

République Algérienne Démocratique Et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences  
Département des Mathématiques

# MÉMOIRE DE MASTER

SPÉCIALITÉ : Modélisation Mathématique des Systèmes Complexes

Présenté par

**Fatima Zahra TANI**

Sujet

**ÉTUDE QUALITATIVE D'UN SYSTÈME PROIE  
PRÉDATEUR IMPULSIF**

Mémoire soutenu le 05 Juin 2016 devant le jury composé de :

M. MOUSSAOUI. A	Pr. Université de Tlemcen	<i>Président</i>
M. BOUGUIMA. S. M	Pr. Université de Tlemcen	<i>Examineur</i>
M. MIRI. S. E-H	M.C.A. Université de Tlemcen	<i>Examineur</i>
Mlle. MOSTEFAOUI. I. M	MAB. EPST Oran	<i>Encadreur</i>



*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes très chers parents, Nasreddine et Karima, qui m'ont donné tout le courage, la patience et la tendresse.*

*Mes frères, ma soeur et toute ma famille.*

*Mes amis et toute personne qui m'a aidé de loin et de près.*

*Ma promotion de Master.*

## REMERCIEMENTS

*En premier lieu, je remercie Allah, le tout puissant, qui m'a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail.*

*J'exprime ma profonde gratitude à Mademoiselle I.M MOSTEFAOUI, qui m'a encadré, tout le long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son aide consistante, ses conseils précieux et ses remarques objectives. C'est grâce à vous que ce travail a pris cette forme.*

*J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur le Professeur A. MOUSSAOUI pour tous les efforts déployés pendant ces deux ans de master, aussi je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury.*

*Je remercie énormément Monsieur le Professeur S.M. BOUGUIMA, pour sa disponibilité, sa gentillesse et d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.*

*Je tiens aussi à remercier Monsieur S. MIRI de bien vouloir évaluer ce travail. Tout mes sincères remerciements vont également à notre chef de département Monsieur M. MEBKHOUT et à l'ensemble des enseignants du département de Mathématique qui m'ont aidé à m'améliorer durant mon cursus universitaire.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaire</b>	<b>4</b>
2.1	Espace des fonctions continues par morceaux . . . . .	4
2.2	Équations différentielles impulsives . . . . .	5
2.3	Solutions explicites d'équations différentielles impulsives . . . . .	6
2.3.1	Exemples . . . . .	6
2.3.2	Existence locale et unicité . . . . .	8
2.3.3	Bornitude . . . . .	9
2.4	Résultats fondamentaux pour les systèmes impulsifs . . . . .	9
2.5	Notion de stabilité . . . . .	10
2.6	Théorie de Floquet . . . . .	11
2.7	Théorème de point fixe de Banach . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Etude qualitative d'un modèle impulsif de type proie prédateur</b>	<b>13</b>
3.1	Introduction . . . . .	13
3.2	Positivité et bornitude . . . . .	15
3.2.1	Positivité . . . . .	15
3.2.2	Bornitude des solutions . . . . .	16
3.3	Solution périodique du modèle sans proies . . . . .	18
3.4	Stabilité locale . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Permanence</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Simulations numériques et détermination de la valeur critique <math>T^*</math></b>	<b>33</b>
5.1	Schéma numérique . . . . .	33

---

5.2	Simulation numérique du système . . . . .	34
5.3	Conclusion . . . . .	35
5.4	Liste des figures . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>38</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

# Chapitre 1

## Introduction générale

La nature est riche de nombreux phénomènes basés sur les relations entre les espèces et leurs milieux. L'observation de cette complexité ne permet plus à l'intuition d'en comprendre le fonctionnement ni de prévoir l'évolution. Pour cela, les chercheurs se sont intéressés, depuis longtemps, à trouver une loi mathématique qui régit le phénomène observé. Cette dernière devra en fait représenter et décrire la réalité. Ceci fournit à la fin un système appelé modèle mathématique. Un modèle mathématique décrivant ce type de phénomènes est généralement basé sur les équations différentielles. Celles-ci expriment le lien entre la taille de la population représentée par une quantité inconnue, et sa dérivée en temps.

La dynamique des populations est une discipline qui consiste à déterminer la densité de population au cours du temps. Dans ce contexte, beaucoup de modèles mathématiques ont été proposés afin de décrire le comportement des différentes espèces d'une population et les relations entre eux, par exemple les modèles des proies-prédateurs. Parmi les premiers chercheurs qui ont développé cette théorie sont Lotka et Volterra (1925-1926) en considérant un modèle proie-prédateur défini par un système d'équations différentielles ordinaires. Ce système décrit la prédation, la croissance et la mortalité. Il est de la forme :

$$\begin{cases} x' = rx - axy, \\ y' = -Dy + eaxy. \end{cases}$$

Après, plusieurs modifications ont été faites, afin d'améliorer la description écologique et la rendre plus réaliste. Par ailleurs, il y a des modèles proies-prédateurs sous formes d'équations impulsives. Une équation différentielle impulsive est une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle ordinaire et des sauts instantanés

de l'état appelés impulsions. Le phénomène d'impulse a été observé dans certains processus naturels. Par exemple, en physique, en dynamique des populations, en biotechnologie, en économie, etc. Ceci a ramené les scientifiques à s'intéresser à l'étude de ce type d'équations.

Dans ce mémoire, nous allons présenter un modèle proie-prédateur, donné par un système dynamique impulsif, proposé par **H.K. Baek** [12]. Nous allons par la suite étudier mathématiquement ce modèle. D'une part, Il s'agit de la détermination d'une solution périodique et d'étudier sa stabilité. D'autre part, nous allons vérifier la permanence sous certaines conditions. A la fin, une présentation numérique est associée pour confirmer les résultats théoriques. Le plan de ce mémoire est donné comme suit :

**Chapitre 2** :Des résultats mathématiques nécessaires pour la suite de ce mémoire. Notamment, nous exposons la théorie des équations impulsives, la théorie de Floquet ainsi que le théorème de contraction de Banach, menés par des exemples explicatifs.

**Chapitre 3** :L'étude mathématique d'un système de proie-prédateur impulsif avec une fonction de réponse de type Beddington DeAngelis. Dans ce chapitre, nous montrons d'abord la positivité et la bornitude. Ensuite, nous calculons la solution périodique du système et nous montrons qu'elle est stable sous certaines conditions.

**Chapitre 4** :Nous vérifions, dans ce chapitre, la permanence de la solution du système proposé, sous autres conditions.

**Chapitre 5** :Nous exposons des simulations numériques qui prouvent tous les résultats trouvés dans les chapitres précédents.



# Chapitre 2

## Préliminaire

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire. Notamment, nous nous intéressons à la théorie des équations impulsives et la théorie de Floquet, ainsi que le théorème de contraction de Banach.

### 2.1 Espace des fonctions continues par morceaux

Nous exposons, dans ce paragraphe, la définition d'une fonction continue par morceau ([6]) suivie par deux exemples explicatifs.

**Définition 2.1.1** Soit  $\theta = (\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels strictement croissante dans  $I = ]t_0, +\infty[$ , telle que

$$|\theta_k| \rightarrow \infty \text{ quand } k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On dit que la fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à l'espace  $PC(I, \mathbb{R})$  si :

- $f$  est continue sur chaque intervalle  $]\theta_k, \theta_{k+1}[$ .
- $f$  possède une limite à droite  $f(\theta_k^+) = \lim_{t \rightarrow \theta_k^+} f(t)$  et la limite à gauche  $f(\theta_k^-) = \lim_{t \rightarrow \theta_k^-} f(t)$  existe telle que  $f(\theta_k^-) = f(\theta_k)$ .

De même,  $f$  est dite dans l'espace  $PC^1(I, \mathbb{R})$  si  $f$  et  $f'$  appartiennent à  $PC(I, \mathbb{R})$ . (Voir [5],[6],[7])

**Exemples :** Soient par exemple les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$\begin{cases} f(t) = t + 1, & \text{si } t \neq n \\ f(n^+) = f(n) + 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t) = 1/2, & \text{si } t \neq \exp n \\ f(\exp(n^+)) = f(\exp(n)) + 2. \end{cases}$$

## 2.2 Équations différentielles impulsives

De nos jours, les systèmes impulsifs sont devenus, de plus en plus, importants dans certains processus réels et phénomènes naturels. Par exemple, en physique, en dynamique des populations, en biotechnologie, en économie, etc.

La théorie des équations différentielles impulsives a été initiée par A. Mishkis et V. D. Mil'man en 1960. Le développement de cette théorie était relativement lent à cause de la difficulté de manipulation de telles équations. Après, beaucoup de chercheurs ont participé à l'enrichissement de cette théorie où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors.

**Définition 2.2.1 (Description des systèmes impulsifs)** *Une équation différentielle impulsive représente une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle ordinaire et des sauts instantanés de l'état appelés impulsions.*

*Dans ce mémoire, on s'intéresse à une équation impulsive avec des impulsions fixés, de la forme :*

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)) & , \quad t \neq t_i \\ u(t_i^+) = J(u(t_i)) & , \quad i \in \mathbb{N}^* \\ u(t_0^+) = u_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Où,  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , avec  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^N$ ,  $J : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  sont des fonctions continues.

Toute solution  $u(t)$  du système (2.1) vérifie :

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = u_0 = u(0^+)$ .
- Lorsque  $t \in ]t_0, +\infty[$ ,  $t \neq t_i$  alors  $u'(t) = F(u(t))$ .
- $u(t_i^-) = u(t_i)$  et  $u(t_i^+) = J(u(t_i))$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

## 2.3 Solutions explicites d'équations différentielles impulsives

Comme les équations différentielles ordinaires, il existe des équations impulsives qui peuvent être résolues dont la solution est une fonction continue par morceau.

### 2.3.1 Exemples

Ici, nous présentons deux exemples pour la bonne compréhension de ce type d'équations.

