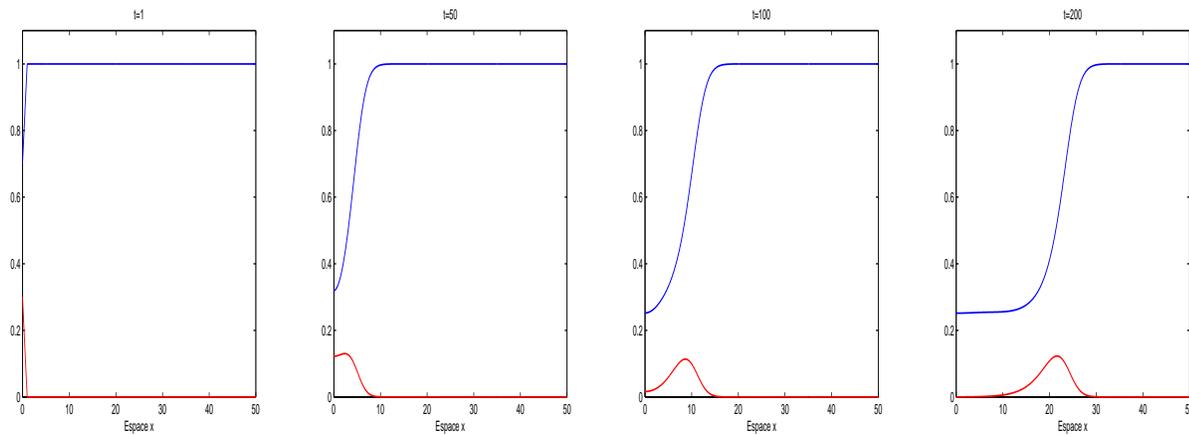


FIGURE 6 – L'évolution spatiale des individus susceptibles (courbe bleue) et infectés (courbe rouge), avec $\beta = 4$ et $\alpha = 2$.

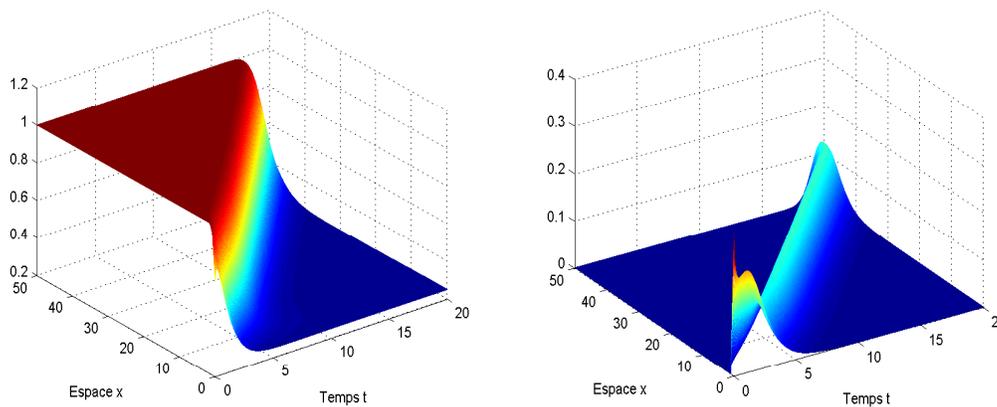


FIGURE 7 – La solution numérique du système en 3D, à gauche les individus susceptibles et à droite les individus infectés.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'existence de solution de type onde progressive pour un modèle SIR structuré en âge et en espace, pour prévoir l'évolution spatiale de la propagation d'une maladie.

Chapitre 1

Outils mathématiques

Dans ce chapitre nous proposons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire.

Théorème 1.1. (Théorème de Schauder [5])

Soit E un espace de Banach, H un convexe fermé de E , alors toute application continue et compacte $T : H \rightarrow H$ admet un point fixe.

Théorème 1.2. (Théorème de Ascoli [1])

Soit K un espace métrique compact et soit H un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}(K)$. On suppose que H est uniformément équicontinu i.e

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \forall f \in H,$$

alors H est relativement compact dans $\mathcal{C}(K)$.

Théorème 1.3. (voir [5])

Soit Ω un domaine borné de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$ et soit L_1 un opérateur elliptique défini comme :

$$L_1 = -a\partial_{xx} + b\partial_x + c(x). \quad (1.1)$$

avec a, b des constantes positives et c une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$.

Soit le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} L_1 u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Alors pour tout $g \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ du système (1.2).

Définition 1.1. Soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. On dit que u est une sous-solution (resp. sur-solution) du problème (1.2) Si :

- 1) $\forall x \in \Omega, \quad L_1 u(x) \leq 0 \quad (\text{resp. } L_1 v(x) \geq 0)$.
- 2) $\forall x \in \partial\Omega, \quad u(x) \leq g(x) \quad (\text{resp. } v(x) \geq g(x))$.

Théorème 1.4. (Le principe du maximum pour les opérateurs elliptiques [5])

Soit Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R} . Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, si φ vérifie la condition suivante

$$L_1 \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{resp. } L_1 \varphi(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega),$$

alors le minimum de φ (resp. maximum) est atteint sur $\partial\Omega$.

Corollaire 1.1. Soit Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R} . Soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ qui vérifie le problème (1.2), si $L_1 u(x) \geq L_1 v(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et $u \geq v$ pour tout $x \in \partial\Omega$, alors $u(x) \geq v(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 1.5. (Le principe du maximum pour les opérateurs paraboliques [5])

Soit Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R} , et $T > 0$. On considère le cylindre

$$\Lambda_T = \Omega \times (0, T],$$

ainsi que son bord parabolique Γ_T défini par

$$\Gamma_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]).$$

Soit L_2 un opérateur parabolique défini comme :

$$L_2 = \partial_t - \partial_{xx} + \partial_x + c. \tag{1.3}$$

avec c une constante positive. Soit le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} L_2 u(x, t) = 0, & (x, t) \in \Lambda_T, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, t) = g(x), & (x, t) \in \Omega \times \{0\}. \end{cases} \quad (1.4)$$

On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}_1^2(\Lambda_T) \cup \mathcal{C}(\overline{\Lambda_T})$, si φ vérifie la condition suivante

$$L_2 \varphi(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in \Lambda_T \quad (\text{resp. } L_1 \varphi(x) \leq 0 \quad \forall (x, t) \in \Lambda_T),$$

alors le minimum de φ (resp. maximum) est atteint sur Γ_T .

Corollaire 1.2. Sous les mêmes notations que le Théorème 1.5. Soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ qui vérifie le problème (1.4), si $L_2 u(x, t) \geq L_2 v(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \Lambda_T$ et $u \geq v$ pour tout $(x, t) \in \Gamma_T$, alors $u(x, t) \geq v(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \Lambda_T$.

Théorème 1.6. (Injections de sobolev en dimension un [1])

Il existe une constante C dépendant de $|\Omega| \leq \infty$ telle que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

c'est à dire nous avons l'injection continue

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \quad \text{pour tout } 1 \leq p \leq \infty.$$

De plus, si Ω est borné on a les injections compactes suivantes :

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}) && \text{pour tout } 1 \leq p \leq \infty, \\ W^{1,1}(\Omega) &\subset L^p(\Omega) && \text{pour tout } 1 \leq q < \infty. \end{aligned}$$

Lemme 1.1. (Lemme de Fatou [1])

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega, du)$, Ω borné, tel que pour chaque n , $f_n \geq 0$ et $f_n \rightarrow f$ p.p sur Ω ,

alors $f \in L^1(\Omega, du)$ et $\int_{\Omega} f du \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n du$.

Lemme 1.2. (Convergence dominée [1])

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega, du)$, Ω borné, tel que pour chaque $f_n \rightarrow f$ p.p sur Ω , il existe une fonction $g \in L^p(\Omega, du)$, tel que $|f_n| \leq g$ p.p
alors $f \in L^p(\Omega, du)$ et $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega, du)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Notation :

On désigne par $BUC(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions uniformément continues et bornées de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , on définit par

$$BUC_+(\mathbb{R}) = \{\varphi \in BUC(\mathbb{R}) : \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

muni de la norme sup

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|.$$

on note par

$$\mathbb{Y} := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0 \right\},$$

et

$$\mathbb{Z} := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \text{ existe} \right\}.$$

Soit Ω un domaine borné et λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ définie comme

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}$$

Définition 1.2. (voir [9])

Soit H un espace de Banach, et $\{S(t), t \geq 0\}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de H vers H telle que :

- (1) $S(0) = Id$,
- (2) $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$,
- (3) $S(t)x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H)$, $\forall x \in H$,
- (4) $\|S(t)\| \leq 1$,

alors $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est dit un \mathcal{C}^0 semi-groupe de contraction.

Soit h_t le noyau de la chaleur classique,

$$h_t(y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{4t}}, \quad t > 0, y \in \mathbb{R},$$

solution fondamentale de l'équation $\partial_t h = \Delta h$.

Soit l'opérateur linéaire $\Delta : D(\Delta) \subset BUC(\mathbb{R}) \rightarrow BUC(\mathbb{R})$ avec

$$D(\Delta) = \left\{ \varphi \in BUC(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : \varphi'' \in BUC(\mathbb{R}) \right\},$$

la solution fondamentale de l'équation de la chaleur est

$$T_\Delta(t)(\varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy \quad \forall t > 0, \quad (1.5)$$

ainsi, on peut vérifier que $(0, \infty) \subset \rho(\Delta)$ l'ensemble résolvant de Δ

$$(\lambda - \Delta)^{-1}(\varphi)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{\lambda}|s|} \varphi(s+x) ds \quad \forall \lambda > 0.$$

Donc, Δ est le générateur infinitésimal de semi-groupe analytique de contraction $\{T_\Delta(t)\}_{t \geq 0}$.

