République Algèrienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Thèse de Doctorat

Spécialité :E.D.P et Applications

Présentée par :
Mekni Hayat

sous le Thème :

Etude de l'existence des solutions pour certaines classes des problèmes elliptiques aux limites quasilinéaires

Soutenu le : 16/12/2015 devant le jury composé de :

M^r	M.Yebdi	Professeur à l'U.A.B.B-Tlemcen	Président
M^m	Dj. Hadj Slimane	Professeur à l'U.A.B.B-Tlemcen	Examinatrice
M^r	M. Benchohra	Professeur à l'Univ Sidi-Bel-Abbès	Examinateur
M^r	A. Ouahab	Professeur à l'Univ Sidi-Bel-Abbès	Examinateur
M^r	M. Derhab	Professeur à l'U.A.B.B-Tlemcen	Directeur de Thèse

Année Universitaire
2015-2016

.

[0]Département de Mathématiques h.mekni1@yahoo.fr
Faculté des sciences
BP 119 Tlemcen

À la mémoire de mon père
qui m'a inscrit à la faculté un jour...
Mekni Hayat

"Il existe deux choses qui empêchent
une personne de réaliser ses rêves :
croire qu'ils sont irréalisables, ou bien,
quand la roue du destin tourne à l'improviste,
les voir se changer en possible au moment où
l'on s'y attend le moins."
Extrait de Le Démon et mademoiselle Prym, de Paulo Coelho

Remerciements

.

Avant tous je remercie ALLAH qui m'a donné la force, le courage et la force de volonté d'achever ce travail.

J'adresse mes remerciements par un grand respect et gratitude en particulier à mon directeur de thèse M. le Professeur **M. Derhab** qui a dirigé ce travail, de m'avoir encadré et proposé un sujet aussi passionnant et intéressant. Sa disponibilité permanente et son aide m'ont été d'un soutien dont je lui suis particulièrement reconnaissant. Sa compétence et ses conseils m'ont été d'un grand secours.

Je tiens à remercier M. le Professeur **M. Yebdri**, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier les Professeurs *M. Benchohra, A.Ouahab* et *Madame Dj. Hadj-Slimane* d'avoir accepter de participer au jury qui examinera ce manuscrit.

Mes vifs remerciements vont a monsieur **M.Bouchekif**, mon professeur et le responsable de la formation Master.

D'autre part, j'adresse une chaleureuse pensée à toute l'équipe pédagogique du département de Mathématiques surtout le Chef du Département monsieur **M. Mebkhout** pour son soutien pendant les neuf années des études.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Mekni Hayat

الملخص

- يهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود الحلول لبعض المسائل شبه خطية ذات القيم الحدية. باستعمال طريقة الحلول التحتية و الفوقية تقنية التزايد رتيبة تقوم بتكوين الحلول الدنيا و القصوى . هذه الطريقة مرتبطة بمبدأ الأعظمية و نتائج المقارنة.

- من المعلوم أن هذه الطريقة وسيلة فعالة للحصول على نتائج الوجود و تحديد الحلول بالنسبة للمسائل الحدية.

كلمات مفتاحية: مسائل ذات القيم الحدية، مسائل ذات نابض ، ب- لابلاسي، طريقة الحلول التحتية و الفوقية ، شروط ناقومو وينتنار.

Résumé :

L'objectif de cette thèse est l'étude de l'existence des solutions pour certaines classes des problèmes aux limites quasilinéaires. En utilisant la méthode de sous et sur solutions avec une technique itérative monotone pour construire les solutions minimales et maximales. Cette méthode est liée au principe de maximum et aux résultats de comparaison.

Il bien connue qu'elle est un outil puissant pour obtenir des résultats des existences et localisation des solutions pour les problèmes aux limites.

Mots clés : Problème aux limites, problème impulsif, p-laplacien, la méthode de sous et sur solutions, principe de comparaison, les conditions de Nagumo-Wintner.

Abstract :

The subject of this thesis is studied the existence of solutions for some quasilinear elliptic boundary value problems. By using the upper-lower method with monotone iterative technique, we constructed the minimal and the maximal solutions. This method is connected with the maximum principle and the comparison results.

It is well know that this method is a powerful tool to obtain the existence results and the localization of solutions for boundary value problems.

Keywords : Boundary value problem, impulsive problem, p-laplacian, Upper and lower method, comparison principle, Nagumo–Wintner conditions.

Table des matières

Introduction

En 1890, Picard a introduit une méthode importante dans l'étude de l'existence des solutions pour des problèmes aux limites nonlinéaires. La méthode est dite des sous et sur solutions (voir [76], [77]). Dans la théorie des EDO, cette méthode est liée au principe du maximum et aux résultats de comparaison. Elle permet d'obtenir des résultats d'existence et la localisation d'une solution d'un problème aux limites en présence d'un couple de fonctions, appelées sous solution et sur solution, bien ordonnées. Par une technique itérative, il est possible de construire les solutions minimales et maximales entre la sous et la sur solution .

Dans cette thèse, on s'intéresse à la construction des solutions pour certaines classes de problèmes aux limites quasilinéaires faisant intervenir l'opérateur p-laplacien dans des intervalles bornés ou non bornés donnés par

$$-\left(\varphi_p(u')\right)' = f(t,u,u'), t \in I, \tag{1}$$

avec la condition aux limites suivante

$$u(0) - au'(0) = L(u), \tag{2}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $L : C^1(\overline{I}) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle croissante et a est un réel positif.

L'opérateur p-laplacien joue un rôle important dans certaines applications en physique tels que la mécanique non-Newtienne, l'élasticité non linéaires,...etc.

Il est bien connu que la méthode de sous et sur solutions est devenue, par sa simplicité, un outil puissant pour montrer l'existence des solutions pour les problèmes du type (1)-(2).(voir [74], [75]).

Les problèmes que l'on va considérer dans cette thèse sont classés comme suit :

Les problèmes aux limites dans des domaines non bornés : Les problèmes aux limites dans des intervalles semi infinis ont de nombreuses applications dans des problèmes de physiques. Par exemple, dans l'étude des solutions radiales des équations elliptiques non linéaires, l'élasticité linéaire, l'écoulements des fluides, l'écoulement instable de gaz à travers un milieu semi-infini poreux et dans la détermination du potentiel électrique dans un atome neutre isolé, (voir [5],[6],[13]).

L'existence des solutions de ce type des problèmes a été étudié par plusieurs auteurs en utilisant des différentes méthodes, citons par exemple : la méthode de sous et sur solutions, les méthodes variationelles, les théorèmes du point fixe (voir [6], [9], [13], [26], [47], [48], [59], [60]). Une grande partie de la théorie des problèmes aux limites dans les intervalles infinis ont été présentés dans [5].

Les problèmes impulsifs : Ce sont des systèmes dynamiques avec des trajectoires discontinues. Elles apparaissent naturellement en médecine, biologie, l'écologie, la dynamique des populations, la mécanique, voir ([17] , [25], [45]).

D'autre part, les équations différentielles ordinaires avec des conditions aux limites intégrales ont d'abord été étudiées par M. Picone [35] en 1908. Il a étudié les relations qui existent entre les équations intégrales et certaines équations différentielles d'ordre n avec des conditions aux limites intégrales .

Cette thèse est constituée de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, en utilisant la méthode de sous et sur solutions et une technique itérative, on construit des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(x,u), \ x \in \left]0,+\infty\right[, \\ u(0) - au'(0) = L(u), \end{cases}$$

Le second chapitre est consacré à la construction des solutions extrémales du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(x,u,u'), \ x \in \left]0,+\infty\right[, \\ u(0) - au'(0) = L(u), \end{cases}$$

Le troisième chapitre est consacré à la construction des solutions pour le système aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f_1(x,u,v), \ x \in \left]0,+\infty\right[, \\ -(\varphi_q(v'))' = f_2(x,u,v), \ x \in \left]0,+\infty\right[, \\ u(0) - au'(0) = L_1(u), \\ v(0) - bv'(0) = L_2(v), \end{cases} \tag{3}$$

où $\varphi_s(y) = |y|^{s-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p,q > 1, p \neq q$, $f_i : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, $L_i : C^1(\overline{I}) \to \mathbb{R}$ sont deux fonctionnelles croissantes, a et b sont deux réels positifs .