**Exemple 1 :**

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t), & \text{si } t \in ]t_n, t_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N}, \\ u(t_n^+) = u(t_n) + \beta, & \beta \in \mathbb{R}, \\ u(0^+) = u_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour trouver la solution du système (2.2), il faut résoudre l'équation sur chaque sous intervalle  $]t_n, t_{n+1}]$  :

- Si  $t \in ]0, t_1]$ , alors,

$$u(t) = u_0 \exp(\alpha t).$$

- Si  $t \in ]t_1, t_2]$ , nous savons que

$$u(t_1^+) = u_0 \exp(\alpha t_1) + \beta.$$

Donc,

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_1^+) \exp(t - t_1) \\ &= (u_0 \exp(\alpha t_1) + \beta) \exp(\alpha(t - t_1)). \end{aligned}$$

- Si  $t \in ]t_2, t_3]$ , de ce qui précède, nous avons

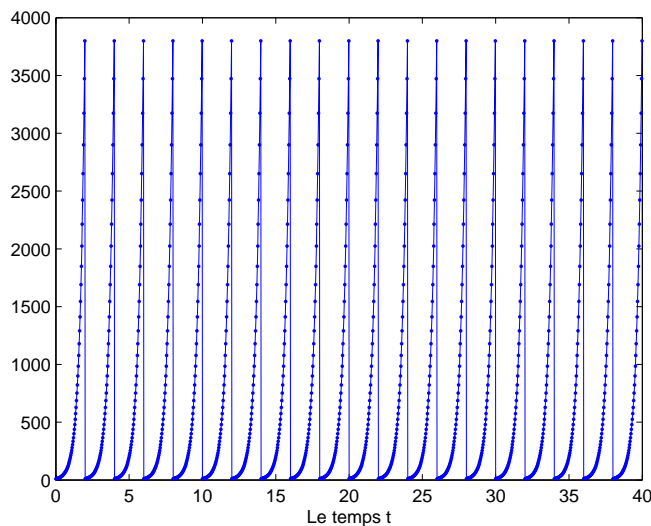
$$u(t_2^+) = u_0 \exp(\alpha t_2) + \beta \exp(t_2 - t_1) + \beta.$$

Donc,

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_2^+) \exp(t - t_2) \\ &= u_0 \exp(\alpha t) + \beta \exp(t - t_1) + \beta \exp(\alpha(t - t_2)). \end{aligned}$$

De la même façon, sur  $]t_n, t_{n+1}]$ , nous obtenons

$$u(t) = u_0 \exp(\alpha t) + \beta \exp(\alpha(t - t_1)) + \beta \exp(\alpha(t - t_2)) + \dots + \beta \exp(\alpha(t - t_n)).$$



Solution exacte du système (2.2)

**Exemple 2 :**

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha, & \text{si } t \in ]t_n, t_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N}, \\ u(t_n^+) = \beta u(t_n), & \beta \in \mathbb{R}, \\ u(0^+) = u_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

En résolvant le système (2.3) sur chaque sous-intervalle  $]t_n, t_{n+1}]$ , nous trouvons :

– Si  $t \in ]0, t_1]$ , alors,

$$u(t) = \alpha t + u_0.$$

– Si  $t \in ]t_1, t_2]$ , on a

$$u(t_1^+) = \beta(\alpha t_1 + u_0).$$

Alors,

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha(t - t_1) + u(t_1^+) \\ &= \alpha(t - t_1) + \beta(\alpha t_1 + u_0). \end{aligned}$$

– Si  $t \in ]t_2, t_3]$ , nous avons

$$u(t_2^+) = \alpha\beta(t_2 - t_1) + \beta^2(\alpha t_1 + u_0).$$

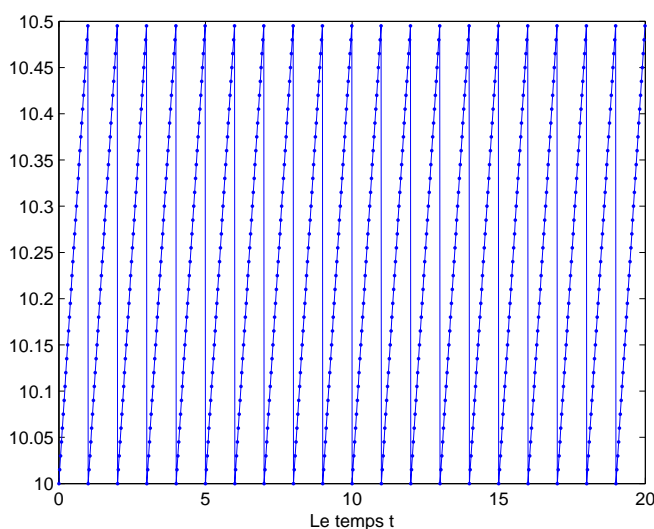
Nous trouvons alors,

$$u(t) = \alpha(t - t_2) + \alpha\beta(t_2 - t_1) + \beta^2(\alpha t_1 + u_0).$$

En répétant le processus, nous obtenons

$$u(t) = \alpha(t - t_n) + \alpha\beta(t_n - t_{n-1}) + \alpha\beta^2(t_{n-1} - t_{n-2}) + \cdots + \alpha\beta^{n-1}(t_2 - t_1) + \beta^n(\alpha t_1 + u_0),$$

quand  $t \in ]t_n, t_{n+1}]$ .



Solution exacte du système (2.2)

### 2.3.2 Existence locale et unicité

Dans ce paragraphe, nous allons citer le théorème qui assure l'existence locale et l'unicité de la solution du système (2.1) (Voir[6]).

**Théorème 2.3.2.1** *Si la fonction  $F$  est continue sur  $\Omega \in \mathbb{R}^N$ , alors pour toute condition initiale  $u_0$ , il existe un  $\alpha > t_0$  telle que*

$$u : ]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[ \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

*est une solution du système (2.1).*

*Si de plus,  $F$  est localement lipschitzienne en  $u$  alors cette solution est unique.*

### 2.3.3 Bornitude

**Définition 2.3.3.1** On dit que la solution du système (2.1) est bornée, s'il existe un  $M > 0$  tel que,

$$\|u(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

## 2.4 Résultats fondamentaux pour les systèmes impulsifs

Dans cette partie, nous énonçons quelques résultats et définitions importants, pour ce type d'équations.

Soient

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[ \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n : x_i(t) \geq 0, \forall i = 1 \dots n\}.$$

**Définition 2.4.1** Soit  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $V$  est dite de la classe  $V_0$  si :

1.  $V$  est continue sur l'intervalle  $(nT, (n+1)T] \times \mathbb{R}_+^n$  et

$$\lim_{\substack{(t,y) \rightarrow (nT^+, \mathbf{x}) \\ t > nT}} V(t, \mathbf{y}) = V(nT^+, \mathbf{x})$$

existe.

2.  $V$  est localement lipschitzienne en  $\mathbf{x}$ .

**Définition 2.4.2** Soient  $V \in V_0$ ,  $(t, \mathbf{x}) \in (nT, (n+1)T] \times \mathbb{R}_+^n$ . La dérivée à droite de  $V(t, \mathbf{x})$  respectivement au système (2.1) est définie comme suit :

$$D^+V(t, \mathbf{x}) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, \mathbf{x} + hF(t, \mathbf{x})) - V(t, \mathbf{x})].$$

**Théorème 2.4.1 (Théorème de comparaison)** Soit  $V \in V_0$  et considérons le système suivant :

$$\begin{cases} D^+V(t, \mathbf{x}) \leq g(t, \mathbf{x}), & t \neq n\tau \\ V(t, \mathbf{x}) \leq \psi_n(V(t, \mathbf{x})), & t = n\tau \end{cases} \quad (2.4)$$

Où :  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $(n\tau, (n+1)\tau] \times \mathbb{R}_+$  et pour  $u(t) \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{(t,y) \rightarrow (n\tau^+, u)} g(t, y) = g(n\tau^+, u)$  existe,  $\psi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est croissante. Soit  $r(t)$  la

solution maximale du système différentiel impulsif suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)), & t \neq n\tau \\ u(t^+) = \psi_n(u(t)), & t = n\tau \\ u(0^+) = u_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

qui existe sur  $[0, +\infty[$ .

Alors,  $V(0^+, \mathbf{x}_0) \leq u_0$  implique  $V(t, \mathbf{x}) \leq r(t)$ ,  $t \geq 0$ , où  $\mathbf{x}(t)$  est une solution du système (2.4).

## 2.5 Notion de stabilité

La notion de stabilité nous permet de savoir le comportement de la solution lorsque le temps devient grand.

Pour cela, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)), & t \neq t_i, \quad i \in \mathbb{N}, \\ x(t_i^+) = J(x(t_i)), \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Définition 2.5.1 (Voir[6])** Soit  $x_0(t) = x(t, t_0, y_0)$  une solution du système (2.6) qui existe pour tout  $t \geq t_0$ . Cette solution est dite :

- Stable si pour tout  $\epsilon > 0$  et  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , il existe un  $\delta = \delta(t_0, \epsilon)$  tel que, pour toute autre solution  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ ,

$$|x_0 - y_0| < \delta \implies |x(t) - x_0(t)| < \epsilon, \quad \text{pour tout } t \geq t_0.$$

- Uniformément stable si  $\delta$  est indépendante de  $t_0$ .
- Asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe un  $\delta_0 = \delta_0(t_0)$  tel que, pour toute autre solution  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ ,

$$|x_0 - y_0| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0.$$

- Uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta_0 > 0$  indépendant de  $t_0$  et un  $T(\epsilon)$  tel que,

$$|x_0 - y_0| < \delta \implies |x(t) - x_0(t)| < \epsilon, \quad \text{pour } t \geq t_0 + T(\epsilon).$$

- instable s'il existe un  $\epsilon_0 > 0$  et  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , tel que pour tout  $\delta_0$  il existe une solution  $y_\epsilon(t)$ ,  $|x_0 - y_\delta(t_0)| < \delta$  et il existe un temps  $t_1$  tel que  $|x_0(t_1) - y_\delta(t_1)| \geq \epsilon_0$ .