Proposition 1.1. (voir [9])

Soit Ω un domaine borné et soit $(T_\Delta(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur sur \mathbb{R} avec condition au bord de Dirichlet. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et quelque soit $\varphi \in L^p(\Omega)$, on a :

$$\|T_\Delta(t)\|_p \leq C(\Omega) e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_p, \quad t \geq 0.$$

Proposition 1.2. (voir [9])

Soit Ω un domaine borné de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}$ pour un certain $\alpha \in (0, 1)$ et soit $(T_\Delta(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur sur \mathbb{R} avec condition au bord de Dirichlet. Pour tout $\varphi \in L^\infty(\Omega)$, on a :

$$\|\nabla T_\Delta(t)\|_\infty \leq C(\Omega) (1 + t^{-\frac{1}{2}}) \|\varphi\|_\infty, \quad t > 0.$$

Chapitre 2

Modèle SIR structuré en âge et en espace

Ce chapitre est largement inspiré de [2]. Il s'agit d'étudier l'existence des solutions de type onde progressive pour le modèle de Kermack-Mckendrik [6] pour une population structurée en classe d'âge pour les infectées avec le déplacement spatial des individus.

En particulier, l'âge de l'infection nous permet de déterminer la période de latence qui représente le temps nécessaire pour qu'un individu infecté devienne contagieux.

le modèle est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial S}{\partial t} = d_s \Delta_x S(t, x) - S(t, x) \int_0^{+\infty} \beta(a) i(t, a, x) da, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial a} = d_i \Delta_x i - (\mu_R(a) + \mu_M(a)) i(t, a, x), & a > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ i(t, 0, x) = S(t, x) \int_0^{+\infty} \beta(a) i(t, a, x) da, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = d_r \Delta_x R(t, x) + \int_0^{+\infty} \mu_R(a) i(t, a, x) da, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ S(0, x) = S_0(x), \quad i(0, a, x) = i_0(a, x) \quad \text{et} \quad R(0, x) = R_0(x), & \end{array} \right.$$

où a est la durée de l'infection. S, i et R représentent respectivement la densité des indivi-

individus susceptibles, infectés et réfractaires à l'instant t et la position x . De plus, les individus infectés dépendent de l'âge a .

Ici les coefficients de diffusion d_s, d_i et d_r sont strictement positifs et désignent le déplacement aléatoire des individus.

la fonction β représente le taux de transmission de l'infection qui dépend de a et la fonction $\mu := \mu_R + \mu_M$ représente le taux des individus qui sont rétablis plus le taux de mortalité dû à l'infection qui dépendent tous les deux de a .

Si la maladie n'est pas mortelle alors tous les individus qui quittent le compartiment i vont vers le compartiment R . Ce dernier représente les individus qui sont guéris et immunisés contre la ré-infection, ainsi la population devient constante.

Donc, on peut étudier le modèle sans introduire l'équation des réfractaires car la fonction R est connue une fois que les fonctions S et i sont définies.

On propose le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = d_s \Delta_x S(t, x) - S(t, x) \int_0^{+\infty} \beta(a) i(t, a, x) da, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial a} = d_i \Delta_x i - \mu(a) i(t, a, x), \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ i(t, 0, x) = S(t, x) \int_0^{+\infty} \beta(a) i(t, a, x) da, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ S(0, x) = S_0(x) \quad \text{et} \quad i(0, a, x) = i_0(a, x). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Ce modèle a été étudié par Kermarck et Mckendrick dans [6] sans le déplacement spatial de la population. Ils prouvent l'existence d'un seuil épidémique R_0 qui est défini par

$$R_0 = \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da.$$

Si $R_0 > 1$ l'épidémie va s'installer dans la population et si $R_0 < 1$ on a la disparition de la maladie.

2.1 Présentation de l'étude et résultats principaux

Pour trouver la solution de type onde progressive du système (2.1), on fait un changement de variable, ainsi on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = d\Delta_x S - S(t)\mathcal{F}_\gamma(i(t)), \\ \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial a} = \Delta_x i(t, a, x), \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ i(t, 0, \cdot) = S(t)\mathcal{F}_\gamma(i(t)), \quad t \geq 0, \\ S(0, \cdot) = S_0 \in \mathbb{Z}, \\ i(0, \cdot, \cdot) = i_0 \in L^1((0, +\infty), \mathbb{Y}), \end{array} \right. \quad (2.2)$$

où

$$d = d_s/d_i \quad \text{et} \quad \gamma(a) = \beta(a) \exp\left(-\int_0^a \mu(s)ds\right) \quad \text{pour tout } a \in (0, +\infty),$$

et

$$\mathcal{F}_\gamma(i(t))(x) = \int_0^{+\infty} \gamma(a)i(t, a, x)da.$$

On cherche des solutions positives du système (2.2) de la forme

$$S(t, x) = S(x - ct), \quad i(t, a, x) = i(a, x - ct). \quad (2.3)$$

Ainsi, S et i vérifient le système suivant :

$$\partial_a i = \partial_x^2 i + c\partial_x i, \quad (2.4)$$

$$dS'' + cS' - S\mathcal{F}_\gamma(i) = 0, \quad (2.5)$$

$$i(0, x) = S\mathcal{F}_\gamma(i). \quad (2.6)$$

Ce système est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et les conditions aux limites suivantes :

$$S(-\infty) = S^+, \quad S(+\infty) = 1,$$

$$i(a, -\infty) = 0, \quad i(a, +\infty) = 0.$$

Ici $c > 0$ et $S^+ \in [0, 1)$ sont des nombres inconnus qu'on va déterminer au même temps que les fonctions i et S . Le paramètre c définit la vitesse de l'onde, tandis que S^+ représente la densité des individus susceptibles après l'épidémie.

Hypothèse 2.1. $d > 0$, $\gamma \in L^1_+(0, +\infty) \cap L^\infty_+(0, +\infty)$. Ainsi, on définit

$$R_0 := \int_0^{+\infty} \gamma(a) da. \quad (2.7)$$

Théorème 2.1. On suppose que l'hypothèse 2.1 est vérifiée. Alors le système (2.2) admet une onde progressive positive si et seulement si $R_0 > 1$.

Démonstration 2.1.

En utilisant la définition du chapitre 1, on peut vérifier que

$$\Delta + c\partial_x : D(\Delta) \subset BUC(\mathbb{R}) \rightarrow BUC(\mathbb{R})$$

est aussi un générateur d'un semi-groupe analytique de contraction sur $BUC(\mathbb{R})$.

De plus, en utilisant (1.5), on obtient la formule explicite suivante :

$$T_{\Delta+c\partial_x}(t)(\varphi)(x) = T_{c\partial_x}(t)(T_\Delta(t)\varphi)(x) = T_\Delta(t)(\varphi)(x - ct).$$

On définit par $(\Delta + c\partial_x)|_Y$ la partie $(\Delta + c\partial_x)$ dans Y , c-à-d

$$T_{(\Delta+c\partial_x)_Y}(t) = T_{\Delta+c\partial_x}(t)|_Y \quad \forall t \geq 0.$$

Donc, pour prouver le Théorème 2.1, il suffit d'étudier le système suivant :

$$dS''(x) + cS'(x) - S(x)J(x) = 0,$$

$$B(x) = S(x)J(x),$$

avec

$$J(x) := \int_0^{+\infty} \gamma(a)T_{(\Delta+c\partial_x)_Y}(a)(B)(x)da,$$

et les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} S(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}, & S(-\infty) = S^+, \quad S(+\infty) = 1, \\ B(-\infty) = B(+\infty) = 0, \end{cases}$$

la preuve va se dérouler en plusieurs étapes.

D'abord, on commence par construire une sous- et sur-solution.

Ensuite, on va considérer un problème similaire sur un domaine borné, pour avoir la compacité.

Ainsi, nous allons reformuler le problème sous forme d'un problème de point fixe d'un certain opérateur ϕ . Il faut ensuite choisir un espace E sur lequel ϕ soit continue, puis un convexe fermé C tel que ϕ envoie C dans C et $\phi(C)$ soit relativement compact.

Pour finir, nous allons faire tendre la longueur du domaine borné vers l'infini. Cependant pour effectuer ce procédé de passage à la limite il faut avoir quelques estimations à priori de la solution indépendamment du domaine borné.