Dans le dernier chapitre, on énonce et on montre l'existence des solutions minimales et maximales pour un problème quasilinéaire elliptique **impulsif** avec des conditions aux limites non locales suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(t,u,u'), \ t \neq t_k, 0, 1, \ t \in \left]0,1\right[, \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)), \ k = 1,2,..,m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)), \ k = 1,2,..,m, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)u(x)dx, \ u(1) + bu'(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)u(x)dx, \end{cases}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $J = [0,1]$, $t_0 = 0 < t_1 < .. < t_m < t_{m+1} = 1$, avec m est un entier positif fixé, $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a et b sont deux réels positifs, $h_i : J \to \mathbb{R}_+$ sont deux fonctions continues $(i = 1,2)$, I_k et $N_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues croissantes pour chaque $k = 1,..,m$.

Chapitre 1

Existence des solutions minimales et maximales pour un problème aux limites quasilinéaire avec une condition nonlocale dans $\mathbb{R}^+$

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est la construction des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(x,u), \ x \in I, \\ u(0) - au'(0) = L(u), \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y,\ y \in \mathbb{R},\ p > 1,\ I = \left]0, +\infty\right[,\ f : \overline{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $L : C^1(\overline{I}) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle croissante et a est un réel positif.

Les problèmes aux limites dans les domaines non bornés intervient dans les études des solutions radiales pour des problèmes quasilinéaires elliptiques et dans certain problèmes physiques (voir [5], [6] et [13]).

L'existence des solutions pour les problèmes aux limites nonlinéaires dans la demi droite $\mathbb{R}^+$ a été étudiée par plusieurs auteurs en utilisant différentes méthodes citons par exemple : la méthode des sous et sur solutions, les théories du point fixé et le degré topologique (voir [16], [33], [74] et [75]).

La méthode utilisée dans ce chapitre pour montrer l'existence des solutions du problème (1.1) est la méthode de sous et sur solutions, et par une technique itérative, on montre l'existence des solutions minimales et maximales entre la sous et la sur solution. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [30].

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la deuxième section, on introduit quelques définitions et lemmes qui sont utiles pour la suite. Dans la troisième section, on présente et on montre notre résultat. Finalement, on donne un exemple d'application.

1.2 Préliminaires

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + M\varphi_p(u) = F(x),\ x \in (0, r)\,, \\ u(0) - au'(0) = a_0, \\ u(r) = b_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $F : [0, r] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $r > 0$ et a, a_0, b_0 et M sont des nombres réels tels que $a \geq 0$ et $M > 0$.

Définition 1.1 *On dit que u est une solution du problème*(1.2) *si :*
(i) $u \in C^1([0, r])$ *et* $\varphi_p(u') \in C^1(0, r)$.
(ii)u *satisfait le problème* (1.2) .

Définition 1.2 *On dit que α est une sous solution du problème* (1.2) *si :*
(i) $\alpha \in C^1([0, r])$ *et* $\varphi_p(\alpha') \in C^1(0, r)$.

$$(ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\alpha'))' + M\varphi_p(\alpha) \leq F(x),\ x \in (0, r)\,, \\ \alpha(0) - a\alpha'(0) \leq a_0, \\ \alpha(r) \leq b_0. \end{cases}$$

Définition 1.3 *On dit que β est une sur solution du problème* (1.2) *si :*
(i) $\beta \in C^1([0, r])$ *et* $\varphi_p(\beta') \in C^1(0, r)$.

$$(ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\beta'))' + M\varphi_p(\beta) \geq F(x),\ x \in (0, r)\,, \\ \beta(0) - a\beta'(0) \geq a_0, \\ \beta(r) \geq b_0. \end{cases}$$

Lemme 1.1 *(Principe de comparaison faible)*
Soient u_1 *et* u_2 *deux fonctions tels que* $u_i \in C^1([0,r])$, $\varphi_p(u_i') \in C^1(0,r), i = 1,2,$ *et*

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1'))' + M\varphi_p(u_1) - F(x) \leq -(\varphi_p(u_2'))' + M\varphi_p(u_2) - F(x), \; x \in (0,r), \\ u_1(0) - au_1'(0) \leq u_2(0) - au_2'(0), \\ u_1(r) \leq u_2(r), \end{cases} \tag{1.3}$$

alors $u_1(x) \leq u_2(x)$, *pour tout* $x \in [0,r]$.

Preuve: Supposons qu'il existe $x^* \in [0,r]$ telle que

$$u_1(x^*) - u_2(x^*) = \max_{0 \leq x \leq r} (u_1(x) - u_2(x)) = \varepsilon > 0.$$

Comme $(u_1 - u_2) \in C^1([0,r])$, on a

$$(u_1 - u_2)'(x^*) = 0,$$

Cas 1 : Si $x^* = 0$, on obtient la contradiction suivante

$$0 < u_1(0) - u_2(0) \leq a\left(u_1'(0) - u_2'(0)\right) \leq 0.$$

D'une façon similaire, on montre pour le cas où $x^* = r$.
Cas 2 : Si $x^* \in (0,r)$, on a

$$\varphi_p(u_2'(x^*)) = \varphi_p(u_1'(x^*)).$$

Puisque φ_p est une fonction strictement croissante, on obtient

$$-\left(\varphi_p(u_1')\right)'(x^*) + \left(\varphi_p(u_2')\right)'(x^*) = \lim_{x \to x^*} \frac{-\varphi_p(u_1')(x) + \varphi_p(u_2')(x)}{x - x^*} \geq 0. \tag{1.4}$$

Mais en ce point, on a

$$-(\varphi_p(u_1'))'(x^*) + (\varphi_p(u_2'))'(x^*) - M\varphi_p(u_2(x^*)) + M\varphi_p(u_1(x^*)) \leq F(x^*) - F(x^*) = 0.$$

C'est à dire

$$-(\varphi_p(u_1'))'(x^*) + (\varphi_p(u_2'))'(x^*) \leq M\left(\varphi_p(u_2(x^*)) - \varphi_p(u_1(x^*))\right).$$

Comme $u_1(x^*) > u_2(x^*)$ et φ_p est strictement croissante, il résulte que

$$-(\varphi_p(u_1'))'(x^*) + (\varphi_p(u_2'))'(x^*) < 0.$$

Ce qui contredit(1.4). ■

On a le résultat suivant

Lemme 1.2 *Le problème(1.2) admet une unique solution.*

Preuve: On pose par définition $\alpha(x) = -L_1$ et $\beta(x) = L_2$, où L_1 et L_2 sont des nombres réels strictement positifs.
La fonction α est une sous solution du problème (1.2) si :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\alpha'))' + M\varphi_p(\alpha) \leq F(x), \ x \in (0,r)\,, \\ \alpha(0) - a\alpha'(0) \leq a_0, \\ \alpha(r) \leq b_0. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} -ML_1^{p-1} \leq F(x), \ x \in (0,r)\,, \\ -L_1 \leq a_0, \\ -L_1 \leq b_0. \end{cases}$$

Si on choisit

$$L_1 \geq \max\left(\left| \frac{\max\limits_{x\in[0,r]} -F(x)}{M} \right|^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\frac{\max\limits_{x\in[0,r]} -F(x)}{M} \right), -a_0, -b_0, 0 \right),$$

on obtient que α est une sous solution du problème (1.2).
D'une façon similaire, si on choisit

$$L_2 \geq \max\left(\left(\frac{\max\limits_{x\in[0,r]} F(x)}{M} \right)^{\frac{1}{p-1}}, a_0, b_0, 0 \right),$$

on obtient que β est une sur solution du problème (1.2).
Comme α et β sont la sous et la sur solution du problème (1.2), alors d'après le Théorème 2.1 dans [16], il résulte que ce problème admet au moins une solution .