## 2.6 Théorie de Floquet

La théorie de Floquet est un outil essentiel pour étudier le comportement des solutions des systèmes périodiques définis par l'équation  $x'(t) = A(t)x(t)$ , où  $A$  est une matrice périodique.

**Théorème 2.6.1 (Voir[5])** Soit le système différentiel linéaire impulsif et périodique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x(t), & t \neq \tau_k, & t \in \mathbb{R}, \\ x(t^+) = x(t) + B_k x(t), & t = \tau_k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Mettons les hypothèses suivantes :

- $A(\cdot) \in PC(C^{n \times n}, \mathbb{R})$  et  $A(t+T) = A(t)$  où  $C^{n \times n}$  est l'ensemble des matrices  $(n \times n)$ .
- $B_k \in C^{n \times n}$  et  $\det(I + B_k) \neq 0$ ,  $I$  la matrice identité,  $\tau_k < \tau_{k+1}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
- Il existe un  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $B_{k+q} = B_k$ ,  $\tau_{k+q} = \tau_k + T$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Soit  $\phi(t)$  une matrice fondamentale du (2.7), alors il existe une matrice constante  $M \in C^{n \times n}$  unique telle que :

$$\phi(t+T) = \phi(t)M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La matrice  $M$  est appelée matrice de monodromie.

Ces matrices sont semblables ayant les mêmes valeurs propres  $:\mu_1, \dots, \mu_n$  appelées multiplicateurs de Floquet.

Sous les conditions précédentes, on dit qu'une solution du système (2.7) est :

- stable si et seulement si tout les multiplicateurs  $\mu_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  de (2.7) vérifient  $|\mu_j| \leq 1$ .
- asymptotiquement stable si et seulement si  $|\mu_j| < 1$ ,  $j = 1, \dots, n$
- instable si  $|\mu_j| > 1$  pour un  $j = 1, \dots, n$ .

## 2.7 Théorème de point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application



contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

**Définition 2.7.1 (Point fixe)** Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans lui même.

On appelle point fixe de  $f$  tout point  $u \in E$  tel que,

$$f(u) = u.$$

**Théorème 2.7.1 (Principe de contraction de Banach(Voir [8]))** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, et  $f : E \rightarrow E$  une contraction stricte, c'est-à-dire qu'il existe  $k \in ]0, 1[$  tel que,

$$\forall (x, y) \in E, d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

Alors  $f$  possède un unique point fixe.

En outre, si on se donne un  $x_0 \in E$  et si on définit par récurrence la suite  $x_{m+1} = f(x_m)$  alors  $x_m$  tend vers cet unique point fixe quand  $m$  tend vers l'infini.

De plus,

$$d(x_m, x) \leq \frac{k^m}{1 - k} d(x_1, x_0),$$

$x$  étant le point fixe de  $f$ .

# Chapitre 3

## Etude qualitative d'un modèle impulsif de type proie prédateur

### 3.1 Introduction

Les systèmes proies-prédateurs ont fait l'objet de plusieurs études mathématiques. En fait, Lotka et Volterra (1925-1926) sont les premiers qui ont proposé un modèle mathématique de deux populations en interaction, donné par un système de deux équations différentielles ordinaires. Chaque équation est décomposée en une somme de deux termes, le premier correspondant à la croissance de la population isolée et le second terme représentant les interactions entre les deux populations.

Lotka et Volterra ont décrit cette dynamique par le système :

$$\begin{cases} x' = rx - axy, \\ y' = -Dy + eaxy. \end{cases}$$

Il est usuel de considérer le nombre de proies consommé par un seul prédateur par unité de temps, appelé aussi fonction de réponse. Dans le modèle ci-dessus, la fonction de réponse  $\phi(x, y)$  est la suivante :

$$\phi(x, y) = \frac{axy}{y} = ax$$

Cependant, il est évident que cette fonction n'est pas réaliste. En effet, il y a toujours une limitation de nombre de proies consommées par un prédateur, même si leur densité est très grande.

Quelques années plus tard, beaucoup de mathématiciens se sont intéressés à ce type de systèmes, en considérant plusieurs formes de fonction de réponse. Ceci est afin d'améliorer la modélisation et de bien décrire la réalité.

Néanmoins, beaucoup de phénomènes naturels en écologie, en économie etc, sont soumis à des perturbations qui provoquent un changement brusqué au système. La meilleur modélisation de tels phénomènes est par les systèmes différentiels impulsifs. Beaucoup de recherches ont été récemment faites dans ce domaine [9],[10],[11].

Dans ce mémoire, nous étudions le comportement dynamique d'un système impulsif de type proie-prédateur, de dimension deux, avec une fonction de réponse de type Beddington DeAngelis [1],[2],[4]. Cette dernière est similaire à celle de Holling II ( $\phi(x, y) = \frac{ax}{x+c}$ ) mais elle contient un terme supplémentaire décrivant l'interférence mutuelle entre prédateurs [3]. En effet, le prédateur passe un temps à chercher, manger des proies et manipuler ses concurrents. Elle est de la forme :

$$\phi(x, y) = \frac{ex}{by + x + c}.$$

Considérons ici la proie comme un insecte ravageur (par exemple les pucerons) et le prédateur comme ennemi naturel de proie (la coccinelle).

Dans ce mémoire, nous allons étudier le modèle impulsif suivant (voir [12]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \frac{ex(t)y(t)}{by(t) + x(t) + c}, \\ y'(t) = -Dy(t) + \frac{mx(t)y(t)}{by(t) + x(t) + c}, \end{array} \right\} t \neq nT. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t^+) = (1 - p_1)x(t) \\ y(t^+) = (1 - p_2)y(t) + q \end{array} \right\} t = nT.$$

$$(x(0^+), y(0^+)) = (x_0, y_0).$$

L'étude mathématique a le but de réduire la densité des insectes nuisibles dans un milieu naturel. En effet, la présence des ravageurs cause souvent des problèmes écologiques et économiques graves, par exemple : dessèchement des feuilles, blocage de développement des plantes. Ceci apporte une perte de rendement considérable.

Il existe plusieurs façons pour lutter contre ces proies dont la lutte chimique et la lutte biologique.

**Lutte chimique** : consiste à utiliser des pesticides.

**Lutte biologique** : une alternative moins nocive où on utilise des organismes vivants

appelés ennemis ou prédateurs naturels.

Ces manières de lutte sont discontinues et périodiques.

Le modèle proposé tient en compte tout ce qui a été expliqué précédemment. En effet, dans chaque impulsion, la densité des proies (respectivement des prédateurs) diminue avec un taux  $p_1$  (respectivement  $p_2$ ) à cause de l'injection des pesticides (Lutte chimique). Ainsi, dans la même période, un nombre  $q$  de prédateur est rajouté (Lutte biologique). Les deux équations différentielles de (3.1) décrivent la dynamique des deux populations.

Les paramètres du modèle sont représentés dans le tableau suivant :

Paramètre	Description
$p_1, p_2$	La proportion des individus qui meurent à cause de la lutte, ils sont entre 0 et 1.
$q$	Le stock des prédateurs.
$k$	La capacité limite.
$a$	Le taux de croissance des proies.
$D$	Le taux de mortalité naturelle des prédateurs.
$b$	Le taux de rencontre et de manipulation d'un autre prédateur.
$c$	La protection dont la proie bénéficie grâce à l'environnement.
$e$	Le taux de prédation.
$m$	Le taux de conversion.

## 3.2 Positivité et bornitude

Il est très intéressant de démontrer la positivité et la bornitude de la solution d'un système dynamique. Ceci pour vérifier que le problème est bien posé. C'est ce que nous allons faire dans cette partie.

### 3.2.1 Positivité

Dans ce qui suit, nous allons voir que pour toute condition initiale positive, la solution restera positive.

**Lemme 3.2.1.1** *Soit  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  la solution du système (3.1),*

*i) Si  $\mathbf{x}(0^+) \geq 0$  alors  $\mathbf{x}(t) \geq 0$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

*ii) Si  $\mathbf{x}(0^+) > 0$  alors  $\mathbf{x}(t) > 0$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

**Démonstration** Du système (3.1), on a :

$$\begin{cases} \frac{x'}{x} = a \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{ey}{by + x + c} \\ \frac{y'}{y} = -D + \frac{mx(t)}{by(t) + x(t) + c} \end{cases}$$

Si on intègre ces deux équations entre 0 et  $t$ ,  $t < T$ , on trouve :

$$x(t) = x(0^+) \exp \left( \int_0^t \left( a \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{ey}{by + x + c} \right) dt \right),$$

$$y(t) = y(0^+) \exp \left( \int_0^t \left( -D + \frac{mx(t)}{by(t) + x(t) + c} \right) dt \right).$$

Si la condition initiale  $(x(0^+), y(0^+))$  est positive alors la solution  $\mathbf{x}(t)$  sera positive dans le premier intervalle  $(0, T]$  et puisque  $\mathbf{x}(nT^+)$  sont tous positives,  $\forall n \geq 1$ , on aura alors la positivité de la solution du système (3.1),  $\forall t \geq 0$ .

### 3.2.2 Bornitude des solutions

Maintenant, nous montrons la bornitude du système.

**Proposition 3.2.2.1** *Il existe un  $M > 0$  tel que  $x(t), y(t) \leq M$ ,  $\forall t \geq 0$ , où  $(x(t), y(t))$  est solution du système (3.1).*

**Démonstration** Soit  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  une solution du système (3.1) et

$$V(t) = V(t, \mathbf{x}) = \frac{m}{e}x(t) + y(t)$$

appartenant à  $V_0$  (voir préliminaire).