2.2 L'existence d'onde progressive pour $R_0 > 1$

2.2.1 Construction de sous- et sur-solution

Dans cette section, on cherche à construire une sous- et sur-solution convenables qui seront essentielles pour prouver la condition suffisante dans le Théorème 2.1. On suppose que $R_0 > 1$ avec R_0 défini dans (2.7) et que $\gamma \in L^1_+(0, +\infty)$, alors il existe un $\alpha^* > 0$ qui satisfait l'équation

suivante :

$$\int_0^{+\infty} \gamma(a)e^{-\alpha^*a} da = 1. \quad (2.8)$$

ensuite nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.1. On suppose que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que $R_0 > 1$. Pour tout $c > 2\sqrt{\alpha^*}$, on pose

$$\lambda^* = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\alpha^*}}{2} \in \left(0, \frac{c}{2}\right),$$

et

$$\bar{i}^+(a, x) = e^{-\lambda^*x} e^{-\alpha^*a} = e^{-\lambda^*x} e^{(\lambda^{*2} - c\lambda^*)a}.$$

La fonction $\bar{i}^+(a, x)$ est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \partial_a i(a, x) = \partial_x^2 i(a, x) + c\partial_x i(a, x), & a > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ i(0, x) = \int_0^{+\infty} \gamma(a)i(a, x) da. \end{cases} \quad (2.9)$$

Démonstration. On cherche une solution par la méthode de séparation de variables du système (2.9)

soit : $i(a, x) = A(a)X(x) \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A'(a)X(x) &= A(a)X''(x) + cA(a)X'(x), \\ \frac{A'}{A} &= \frac{X''}{X} + c\frac{X'}{X} = \alpha, \end{aligned}$$

avec $A(a) \neq 0 \quad \forall a > 0, \quad X(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et α une constante appartenant à \mathbb{R} .

$$\begin{cases} X'' + cX' - \alpha X = 0, & (1) \\ A' = \alpha A, & (2) \end{cases}$$

la solution de l'équation (2) s'écrit :

$$A(a) = k_1 e^{\alpha a} \quad a > 0, \text{ et } k_1 \in \mathbb{R},$$

on prend $\alpha < 0$ pour que $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = 0$.

L'équation caractéristique de (1) :

$$\lambda^2 + c\lambda - \alpha = 0.$$

$$\Delta = c^2 + 4\alpha.$$

Si $c > 2\sqrt{-\alpha}$ alors $\Delta > 0$, Ainsi

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2} \in \left(-\frac{c}{2}, 0\right).$$

$$\lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Soit i une solution particulière de notre problème avec $\lambda^* = -\lambda_1$

$$i(a, x) = e^{-\lambda^*x} e^{\alpha a} \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il reste à vérifier la condition initiale

$$i(0, x) = ke^{-\lambda^*x} = \int_0^{+\infty} \gamma(a) ke^{-\lambda^*x} e^{\alpha a} da,$$

$$1 = \int_0^{+\infty} \gamma(a) e^{\alpha a} da,$$

puisque

$$R_0 = \int_0^{+\infty} \gamma(a) da > 1.$$

on pose : $h_{\alpha_0}(a) = \gamma(a) e^{-\alpha_0 a} \quad \forall a > 0, \quad \forall \alpha_0 > 0.$

• $h_{\alpha_0}(a) \leq \gamma(a) \quad \forall a > 0, \quad \forall \alpha_0 > 0$ et comme $\gamma \in L^1_+(0, +\infty) \cap L^\infty_+(0, +\infty).$

• $\lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} h_{\alpha_0}(a) = 0.$

En appliquant, le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} h_{\alpha_0}(a) da = 0,$$

puisque $R_0 > 1$, alors il existe un α^* strictement positif tel que :

$$1 = \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\gamma a} e^{-\alpha^* a} da.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 2.1. □

Lemme 2.2. Sous les mêmes hypothèses et notations que le lemme 2.1, pour tout $\gamma^* > 0$ assez petit et $\beta > 1$ assez grand, la fonction \underline{s}^+ est définie comme suit :

$$\underline{s}^+(x) = 1 - \beta e^{-\gamma^* x},$$

vérifiant l'inégalité suivante :

$$ds'' + cs' - e^{-\lambda^* x} s \geq 0, \quad s(+\infty) = 1. \quad (2.10)$$

Démonstration. En remplaçant \underline{s}^+ dans l'inégalité (2.10), on obtient

$$c\gamma^* \beta \geq d\beta\gamma^{*2} + e^{-\lambda^* x} (e^{\gamma^* x} - \beta). \quad (2.11)$$

Quand $\gamma^* \leq \lambda^*$, il existe un $x^* > 0$ tel que, pour tout $x \geq x^*$, la fonction $g(x) = e^{-\lambda^* x} (e^{\gamma^* x} - \beta)$ est décroissante.

Donc, pour $x \geq x^*$ l'inégalité (2.11) est vérifiée si

$$0 < \gamma^* \leq \lambda^* \quad \text{et} \quad c\gamma^* \beta \geq d\beta\gamma^{*2} + e^{-\lambda^* x^*} (e^{\gamma^* x^*} - \beta),$$

ainsi,

$$\beta \geq \frac{e^{-(\lambda^* - \gamma^*)x^*}}{c\gamma^* - d\gamma^{*2} + e^{-\lambda^* x^*}}.$$

Maintenant, il suffit de prendre

$$0 < \gamma^* \leq \min\left(\lambda^*, \frac{c}{d}\right) \quad \text{et} \quad \beta \geq \frac{1}{c\gamma^* - d\gamma^{*2}}.$$

Pour $x < x^*$, l'inégalité (2.10) est vraie si $\beta \geq 1$ et $0 < \gamma^* \leq \min\left(\lambda^*, \frac{c}{d}\right)$,

$$\beta e^{-\lambda^* x} + \beta(c\gamma^* - d\gamma^{*2}) \geq e^{-(\lambda^* - \gamma^*)x}.$$

Finalement, nous avons l'inégalité (2.10). □

Lemme 2.3. Sous les mêmes hypothèses et notations que les lemmes 2.1 et 2.2, pour tout $\eta > 0$ assez petit et tout $k > 1$ assez grand, la fonction

$$\underline{i}^+(a, x) = e^{-\lambda^* x} e^{(\lambda^{*2} - c\lambda^*)a} - k e^{-(\lambda^* + \eta)x} e^{((\lambda^* + \eta)^2 - c(\lambda^* + \eta))a}, \quad (2.12)$$

est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_a i = \partial_x^2 i + c\partial_x i, & a > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ i(0, x) \leq S_+ \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da. \end{cases} \quad (2.13)$$

ou $S_+ = \max(0, \underline{s}^+)$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que la fonction \underline{i} est une solution de l'équation aux dérivées partielles du système (2.13) pour tout η et k . Il reste à vérifier l'inégalité du système. comme $\lambda^{*2} - c\lambda^* = -\alpha^*$, cette inégalité est vérifiée si et seulement si

$$e^{-\lambda^* x} - k e^{-(\lambda^* + \eta)x} \leq \left(1 - \beta e^{-\gamma^* x}\right)^+ \left[e^{-\lambda^* x} - k e^{-(\lambda^* + \eta)x} \alpha(\eta)\right],$$

où

$$\alpha(\eta) = \int_0^{+\infty} \gamma(a) e^{((\lambda^* + \eta)^2 - c(\lambda^* + \eta))a} da,$$

donc, il suffit de prouver l'inégalité suivante :

$$1 - ke^{-\eta x} \leq (1 - \beta e^{-\gamma^* x})^+ [1 - ke^{-\eta x} \alpha(\eta)]. \quad (2.14)$$

On a

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \int_0^{+\infty} \gamma(a) e^{(\lambda^{*2} - c\lambda^*)a} da, \\ &= \int_0^{+\infty} \gamma(a) e^{-\alpha^* a} da = 1. \end{aligned}$$

et

$$\alpha'(\eta) = (2(\lambda^* + \eta) - c) \int_0^{+\infty} a\gamma(a) e^{(\lambda^{*2} - c\lambda^*)a} da < 0.$$

Comme $\lambda^* < \frac{c}{2}$, alors il existe un $\eta > 0$ assez petit, tel que

$$(\lambda^* + \eta) < \frac{c}{2}. \quad (2.15)$$

Donc, pour tout $\eta > 0$ assez petit, nous avons

$$0 < \alpha(\eta) < 1 \quad \text{et} \quad \eta < \lambda^*.$$

Soit : $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, tel que

$$1 - \beta e^{-\gamma^* x_0} = 0.$$

Si $x \leq x_0$ alors

$$\max(0, \underline{s}^+) = 0,$$

ainsi l'inégalité (2.14) est équivalente à

$$1 - ke^{-\eta x} \leq 0.$$

Puisque $x \leq x_0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, il suffit de prendre

$$k \geq e^{\eta x_0}.$$

Ensuite, si $x \geq x_0$ alors l'inégalité (2.14) devient

$$1 - ke^{-\eta x} \leq (1 - \beta e^{-\gamma^* x}) [1 - ke^{-\eta x} \alpha(\eta)],$$

et qui est équivalente à,

$$\frac{\beta e^{-(\gamma^* - \eta)x}}{1 - \alpha(\eta) + \beta \alpha(\eta) e^{-\gamma^* x}} \leq k, \quad \text{pour tout } x \geq x_0.$$

Comme $\beta > 1$ et $0 < \alpha(\eta) < 1$, alors

$$1 - \alpha(\eta) + \beta \alpha(\eta) e^{\delta^* x} \geq 1 - \alpha(\eta),$$

$$\frac{1}{1 - \alpha(\eta) + \beta \alpha(\eta) e^{-\gamma^* x}} \leq \frac{1}{1 - \alpha(\eta)},$$

$$\frac{\beta e^{-(\gamma^* - \eta)x}}{1 - \alpha(\eta) + \beta \alpha(\eta) e^{-\gamma^* x}} \leq \frac{\beta e^{-(\gamma^* - \eta)x}}{1 - \alpha(\eta)}.$$

Donc, il suffit de prendre un $k > 0$, tel que

$$\frac{\beta e^{-(\gamma^* - \eta)x}}{1 - \alpha(\eta)} \leq k, \quad \text{pour tout } x \geq x_0.$$

Quand $\gamma^* > \eta$, la première partie de l'inégalité est décroissante sur $[x_0, +\infty[$.