Maintenant, on suppose que le problème (1.2) admet deux solutions u_1 et u_2, alors d'après le Lemme 1.4, on a $u_1 \leq u_2$ et $u_1 \geq u_2$. ■

Notation 1.1 *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$, on note par $C^1_{loc}(A)$ l'espace des fonctions qui sont $C^1(K)$ pour chaque compact K de A.*

Définition 1.4 *On dit que u est une solution du problème*(1.1) *si :*
(i) $u \in C^1_{loc}(\overline{I})$ *et* $\varphi_p(u') \in C^1_{loc}(I)$,
(ii). $\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(x,u), \ x \in (0,b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ u(0) - au'(0) = L(u), \end{cases}$

Définition 1.5 *On dit que* $\underline{u}$ *est une sous solution du problème* (1.1) *si :*
(i) $\underline{u} \in C^1_{loc}(\overline{I})$ *et* $\varphi_p(\underline{u}') \in C^1_{loc}(I)$.
(ii) $\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq f(x, \underline{u}), x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ \underline{u}(0) - a\underline{u}'(0) \leq L(\underline{u}). \end{cases}$

Définition 1.6 *On dit que* $\overline{u}$ *est une sur solution du problème* (1.1) *si :*
(i) $\overline{u} \in C^1_{loc}(\overline{I})$ *et* $\varphi_p(\overline{u}') \in C^1_{loc}(I)$.
(ii) $\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq f(x, \overline{u}), x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ \overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) \geq L(\overline{u}). \end{cases}$

1.3 Résultat Principal

Dans cette section, on énonce et on montre le résultat principal de ce chapitre.

Pour la nonlinéarité de f, on suppose que la condition suivante est satisfaite.

(H) L'application $u \mapsto f(x, u) + M\varphi_p(u)$ est croissante, pour tout $x \in \overline{I}$.
On suppose l'existence d'une sous solution $\underline{u}$ et d'une sur solution $\overline{u}$ tels que

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \text{ pour tout } x \in \overline{I}.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.2 *Soient* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *la sous et la sur solutions respectivement du problème* (1.1) *telles que* $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$*, pour tout* $x \in \overline{I}$*. Supposons que la condition* (H) *est satisfaite, alors le problème* (1.1) *admet une solution minimale* u_* *et une solution maximale* u^* *telle que pour toute solution* u *du problème*(1.1) *avec* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *dans* $\overline{I}$*, on a :*

$$\underline{u}(x) \leq u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x) \leq \overline{u}(x), \ \textit{pour tout } x \in \ \overline{I}.$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.
On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_n'))' + M\varphi_p(u_n) = f(x, U_{n-1}) + M\varphi_p(U_{n-1}), \ x \in I_n, \\ u_n(0) - au_n'(0) = L(U_{n-1}), \\ u_n(n) = u^{(0)}(n), \end{cases} \tag{1.5}$$

où la suite de fonction $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $U_0 = u^{(0)}$, où $u^{(0)}$ soit la sur solution $\overline{u}$ ou bien la sous solution $\underline{u}$ et

$$U_n(x) = \begin{cases} u_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ u^{(0)}(x),\ x \in I\backslash\overline{I}_n, \end{cases} \tag{1.6}$$

où $I_n = (0, n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Étape 1 : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, le problème (1.5) admet une unique solution u_n telle que $u_n \in C^1(\overline{I}_n)$ et $\varphi_p(u_n') \in C^1(I_n)$.

Preuve :

i) Pour $n = 1$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1'))' + M\varphi_p(u_1) = f(x, u^{(0)}) + M\varphi_p(u^{(0)}),\ \ x \in I_n, \\ u_1(0) - au_1'(0) = L(u^{(0)}), \\ u_1(1) = u^{(0)}(1). \end{cases} \tag{1.7}$$

Comme les fonctions f et φ_p sont continues et $u^{(0)} \in C^1(\overline{I})$, alors d'après le Lemme 1.2 le problème 1.5 admet une unique solution u_1 telle que $u_1 \in C^1(\overline{I}_1)$ et $\varphi_p(u_1') \in C^1(I_1)$.

ii) Supposons pour $n > 1$ fixé, le problème (1.5) admet une unique solution telle que $u_n \in C^1(\overline{I}_n)$ et $\varphi_p(u_n') \in C^1(I_n)$,

et montrons que le problème suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_{n+1}'))' + M\varphi_p(u_{n+1}) = f(x, U_n) + M\varphi_p(U_n),\ \ x \in I_{n+1}, \\ u_{n+1}(0) - au_{n+1}'(0) = L(U_n), \\ u_{n+1}(n+1) = u^{(0)}(n+1), \end{cases} \tag{1.8}$$

admet une unique solution telle que $u_{n+1} \in C^1(\overline{I}_{n+1})$ et $\varphi_p(u_{n+1}') \in C^1(I_{n+1})$.

Puisque $u^{(0)} \in C^1(\overline{I})$, $u_n \in C^1(\overline{I}_n)$ et $u_n(n) = u^{(0)}(n)$, alors par (1.6) on a la fonction U_n est continue sur $\overline{I}$.

Maintenant, comme f, φ_p et U_n sont continues sur $\overline{I}$, donc d'après le Lemme 1.2 le problème (1.8) admet une unique solution telle que $u_{n+1} \in C^1(\overline{I}_{n+1})$ et $\varphi_p(u_{n+1}') \in C^1(I_{n+1})$.$\square$

D'après **l'étape 1,** pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le problème (1.5) admet une solution unique $\overline{u}_n$ si $u^{(0)} = \overline{u}$ et une solution unique $\underline{u}_n$si $u^{(0)} = \underline{u}$.

Maintenant, on construit les suites $\left(\overline{U}_n\right)_{n\geq 1}$ et $(\underline{U}_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante

$$\overline{U}_n(x) = \begin{cases} \overline{u}_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \overline{u}(x),\ x \in I\backslash\overline{I}_n, \end{cases}$$

et

$$\underline{U}_n(x) = \begin{cases} \underline{u}_n(x), \, x \in \overline{I}_n, \\ \underline{u}(x), \, x \in I \backslash \overline{I}_n. \end{cases}$$

Étape 2 : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{u} \leq \underline{U}_1 \leq ... \leq \underline{U}_n \leq \underline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \leq ... \leq \overline{U}_1 \leq \overline{u} \text{ dans } \overline{I}. \tag{1.9}$$

Preuve : En utilisant le Lemme 1.4, il n'est pas difficile de montrer que $\underline{u} \leq \overline{U}_n \leq \overline{u}$ et $\underline{u} \leq \underline{U}_n \leq \overline{u}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Maintenant, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \overline{U}_n \leq \overline{U}_{n+1} \text{ et } \underline{U}_{n+1} \leq \underline{U}_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on distingue trois cas
Cas 1 : Si $x \in I \backslash \overline{I}_{n+1}$, on a

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_{n+1}(x) = \overline{U}_n(x) \leq \overline{u}(x).$$

Cas 2 : Si $x \in \overline{I}_{n+1} \backslash \overline{I}_n$, on a

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}_{n+1}(x) = \overline{U}_{n+1}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_n(x).$$

Cas 3 : Si $x \in \overline{I}_n$: Pour ce cas, on a $\overline{U}_{n+1} = \overline{u}_{n+1}$ et $\overline{U}_n = \overline{u}_n$.
i) Pour $n = 1$, on a :

$$-(\varphi_p(\overline{u}'_2))' + (\varphi_p(\overline{u}'_1))' + M\varphi_p(\overline{u}_2) - \varphi_p(\overline{u}_1) = f(x, \overline{u}_1) + M\varphi_p(\overline{u}_1) - f(x, \overline{u}) - M\varphi_p(\overline{u}), \text{ dans } I_1.$$

D'après l'hypothèse (H) et comme $\overline{u}_1 \leq \overline{u}$, on a

$$f(x, \overline{u}_1) + M\varphi_p(\overline{u}_1) \leq f(x, \overline{u}) + M\varphi_p(\overline{u}), \text{dans } I_1.$$