On a alors si  $t \neq nT$  :

$$\begin{aligned} D^+V + \beta V &= -\frac{ma}{ek}x(t)^2 + \frac{m}{e}(a + \beta)x(t) + (\beta - D)y(t) \\ &\leq -\frac{ma}{ek}x(t)^2 + \frac{m}{e}(a + \beta)x(t), \text{ si } \beta < D \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nous pouvons montrer facilement que le deuxième membre de (3.2) est borné, en effet :

La fonction  $f(x) = -\frac{ma}{ek}x^2 + \frac{m}{e}(a + \beta)x$ , atteint son maximum en

$$x^* = \frac{k}{2a}(a + \beta).$$

Donc,

$$f(x) \leq f(x^*) = \frac{mk}{4ea}(a + \beta)^2 = M_0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V(nT^+) &= \frac{m}{e}x(nT^+) + y(nT^+) \\ &= (1 - p_1)\frac{m}{e}x(nT) + (1 - p_2)y(nT) + q \\ &\leq V(nT) + q. \end{aligned}$$

En plus

$$V(0^+) = \frac{m}{e}x(0^+) + y(0^+).$$

En choisissant un  $0 < \beta < \beta_0 < D$ , nous pouvons écrire le système suivant :

$$\begin{cases} D^+V \leq -\beta_0V + M_0, & \text{sit } \neq nT, \\ V(nT^+) \leq V(nT) + q. \end{cases}$$

Maintenant, appliquons le théorème (2.4.1) et résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = -\beta_0u(t) + M_0, & t \neq nT \\ u(nT^+) = u(nT) + q, \\ u(0^+) = V(0^+). \end{cases}$$

L'équation  $u'(t) = -\beta_0u(t) + M_0$  donne

$$(u \exp(\beta_0t))' = \left( \frac{M_0}{\beta_0} \exp(\beta_0t) \right)'$$

Intégrons cette équation sur chaque intervalle  $]nT, (n+1)T]$  :

– Si  $t \in ]0, T]$ , alors,

$$u(t) \exp(\beta_0t) = u(0^+) + \frac{M_0}{\beta_0} \exp(\beta_0t) - \frac{M_0}{\beta_0}.$$

Donc,

$$u(t) = \left( u(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-\beta_0t) + \frac{M_0}{\beta_0}.$$

– Si  $t \in ]T, 2T]$ , nous avons

$$u(T^+) = u(T) + q = \left( u(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-\beta_0T) + \frac{M_0}{\beta_0} + q.$$

Donc,

$$u(t) \exp(\beta_0t) = u(T^+) \exp(\beta_0T) + \frac{M_0}{\beta_0} \exp(\beta_0t) - \frac{M_0}{\beta_0} \exp(\beta_0T).$$

Nous obtenons alors,

$$u(t) = \left( u(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-\beta_0t) + q \exp(-\beta_0(t - T)) + \frac{M_0}{\beta_0}.$$

– Si  $t \in ]2T, 3T]$ , au vu de ce qui précède

$$u(2T^+) = u(2T) + q = \left( u(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-2\beta_0 T) + q \exp(-\beta_0 T) + \frac{M_0}{\beta_0} + q.$$

En intégrant, nous trouvons

$$u(t) \exp(\beta_0 t) = u(2T^+) \exp(2\beta_0 T) + \frac{M_0}{\beta_0} \exp(\beta_0 t) - \frac{M_0}{\beta_0} \exp(2\beta_0 T).$$

Alors,

$$u(t) = \left( u(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-\beta_0 t) + q \exp(-\beta_0(t - T)) + q \exp(-\beta_0(t - 2T)) + \frac{M_0}{\beta_0}.$$

– En répétant le processus, nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t) &= \left( u(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-\beta_0 t) + q \exp(-\beta_0(t - T)) + q \exp(-\beta_0(t - 2T)) + \\ &\quad + \cdots + q \exp(-\beta_0(t - nT)) + \frac{M_0}{\beta_0}, \quad \text{quand } t \in ]nT, (n+1)T], \\ &= \left( u(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-\beta_0 t) + q \exp(-\beta_0 t) \left( \exp(\beta_0 T) + \cdots + \exp(n\beta_0 T) \right) + \frac{M_0}{\beta_0} \\ &= \left( u(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-\beta_0 t) + q \exp(-\beta_0(t - nT)) \left( \frac{1 - \exp(-n\beta_0 T)}{1 - \exp(-\beta_0 T)} \right) + \frac{M_0}{\beta_0}. \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.4.1), on conclut

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \left( V(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) \exp(-\beta_0 t) + q \exp(-\beta_0(t - nT)) \left( \frac{1 - \exp(-n\beta_0 T)}{1 - \exp(-\beta_0 T)} \right) + \frac{M_0}{\beta_0} \\ &\leq \left( V(0^+) - \frac{M_0}{\beta_0} \right) + q \left( \frac{1 - \exp(-n\beta_0 T)}{1 - \exp(-\beta_0 T)} \right) + \frac{M_0}{\beta_0} \\ &\leq V(0^+) + q \left( \frac{1 - \exp(-n\beta_0 T)}{1 - \exp(-\beta_0 T)} \right) \\ &\leq C, \quad (C \text{ constante positive}). \end{aligned}$$

Par conséquent, toute solution  $(x(t), y(t))$  du système (3.1) vérifie  $x(t) \leq M, y(t) \leq M$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Il ressort des deux théorèmes précédents que le système (3.1) est bien posé.

### 3.3 Solution périodique du modèle sans proies

Biologiquement, il est important de réduire et d'éradiquer le nombre de ravageurs dans un milieu naturel. D'un point de vue mathématique, ceci revient à la recherche de la solution  $(0, y^*(t))$ .

Pour cela, considérons, en absence des proies, le système différentiel impulsif suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -Dy(t), & t \neq nT, \\ y(nT^+) = (1 - p_2)y(nT) + q \\ y(0^+) = y_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

**Lemme 3.3.1** *Le système (3.3) possède les propriétés suivantes :*

1.  $y^*(t)$  est solution positive et périodique du système tel que,

$$y^*(t) = \frac{q \exp(-D(t - nT))}{1 - (1 - p_2) \exp(-DT)}, \quad t \in ]nT, (n + 1)T], \quad n \in \mathbb{N},$$

avec :

$$y^*(0^+) = \frac{q}{1 - (1 - p_2) \exp(-DT)}.$$

2.  $y(t) = (1 - p_2)^n \left( y_0 - \frac{q \exp(-DT)}{1 - (1 - p_2) \exp(-DT)} \right) \exp(-Dt) + y^*(t)$  est la solution du système avec  $y_0 \geq 0$ ,  $t \in ]nT, (n + 1)T]$ .

3.  $|y(t) - y^*(t)| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

### Démonstration

1. Sachant que  $y(nT^+)$  est la condition initiale de l'intervalle  $]nT, (n + 1)T]$ , il est facile de voir que

$$\begin{aligned} y(t) &= y(nT^+) \exp(-D(t - nT)) \\ &= ((1 - p_2)y(nT) + q) \exp(-D(t - nT)). \end{aligned}$$

Nous obtenons la valeur de  $y(nT)$  à partir de l'intervalle qui précède,  $](n - 1)T, nT]$ ,

$$y(nT) = ((1 - p_2)y((n - 1)T) + q) \exp(-DT).$$

Posons  $u_n = y(nT)$  et donc,

$$\begin{aligned} u_n &= ((1 - p_2)u_{n-1} + q) \exp(-DT) \\ &= F(u_{n-1}). \end{aligned}$$

Pour que  $F$  admette un point fixe, d'après le théorème de Banach (voir préliminaire), il faut vérifier que  $F$  est contractante. Nous avons

$$\begin{aligned} |F(u_n) - F(u'_n)| &= |((1 - p_2)u_n + q) \exp(-DT) - ((1 - p_2)u'_n + q) \exp(-DT)| \\ &= (1 - p_2) \exp(-DT) |u_n - u_{n-1}|. \end{aligned}$$



Comme le coefficient  $(1-p_2)\exp(-DT)$  appartient à l'intervalle  $]0, 1[$ , alors  $F$  définit une fonction contractante, donc elle admet un point fixe unique, c'est à dire,

$$y(nT) = ((1-p_2)y(nT) + q)\exp(-DT).$$

Ce qui donne

$$y(nT) = \frac{q\exp(-DT)}{1 - (1-p_2)\exp(-DT)}.$$

Par conséquent, la solution périodique  $y^*(t)$  du système (3.3), est donnée par :

$$y^*(t) = \frac{q\exp(-D(t-nT))}{1 - (1-p_2)\exp(-DT)}, \quad t \in ]nT, (n+1)T], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Avec

$$\begin{aligned} y^*(0^+) &= y^*(nT^+) \\ &= (1-p_2)y^*(nT) + q \\ &= (1-p_2)\frac{q\exp(-DT)}{1 - (1-p_2)\exp(-DT)} + q \\ &= \frac{q}{1 - (1-p_2)\exp(-DT)}. \end{aligned}$$

2. Pour résoudre le système (3.3), nous exposons la solution sur chaque intervalle  $]nT, (n+1)T]$  :

– Si  $t \in ]0, T]$  alors,

$$y(t) = y_0 \exp(-Dt).$$

– Si  $t \in ]T, 2T]$ , nous avons bien

$$y(T^+) = (1-p_2)y_0 \exp(-DT) + q.$$

Donc,

$$\begin{aligned} y(t) &= y(T^+) \exp(-D(t-T)) \\ &= (1-p_2)y_0 \exp(-Dt) + q \exp(-D(t-T)). \end{aligned}$$

– Si  $t \in ]2T, 3T]$ , de ce que précède, nous avons

$$\begin{aligned} y(2T^+) &= (1-p_2)y(2T) + q \\ &= (1-p_2)^2 y_0 \exp(-2DT) + q(1-p_2)\exp(-DT) + q. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} y(t) &= y(2T^+) \exp(-D(t-2T)) \\ &= (1-p_2)^2 y_0 \exp(-Dt) + q(1-p_2)\exp(-D(t-T)) + q \exp(-D(t-2T)). \end{aligned}$$