Finalement, il existe un $k > 0$, tel que

$$k > \max(e^{\eta x_0}, \frac{\beta^*}{1 - \alpha(\eta)} e^{-(\gamma^* - \eta)x_0}).$$

d'où le résultat. □

2.2.2 Un problème similaire sur un domaine borné

Nous supposons, dans tout ce qui va suivre, que $R_0 > 1$ et $c > 2\sqrt{\alpha^*}$ fixé, avec α^* est défini dans (2.8). On considère les fonctions suivantes :

$$\bar{\mathbf{i}}(a, x) = \bar{i}^+(a, x) \quad \underline{\mathbf{i}}(a, x) = \max(0, \underline{i}^+(a, x)),$$

$$\bar{\mathbf{S}}(x) = 1, \quad \underline{\mathbf{S}}(x) = \max(0, \underline{s}^+(x)),$$

où les fonctions $\bar{i}^+(a, x)$, $\underline{i}^+(a, x)$ et $\underline{s}^+(x)$ sont définies dans les lemmes 2.1, 2.3 et 2.2 respectivement.

Soit X un nombre réel strictement positif donné, ainsi on considère le problème suivant sur $(-X, X)$

$$\begin{cases} \partial_a i(a, x) = \partial_x^2 i(a, x) + c \partial_x i(a, x), & a > 0, \quad x \in (-X, X), \\ i(0, x) = S(x)J(x), \quad i(a, \pm X) = \underline{i}(a, \pm X), \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} dS''(x) + cS'(x) = S(x)J(x), & x \in (-X, X), \\ S(\pm b) = \underline{S}(\pm b). \end{cases} \quad (2.17)$$

avec,

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da.$$

remarquons que pour $X > 0$ assez grand,

$$\underline{\mathbf{i}}(a, -X) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{S}}(-X) = 0.$$

par conséquent, il existe un $X_0 > 0$ tel que, pour tout $X \geq X_0$, $\underline{i}(a, -X) \equiv 0$ et $\underline{S}(-X) = 0$.

Ensuite, nous allons prouver le resultat suivant.

Proposition 2.1. On suppose que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que $R_0 > 1$. alors, pour tout $X > X_0$, il existe une paire de fonctions (i, S) solution classique du problème (2.16) et (2.17) telle que

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{i}}(a, x) \leq i(a, x) \leq \bar{\mathbf{i}}(a, x), & \forall (a, x) \in [0, +\infty) \times (-X, X), \\ \bar{\mathbf{S}}(x) \leq S(x) \leq 1 & \forall x \in (-X, X). \end{cases} \quad (2.18)$$

De plus, la fonction S est croissante.

Démonstration. D'abord, pour chercher l'existence de la solution, on a besoin de reformuler (2.16) et (2.17) sous forme d'un problème d'existence de point fixe. Pour cela, on va proposer le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} \partial_a i(a, x) = \partial_x^2 i(a, x) + c \partial_x i(a, x), & a > 0, \quad x \in (-X, X), \\ i(0, x) = i_0(x), & x \in (-X, X), \\ i(a, \pm X) = \underline{\mathbf{i}}(a, \pm X), & a > 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

et le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} dS''(x) + cS'(x) = S(x)J(x), & x \in (-X, X), \\ S(\pm X) = \underline{\mathbf{S}}(\pm X). \end{cases} \quad (2.20)$$

où

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da.$$

Finalement, le problème (2.16) et (2.17) revient à résoudre,

$$i_0(x) = S(x) \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da.$$

Afin de résoudre ce problème, on va définir le sous-ensemble convexe et fermé suivant :

$$E = \left\{ i_0 \in \mathcal{C}([-X, X]); \quad \underline{\mathbf{i}}(0, x) \leq i_0(x) \leq \bar{\mathbf{i}}(0, x) \right\}.$$

soit l'opérateur : $\Phi : E \rightarrow \mathcal{C}([-X, X])$

$$\Phi(i_0) = S \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(\cdot, a) da,$$

avec (i, S) est solution du problème suivant :

$$\frac{\partial i}{\partial a} = \partial_x^2 i + c \partial_x i, \quad i(0, x) = i_0(x), \quad i(a, \pm X) = \underline{\mathbf{i}}(a, \pm X),$$

$$dS'' + cS' = S \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, \cdot) da, \quad S(\pm X) = \underline{\mathbf{S}}(\pm X).$$

Soit $\epsilon \in (0, +\infty)$ fixé. Pour $i_0 \in E$, d'après les propositions 1.1 et 1.2, on obtient

$$i \in L^q((0, \epsilon), \mathcal{W}^{1,p}(-X, X)) \cap L^\infty((\epsilon, +\infty), \mathcal{W}^{1,p}(-X, X)), \quad (2.21)$$

Pour tout $p \in (1, +\infty)$ et quel que soit $1 \leq q < 2$. Comme $\gamma \in L^1 \cap L^\infty$, et

$$J = \int_0^\epsilon \gamma(a)i(a, x)da + \int_\epsilon^{+\infty} \gamma(a)i(a, x)da,$$

on obtient que $J \in W^{1,p}(-X, X) \hookrightarrow \mathcal{C}^\alpha([-X, X])$ avec $\alpha \in (0, 1)$ et p assez grand.

Donc, la solution du problème elliptique (2.20), (voir Théoreme 1.3)

$$S \in \mathcal{C}^{2+\alpha}([-X, X]).$$

Comme $i_0 \geq 0$ et $i(a, \pm X) \geq 0$ alors d'après le principe de comparaison $i(a, x) \geq 0$ pour tout $(a, x) \in [0, +\infty) \times (-X, X)$.

Par conséquent, $J(x) \geq 0$ pour tout $x \in (-X, X)$.

En appliquant le principe de comparaison à l'équation (2.20), pour $\bar{S}(x) = 1$,

$$\begin{cases} LS = -dS'' - cS' + JS = 0, \\ L\bar{S} = J(x) \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} LS \leq L\bar{S}, \\ S(\pm X) = \underline{S}(\pm X) \leq \bar{S}(\pm X). \end{cases}$$

Donc, pour tout $x \in [-X, X]$, $S(x) \leq 1$.

Ensuite, pour $\underline{S}(x) = 0$, on a

$$S(\pm X) = \underline{S}(\pm X) \geq 0.$$

Donc, pour tout $x \in [-X, X]$, $S(x) \geq 0$.

En conclusion,

$$0 \leq S(x) \leq 1 \quad \forall x \in [-X, X].$$

La fonction $\bar{\mathbf{i}}$ est une solution de l'équation (2.9), $i_0(x) = i(0, x) \leq \bar{\mathbf{i}}(0, x)$ et $i(a, \pm X) \leq \bar{\mathbf{i}}(a, \pm X)$ alors d'après le principe de comparaison,

$$i(a, x) \leq \bar{\mathbf{i}}(a, x) \text{ pour tout } (a, x) \in [0, +\infty) \times [-X, X]. \quad (2.22)$$

D'autre part, la fonction \underline{i}^+ est solution de l'équation (2.13), $i_0(x) = i(0, x) \geq \underline{i}^+(0, x)$ et $i(a, \pm X) \geq \underline{i}^+(a, \pm X)$, ce qui implique,

$$i(a, x) \geq \underline{i}^+(a, x) \text{ pour tout } (a, x) \in [0, +\infty) \times [-X, X]. \quad (2.23)$$

Donc, $i(a, x) \geq \underline{\mathbf{i}}(a, x)$ pour tout $(a, x) \in [0, +\infty) \times [-X, X]$.

D'après l'inégalité (2.22),

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da \\ &\leq \int_0^{+\infty} \gamma(a) \bar{\mathbf{i}}(a, x) da \\ &\leq e^{-\lambda^* x}. \end{aligned}$$

En conséquence, la fonction S vérifie l'inégalité différentielle suivante :

$$dS'' + cS' - e^{-\lambda^* x} S \leq 0, \quad S(\pm X) = \underline{S}(\pm X).$$

D'autre part, la fonction \underline{s}^+ définie par le lemme 2.2 vérifie l'inégalité (2.10), pour $w = S - \underline{s}^+$, on trouve l'inégalité suivante :

$$dw'' + cw' - e^{-\lambda^* x} w \leq 0,$$

$$w(-X) = S(-X) - \underline{s}^+(-X) > 0, \quad w(X) = S(X) - \underline{s}^+(X) = 0.$$

Alors, d'après le principe du maximum $w \geq 0$, i.e. $S \geq \underline{s}^+$ et puisque $S \geq 0$, donc, $S \geq \underline{\mathbf{S}}$.