Ce qui entraîne que

$$-(\varphi_p(\overline{u}'_2))' + M\varphi_p(\overline{u}_2) \leq -(\varphi_p(\overline{u}'_1))' + M\varphi_p(\overline{u}_1), \text{dans } I_1. \tag{1.10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \overline{u}_2(0) - a\overline{u}'_2(0) &= L(\overline{u}_1), \\ &\leq L(\overline{u}) \\ &\leq \overline{u}_1(0) - a\overline{u}'_1(0), \end{aligned} \tag{1.11}$$

et

$$\overline{u}_2(1) \leq \overline{u}(1) = \overline{u}_1(1). \qquad (1.12)$$

D'après (1.10), (1.11), (1.12) et le Lemme 1.4, on obtient

$$\overline{u}_2(x) \leq \overline{u}_1(x),\ x \in \overline{I}_1.$$

ii) Supposons pour $k > 1$ fixé, on a

$$\overline{U}_k(x) \leq \overline{U}_{k-1}(x),\ x \in \overline{I}_{k-1}. \qquad (1.13)$$

et montrons que

$$\overline{U}_{k+1}(x) \leq \overline{U}_k(x),\ x \in \overline{I}_k.$$

Soit $x \in I_k$, on a

$$\begin{array}{rcl} -(\varphi_p(\overline{U}'_{k+1}))' + M\varphi_p(\overline{U}_{k1}) + (\varphi_p(\overline{U}'_k))' - M\varphi_p(\overline{U}_k) & = & f(x, \overline{U}_k) + M\varphi_p(\overline{U}_k) \\ & & -f(x, \overline{U}_{k-1}) - M\varphi_p(\overline{U}_{k-1}), \end{array}$$

D'après (1.13) et le deuxième cas, on a

$$\overline{U}_k(x) \leq \overline{U}_{k-1}(x),\ x \in \overline{I}_k.$$

Alors d'après l'hypothèse (H), on a

$$f(x, \overline{U}_k) + M\varphi_p(\overline{U}_k) \leq f(x, \overline{U}_{k-1}) + M\varphi_p(\overline{U}_{k-1}), \text{ dans } I_k.$$

Ce qui entraîne que

$$-(\varphi_p(\overline{U}'_{k+1}))' + M\varphi_p(\overline{U}_{k+1}) \leq (\varphi_p(\overline{U}'_k))' + M\varphi_p(\overline{U}_k), \text{ dans } I_k. \qquad (1.14)$$

D'autre part, on a

$$\begin{array}{rcl} \overline{U}_{k+1}(0) - a\overline{U}'_{k+1}(0) & = & L(\overline{U}_k), \\ & \leq & L(\overline{U}_{k-1}) \\ & \leq & \overline{U}_k(0) - a\overline{U}'_k(0), \end{array} \qquad (1.15)$$

et

$$\overline{U}_{k+1}(k) \leq \overline{u}(k) = \overline{U}_k(k). \qquad (1.16)$$

D'après (1.14), (1.15), (1.16) et le Lemme 1.4, on obtient

$$\overline{U}_{k+1}(x) \leq \overline{U}_k(x),\ x \in \overline{I}_k.$$

Par conséquent il résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{U}_{n+1}(x) \leq \overline{U}_n(x),\ \forall x \in \overline{I}_n.$$

D'après les **Cas 1, Cas 2 et Cas 3,** on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

Par un raisonnement similaire, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underline{U}_{n+1} \leq \underline{U}_n \text{dans } \overline{I}.$$

Maintenant, on va montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{U}_n \leq \overline{U}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} \underline{U}_n(x) = \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_n(x), \text{ si } x \in I \backslash \overline{I}_n, \\ \underline{U}_n(x) = \underline{u}_n(x) \leq \overline{u}_n(x) = \overline{U}_n(x), \text{ si } x \in \overline{I}_n, \end{cases}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underline{U}_n \leq \overline{U}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

La preuve de l'**Étape 2** est terminée.□

Maintenant soit $A = [0, b]$ avec $b > 0$, alors il existe un entier l tel que $A \subset \overline{I}_l$.

Pour $k \geq l+1$, la restriction de la suite $\left(\overline{U}_k\right)_{k \geq l+1}$ sur $\overline{I}_l$ satisfait :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{U}_k'))' + M\varphi_p(\overline{U}_k) = f(x, \overline{U}_{k-1}) + M\varphi_p(\overline{U}_{k-1}),\ x \in I_l, \\ \overline{U}_k(0) - a\overline{U}_k'(0) = L(\overline{U}_{k-1}), \\ \overline{U}_k(l) = \overline{u}_k(l). \end{cases} \tag{1.17}$$

Étape 3 : Il existe une constante positive C_l, tel que

$$\left\|\overline{U}_k'\right\|_0 := \max_{x \in [0,l]} \left|\overline{U}_k'(x)\right| \leq C_l, \text{ pour tout } k \geq l+1.$$

Preuve : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq l+1$.

Puisque $\underline{u} \leq \overline{U}_n \leq \overline{u}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et les fonctions f et φ_p sont continues, alors par la première équation du problème (1.17), il en déduit que la suite des fonctions $\left(\left(\varphi_p(\overline{U}'_k)\right)'\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée dans I_l. Ce qui implique que la suite $\left(\varphi_p(\overline{U}'_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée dans I_l et alors la suite $\left(\overline{U}'_k\right)_{k\geq l+1}$ l'est aussi.

Autrement dit,

$$\exists \widetilde{C}_l > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } k \geq l+1, \forall x \in I_l, \left|\overline{U}'_k(x)\right| \leq \widetilde{C}_l. \tag{1.18}$$

Maintenant, si $x = 0$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta_{k,l} \in]0, \frac{l}{2}[$ tel que

$$\left(\varphi_p(\overline{U}'_k)\right)(0) = \left(\varphi_p(\overline{U}'_k)\right)(\frac{l}{2}) - \frac{l}{2}(\varphi_p(\overline{U}'_k))'(\theta_{k,l}).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left|\left(\varphi_p(\overline{U}'_k)\right)(0)\right| &= \left|\left(\varphi_p(\overline{U}'_k)\right)(\frac{l}{2}) - \frac{l}{2}(\varphi_p(\overline{U}'_k))'(\theta_{k,l})\right| \\
&\leq \left|\left(\varphi_p(\overline{U}'_k)\right)(\frac{l}{2})\right| + \frac{l}{2}\left|(\varphi_p(\overline{U}'_k))'(\theta_{k,l})\right| \\
&\leq \left(\widetilde{C}_l\right)^{p-1} + \frac{l}{2}d_l.
\end{aligned}$$

Si on pose par définition $\widehat{C}_l = \left(\left(\widetilde{C}_l\right)^{p-1} + \frac{l}{2}d_l\right)^{\frac{1}{p-1}}$ alors on obtient

$$\left|\overline{U}'_k(0)\right| \leq \widehat{C}_l. \tag{1.19}$$

D'une manière similaire si $x = l$, on montre que

$$\exists \overline{C}_l > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } k \geq l+1, \left|\overline{U}'_k(1)\right| \leq \overline{C}_l. \tag{1.20}$$

Si on pose par définition $C_l := \max\{\widetilde{C}_l, \widehat{C}_l, \overline{C}_l\}$, donc d'après (1.18), (1.18) et (1.20), on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } k \geq l+1, \forall x \in \overline{I}_l, \left|\overline{U}'_k(x)\right| \leq C_l. \tag{1.21}$$

Étape 4 : La suite $(\overline{U}_k)_{k\geq l+1}$ converge vers la solution maximale du problème(1.1) .