– De la même façon, sur  $]nT, (n+1)T]$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
y(t) &= (1-p_2)^n y_0 \exp(-Dt) + q(1-p_2)^{n-1} \exp(-D(t-T)) + \dots + \\
&\quad + q(1-p_2) \exp(D(t-(n-1)T)) + q \exp(-D(t-nT)) \\
&= (1-p_2)^n y_0 \exp(-Dt) + q(1-p_2)^n \exp(-Dt) \left( \frac{\exp(DT)}{(1-p_2)} + \frac{\exp(2DT)}{(1-p_2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \dots + \frac{\exp(nDT)}{(1-p_2)^n} \right) \\
&= (1-p_2)^n y_0 \exp(-Dt) + q(1-p_2)^n \exp(-Dt) \left( \frac{1 - \left( \frac{\exp(DT)}{1-p_2} \right)^n \exp(DT)}{1 - \frac{\exp(DT)}{1-p_2}} \frac{\exp(DT)}{1-p_2} \right) \\
&= (1-p_2)^n y_0 \exp(-Dt) + q(1-p_2)^n \exp(-Dt) \left( \frac{(1-p_2)^n - \exp(nDT)}{1-p_2 - \exp(DT)} \frac{\exp(DT)}{(1-p_2)^n} \right) \\
&= (1-p_2)^n y_0 \exp(-Dt) + q \exp(-Dt) \left( \frac{(1-p_2)^n - \exp(nDT)}{(1-p_2) \exp(-DT) - 1} \right) \\
&= (1-p_2)^n \left( y_0 \exp(-Dt) - \frac{q \exp(-Dt)}{1 - (1-p_2) \exp(-DT)} \right) \exp(-Dt) + y^*(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. |y(t) - y^*(t)| &= \left| (1-p_2)^n \left( y_0 \exp(-Dt) - \frac{q \exp(-Dt)}{1 - (1-p_2) \exp(-DT)} \right) \exp(-Dt) \right| \rightarrow \\
&0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

### 3.4 Stabilité locale

Dans cette partie, nous exposons les conditions de la stabilité locale de la solution  $(0, y^*(t))$  du système (3.1), en utilisant le théorème (2.6.1), cité dans le chapitre préliminaire.

Ceci est très intéressant dans le coté biologique, car il donne une solution pour réduire la densité des insectes nuisibles.

**Théorème 3.4.1** *Si*

$$aT + \frac{e}{bD} \ln \left( \frac{bq \exp(-DT) + c(1 - (1-p_2) \exp(-DT))}{bq + c(1 - (1-p_2) \exp(-DT))} \right) < \ln \left( \frac{1}{1-p_1} \right),$$

*alors  $(0, y^*(t))$  est localement asymptotiquement stable.*

**Démonstration** Nous linéarisons au voisinage de  $(0, y^*(t))$ , en posant le changement suivant

$$\begin{cases} u = x - 0, \\ v = y - y^*. \end{cases}$$

Où  $u$  et  $v$  sont des perturbations au voisinage de 0. Trouvons par la suite, le système linéarisé que vérifient  $u$  et  $v$  :

$$\begin{aligned}
v' &= (y - y^*)' = -Dy + \frac{mxy}{by + x + c} + Dy^* \\
&= -Dv + f(x, y) \\
&= -Dv + [f(x, y) - f(0, y^*)] \\
&= -Dv + [(x - 0)f_x(0, y^*) + (y - y^*)f_y(0, y^*)] \\
&= -Dv + \left[ u \frac{my^*(by^* + c)}{(by^* + c)^2} + 0 \right] \\
&= -Dv + u \frac{my^*}{by^* + c}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
u' &= x' = ax - \frac{a}{k}x^2 - \frac{exy}{by + x + c} \\
&= au - g(x, y) \\
&= au - [g(x, y) - g(0, y^*)] \\
&= au - [(x - 0)g_x(0, y^*) + (y - y^*)g_y(0, y^*)] \\
&= au - \left[ u \frac{ey^*(by^* + c)}{(by^* + c)^2} + 0 \right] \\
&= au - u \frac{ey^*}{by^* + c}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors le système linéarisé suivant :

$$\begin{cases} u' = au - u \frac{ey^*}{by^* + c}, \\ v' = -Dv + u \frac{my^*}{by^* + c}. \end{cases}$$

Il existe une matrice fondamentale de telle sorte,

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \phi(t) \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Où  $\phi(t)$  vérifie

$$\frac{d\phi}{dt} = \begin{pmatrix} a - \frac{ey^*}{by^* + c} & 0 \\ \frac{my^*}{by^* + c} & -D \end{pmatrix} \phi(t).$$

Et  $\phi(0) = I$  est la matrice identité. La linéarisation des équations d'impulsions donne

$$\begin{pmatrix} u(nT^+) \\ v(nT^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & 0 \\ 0 & 1 - p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(nT) \\ v(nT) \end{pmatrix} = (B_n + I) \begin{pmatrix} u(nT) \\ v(nT) \end{pmatrix}.$$

Avec  $\det(I + B_k) \neq 0$ .

D'après le théorème (2.6.1) cité dans le chapitre précédent, la matrice de monodromie  $M$  est exprimée comme suit

$$M = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & 0 \\ 0 & 1 - p_2 \end{pmatrix} \phi(T).$$

Les valeurs propres de  $M$  sont

$$\mu_1 = (1 - p_1) \exp\left(\int_0^T \left(a - \frac{ey^*(t)}{by^*(t) + c}\right) dt\right) \quad \text{et} \quad \mu_2 = (1 - p_2) \exp(-DT) < 1.$$

Par conséquent, la solution  $(0, y^*(t))$  est localement asymptotiquement stable si

$$\mu_1 < 1$$

C'est à dire,

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_0^T \left(a - \frac{ey^*(t)}{by^*(t) + c}\right) dt\right) &< \frac{1}{1 - p_1} \\ \implies \int_0^T \left(a - \frac{ey^*(t)}{by^*(t) + c}\right) dt &< \ln\left(\frac{1}{1 - p_1}\right). \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{y^*(t)}{by^*(t) + c} dt &= \int_0^T \frac{q \exp(-Dt)}{bq \exp(-Dt) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))} dt \\ &= \frac{-1}{bD} \int_0^T \frac{-bDq \exp(-Dt)}{bq \exp(-Dt) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))} dt \\ &= \frac{-1}{bD} \ln \frac{bq \exp(-DT) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))}. \end{aligned}$$

Et donc, la condition de stabilité de  $(0, y^*(t))$  est

$$aT + \frac{e}{bD} \ln\left(\frac{bq \exp(-DT) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))}\right) < \ln\left(\frac{1}{1 - p_1}\right).$$

# Chapitre 4

## Permanence

Il est indispensable de vérifier la permanence des solutions du système (3.1), dont la définition est la suivante :

**Définition 4.1** *Le système (3.1) est permanent s'il existe des constantes  $M \geq m > 0$  telle que, pour toute solution  $(x(t), y(t))$  du (3.1),*

$$m \leq x(t) \leq M$$

et

$$m \leq y(t) \leq M.$$

**Théorème 4.1** *Le système (3.1) est permanent si*

$$aT + \frac{e}{bD} \ln \left( \frac{bq \exp(-Dt) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-Dt))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-Dt))} \right) > \ln \left( \frac{1}{1 - p_1} \right).$$

La démonstration de ce théorème est faite en plusieurs étapes.

### Démonstration

- **Première méthode**

D'abord, considérons  $(x(t), y(t))$  comme solution du système (3.1) avec  $x(t) \leq M$ ,  $y(t) \leq M$  et  $M > \frac{ac}{e}$ .

D'une part, d'après le système (3.1), nous avons  $y'(t) \geq -Dy(t)$ . Pour cela, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = -Du(t), & t \neq nT, \\ u(nT^+) = (1 - p_2)u(nT) + q \\ u(0^+) = y_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

La résolution de ce système est faite dans le lemme (3.3.1), d'où

$$y(t) \geq u(t) > u^*(t) - \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Avec,

$$u^*(t) = \frac{q \exp(-D(t - nT))}{1 - (1 - p_2) \exp(-Dt)}, \quad t \in ]nT, (n + 1)T].$$

Et puisque  $-D(t - nT) \geq -DT$ , nous aurons

$$u^*(t) \geq \frac{q \exp(-DT)}{1 - (1 - p_2) \exp(-DT)}.$$

Par conséquent,

$$y(t) > \frac{q \exp(-DT)}{1 - (1 - p_2) \exp(-DT)} - \epsilon = m_2 > 0.$$

Il suffit donc de montrer que  $x(t) \geq m_1 > 0$ .