Pour appliquer le théorème d'Ascoli, on a besoin que l'opérateur Φ soit équicontinu :

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall i_0 \in E, \quad \forall x, y \in [-X, X], \quad |x - y| < \delta,$$

$$\begin{aligned} |\Phi(i_0(x)) - \Phi(i_0(y))| &= |S(x) \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da - S(y) \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, y) da| \\ &\leq |S(x) - S(y)| \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da + |S(y)| \int_0^{+\infty} \gamma(a) |i(a, x) - i(a, y)| da, \end{aligned}$$

puisque $\gamma \in L^1 \cap L^\infty$ et d'après (2.21), on arrive à

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \gamma(a) |i(a, x) - i(a, y)| da &= \int_0^\epsilon \gamma(a) |i(a, x) - i(a, y)| da + \int_\epsilon^{+\infty} \gamma(a) |i(a, x) - i(a, y)| da, \\
&\leq \|\gamma\|_\infty \int_0^\epsilon \int_y^x \left| \frac{\partial i(a, \sigma)}{\partial \sigma} \right| d\sigma da + \int_\epsilon^{+\infty} \gamma(a) \int_y^x \left| \frac{\partial i(a, \sigma)}{\partial \sigma} \right| d\sigma da, \\
&\leq \int_0^\epsilon \gamma(a) \left(\int_y^x \left| \frac{\partial i(a, \sigma)}{\partial \sigma} \right|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} (y-x)^{\frac{1}{2}} da + \int_\epsilon^{+\infty} \gamma(a) \left(\int_y^x \left| \frac{\partial i(a, \sigma)}{\partial \sigma} \right|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} (y-x)^{\frac{1}{2}} da, \\
&\leq \int_0^\epsilon \gamma(a) \|i(a, \cdot)\|_{W^{1,2}(-X, X)} (y-x)^{\frac{1}{2}} da + \int_\epsilon^{+\infty} \gamma(a) \|i(a, \cdot)\|_{W^{1,2}(-X, X)} (y-x)^{\frac{1}{2}} da, \\
&\leq \left(\int_0^\epsilon \gamma(a)^{\frac{q}{q-1}} da \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^\epsilon \|i(a, \cdot)\|_{W^{1,2}(-X, X)}^q da \right)^{\frac{1}{q}} (y-x)^{\frac{1}{2}} + \int_\epsilon^{+\infty} \gamma(a) \|i(a, \cdot)\|_{W^{1,2}(-X, X)} da (y-x)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \epsilon_1 M^*.
\end{aligned}$$

de plus, S est continue sur $[-X, X]$, et comme toute fonction continue sur un compact est uniformément continue, alors

$$\begin{aligned}
|\Phi(i_0(x)) - \Phi(i_0(y))| &\leq \epsilon_1 \int_0^{+\infty} \gamma(a) \bar{\mathbf{i}}(a, x) da + \epsilon_1 |S(y)| \|M^*, \\
&\leq \epsilon_1 e^{-\lambda^* x} + \epsilon_1 M^*, \\
&\leq \epsilon_1 M.
\end{aligned}$$

Donc, $\Phi(E)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([-X, X])$.

A présent, il reste à montrer que $\Phi : E \rightarrow E$.

En effet, $S \leq 1$ et d'après l'inégalité (2.22), on obtient

$$\Phi(i_0)(x) = S(x) \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da \leq \int_0^{+\infty} \gamma(a) \bar{\mathbf{i}}(a, x) da = \bar{\mathbf{i}}(0, x).$$

Ensuite, d'après l'inégalité (2.23) et que $S \geq \underline{S}$, on obtient

$$\Phi(i_0)(x) = S(x) \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da \geq \underline{S}(x) \int_0^{+\infty} \gamma(a) \underline{\mathbf{i}}(a, x) da = \underline{\mathbf{i}}(0, x).$$

Donc, $\Phi(E) \subset E$.

Alors, d'après le théorème du point fixe de Schauder, Φ admet un point fixe (c-à-d il existe $i_0 \in E$ telle que $\Phi(i_0) = i_0$). Afin d'obtenir la régularité de la solution, on va utiliser la méthode d'itération.

En utilisant, la régularité des solutions des problèmes paraboliques et elliptiques, la solution (i, S) du problème (2.19) et (2.20) est aussi solution du problème (2.16) et (2.17).

Pour $i_0 \in E$, d'après les propositions 1.1 et 1.2, on obtient

$$i \in L^q((0, \epsilon), \mathcal{W}^{1,p}(-X, X)) \cap L^\infty((\epsilon, +\infty), \mathcal{W}^{1,p}(-X, X)),$$

Pour tout $p \in (1, +\infty)$ et quel que soit $1 \leq q < 2$ et comme $\gamma \in L^1 \cap L^\infty$, et

$$J = \int_0^\epsilon \gamma(a)i(a, x)da + \int_\epsilon^{+\infty} \gamma(a)i(a, x)da,$$

On obtient que $J \in W^{1,p}(-X, X) \hookrightarrow \mathcal{C}^\alpha([-X, X])$, pour certain $\alpha \in (0, 1)$ et p assez grand.

Ainsi, la solution S de l'équation elliptique (2.20) est de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}([-X, X])$ (voir Théorème 1.3).

Puisque $i_0 = SJ$, on déduit que $i_0 \in \mathcal{C}^\alpha([-X, X])$ et par la régularité du problème parabolique,

$$i \in L^q((0, \epsilon), \mathcal{C}^{1+\alpha}(-X, X)) \cap L^\infty((\epsilon, +\infty), \mathcal{C}^{1+\alpha}(-X, X)), \quad \forall \alpha \in (0, 1),$$

ce qui implique que $i_0 \in \mathcal{C}^{1+\alpha}([-X, X])$. En utilisant encore une fois la régularité du problème parabolique, on trouve que

$i_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}([-X, X])$, et donc

$$i \in \mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}([0, +\infty) \times [-X, X]),$$

Ce qui prouve que (i, S) est la solution classique du problème (2.16) et (2.17).

Maintenant, il reste à prouver que S est croissante. Comme $J \geq 0$ et $S \geq 0$ alors

$$dS'' + cS' = SJ \geq 0.$$

ainsi, la fonction S vérifie

$$(S'(x)e^{\frac{c}{d}x})' \geq 0,$$

après integration de cette inégalité entre $-X$ et x , on trouve

$$S'(x)e^{\frac{c}{a}x} \geq S'(-X)e^{-\frac{c}{a}X},$$

puisque,

$$S(x) \geq 0 \quad \text{pout tout } x \in [-X, X],$$

et comme $S(-X) = 0$ pour $X > X_0$,

on a $S'(-X) \geq 0$, ainsi

$$S'(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [-X, X].$$

Ceci termine la démonstration. □

2.2.3 Prolongement de la solution sur un domaine non borné

Dans cette section, nous allons terminer la démonstration du Theorème 2.1.

Plus précisément, on considère (i, S) solution du problème (2.16) et (2.17) pour tout $X > X_0$ par la suite on va faire tendre X vers l'infini pour avoir la solution du problème (2.4)-(2.6) ainsi que le comportement asymptotique.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite positive qui tend vers $+\infty$ quand n croit vers $+\infty$.

On note par (i_n, S_n) la solution du problème (2.16) et (2.17) fournie par la proposition (2.1) avec $X = X_n$. Puisque $c > 2\sqrt{\alpha^*}$ fixé alors (i_n, S_n) est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_a i_n = \partial_x^2 i_n + c \partial_x i_n, \\ i_n(0, x) = S_n(x) F_\gamma(i_n)(x), \\ i_n(a, -X_n) = 0, \quad i_n(a, X_n) = \underline{i}(a, X_n), \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} dS_n'' + cS_n' = S_n F_\gamma(i_n), \\ S(-X_n) = 0, \quad S(X_n) = \underline{S}(X_n), \end{cases} \quad (2.25)$$

où

$$F_\gamma(i_n)(x) = \int_0^{+\infty} \gamma(a) i_n(a, x) da.$$

Pour la suite, on introduit les notations suivantes :

$$\omega_n = (-X_n, X_n) \quad \text{et} \quad \Omega_n = (0, +\infty) \times (-X_n, X_n).$$

et soit M une constante positive (qui peut changer) mais qui est indépendante de n . Avant de passer à limite de n vers l'infini, nous allons dans ce paragraphe obtenir des estimations a priori indépendantes de n pour la solution (i_n, S_n) .

Lemme 2.4. On suppose que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que $R_0 > 1$. Alors, il existe un entier $n_0 \geq 0$ assez grand et une constante $M > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{\partial i_n}{\partial x}(a, -X_n) \geq 0, \quad S'_n(-X_n),$$

et

$$\int_{\omega_n} i_n(a, x) dx + \int_0^{+\infty} \frac{\partial i_n}{\partial x}(a', -X_n) da' + dS'_n(-X_n) \leq M. \quad (2.26)$$

de plus,

$$\int_0^{+\infty} i_n(a, x) da \leq M \quad \text{pour tout } x \in \omega_n. \quad (2.27)$$

Démonstration. On définit

$$J_n(a, x) = \int_0^a i_n(a', x) da',$$

en intégrant l'équation (2.24) entre 0 et a ,

$$i_n(a, x) - i_n(0, x) = \int_0^a \partial_x^2 i_n(a', x) da' + c \int_0^a \partial_x i_n(a', x) da'.$$

Ainsi,

$$\partial_x^2 J_n(a, x) + c \partial_x J_n(a, x) da + S_n(x) F_\gamma(i_n)(x) = i_n(a, x).$$

Puisque S_n vérifie,

$$dS_n'' + cS_n' = S_n F_\gamma(i_n),$$

alors,

$$\partial_x^2 J_n(a, x) + c \partial_x J_n(a, x) da + dS_n''(x) + cS_n'(x) = i_n(a, x). \quad (2.28)$$