Preuve : D'après l'**Étape 3,** la suite $(\overline{U}_k)_{k\geq l+1}$ est uniformément bornée dans $C^1([0,l])$.
Soit $\varepsilon>0$ et $t,s\in[0,l]$ tels que $t<s$, alors pour chaque $k\geq l+1$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_p(\overline{U}'_k(s))-\varphi_p(\overline{U}'_k(t))\right| &= \left|\int_t^s f(x,\overline{U}_{k-1}(x))dx + M\left(\varphi_p(\overline{U}_{k-1})-\varphi_p(\overline{U}_k)\right)dx\right| \\
&\leq \int_t^s \left(\left|f(x,\overline{U}_{k-1}(x))\right| + M\left|\varphi_p(\overline{U}_{k-1})-\varphi_p(\overline{U}_k)\right|\right)dx \\
&\leq M_f\left|s-t\right| + 2M'M\left|s-t\right|, \\
&\leq (M_f+2M'M)\left|s-t\right|,
\end{aligned}$$

avec

$$M_f := \max\{\left|f(x,u)\right|, x\in[0,l], \underline{u}\leq u\leq\overline{u}\},$$

et

$$M' = \max_{x\in I}\{\left|\varphi_p(u)\right|, \underline{u}\leq u\leq\overline{u}\}.$$

Si on choist $|s-t|\leq\dfrac{\varepsilon}{M_f+2M'M+1}$, on obtient

$$\left|\varphi_p(\overline{U}'_k(s))-\varphi_p(\overline{U}'_k(t))\right| < \varepsilon.$$

Ce qui entraîne que la suite $(\varphi_p(\overline{U}'_k))_{k\geq l+1}$ est équicontinue sur $[0,l]$.
Puisque l'application φ_p^{-1} est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que

$$\left|\overline{U}'_k(s)-\overline{U}'_k(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(\overline{U}'_k(s))\right)-\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(\overline{U}'_k(t))\right)\right| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire, la suite $(\overline{U}'_k)_{k\geq l+1}$ est équicontinue sur $[0,l]$. Par suite d'après le théorème d'*Ascoli-Arzèla*, il existe une sous suite $(\overline{U}_{k_j})_{k_j\in\mathbb{N}}$ de $(\overline{U}_k)_{k\geq l+1}$ qui converge dans $C^1([0,l])$.
Posons

$$u = \lim_{k_j\to+\infty}\overline{U}_{k_j},$$

alors
$$u' = \lim_{k_j \to +\infty} \overline{U}'_{k_j}.$$

D'après **l'Étape 2**, la suite $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ est décroissante et minorée, alors sa limite ponctuelle existe et on note par u^*. Donc on a $u = u^*$ et de plus, cette suite converge dans $C^1(\overline{I}_l)$ vers u^*.
Soit $x \in (0, l)$, on a

$$-\varphi_p(\overline{U}'_k(x)) = -\varphi_p(\overline{U}'_k(0)) + \int_0^x \left(f(s, \overline{U}_{k-1}(s)) + M\left(\varphi_p(\overline{U}_{k-1}) - \varphi_p(\overline{U}_k)\right)\right) ds$$

Si on fait tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$f(s, \overline{U}_{k-1}) + M\left(\varphi_p(\overline{U}_{k-1}) - \varphi_p(\overline{U}_k)\right) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f(s, u^*).$$

De plus on a

$$\exists K > 0, \ \forall k \geq l+1, \forall s \in [0, l], \left| f(s, \overline{U}_{k-1}) \right| \leq K.$$

Alors, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que :

$$-\varphi_p(u^{*\prime}(x)) = -\varphi_p(u^{*\prime}(0)) + \int_0^x f(s, u^*(s)) ds.$$

Ce qui donne
$$-\left(\varphi_p(u^{*\prime})\right)' = f(x, u^*), \forall x \in (0, l). \tag{1.22}$$
D'autre part, on a
$$u^*(0) - a u^{*\prime}(0) = L(u^*). \tag{1.23}$$
Donc d'après (1.22) et (1.23) , on obtient que u^* est une solution du problème (1.17).

Comme A est un domaine borné quelconque de I, alors $u^* \in C^1_{loc}(\overline{I})$ est une solution du problème (1.1).
Maintenant, montrons que u^* est une solution maximale du problème (1.1) C'est à dire montrons que si u est une autre solution du problème (1.1) telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans $\overline{I}$, alors $u \leq u^*$ dans $\overline{I}$.
Si u est une solution du problème (1.1), alors d'après l'**Étape 2,** on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u \leq \overline{U}_n,$$

Par passage à la limite, quand $n \to +\infty$, on obtient

$$u \leq \lim_{n\to+\infty} \overline{U}_n = u^*,$$

Ce qui entraîne que u^* est une solution maximale du problème (1.1).□
Étape 5 : la suite $(\underline{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution minimale du problème(1.1).
La preuve est similaire à celle de l'**Étape 3.**
La preuve de notre résultat principal est terminée. ■

1.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple d'application.
On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = x(1 - e^{\frac{u(x)-\lambda}{x^2}}), \; x \in I, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^{\overline{\alpha}} \frac{u(x)}{x+1} dx, \end{cases} \tag{1.24}$$

où $I =]0, +\infty[$ et $\lambda, a, \overline{\alpha}$ sont des nombres réels positifs tels que

$$\overline{\alpha} \geq e \text{ et } a \geq \overline{\alpha} - 1.$$

On pose par définition que $\underline{u}(x) = \lambda$ et $\overline{u}(x) = \lambda(x+1)$, pour tout $x \in \overline{I}$.
Pour tout $x \in I$, on a

$$0 = -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq x(1 - e^{\frac{\underline{u}(x)-\lambda}{x^2}}),$$

et

$$\underline{u}(0) - a\underline{u}'(0) = \lambda \leq \int\limits_0^{\overline{\alpha}} \frac{\underline{u}(x)}{x+1} dx = \lambda \ln(\overline{\alpha}+1).$$

Alors

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq x(1 - e^{\frac{\underline{u}(x)-\lambda}{x^2}}), \; x \in I, \\ \underline{u}(0) - a\underline{u}'(0) \leq \int\limits_0^{\overline{\alpha}} \frac{\underline{u}(x)}{x+1} dx. \end{cases}$$

D'une façon similaire, pour tout $x \in I$, on a

$$-(\varphi_p(\overline{u}'))' = 0 \geq x(1 - e^{\frac{\overline{u}(x) - \lambda}{x^2}}),$$

et

$$\overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) = \lambda(1 - a) \geq \int_0^{\overline{\alpha}} \frac{\overline{u}(x)}{x+1} dx = \lambda\overline{\alpha}.$$

Donc

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq x(1 - e^{\frac{\overline{u}(x) - \lambda}{x^2}}), \ x \in I, \\ \overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) \geq \int_0^{\overline{\alpha}} \frac{\overline{u}(x)}{x+1} dx. \end{cases}$$

Alors $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont une sous et une sur solution respectivement du problème (1.24) .

Il est clair que les conditions du Théorème 1.2 sont satisfaites et par suite le problème (1.24) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^* telles que :

$$\lambda \leq u_* \leq u^* \leq \lambda(x + 1), \text{ pour tout } x \in I.$$

Chapitre 2

Existence des solutions minimales et maximales pour un problème aux limites quasilinéaire avec une non linéarité dépendante de la première dérivée.

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence des solutions extrémales pour un problème quasilinéaire elliptique du second ordre dans un domaine non borné avec une condition non locale. Plus précisément, on considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(x,u,u'), \ x \in I, \\ u(0) - au'(0) = L(u), \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $I = \,]0,+\infty[\,$, $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $L : C^1(\overline{I}) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle croissante et a est un nombre positif.

Les problèmes aux limites dans les domaines non bornés interviennent dans l'étude des solutions radiales d'équations elliptiques non linéaires et dans divers phénomènes physiques. Par exemple, la physique des plasmas, l'écoulement instable de gaz dans un milieu semi-infini, les semi-conducteurs, la théorie des fluides non-Newtoniens et dans la détermination du potentiel électrique des atomes neutres isolés, (voir [[1]- [6]], [13], [37], [47], [49], [51], [67] et [89]).