**Etape 1 :** Tant que,

$$aT + \frac{e}{bD} \ln \left( \frac{bq \exp(-Dt) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-Dt))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-Dt))} \right) > \ln \left( \frac{1}{1 - p_1} \right)$$

Nous avons,

$$(1 - p_1) \exp \left( aT + \frac{e}{bD} \ln \frac{bq \exp(-Dt) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-Dt))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-Dt))} \right) > 1$$

Choisissons alors  $m_3 > 0$ ,  $\epsilon_1 > 0$  tel que,

$$R = (1 - p_1) \exp \left( aT - \frac{am_3}{k} T + \frac{e}{bD} \ln \left( \frac{bq \exp(-Dt) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-Dt))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-Dt))} \right) - \frac{e\epsilon_1}{c} T \right) > 1$$

Et

$$\delta = \frac{mm_3}{bm_2 + m_3} < D$$

Et supposons que  $x(t) < m_3$  pour tout  $t \geq 0$ . Alors, nous pouvons mettre les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} y'(t) &= -Dy(t) + \frac{mx(t)y(t)}{by(t) + x(t) + c} \\ &\leq -Dy(t) + \frac{mx(t)y(t)}{by(t) + x(t)} \end{aligned}$$

La fonction  $f(x) = \frac{mx}{by + x}$  est clairement croissante en  $x$ , donc :

$$f(x) = \frac{mx}{by + x} \leq f(m_3) = \frac{mm_3}{by + m_3}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 y'(t) &\leq -Dy(t) + \frac{mm_3}{by(t) + m_3}y(t) \\
 &\leq -Dy(t) + \frac{mm_3}{bm_2 + m_3}y(t) \\
 &= y(t)(-D + \delta).
 \end{aligned}$$

On considère alors le système suivant :

$$\begin{cases}
 u'(t) = (-D + \delta)u(t), & t \neq nT \\
 u(nT) = (1 - p_2)u(nT) + q, \\
 u(0^+) = y(0^+).
 \end{cases} \quad (4.2)$$

La résolution du système (4.2) est similaire à celle du système (3.3), d'où

$$u(t) = (1 - p_2)^n \left( u(0^+) - \frac{q \exp((-D + \delta)T)}{1 - (1 - p_2) \exp((-D + \delta)T)} \right) \exp((-D + \delta)t) + u^*(t)$$

Avec,

$$u^*(t) = \frac{q \exp((-D + \delta)(t - nT))}{1 - (1 - p_2) \exp((-D + \delta)T)}, \quad t \in ]nT, (n + 1)T]$$

est la solution périodique. Alors, il existe un  $T_1 > 0$  tel que,

$$y(t) \leq u(t) \leq u^*(t) + \epsilon_1, \quad \text{pour tout } t \geq T_1.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= x(t) \left( a - \frac{a}{k}x(t) - \frac{ey(t)}{by(t) + x(t) + c} \right) \\
 &\geq x(t) \left( a - \frac{am_3}{k} - \frac{ey(t)}{by(t) + c} \right)
 \end{aligned}$$

De même, la fonction  $f(y) = \frac{ey}{by + c}$  est croissante, ainsi,

$$f(y) \leq f(u^* + \epsilon_1) = \frac{e(u^* + \epsilon_1)}{b(u^* + \epsilon_1) + c}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 x'(t) &\geq x(t) \left( a - \frac{am_3}{k} - \frac{e(u^* + \epsilon_1)}{b(u^* + \epsilon_1) + c} \right) \\
 &\geq x(t) \left( a - \frac{am_3}{k} - \frac{eu^*}{b(u^* + \epsilon_1) + c} - \frac{e\epsilon_1}{b(u^* + \epsilon_1) + c} \right) \\
 &\geq x(t) \left( a - \frac{am_3}{k} - \frac{eu^*}{bu^* + c} - \frac{e\epsilon_1}{c} \right)
 \end{aligned}$$

Soit  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $N_1 T \geq T_1$  et le système qui suit :

$$\begin{cases} x'(t) \geq x(t) \left( a - \frac{am_3}{k} - \frac{eu^*}{bu^* + c} - \frac{e\epsilon_1}{c} \right) \\ x(nT^+) = (1 - p_1)x(nT) \end{cases} \quad (4.3)$$

Intégrons entre  $]nT, (n+1)T]$ ,

$$x((n+1)T) \geq x(nT^+) \exp\left( \int_{nT}^{(n+1)T} \left( a - \frac{a}{k}m_3 - \frac{eu^*(t)}{bu^*(t) + c} - \frac{e\epsilon_1}{c} \right) dt \right) = x(nT)R$$

Donc,

$$x((N_1 + 1)T) \geq x(N_1 T)R$$

Ce qui implique que

$$x((N_1 + k)T) \geq x(N_1 T)R^k \rightarrow +\infty \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

Ceci est une contradiction avec la bornitude de  $x$ . Par conséquent, il existe un  $t_1 > 0$  tel que  $x(t_1) \geq m_3$ .

**Etape 2 :** Si  $x(t) \geq m_3$  pour tout  $t \geq t_1$ , alors la démonstration se termine. Sinon, soit  $t^* = \inf_{t > t_1} \{x(t) < m_3\}$ . Alors,  $x(t) \geq m_3$  pour  $t \in [t_1, t^*]$ ,  $x(t^*) = m_3$  par continuité de  $x$ .

Dans cette étape nous allons considérer deux cas possibles.

Cas A :  $t^*$  un point d'impulsion :

Soit  $t^* = n_1 T$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$(1 - p_1)m_3 \leq x(t^{*+}) = (1 - p_1)m_3 < m_3$$

Choisissons  $n_2, n_3$  dans  $\mathbb{N}$  tels que :

$$(n_2 - 1)T > \frac{\ln \frac{\epsilon_1}{M + \delta}}{-D + \delta}$$

Et

$$(1 - p_1)^{n_2} R^{n_3} \exp(n_2 \sigma T) > (1 - p_1)^{n_2 + 1} R^{n_3} \exp((n_2 + 1) \sigma T) > 1$$

Où  $\sigma = a - \frac{a}{k}m_3 - \frac{e}{c}M$  qui est négatif.

Soit aussi  $T' = n_2 T + n_3 T$ , nous allons montrer par la suite qu'il existe un  $t_2$  entre  $]t^*, t^* + T']$  tel que  $x(t_2) \geq m_3$ .

Du système (4.2) avec  $u(t^{*+}) = y(t^{*+})$  une condition initiale, nous obtenons :

$$u(t) = (1 - p_2)^{n_1} \left( u(t^{*+}) - \frac{q \exp((-D + \delta)T)}{1 - (1 - p_2) \exp((-D + \delta)T)} \right) \exp((-D + \delta)(t - t^*)) + u^*(t),$$



pour  $(n-1)T < t \leq nT$  et  $n_1 + 1 \leq n \leq n_1 + n_2 + n_3$ .

Ceci implique que pour  $t^* + n_2T \leq t \leq t^* + T'$ ,

$$|u(t) - u^*(t)| \leq (M + q) \exp((-D + \delta)(t - t^*)) < \epsilon_1,$$

d'après le choix de  $n_2$ . Et,  $y(t) \leq u(t) < u^*(t) + \epsilon_1$ .

Sachant que l'équation (4.3) est valable quand  $t^* + n_2T \leq t \leq t^* + T'$ , alors, comme dans l'étape 1, nous avons

$$x(t^* + T') \geq x(t^* + n_2T)R^{n_3}.$$

Puisque  $y(t) \leq M$  nous obtenons facilement le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) \geq x(t) \left( a - \frac{a}{k}m_3 - \frac{e}{c}M \right) = \sigma x(t) & , t \neq nT \\ x(nT^+) = (1 - p_1)x(nT) \end{cases} \quad (4.4)$$

Intégrons (4.4) entre  $[t^*, t^* + n_2T]$

$$\begin{aligned} x(t^* + n_2T) &\geq x(t^*)(1 - p_2)^{n_2} \exp(\sigma n_2T) \\ &= m_3(1 - p_2)^{n_2} \exp(\sigma n_2T). \end{aligned}$$

Donc,

$$x(t^* + T') \geq m_3(1 - p_2)^{n_2} \exp(\sigma n_2T) R^{n_3} > m_3.$$

Ceci est encore une contradiction.

Maintenant, soit  $\bar{t} = \inf_{t > t^*} \{x(t) \geq m_3\}$ . Alors  $x(t) \leq m_3$  pour  $t^* \leq t < \bar{t}$  et  $x(\bar{t}) = m_3$  par continuité de  $x$ .

Pour  $t \in [t^*, \bar{t}]$ , supposons que  $t$  est dans les sous intervalles  $]t^* + (k-1)T, t^* + kT]$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $k \leq n_2 + n_3$ .

De l'équation (4.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} x(t) &\geq x(t^{*+})(1 - p_1)^{k-1} \exp((k-1)\sigma T) \exp(\sigma(t - (t^* + (k-1)T))) \\ &\geq m_3(1 - p_1)(1 - p_1)^{k-1} \exp((k-1)\sigma T) \exp(\sigma T) \\ &= m_3(1 - p_1)^k \exp(k\sigma T) \\ &\geq m_3(1 - p_1)^{n_2+n_3} \exp(\sigma(n_2 + n_3)T) \equiv m'_1. \end{aligned}$$

Cas B :  $t^*$  n'est pas un point d'impulsion :

Nous avons  $t^* \neq nT$  et  $x(t) \geq m_3$  pour  $t \in [t_1, t^*[$  et  $x(t^*) = m_3$ .

Supposons que  $t^* \in ]n'_1T, (n'_1 + 1)T]$  pour un  $n'_1 \in \mathbb{N}$ . Nous classifions deux cas possibles :

– Cas B1 :

$x(t) < m_3$  pour  $t \in ]t^*, (n'_1 + 1)T]$ . Dans ce cas, nous allons démontrer qu'il existe un  $t_2$  entre  $](n'_1 + 1)T, (n'_1 + 1)T + T']$  tel que  $x(t_2) \geq m_3$ . Pour ce faire, supposons le contraire, c'est à dire que  $x(t) < m_3$  pour tout  $t \in ](n'_1 + 1)T, (n'_1 + 1)T + T']$ .

Nous avons alors,  $x(t) < m_3$  pour tout  $t \in ]t^*, (n'_1 + 1)T + T']$ .