Après l'intégration de cette équation sur ω_n , on trouve

$$\begin{aligned} \partial_x J_n(a, X_n) + cJ_n(a, X_n) + dS'_n(X_n) + cS_n(X_n) = \\ \int_{\omega_n} i_n(a, x)dx + \partial_x J_n(a, -X_n) + dS'_n(-X_n). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si n est assez grand, nous avons $J_n(a, -X_n) \equiv 0$ et $S_n(-X_n) = 0$, et puisque $i_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in \omega_n$ et $i_n(a, -X_n) = 0$, alors

$$\partial_x i_n(a, -X_n) \geq 0.$$

En outre, $S_n \geq 0$ pour tout $x \in \omega_n$ et $S_n(-X_n) = 0$, ainsi

$$S'(-X_n) \geq 0.$$

Étant donné que, $S_n(X_n) = \underline{S}(X_n)$ et $S_n(x) \geq \underline{S}(x)$ pour tout $x \in \omega_n$, on obtient

$$S'_n(X_n) \leq \underline{S}'(X_n).$$

De la même façon, nous avons $i_n(a, X_n) = \underline{i}(a, X_n)$ et $i_n(a, x) \geq \underline{i}(a, x)$ pour tout $x \in \omega_n$, on trouve

$$\partial_x i_n(a, X_n) \leq \partial_x \underline{i}(a, X_n).$$

On calcule $\partial_x \underline{i}^+$ définie dans le lemme 2.3 pour $x = X_n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{i}^+}{\partial x}(a, X_n) &= -\lambda^* e^{-\lambda^* X_n} e^{(\lambda^{*2} - c\lambda^*)a} + k(\lambda^* + \eta) e^{-(\lambda^* + \eta)X_n} e^{(\lambda^* + \eta)^2 - c(\lambda^* + \eta)a}, \\ &= e^{-(\lambda^* + \eta)X_n} e^{(\lambda^{*2} - c\lambda^*)a} \left(-\lambda^* e^{\eta X_n} + k(\lambda^* + \eta) e^{\eta(\eta + 2\lambda^* - c)a} \right), \end{aligned}$$

pour que $\partial_x \underline{i}(a, X_n) \leq 0$, il suffit que

$$-\lambda^* e^{\eta X_n} + k(\lambda^* + \eta) e^{\eta(\eta + 2\lambda^* - c)a} \leq 0 \quad \forall a > 0.$$

Or, d'après (2.15), nous avons $\eta + 2\lambda^* - c \leq 0$, ceci implique que

$$k(\lambda^* + \eta) \leq \lambda^* e^{\eta X_n}.$$

Ainsi, il existe un $n_0 > 0$ tel que pour tout $n > n_0$

$$\partial_x \underline{i}(a, X_n) \leq 0.$$

Il en découle que,

$$\partial_x i_n(a, X_n) \leq 0,$$

de plus, $S(x) \leq 1$ pour tout $x \in \omega_n$ et $S'(X_n) = \underline{s}^+(X_n) \leq M$.

Donc, nous avons l'estimation suivante :

$$\int_{\omega_n} i_n(a, x) dx + \partial_x J_n(a, -X_n) + dS'_n(-X_n) \leq c \int_0^a i_n(a', x) da' + d\underline{S}'(X_n) + c\underline{S}(X_n).$$

Finalement, on peut majorer l'inégalité ci-dessus par une constante $M > 0$ indépendante de n tel que pour tout $n > n_0$ et pour tout $a \in (0, +\infty)$,

$$\int_{\omega_n} i_n(a, x) dx + \int_0^{+\infty} \partial_x i_n(a', -X_n) da' + dS'_n(-X_n) \leq M.$$

Désormais, il reste à prouver l'estimation (2.26).

pour $x \geq 0$ cette dernière est évidente puisque $i_n \leq \bar{i}^+$, ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} i_n(a, x) da &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^* x} e^{-\alpha^* a} da \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^* a} da \\ &\leq M. \end{aligned}$$

En intégrant (2.28) entre $-X_n$ et x , pour $x \leq 0$, on trouve

$$\partial_x J_n(a, x) + cJ_n(a, x) = -dS'_n(x) - cS_n(x) + \int_{-X_n}^x i_n(a, x') dx' + \partial_x J_n(a, -X_n) + dS'_n(-X_n).$$

Puisque S_n est décroissante et positive, en utilisant la majoration (2.26) on obtient

$$\partial_x J_n(a, x) + cJ_n(a, x) \leq M \quad \forall x \leq 0,$$

après intégration de l'équation différentielle, on trouve

$$J_n(a, x) \leq M.$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 2.5. On suppose que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que $R_0 > 1$. Alors, il existe un entier $n_1 \geq 0$ assez grand et une constante $M > 0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, nous avons

$$i_n(a, x) \leq \|\gamma\|_\infty M \quad \text{pour tout } (a, x) \in [0, +\infty) \times (-X_n, X_n). \quad (2.30)$$

En plus, nous avons les estimations suivantes :

$$F_\gamma(i_n)(x) \leq M \quad \text{pour tout } x \in \omega_n, \quad \int_{\omega_n} F_\gamma(i_n)(x) dx \leq M. \quad (2.31)$$

Démonstration. D'après (2.27) nous avons, pour tout $x \in \omega_n$,

$$S_n(x) \int_0^{+\infty} \gamma(a) i_n(a, x) da \leq \|\gamma\|_\infty M. \quad (2.32)$$

Puisque,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{i}(a, X_n) = 0,$$

alors, il existe un entier $n_1 > 0$ tel que, pour tout $a > 0$ et $n > n_1$

$$\dot{i}(a, X_n) \leq \|\gamma\|_\infty.$$

Ainsi, en appliquant le principe de comparaison au système (2.16), on obtient

$$i_n(a, x) \leq \|\gamma\|_\infty M \quad \forall n > n_1, \quad \forall (a, x) \in \Omega_n.$$

Ce qui termine la démonstration de (2.30).

La première estimation de (2.31) découle facilement de (2.30) et par le fait que $\gamma \in L^1_+(0, +\infty)$.

Ensuite, d'après l'estimation (2.26) on obtient

$$\int_{\omega_n} i_n(a, x) dx \leq M.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\omega_n} F_\gamma(i_n)(x) dx &= \int_{\omega_n} \int_0^{+\infty} \gamma(a) i_n(a, x) da dx, \\ &\leq M \int_0^{+\infty} \gamma(a) da, \\ &\leq MR_0. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 2.5. □

Lemme 2.6. On suppose que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que $R_0 > 1$. Alors, il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $n \geq n_2 := \max(n_0, n_1)$, nous avons

$$0 \leq S'_n(x) \leq M, \quad \int_0^{+\infty} \partial_x i_n(a, X_n) da \geq -M. \quad (2.33)$$

De plus, $|S''_n(x)| \leq M$ pour tout $x \in (-X_n, X_n)$.

Démonstration. On intègre l'équation (2.25) entre $-X_n$ et x :

$$dS'_n(x) = -cS_n(x) + dS'_n(-X_n) + cS_n(-X_n) + \int_{-X_n}^x S_n F_\gamma(i_n)(x) dx,$$

puisque $S_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in \omega_n$ et $S'(-X_n) \leq \underline{S}'(-X_n)$, alors

$$dS'_n(x) \leq M + \int_{-X_n}^x S_n F_\gamma(i_n)(x) dx,$$

d'après l'estimation (2.32), on obtient

$$S'_n(x) \leq M.$$

Finalement, comme S_n est croissante

$$0 \leq S'_n(x) \leq M.$$

Pour La deuxième partie de l'estimation (2.33), nous utilisons l'équation (2.29),

$$\partial_x J_n(a, X_n) + cJ_n(a, X_n) + dS'_n(X_n) + cS_n(X_n) = \int_{\omega_n} i_n(a, x) dx + \partial_x J_n(a, -X_n) + dS'_n(-X_n),$$

Comme le deuxième membre de cette égalité est positif, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_x J_n(a, X_n) &\geq -(cJ_n(a, X_n) + dS'_n(X_n) + cS_n(X_n)), \\ &\geq -M \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 2.7. On suppose que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que $R_0 > 1$. Alors, il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $n \geq n_2$, nous avons

$$\int_{\omega_n} (i_n(a, x)^2 + (\partial_x i_n)^2(a, x)) dx \leq M \quad \forall a \in (0, +\infty), \quad (2.34)$$

$$\iint_{\Omega_n} ((\partial_x i_n)^2(a, x) + (\partial_a i_n)^2(a, x)) da dx \leq M, \quad (2.35)$$

$$\iint_{\Omega_n} (\partial_x^2 i_n)^2(a, x) da dx \leq M. \quad (2.36)$$

Démonstration. Afin d'obtenir l'estimation (2.34), nous multiplions l'équation (2.24) par i_n et intégrons sur ω_n ,

$$\int_{\omega_n} \frac{\partial i_n}{\partial a}(a, x) i_n(a, x) dx = \int_{\omega_n} (\partial_x^2 i_n)(a, x) i_n(a, x) dx + c \int_{\omega_n} \partial_x i_n(a, x) i_n(a, x) dx,$$

après une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{da} \int_{\omega_n} i_n(a, x)^2 dx + \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx &= \int_{\partial\omega_n} \partial_x i_n(a, x) i_n(a, x) dx + \frac{1}{2} c \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx \\ &= \partial_x i_n(a, X_n) i_n(a, X_n) + \frac{1}{2} c (i_n^2)(a, X_n). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{da} \int_{\omega_n} i_n(a, x)^2 dx + \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx \leq \frac{1}{2} \partial_x(i^2)(a, X_n) + \frac{1}{2} c(i^2)(a, X_n). \quad (2.37)$$