Les problèmes avec des conditions aux limites non locales dans les domaines non bornés ont été étudiés par plusieurs auteurs en utilisant la méthode des sous et sur solutions, les techniques itératives, la théorie du degré topologique et les théorèmes de point fixe (voir [42], [[52]- [61]], [[101]- [103]]).

Il est bien connu que la méthode des sous et sur solutions associée avec une technique itérative a été utilisée pour montrer l'existence des solutions minimales et maximales pour les problèmes aux limites non linéaires dans des domaines non bornés par plusieurs auteurs. (voir [34], [46], [[70]- [71]], [72] et [[74]- [75]]).

Le but de ce travail est de montrer que cette technique est valable pour les problèmes de type (2.1). À notre connaissance, c'est le premier travail qui utilise la méthode des sous et sur solutions avec la technique itérative pour montrer l'existence des solutions minimales et maximales pour les problèmes aux limites quasilinéaires de type (2.1). Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [29].

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la deuxième section, on introduit quelques définitions. Dans la troisième section, on présente et on montre notre résultat principal. Finalement, dans la dernière section, on donne un exemple d'application.

2.2 Préliminaires

Définition 2.1 *On dit que u est une solution du problème* (2.1) *si*
(i) $u \in C^1_{loc}(\overline{I})$ *et* $\varphi_p(u') \in C^1_{loc}(I)$.
(ii) $\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(x,u,u'), \ x \in (0,b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ u(0) - au'(0) = L(u), \end{cases}$

Définition 2.2 *On dit que $\underline{u}$ est une sous solution du problème*(2.1) *si*
(i) $\underline{u} \in C^1_{loc}(\overline{I})$ *et* $\varphi_p(\underline{u}') \in C^1_{loc}(I)$.
(ii) $\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq f(x,\underline{u},\underline{u}'), \ x \in (0,b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ \underline{u}(0) - a\underline{u}'(0) \leq L(\underline{u}). \end{cases}$

Définition 2.3 *On dit que* $\overline{u}$ *est une sur solution du problème*(2.1) *si*
(*i*) $\overline{u} \in C^1_{loc}(\overline{I})$ *et* $\varphi_p(\overline{u}') \in C^1_{loc}(I)$.
(*ii*) $\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq f(x, \overline{u}, \overline{u}'), \ x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ \overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) \geq L(\overline{u}). \end{cases}$

Maintenant, on définit les conditions de *Nagumo-Wintner.*

Définition 2.4 *On dit que* $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *satisfait la condition de Nagumo-Wintner relativement à* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$, *s'il existe un* $C \geq 0$ *et des fonctions* $Q \in L^p(\overline{I})$ *et* $\Psi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *continues, telles que :*

$$|f(x, u, v)| \leq \Psi(|v|) \left(Q(x) + C\, |v|^{\frac{1}{p-1}} \right), \tag{2.2}$$

pour tout $(x, u, v) \in D$, *avec*

$$D = \left\{ (x, u, v) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^2 : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \right\},$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds = +\infty. \tag{2.3}$$

2.3 Résultat Principal

Dans cette section, on énonce et on montre notre résultat principal.
Pour la nonlinéarité f, on suppose que la condition suivante est satisfaite.
(H) Il existe un nombre réel positif M tel que l'application
$u \mapsto f(x, u, v) + M\varphi_p(u)$ est croissante, pour tout $x \in I$ et $v \in \mathbb{R}$.
On a le résultat suivant

Théorème 2.1 *Soient* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *la sous et la sur solutions respectivement du problème* (2.1) *telles que* $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, *pour tout* $x \in \overline{I}$. *Supposons que la condition* (H) *et les conditions de Nagumo-Wintner relativement à* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *sont satisfaites, alors le problème* (2.1) *admet une solution minimale* u_* *et une solution maximale* u^* *telles que pour toute solution* u *du problème* (2.1) *avec* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *dans* $\overline{I}$, *on a*

$$\underline{u}(x) \leq u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x) \leq \overline{u}(x), \ \textit{pour tout } x \in \overline{I}.$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.
Considérons le problème auxiliaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} -(\varphi_p(u_n'))' = f(x, u_n, u_n'),\ x \in I_n, \\ u_n(0) - a u_n'(0) = L(u_n), \\ u_n(n) = \overline{u}(n), \end{array}\right. \qquad (P_n)$$

où $I_n =]0, n[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après le Théorème 4 dans [16], le problème (P_n) admet une solution minimale $\underline{u}_n$ et une solution maximale $\overline{u}_n$ telles que

$$\underline{u}(x) \leq \underline{u}_n(x) \leq \overline{u}_n(x) \leq \overline{u}(x) \text{ pour tout } x \in [0, n]$$

On construit les suites $\left(\overline{U}_n\right)_{n\geq 1}$ et $(\underline{U}_n)_{n\geq 1}$ de la façon suivante :

$$\overline{U}_n(x) = \left\{\begin{array}{l} \overline{u}_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \overline{u}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n, \end{array}\right.$$

et

$$\underline{U}_n(x) = \left\{\begin{array}{l} \underline{u}_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \underline{u}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n. \end{array}\right.$$

Étape 1 : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{u} \leq \underline{U}_1 \leq ... \leq \underline{U}_n \leq \underline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \leq ... \leq \overline{U}_1 \leq \overline{u} \text{ dans } \overline{I}. \qquad (2.4)$$

Preuve : Il n'est pas difficile de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{u} \leq \overline{U}_n \leq \overline{u} \text{ et } \underline{u} \leq \underline{U}_n \leq \overline{u}, \text{dans } \overline{I}.$$

Maintenant, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \text{ et } \underline{U}_{n+1} \leq \underline{U}_n, \text{dans } \overline{I}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on distingue trois cas
Cas 1 : Si $x \in I \backslash \overline{I}_{n+1}$, on a

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_{n+1}(x) = \overline{U}_n(x) \leq \overline{u}(x).$$

Cas 2 : Si $x \in \overline{I}_{n+1} \backslash \overline{I}_n$, on a

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}_{n+1}(x) = \overline{U}_{n+1}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_n(x).$$

Cas 3 : Si $x \in \overline{I}_n$, on a $\overline{U}_{n+1} = \overline{u}_{n+1}$

Comme la fonction $\overline{u}_{n+1}$ satisfait la première équation du problème (P_{n+1}) et $\overline{I}_{n+1}$ contient $\overline{I}_n$, on a

$$-(\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}))' = f(x, \overline{u}_{n+1}, \overline{u}'_{n+1}),\ x \in I_n.$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \overline{u}_{n+1}(0) - a\overline{u}'_{n+1}(0) = L(\overline{u}_{n+1}), \\ \overline{u}_{n+1}(n) \leq \overline{u}(n). \end{cases}$$

Ce qui entraîne que $\overline{u}_{n+1}$ est une sous solution du problème (P_n) et par conséquent, on obtient $\overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n$ dans $\overline{I}_n$.
Ainsi

$$\overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

D'une manière similaire, on montre que $\underline{U}_n \leq \underline{U}_{n+1}$ dans $\overline{I}$.
Maintenant on va montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{U}_n \leq \overline{U}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} \underline{U}_n(x) = \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_n(x), \text{ si } x \in I \backslash \overline{I}_n, \\ \underline{U}_n(x) = \underline{u}_n(x) \leq \overline{u}_n(x) = \overline{U}_n(x), \text{ si } x \in \overline{I}_n, \end{cases}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underline{U}_n \leq \overline{U}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

La preuve de l'**Étape 1** est terminée.□

Maintenant soit $A = [0, b]$ avec $b > 0$, alors il existe un entier l tel que $A \subset \overline{I}_l$.
Pour $k \geq l+1$, la restriction de la suite $\left(\overline{U}_k\right)_{k \geq l+1}$.sur $\overline{I}_l$ satisfait :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{U}_k)')' = f(x, \overline{U}_k, \overline{U}'_k), \ x \in I_l, \\ \overline{U}_k(0) - a\overline{U}'_k(0) = L(\overline{U}_k), \\ \overline{U}_k(l) \leq \overline{u}(l). \end{cases}$$