Du système (4.2) avec  $u((n'_1 + 1)T^+) = y((n'_1 + 1)T^+)$  comme condition initiale, nous obtenons :

$$u(t) = (1-p_2)^{n'_1+1} \left( u((n'_1 + 1)T^+) - \frac{q \exp((-D + \delta)T)}{1 - (1 - p_2) \exp((-D + \delta)T)} \right) \exp((-D + \delta)(t - (n'_1 + 1)T)$$

pour  $t \in ]nT, (n + 1)T]$ ,  $n'_1 + 1 \leq n \leq n'_1 + n_2 + n_3$ . Comme se qui a été fait dans l'étape 1, du système (4.3), nous avons, après intégration

$$x((n'_1 + 1 + n_2 + n_3)T) \geq x((n'_1 + 1 + n_2)T)R^{n_3}.$$

Intégrons l'équation (4.4) entre  $[(n_2 + 1)T, (n'_1 + 1 + n_2)T]$ ,

$$x((n'_1 + 1 + n_2)T) \geq m_3(1 - p_2)^{n_2+1} \exp(\sigma(n_2 + 1)T),$$

Donc

$$x((n'_1 + 1 + n_2 + n_3)T) = x((n'_1 + 1)T + T') \geq m_3(1 - p_2)^{n_2+1} \exp(\sigma(n_2 + 1)T)R^{n_3} > m_3$$

Ceci est encore une contradiction avec notre hypothèse.

Soit maintenant  $\bar{t} = \inf_{t > t^*} \{x(t) \geq m_3\}$ . Alors  $x(t) \leq m_3$  pour  $t^* \leq t < \bar{t}$  et  $x(\bar{t}) = m_3$ . Pour  $t \in [t^*, \bar{t}]$ , supposons que  $t$  est dans les sous intervalles  $]n'_1T + k'T, n'_1T + (k' + 1)T]$ ,  $k' \in \mathbb{N}$  et  $k' \leq 1 + n_2 + n_3$ .

En répétant le même processus précédent, vous obtenons

$$x(t) \geq m_3(1 - p_1)^{1+n_2+n_3} \exp(\sigma(1 + n_2 + n_3)T) \equiv m_1$$

$m_1 < m'_1$  et donc  $x(t) \geq m_1$  pour tout  $t \in ]t^*, \bar{t}]$ .

– Cas B2 :

Il existe un  $t'$  dans  $]t^*, (n'_1 + 1)T]$  tel que  $x(t') \geq m_3$ . Soit  $\hat{t} = \inf_{t > t^*} \{x(t) \geq m_3\}$ , par conséquent  $x(t) \leq m_3$  pour  $t \in [t^*, \hat{t}]$  et  $x(\hat{t}) = m_3$ .

Intégrons le système (4.4) entre  $[t^*, t[$  ( $t \leq \hat{t}$ ), nous avons

$$\begin{aligned} x(t) &\geq x(t^*) \exp(\sigma(t - t^*)) \\ &\geq m_3 \exp(\sigma T) \\ &\geq m_1. \end{aligned}$$

Alors, dans les deux cas, le même processus se répète, par conséquent  $x(t) \geq m_1$  pour tout  $t \geq t_1$ .

- **Deuxième méthode**

En faisant des minoration de l'équation en  $x$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \left( a - \frac{a}{k}x(t) - \frac{ey(t)}{by(t) + x(t) + c} \right) \\ &\geq x(t) \left( a - \frac{a}{k}x(t) - \frac{e}{b} \right) \\ &= x(t) \left( a - \frac{e}{b} - \frac{a}{k}x(t) \right). \end{aligned}$$

Sachant que  $x(nT^+) = (1 - p_1)x(nT)$ , choisissons un  $\gamma > 0$  tel que  $\gamma \leq (1 - p_1)$ .

Soit le système impulsif suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \left( \left( a - \frac{e}{b} \right) - \frac{a}{k}u(t) \right), & t \neq nT \\ u(nT^+) = \gamma u(nT), \\ u(0^+) = u_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

L'équation différentielle en  $u$  donne

$$\frac{du}{u \left( a - \frac{e}{b} - \frac{a}{k}u \right)} = dt.$$

Ce qui implique que,

$$\alpha \frac{du}{u} + \beta \frac{du}{\left( a - \frac{e}{b} - \frac{a}{k}u \right)} = dt$$

Avec,

$$\alpha = \frac{1}{a - \frac{e}{b}}, \quad \beta = \frac{a\alpha}{k}.$$

Nous pouvons écrire alors,

$$\frac{du}{u} + \frac{a}{k} \frac{du}{\left( a - \frac{e}{b} - \frac{a}{k}u \right)} = \left( a - \frac{e}{b} \right) dt.$$

Posons  $\lambda = \frac{1}{\alpha} = a - \frac{e}{b}$ .

Après intégration entre 0 et  $t$  nous obtenons

$$u(t) = \frac{\lambda}{\left( \lambda - \frac{a}{k}u_0 \right) \exp(-\lambda t) + \frac{a}{k}}, \quad t \in ]0, T]$$

La valeur de  $u(T^+)$  est

$$u(T^+) = \gamma u(T) = \frac{\lambda \gamma}{\left(\lambda - \frac{a}{k} u_0\right) \exp(-\lambda T) + \frac{a}{k}}.$$

De la même façon, quand  $t \in ]T, 2T]$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\lambda u(T^+)}{\left(\lambda - \frac{a}{k} t(T^+)\right) \exp(-\lambda(t-T)) + \frac{a}{k} u(T^+)} \\ &= \frac{\lambda \gamma}{\left(\lambda - \frac{a}{k} u_0\right) \exp(-\lambda t) + (1-\gamma) \frac{a}{k} \exp(-\lambda(t-T)) + \frac{a}{k} \gamma} \end{aligned}$$

En répétant ce processus, nous aurons

$$u(t) = \frac{\lambda \gamma^n}{\left(\lambda - \frac{a}{k} u_0\right) \exp(-\lambda t) + (1-\gamma) \frac{a}{k} \exp(-\lambda t) \left(\sum_{k=1}^n \exp(k\lambda T) \gamma^{k-1}\right) + \frac{a}{k} \gamma^n},$$

quand  $t \in ]nT, (n+1)T]$ . Par le théorème de comparaison, nous déduisons que  $x(t) \geq u(t)$  sous l'hypothèse que  $\frac{e}{b} < a$ .

Par conséquent, pour montrer que  $x(t) \geq m > 0$ , il suffit de montrer que  $u(t) \geq m > 0$ .

Pour se faire, nous devons montrer que la fonction  $f(t)$  tel que

$$f(t) = \frac{1}{\gamma^n} \left(\lambda - \frac{a}{k} u_0\right) \exp(-\lambda t) + (1-\gamma) \frac{a}{\gamma^n k} \exp(-\lambda t) \left(\sum_{k=1}^n \exp(k\lambda T) \gamma^{k-1}\right) + \frac{a}{k},$$

est inférieur à une constante positive, indépendamment de  $n$ . On remarque que

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\gamma^n} \left(\lambda - \frac{a}{k} u_0\right) \exp(-\lambda t) + (1-\gamma) \frac{a}{\gamma^{n+1} k} \exp(-\lambda t) \left(\sum_{k=1}^n (\exp(\lambda T) \gamma)^k\right) + \frac{a}{k} \\ &= \frac{1}{\gamma^n} \left(\lambda - \frac{a}{k} u_0\right) \exp(-\lambda t) + (1-\gamma) \frac{a}{\gamma^{n+1} k} \exp(-\lambda t) \left(\frac{1 - (\exp(\lambda T) \gamma)^n}{1 - \exp(\lambda T) \gamma}\right) \\ &\quad \exp(\lambda T) \gamma + \frac{a}{k} \\ &\leq \frac{1}{\gamma^n} \left(\lambda - \frac{a}{k} u_0\right) \exp(-n\lambda T) + (1-\gamma) \frac{a}{\gamma^n k} \exp(-n\lambda T) \left(\frac{1 - (\exp(\lambda T) \gamma)^n}{1 - \exp(\lambda T) \gamma}\right) \\ &\quad \exp(\lambda T) + \frac{a}{k} \\ &= v_n \end{aligned}$$

La suite  $v_n$  est croissante, tend vers une constante quand  $n$  tend vers l'infini, sous l'hypothèse :

$$\gamma < \exp(-\lambda T), \quad \lambda > \frac{a}{k} u_0$$

Donc, nous déduisons, par suite que

$$f(t) \leq C, \quad C > 0.$$

En conclusion, le système (3.1) est permanent. Cela veut dire que les deux espèces co-existent.

# Chapitre 5

## Simulations numériques et détermination de la valeur critique

$T^*$

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats numériques associés à l'étude théorique faite, au cours de ce travail. En effet, ces réalisations numériques confirment les résultats mathématiques obtenus.

Cette valeur critique  $T^*$  est solution de l'équation

$$F(T) = aT + \frac{e}{bD} \ln \left( \frac{bq \exp(-DT) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))} \right) - \ln \left( \frac{1}{1 - p_1} \right) = 0.$$

Elle représente en fait un rôle très important dans les conditions de la stabilité de  $(0, y^*(t))$  et de la permanence des solutions. En effet, nous avons :

- Si  $T < T^*$  alors  $(0, y^*(t))$  est localement stable.
- Si  $T > T^*$  alors le système est permanent.

Nous allons par la suite proposer un choix des paramètres du système (3.1) afin de déterminer une valeur approchée de  $T^*$ .

### 5.1 Schéma numérique

Comme nous l'avons dit précédemment, la fonction  $F(T)$  possède une solution de l'équation  $F(T) = 0$ , notée  $T^*$ . En effet, Cette fonction est continue, dérivable sur  $[0, +\infty[$

car c'est la composée de fonctions continues et dérivables. De plus,

$$F(0) = -\ln\left(\frac{1}{1-p_1}\right) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} F(T) = +\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence de ce  $T^*$  sur  $[0, +\infty[$ .

Proposons un simple schéma numérique basé sur la méthode de dichotomie, donné comme suit :

1. calcul de zéro de la fonction  $F(T)$  entre deux points  $a$  et  $b$ .
2. Données :  $F$ ,  $a$ ,  $b$ , une précision *epsilon*, un nombre d'itération maximal  $n_{\max}$ .
3.  $a_n = a$ ,  $b_n = b$ .
4. Tant que  $n \leq n_{\max}$
5.  $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .
6. Si  $|F(x_n)| < \textit{epsilon}$  alors la solution est  $x_n$ .  
Sinon
7. Si  $F(a_n)F(x_n) < 0$  alors  $x_n = b_n$
8. Sinon  $x_n = a_n$   
Retour à l'étape 4.