En utilisant l'estimation (2.31) et le fait que $S_n \in [0, 1]$, il en découle que

$$\begin{aligned} \int_{\omega_n} i_n(0, x)^2 dx &= \int_{\omega_n} (S_n(x) \mathcal{F}_\gamma(i_n)(x))^2 dx \\ &\leq \int_{\omega_n} |\mathcal{F}_\gamma(i_n)(x)| |\mathcal{F}_\gamma(i_n)(x)| dx \\ &\leq M \int_{\omega_n} |\mathcal{F}_\gamma(i_n)(x)| dx \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Donc, après l'intégration de l'inégalité (2.37) sur $(0, a)$, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\omega_n} i_n(a, x)^2 dx + \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a', x) dx da' \leq M. \quad (2.38)$$

Multiplions (2.24) par $\partial_a i_n$ et intégrons sur $(0, a) \times \omega_n$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n)^2(a, x) da dx &= \\ &= \int_0^a \int_{\omega_n} \partial_x^2 i_n(a, x) \partial_a i_n(a, x) da dx + c \int_0^a \int_{\omega_n} \partial_x i_n(a, x) \partial_a i_n(a, x) da dx. \end{aligned} \quad (2.39)$$

On pose,

$$I_n = \int_0^a \int_{\omega_n} \partial_x^2 i_n(a, x) \partial_a i_n(a, x) da dx.$$

Après une intégration par parties de I_n , on trouve

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^a \partial_x i_n(a, X_n) \partial_a i_n(a, X_n) da - \int_0^a \frac{1}{2} \frac{d}{da} \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) da dx \\ &= \int_0^a \partial_x i_n(a, X_n) \partial_a i(a, X_n) da - \frac{1}{2} \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx + \frac{1}{2} \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(0, x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (2.39) devient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n)^2(a, x) da dx + \frac{1}{2} \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(0, x) dx + \int_0^a \partial_x i_n(a, X_n) \partial_a i(a, X_n) da \\
& \quad + c \int_0^a \int_{\omega_n} \partial_x i_n(a, x) \partial_a i_n(a, x) da dx.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

A présent, on cherche à majorer la première partie de l'équation ci-dessus.

Tout d'abord, on remarque que

$$\partial_x i_n(0, x) = S'_n(x) \mathcal{F}_\gamma(i_n)(x) + S_n(x) \mathcal{F}_\gamma(\partial_x i_n)(x),$$

ainsi, en utilisant (2.33) et (2.31), on a

$$\begin{aligned}
|\partial_x i_n(0, x)| &\leq M |\mathcal{F}_\gamma(i_n)(x)| + |\mathcal{F}_\gamma(\partial_x i_n)(x)|, \\
\int_{\omega_n} |\partial_x i_n(0, x)|^2 dx &\leq 2M \int_{\omega_n} |\mathcal{F}_\gamma(i_n)(x)|^2 dx + 2 \int_{\omega_n} |\mathcal{F}_\gamma(\partial_x i_n)(x)|^2 dx, \\
\int_{\omega_n} |\partial_x i_n(0, x)|^2 dx &\leq M + 2 \int_{\omega_n} \left(\int_0^{+\infty} \gamma(a) |\partial_x i_n(a, x)| da \right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.38), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_n} |\partial_x i_n(0, x)|^2 dx &\leq M + 2 \int_{\omega_n} \left(\int_0^{+\infty} \gamma(a) da \int_0^{+\infty} \gamma(a) (\partial_x i_n(a, x))^2 da \right) dx, \\
&\leq M + 2R_0 \|\gamma\|_\infty \int_{\omega_n} \int_0^{+\infty} (\partial_x i_n(a, x))^2 da dx, \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

Donc, il existe une constante $M > 0$ indépendante de n telle que

$$\int_{\omega_n} |\partial_x i_n(0, x)|^2 dx \leq M. \tag{2.41}$$

En utilisant l'équation (2.29) et l'estimation (2.26), on trouve

$$\int_0^a \partial_x i_n(a', X_n) da' + c \int_0^a i_n(a', X_n) da' + dS'_n(X_n) + cS_n(X_n) \leq M,$$

Sachant que S_n et i_n sont positives et S_n est croissante, on a

$$\int_0^a \partial_x i_n(a', X_n) da' \leq M.$$

D'autre part, la fonction \underline{i}^+ définie par le lemme 2.3, vérifie

$$|\partial_a \underline{i}^+(a, X_n)| \leq M \quad \forall a > 0.$$

Donc, en utilisant (2.33), il en découle que

$$\int_0^a \partial_x i_n(a, X_n) \partial_a \underline{i}(a, X_n) da \leq M. \quad (2.42)$$

Maintenant, nous remplaçons les majorations (2.41) et (2.42) dans (2.40), on trouve

$$\int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n)^2(a, x) dadx + \frac{1}{2} \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx \leq M + c \int_0^a \int_{\omega_n} \partial_a i_n(a, x) \partial_x i_n(a, x) dadx.$$

En appliquant l'inégalité de cauchy-schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n)^2(a, x) dadx + \frac{1}{2} \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx \\ & \leq M + c \left(\int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n(a, x))^2 dadx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_x i_n(a, x))^2 dadx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Remarque 2.1. Soient $a, b > 0$, alors pour tout $m > 0$ nous avons

$$ab \leq \frac{1}{2m} a^2 + \frac{m}{2} b^2.$$

En appliquant la remarque et l'estimation (2.38), on a

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n)^2(a, x) da dx + \frac{1}{2} \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx \\ & \leq M + c \left(\frac{1}{2m} \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n(a, x))^2 da dx + \frac{m}{2} \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_x i_n(a, x))^2 da dx \right), \end{aligned}$$

ainsi,

$$\left(2 - \frac{c}{m}\right) \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n)^2(a, x) da dx + \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx \leq M,$$

où m est une constante positive telle que

$$m > \frac{c}{2}.$$

Donc, il existe une constante $M > 0$ et $\tilde{M} = (2 - \frac{c}{m}) > 0$ indépendante de n telle que

$$\tilde{M} \int_0^a \int_{\omega_n} (\partial_a i_n)^2(a, x) da dx + \int_{\omega_n} (\partial_x i_n)^2(a, x) dx \leq M. \quad (2.43)$$

Alors, il suffit de combiner (2.38) et (2.43) pour prouver les estimations (2.34) et (2.35).

Finalement, en remplaçant (2.34) et (2.35) dans l'équation du système (2.24), on obtient la dernière estimation (2.36).

Ceci termine la démonstration du lemme 2.7. □

Maintenant, on peut passer à la limite (c-à-d faire tendre n vers l'infini). D'après les lemmes 2.4-2.7 il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout n assez grand, nous avons

$$\int_{\omega_n} i_n(a, x) dx \leq M, \quad \int_0^{+\infty} i_n(a, x) da \leq M, \quad i_n(a, x) \leq M, \quad (2.44)$$

$$\|i_n\|_{H^1(\Omega_n)} + \|i_n\|_{L^2((0, +\infty), H^1(\omega_n))} \leq M, \quad (2.45)$$

$$\|S_n\|_{W^{2, \infty}(\omega_n)} \leq M. \quad (2.46)$$

Soit $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$, on peut extraire une sous suite de (i_n, S_n) (qu'on la note également

(i_n, S_n) qui tend vers (i, S) pour la topologie suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_n \rightarrow i \quad \text{dans } L^2_{loc}(\Omega) \text{ fortement,} \\ \quad \quad \quad \text{dans } H^1_{loc}(\Omega) \text{ faiblement,} \\ \quad \quad \quad \text{dans } L^2_{loc}((0, +\infty), H^2_{loc}(\mathbb{R})) \text{ faiblement,} \\ S_n \rightarrow S \quad \text{dans } C^1_{loc}(\mathbb{R}). \end{array} \right. \quad (2.47)$$

De plus, d'après (2.47) on peut extraire une sous suite de i_n qui converge presque partout dans Ω et en utilisant (2.44) et le lemme de Fatou, on arrive à

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}} i(a, x) dx \leq M, \quad \forall a \geq 0, \\ \int_0^{+\infty} i(a, x) da \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ i(a, x) \leq M, \quad \forall x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

D'après la convergence faible et l'estimation (2.45), nous avons

$$i \in H^1(\Omega) \cap L^2((0, +\infty), H^2(\mathbb{R})), \quad (2.49)$$

tandis que la fonction S vérifie

$$0 \leq S \leq 1, \quad S' \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (2.50)$$

avant de passer à la limite de S_n , on va appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue à $F_\gamma(i_n)$, utilisons le fait que $\gamma \in L^1(0, +\infty)$ et i_n est bornée uniformément, on a

$$F_\gamma(i_n)(x) = \int_0^{+\infty} \gamma(a) i_n(a, x) da \rightarrow F_\gamma(i)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la fonction S vérifie l'équation

$$dS'' + cS' - SF_\gamma(i) = 0.$$

Finalement, par (2.48) et (2.50) on obtient $S'' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Maintenant, soit une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$. Alors pour un n assez grand tel que $\text{supp}(\varphi) \subset [0, +\infty) \times (-X_n, X_n)$, la fonction i_n vérifie l'équation suivante :

$$\iint_{\Omega} (-\partial_a i_n + \partial_x^2 i_n + c \partial_x i_n) \varphi(a, x) da dx = 0.$$