Étape 2 : Il existe une constante positive K_l , tel que

$$\left\|\overline{U}'_k\right\|_0 := \max_{x \in [0,l]} \left|\overline{U}'_k(x)\right| \leq K_l,\ \text{pour tout } k \geq l+1.$$

Preuve : Posons

$$S = 2\max\{\|\overline{u}\|_0, \|\underline{u}\|_0\},$$

et

$$\eta_l = \max\{|\underline{u}(l) - \overline{u}(0)|, |\overline{u}(l) - \underline{u}(0)|\},$$

Prenons $K_l \geq \max\{\|\overline{u}'\|_0, \|\underline{u}'\|_0, \eta_l\}$ tel que

$$\int_{\varphi_p(\eta_l)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds > \|Q\|_p S^{\frac{p-1}{p}} + CS^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.5}$$

Puisque $\underline{u}(x) \leq \overline{U}_k(x) \leq \overline{u}(x)$, pour tout x dans $\overline{I}_l$, on a

$$\underline{u}(l) - \overline{u}(0) \leq \overline{U}_k(l) - \overline{U}_k(0) \leq \overline{u}(l) - \underline{u}(0).$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_1 \in (0, l)$ telle que

$$\overline{U}_k(l) - \overline{U}_k(0) = l\overline{U}'_k(x_1),$$

Ce qui entraîne que

$$\left|\overline{U}'_k(x_1)\right| \leq \eta_l.$$

Posons par définition

$$L = \left|\overline{U}'_k(x_1)\right|.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\widetilde{x} \in [0, l]$ telle que $\left|\overline{U}'_k(\widetilde{x})\right| > K_l$.
Alors par la continuité de $\overline{U}'_k$, on peut trouver une constante $x_2 \in [0, l]$ que vérifie l'une des situations suivantes :

$(i)\overline{U}'_k(x_1) = L, \overline{U}'_k(x_2) = K_l$ et $L \leq \overline{U}'_k(x) \leq K_l,$ pour tout $x \in (x_1, x_2)$.

$(ii)\overline{U}'_k(x_1) = L, \overline{U}'_k(x_2) = K_l$ et $L \leq \overline{U}'_k(x) \leq K_l,$ pour tout $x \in (x_2, x_1)$.

$(iii)\overline{U}'_k(x_1) = -L, \overline{U}'_k(x_2) = -K_l$ et $-K_l \leq \overline{U}'_k(x) \leq -L,$ pour tout $x \in (x_1, x_2)$.

$(iv)\overline{U}'_k(x_1) = -L, \overline{U}'_k(x_2) = -K_l$ et $-K_l \leq \overline{U}'_k(x) \leq -L,$ pour tout $x \in (x_2, x_1)$.

Considérons le cas (i). Les autres cas peuvent être démontrés d'une façon similaire.
Puisque $\overline{U}_k$ est une solution du problème (P_l) et par les conditions de Nagumo-Wintner, alors pour tout $x \in (x_1, x_2)$, on a

$$\begin{aligned}(\varphi_p(\overline{U}'_k)(x))' &\leq \left|f(x, \overline{U}_k, \overline{U}'_k)\right| \\ &\leq \Psi(\left|\overline{U}'_k\right|)(Q(x) + C\left|\overline{U}'_k\right|^{\frac{1}{p-1}}).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Comme $L \leq \eta_l$ et l'application φ_p est croissante, on a

$$\int_{\varphi_p(\eta_l)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds \leq \int_{\varphi_p(L)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds. \tag{2.7}$$

Donc si on pose $s = \varphi_p\left(\overline{U}'_k\right)(x)$, on obtient

$$\int_{\varphi_p(L)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\left(\varphi_p(\overline{U}'_k(x))\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi(\overline{U}'_k(x))} (\varphi_p\left(\overline{U}'_k\right)(x))' dx \tag{2.8}$$

Alors d'après $(2.6), (2.7)$ et (2.8), on a

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_p(L)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\left(\varphi_p(\overline{U}'_k(x))\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi(\overline{U}'_k(x))} (\varphi_p\left(\overline{U}'_k\right)(x))' dx \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} \left(\varphi_p(\overline{U}'_k(x))\right)^{\frac{1}{p}} (Q(x) + C\left|\overline{U}'_k\right|^{\frac{1}{p-1}}) dx. \quad (2.9)\end{aligned}$$

D'après (2.7), (2.9) et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_p(\eta_l)}^{\varphi_p(K_l)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds &\leq \int_{x_1}^{x_2} \left(\varphi_p(\overline{U}'_k(x))\right)^{\frac{1}{p}} Q(x)dx + C\int_{x_1}^{x_2} \left(\varphi_p(\overline{U}'_k(x))\right)^{\frac{1}{p}} \left|\overline{U}'_k\right|^{\frac{1}{p-1}} dx \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} \left(\overline{U}'_k(x)\right)^{\frac{p-1}{p}} Q(x)dx + C\int_{x_1}^{x_2} \left(\overline{U}'_k(x)\right)^{\frac{p-1}{p}} dx. \\
&\leq \|Q\|_p \left(\int_{x_1}^{x_2} \left(\left(\overline{U}'_k(x)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad + C\left(\int_{x_1}^{x_2} \left(\left(\overline{U}'_k(x)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \|Q\|_p \left(\int_{x_1}^{x2} \overline{U}'_k(x)dx\right)^{\frac{p-1}{p}} + C\left(\int_{x_1}^{x2} \overline{U}'_k(x)dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \|Q\|_p \left(\overline{U}_k(x_2) - \overline{U}_k(x_1)\right)^{\frac{p-1}{p}} + C\left(\overline{U}_k(x_2) - \overline{U}_k(x_1)\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \|Q\|_p S^{\frac{p-1}{p}} + CS^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec (2.5).

Par conséquent, on a

$$\left\|\overline{U}'_k\right\|_0 \leq K_l, \text{ pour tout } k \geq l+1.$$

Étape 3 : La suite $(\overline{U}_k)_{k\geq l+1}$ converge vers la solution maximale du problème (2.1).

Preuve : D'après l'**Étape 2**, on a $\left\|\overline{U}'_k\right\|_0 \leq K_l$ pour tout $k \geq l+1$, alors la suite $(\overline{U}_k)_{k\geq l+1}$ est uniformément bornée dans $C^1([0,l])$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $t, s \in [0, l]$ tels que $t < s$, alors pour chaque $k \geq l+1$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_p(\overline{U}'_{k+1}(s)) - \varphi_p(\overline{U}'_{k+1}(t))\right| &= \left|\int_t^s f(x, \overline{U}_{k+1}(x), \overline{U}'_{k+1}(x))dx\right| \\
&\leq \int_t^s \left|f(x, \overline{U}_{k+1}(x), \overline{U}'_{k+1}(x))\right| dx \\
&\leq M(f) \left|s - t\right|,
\end{aligned}$$

où

$$M(f) = \max\{\left|f(x, y, z)\right|, x \in \overline{I}_l, \underline{u} \leq y \leq \overline{u} \text{ et } |z| \leq K_l\}.$$

Si on choisit $|s - t| \leq \dfrac{\varepsilon}{M(f) + 1}$, on obtient

$$\left|\varphi_p(\overline{U}'_{k+1}(s)) - \varphi_p(\overline{U}'_{k+1}(t))\right| < \varepsilon.$$

Ce qui entraîne que la suite $\left(\varphi_p(\overline{U}'_k)\right)_{k \geq l+1}$ est équicontinue sur $[0, l]$.
Maintenant, puisque l'application φ_p^{-1} est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que

$$\left|\overline{U}'_k(s) - \overline{U}'_k(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(\overline{U}'_k(s))\right) - \varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(\overline{U}'_k(t))\right)\right| < \varepsilon,$$