Proposons un choix des paramètres comme suit :

$$a = 7, \quad b = 0.001, \quad c = 1, \quad d = 0.2, \quad e = 1.1, \quad k = 1.65$$

$$m = 1.045, \quad p_1 = 0.1, \quad p_2 = 0.01, \quad q = 5, \quad x_0 = 1.5, \quad y_0 = 1.5.$$

A l'aide d'un programme MATLAB décrivant la méthode dichotomique, La valeur de  $T^*$  est 4.1174.

Le graphe (5.1) représentant la fonction  $F$ , avec le choix des paramètres proposé précédemment.

## 5.2 Simulation numérique du système

Il est nécessaire de faire suivre une étude mathématique par des simulations numériques afin de confirmer celle ci. Nous allons garder le même choix des paramètres cité dans la section précédente.

D'une part, les deux graphes de la figure (5.2) montrent que la densité des proies s'annule avec le temps et celle des prédateurs tend vers une solution périodique cité dans le lemme (3.3.1). Ceci est pour une période  $T$  inférieur à  $T^*$ .

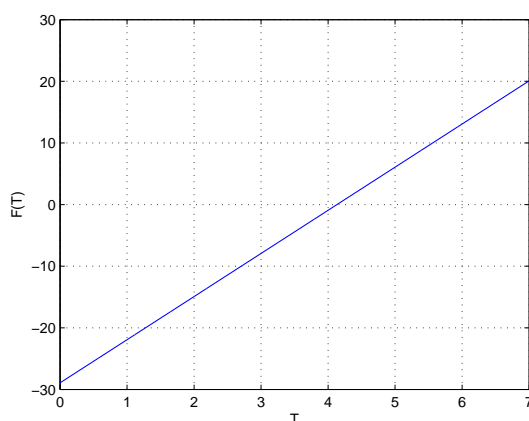
D'autre part, les deux graphes de la figure (5.3) montrent que la solution de (3.1) est permanente, selon le théorème (4.1), ainsi, la densité des proies ne tends plus vers 0. Ceci est pour un choix de  $T$  supérieur à  $T^*$ .

## 5.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons obtenu la valeur critique  $T^*$ , pour un choix des paramètres précis. Notons que si on propose un autre choix des paramètres, l'étude resterait la même.

Dans une deuxième partie, nous avons présenté les simulations numériques du système (3.1), pour les cas  $T < T^*$  (stabilité de  $(O, y^*(t))$ ) et  $T > T^*$  (permanence des solutions).

## 5.4 Liste des figures

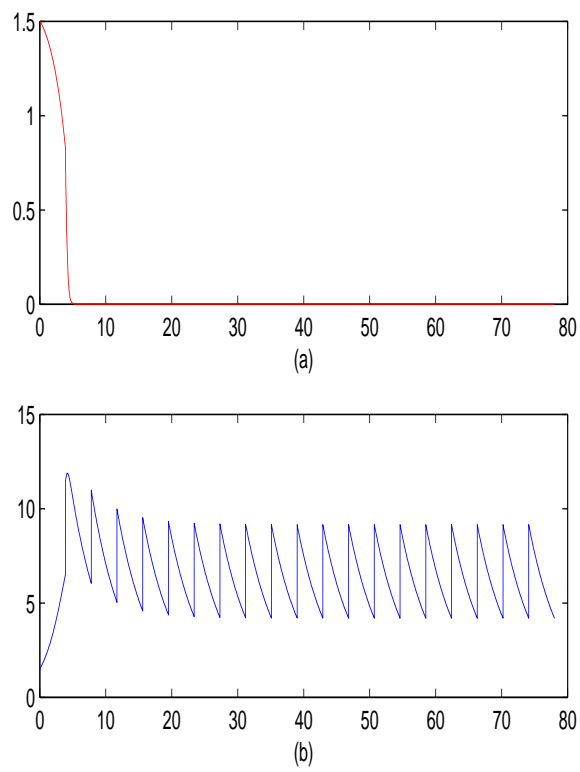


Graphe de la fonction  $F$  avec

$$a = 7, b = 0.001, c = 1, d = 0.2, e = 1.1, k = 1.65, m = 1.045, p1 = 0.1, p2 = 0.01, q = 5$$

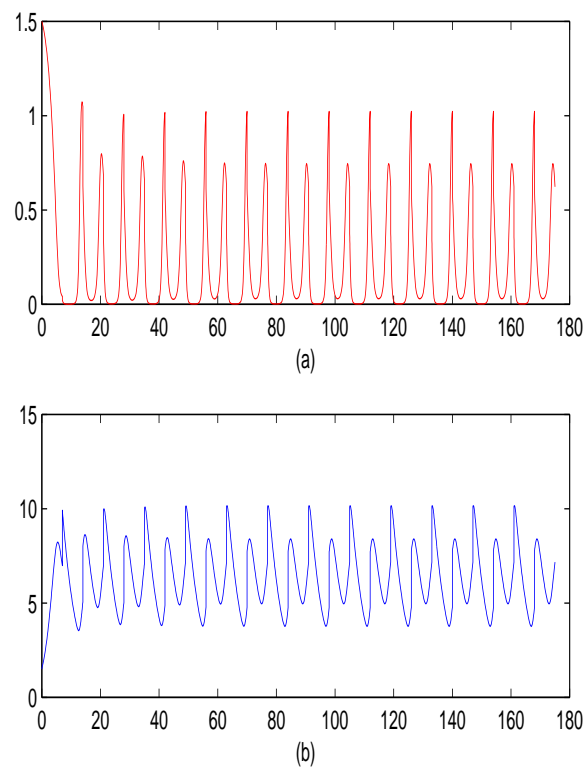
FIGURE 5.1





(a) Densité des proies avec  $T = 3.9$     (b) Densité des prédateurs avec  $T = 3.9$

FIGURE 5.2



(a) Densité des proies avec  $T = 6$     (b) Densité des prédateurs avec  $T = 6$

FIGURE 5.3

# Chapitre 6

## Conclusion générale

Au cours de ce mémoire, nous avons vu l'effet des perturbations impulsives sur un modèle proie prédateur ( $x(t), y(t)$  respectivement), avec une fonction de réponse de Beddington DeAngelis. Nous avons démontré l'existence d'une solution périodique  $y^*(t)$  stable, représentant la densité des prédateurs, en absence des proies. Pour se faire, nous avons fait appel à la théorie de Floquet. Ainsi, sous la condition suivante

$$aT + \frac{e}{bD} \ln \left( \frac{bq \exp(-DT) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))} \right) < \ln \left( \frac{1}{1 - p_1} \right),$$

la solution  $(0, y^*(t))$  est localement stable.

Dans une deuxième partie de ce mémoire, nous avons démontré la permanence des solutions du système, en utilisant deux méthodes. Par conséquent, le système est permanent sous les conditions données par les expressions suivantes :

$$aT + \frac{e}{bD} \ln \left( \frac{bq \exp(-DT) + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))}{bq + c(1 - (1 - p_2) \exp(-DT))} \right) > \ln \left( \frac{1}{1 - p_1} \right),$$

$$a > \frac{e}{b}, \quad \gamma < \exp(-\lambda T), \quad \lambda > \frac{a}{k} u_O$$

Ceci est en utilisant des calculs de limites, le théorème de comparaison et la démonstration par absurde.

Les résultats obtenus via ce type de système sont très intéressants pour contrôler et surtout éradiquer l'ensemble des ravageurs. Contrairement au système identique sans effet d'impulsion, qui n'admet pas un équilibre  $(0, y_+)$  et l'équilibre  $(0, 0)$  est instable.

En conclusion, le problème de l'arrivage massive des insectes ravageurs peut être résolu en choisissant une période d'injection bien précise.

# Bibliographie

- [1] J.R. Beddington, Mutual interference between parasites or predator and its effect on searching efficiency, *Animal Ecology*, 44(1975), 331-340.
- [2] D.L. DeAngelis, R.A. Goldstein, R.V. O'Neill, A model for trophic interaction, *Ecology*, 56(1975), 881-892.
- [3] G.T. Skalski, J.F. Gilliam, Functional responses with predator interference : Viable alternatives to the Holling type II model, *Ecology*, 82(2001), 3083-3092.
- [4] M. Fan, Y. Kuang, Dynamics of a nonautonomous predator pray system with the Beddington DeAngelis functional response, *Mathematical Analysis and Applications*, 295(2004), 15-39.
- [5] D.D. Bainov, P.S. Simeonov, *Impulsive Differential Equations : Periodic Solutions and Application*, in : Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 66, Longman Science and Technical, Harlo, UK, 1993.
- [6] M.Akhmet, E.Yilmaz, *Neural Networks with Discontinuous/Impact Activations*, Chapret 3, Springer, 2014.
- [7] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov, *Theoty of Impulsive Differential Equations*, World Scientific Publisher, Singapore, 1989.
- [8] D.R. Smart, *Fixed point theory*, Combridge Uni. Press, Combridge, 1974.
- [9] B. Liu, Y. Zhang, L. Chen, Dynamic complexities in a Lotka Volterra predator prey model concerning impulsive control strategy, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(2005), 517-531.
- [10] B. Liu, Y. Zhang, L. Chen, The dynamical behaviors of a Lotka Volterra predator prey model concerning integrated pest management, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 6(2005), 227-243.

- 
- [11] O.D. Makinde, Solving ratio-dependent predator prey system with constant effort harvesting using Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 186(2007), 17-22.
- [12] H.K. Baek, Qualitative analysis of Beddington DeAngelis type impulsive predator prey models, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 11(2009), 1312-1322.