Après une intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} i_n(a, x) \partial_a \varphi(a, x) da dx - \iint_{\Omega} \partial_x i_n(a, x) \partial_x \varphi(a, x) da dx \\ & + c \iint_{\Omega} \partial_x i_n(a, x) \varphi(a, x) da dx + \iint_{\Omega} \gamma(a) S_n(x) i_n(a, x) \varphi(0, x) da dx = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (2.47) on peut passer à la limite et on obtient que la fonction i vérifie l'équation suivante pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} i(a, x) \partial_a \varphi(a, x) da dx - \iint_{\Omega} \partial_x i(a, x) \partial_x \varphi(a, x) da dx \\ & + c \iint_{\Omega} \partial_x i(a, x) \varphi(a, x) da dx + \iint_{\Omega} \gamma(a) S(x) i(a, x) \varphi(0, x) da dx = 0. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Maintenant, soit $\varphi \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$, alors après une intégration par partie de l'équation (2.51), on a

$$\iint_{\Omega} i(a, x) (-\partial_a \varphi(a, x) + \partial_x^2 \varphi(a, x) + c \partial_x \varphi(a, x)) da dx = 0 \tag{2.52}$$

Alors, on conclut que la fonction i vérifie l'équation suivante

$$\partial_a i = \partial_x^2 i + c \partial_x i \quad \text{dans } \mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}).$$

D'après (2.47) chaque terme de l'équation ci-dessus appartient à $L^2(\Omega)$ et on obtient aussi que $i(0, x) = S(x) F_{\gamma}(i)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, en utilisant (2.48) cette égalité appartient à $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$.

Donc, on peut écrire la fonction i sous la forme suivante :

$$i(a, x) = T_{\Delta + c \partial_x}(a)(B)(x) \quad \text{avec } B(x) = S(x) F_{\gamma}(i)(x).$$

avec $T_{\Delta + c \partial_x}(a)$ est un C_0 semi-groupe analytique et $\Delta + c \partial_x$ son générateur infinitésimal dans

$L^2(\mathbb{R})$.

Comme $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ et d'après (2.49) on va montrer que $B \in W^{2,2}(\mathbb{R})$.

Donc, nous utilisons la méthode d'itération utilisée dans la proposition 2.1, (i, S) est une solution classique du problème (2.16), (2.17) et que i appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.

Ensuite, à partir de l'estimation $\underline{i} \leq i_n \leq \bar{i}$ et $\underline{S} \leq S \leq 1$, on conclut que

$$\underline{i} \leq i \leq \bar{i}, \quad \underline{S} \leq S \leq 1,$$

et la définition de $\underline{i}, \bar{i}, \underline{s}$ montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} i(a, x) = 0 \text{ uniformément par rapport à } a \geq 0$$

Désormais, il reste à étudier la limite quand $x \rightarrow -\infty$.

Puisque S_n est une fonction croissante et bornée pour tout $n \geq 0$, on déduit que la fonction S est aussi croissante et bornée.

Donc, il existe une constante $S^+ \in [0, 1]$ tel que $S(-\infty) = S^+$. Ensuite, on prouve que la fonction $i(\cdot, x)$ tend vers zero quand $x \rightarrow -\infty$ dans $\mathcal{C}_{loc}^0(\mathbb{R}^+)$.

Soit $\{t_n\}_{n \geq 0}$ une suite qui tend vers $-\infty$ et on considère la suite de fonction $j_n(a, x) = i(a, x+t_n)$.

Puisque la fonction i est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, alors la suite j_n est bornée dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \omega)$ avec $\omega = (-1, 0)$.

On peut extraire une sous suite décroissante $\{t_{\varphi(n)}\}$ telle que $t_{\varphi(n)} - t_{\varphi(n+1)} > 1$ pour tout $n \geq 0$ et j_n converge vers la fonction j dans $\mathcal{C}_{loc}^0(\mathbb{R}^+ \times \omega)$.

Donc, nous avons pour tout $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{t_{\varphi(n+1)}}^{t_{\varphi(n)}} i(a, x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} i(a, x) dx,$$

d'après (2.48), la série ci-dessus est convergente. Ainsi, en intégrant j_n sur ω et utilisons le fait que $t_{\varphi(n)} - t_{\varphi(n+1)} > 1$, on obtient

$$\int_{t_{\varphi(n+1)}}^{t_{\varphi(n)}} i(a, x) dx \geq \int_{\omega} j_n(a, x) dx.$$

Alors,

$$\int_{\omega} j_n(a, x) dx \rightarrow 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

d'autre part, nous avons

$$\int_{\omega} j_n(a, x) dx \rightarrow \int_{\omega} j(a, x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Donc, puisque la fonction j est continue et positive, on conclue que $j \equiv 0$ et que la fonction i tend vers 0 quand $x \rightarrow -\infty$ dans $\mathcal{C}_{loc}^0(\mathbb{R}^+)$.

Finalement, pour montrer que $S^+ = S(-\infty)$ appartient à $[0, 1[$, on suppose que $S^+ = 1$ et puisque la fonction S est croissante et majorée par 1, on obtient que $S \equiv 1$. Ainsi, la fonction i est une solution intégrable et positive du problème suivant :

$$\partial_a i = \partial_x^2 i + c \partial_x i, \quad i(0, x) = \int_0^{+\infty} \gamma(a) i(a, x) da.$$

Comme l'équation de i préserve la masse totale, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} i(a, x) dx = \int_{\mathbb{R}} i(0, x) dx, \quad \forall a > 0.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} i(0, x) dx = \int_0^{+\infty} \gamma(a) da \int_{\mathbb{R}} i(0, x) dx = R_0 \int_{\mathbb{R}} i(0, x) dx,$$

Puisque $R_0 > 1$, on obtient que $i \equiv 0$, contradiction avec l'inégalité $i \geq \underline{i}$.

Ce qui termine la démonstration du Théoreme 2.1.

2.3 Non-existence d'onde progressive pour $R_0 \leq 1$

Dans cette section, on cherche a prouver la non-existence d'onde progressive quand $R_0 \leq 1$.

Proposition 2.2. On suppose que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que $R_0 \leq 1$. Alors pour tout $c \geq 0$, la solution triviale ($S \equiv 1, i \equiv 0$) est l'unique solution positive du problème (2.4)-(2.6).

Démonstration. Nous considérons l'équation

$$B(x) = S(x) \int_0^{+\infty} \gamma(a) T_{(\Delta+c\partial_x)}(a)(B)(x) da.$$

Puisque B est une fonction bornée et tend vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$, alors il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$B(x_0) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B(x)|,$$

et comme $\{T_{(\Delta+c\partial_x)}\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction, on obtient

$$B(x_0) = S(x_0) \int_0^{+\infty} \gamma(a) T_{(\Delta+c\partial_x)}(a)(B)(x_0) da \leq S(x_0) R_0 \|B\|_\infty,$$

donc,

$$\|B\|_\infty \leq S(x_0) R_0 \|B\|_\infty. \quad (2.53)$$

On va utiliser un raisonnement par l'absurde, en effet, soit $B(x_0) > 0$. Puisque S est une solution bornée de (2.5), nous multiplions l'équation (2.5) par $e^{\frac{c}{d}x}$ et puis nous intégrons entre $-\infty$ et x , on trouve

$$S'(x) = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{c}{d}(x-z)} B(z) dz,$$

après changement de variable, on obtient

$$S'(x) = \frac{1}{d} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{c}{d}z} B(x-z) dz,$$

en intégrant cette dernière entre y et x , on obtient

$$S(x) - S(y) = \frac{1}{d} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{c}{d}z} \int_y^x B(l-z) dl dz,$$

ainsi,

$$S(x) - S(y) = \frac{1}{d} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{c}{d}z} \int_{y-z}^{x-z} B(r) dr dz,$$

alors S est strictement croissante sur $[x_0, +\infty)$ ainsi $S(x_0) < 1$.

Finalement, en utilisant (2.53), on obtient que $\|B\|_\infty = 0$, donc $i \equiv 0$. □

Bibliographie

- [1] H. Brezis *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Dunod, 2005.
- [2] A. Ducrot et P. Magal , *Travelling wave solutions for an infection-age structured model with diffusion* . Proc.R. Soc. Edinb. A 139 459-82, 2009.
- [3] R. A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes* . Ann. Eugenics 7, 1937.
- [4] B.H. Gilding et R. Kersner , *Travelling Waves in Nonlinear Diffusion-Convection Reaction*. Springer Basel AG, 2004.
- [5] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Reprint of the 1998 Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [6] W.O. Kermack and A.G. McKendrick *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proc. R. Soc. Lond. A 115 700-21, 1927.
- [7] J.D. Murray, *Mathematical Biology I : An Introduction* . Springer, 2002.
- [8] J.D. Murray, *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications Third Edition* . Springer, 2003.
- [9] P. Quittner, P. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States*. Birkhäuser Verlag AG, 2007.
- [10] F. Williams, *Combustion Theory* . Addison-Wesley, Reading MA, Providence, RI, 1983.
- [11] Ya. B. Zeldovich et N. N. Semenov, *Kinetics of chemical reactions in flames*. National Advisory Committee Aeronautics Tech. Memo 1946.