La suite $(\overline{U}'_k)_{k \geq l+1}$ est alors équicontinue sur $[0, l]$. Donc d'après le théorème d'*Ascoli-Arzèla*, il existe une sous suite $(\overline{U}_{k_j})_{k_j \in \mathbb{N}}$ de $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ qui converge dans $C^1([0, l])$.
Posons

$$u = \lim_{k_j \to +\infty} \overline{U}_{k_j},$$

et

$$u' = \lim_{k_j \to +\infty} \overline{U}'_{k_j}.$$

Or d'après l'**Étape 1**, la suite $(\overline{U}_k)_{k \geq l+1}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers u^*, et par unicité de la limite, on a $u = u^*$. En plus, cette suite converge dans $C^1(\overline{I}_l)$ vers u^*.
Soit $x \in (0, l)$, on a

$$-\varphi_p(\overline{U}'_{k+1}(x)) = -\varphi_p(\overline{U}'_{k+1}(0)) + \int_0^x f(s, \overline{U}_{k+1}(s), \overline{U}'_{k+1}(s))ds$$

Si on fait tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$f(s, \overline{U}_{k+1}, \overline{U}'_{k+1}) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f(s, u^*, u^{*\prime}).$$

De plus on a

$$\exists K > 0,\ \forall k \geq l+1, \forall s \in [0,l], \left| f(s, \overline{U}_{k+1}, \overline{U}'_{k+1}) \right| \leq K.$$

Alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$-\varphi_p(u^{*\prime}(x)) = -\varphi_p(u^{*\prime}(0)) + \int_0^x f(s, u^*(s), u^{*\prime}(s))ds.$$

Ce qui donne

$$-\left(\varphi_p(u^{*\prime})\right)' = f(x, u^*, u^{*\prime}), \forall x \in (0,l). \tag{2.10}$$

D'autre part, on a

$$u^*(0) - au^{*\prime}(0) = L(u^*). \tag{2.11}$$

Alors d'après (2.10) et (2.11) , on obtient que u^* est une solution du problème (P_l).
Comme A est un domaine borné quelconque de I, il résulte que $u^* \in C^1_{loc}(\overline{I})$ est une solution du problème (2.1).

Maintenant, on va montrer que u^* est une solution maximale pour le problème (2.1) c'est à dire que si u est une autre solution du problème (2.1) tel que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans $\overline{I}$, alors $u \leq u^*$ dans $\overline{I}$.
Puisque u est une solution du problème (2.1), alors d'après la première étape, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u \leq \overline{U}_n,$$

alors par passage à la limite quand n vers $+\infty$, on obtient

$$u \leq \lim_{n \to +\infty} \overline{U}_n = u^*,$$

C'est-à-dire u^* est une solution maximale du problème (2.1).
Étape 4 : la suite $(\underline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution minimale du problème (2.1).
Preuve : La preuve est similaire à celle de l'**Étape 3.**

La preuve de notre résultat principal est terminée. ■

2.4 Application

Dans cette section on donne un exemple d'application.
Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \dfrac{|u'(x)|^{\frac{p-1}{p}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{p}}} \left(g(x+u(x)) - g(x)\,|u'(x)|^{\frac{1}{p-1}} \right), \ x \in I, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^1 e^{-x} u(x)dx, \end{cases} \tag{2.12}$$

où $I = \left]0, +\infty\right[$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante et $a \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$a \leq 1 + 3e^{-1}.$$

On pose par définition que $\overline{u}(x) = x + 1$, $\forall x \in \overline{I}$.

Pour tout $x \in I$, on a

$$\frac{|\overline{u}'(x)|^{\frac{p-1}{p}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{p}}} \left(g(x+\overline{u}(x)) - g(x)\,|\overline{u}'(x)|^{\frac{1}{p-1}} \right) = g(2x+1) - g\,(x)\,.$$

Comme la fonction g est décroissante, on a

$$g(2x) - g\,(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in I$$

Ce qui entraîne que

$$-(\varphi_p(\overline{u}'))' = 0 \geq \frac{|\overline{u}'(x)|^{\frac{p-1}{p}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{p}}} \left(g(x+\overline{u}(x)) - g(x)\,|\overline{u}'(x)|^{\frac{1}{p-1}} \right), \text{ pour tout } x \in I \tag{2.13}$$

D'autre part, on a

$$\overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) = 1 - a \geq \int\limits_0^1 (x+1)e^{-x}dx = 2 - 3e^{-1}. \tag{2.14}$$

D'après (2.13) et (2.14) ,il résulte que $\overline{u}$ est une sur solution du problème (2.12).
D'autre part, la fonction identiquement nulle est une sous solution du problème (2.12) .
Posons

$$f(x,u,u') = \frac{|u'(x)|^{\frac{p-1}{p}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{p}}} \left(g(x+u(x)) - g(x)\,|u'(x)|^{\frac{1}{p-1}} \right).$$

La fonction f satisfait les hypothèses du théorème 2.1 et par suite, le problème (2.12) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^* telles que :

$$0 \leq u_*(x) \leq u^*(x) \leq x+1, \text{ pour tout } x \in \overline{I}.$$

Chapitre 3

Existence de solutions pour un système d'équations quasilinéaires dans un domaine non borné

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est la construction des solutions pour le système suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f_1(x,u,v), \ x \in I, \\ -(\varphi_q(v'))' = f_2(x,u,v), \ x \in I, \\ u(0) - a_1 u'(0) = L_1(u), \\ v(0) - a_2 v'(0) = L_2(v), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\varphi_s(y) = |y|^{s-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p, q > 1, p \neq q$, $I = \left]0, +\infty\right[$, $f_i : \overline{I} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $L_i : C^1(\overline{I}) \to \mathbb{R}$ sont des fonctionnelles continues et croissantes, $(i = 1, 2)$, a_1 et a_2 sont des réels positifs..

En utilisant la méthode de sous et sur solutions, on montre l'existence des solutions du système(3.1). La définition de la sous et la sur solutions dépend de la monotonie des fonctions f_1 et f_2 (voir [75]). Ainsi, on peut classer le système(3.1) en trois types :

Type I : *Systèmes quasimonotones croissants* : f_1 est croissante par rapport à v et f_2 est croissante par rapport à u.

Type II : *Systèmes quasimonotones décroissants* : f_1 est décroissante par rapport à v et f_2 est décroissante par rapport à u.
Type III : *Systèmes quasimonotones mixtes* : f_1 est croissante par rapport à v et f_2 est décroissante par rapport à u.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la deuxième section, on introduit les définitions d'un couple des sous et sur solutions. Dans la troisième section, on présente et on montre nos résultats principaux. Finalement, dans la dernière section, on donne des exemples d'applications.

3.2 Préliminaires

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + M\varphi_p(u) = F(x), \ x \in (0,r)\,, \\ u(0) - au'(0) = a_0, \\ u(r) = b_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $F : [0,r] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $r > 0$ et M, a, a_0 et b_0 sont des nombres réels tels que $a \geq 0$ et $M > 0$.

Lemme 3.1 *(Principe de comparaison faible)*
Soient u_1 et u_2 deux fonctions tels que $u_i \in C^1([0,r])$, $\varphi_p(u_i') \in C^1(0,r), i = 1, 2$, et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1'))' + M\varphi_p(u_1) - F(x) \leq -(\varphi_p(u_2'))' + M\varphi_p(u_2) - F(x), \ x \in (0,r)\,, \\ u_1(0) - au_1'(0) \leq u_2(0) - au_2'(0), \\ u_1(r) \leq u_2(r), \end{cases} \tag{3.3}$$

alors $u_1(x) \leq u_2(x)$, pour tout $x \in [0,r]$.

Preuve: La preuve est similaire à celle du Lemme 1.4 du Chapitre 1, alors on omettre la preuve. ■

Lemme 3.2 *Le problème(3.2) admet une unique solution.*

Preuve: La preuve est similaire à celle du Lemme 1.2 du Chapitre 1, alors on omettre la preuve. ■

3.3 Résultats principaux

Dans cette section, on donne et on montre nos résultats principaux.

Pour les nonlinéarités f_1 et f_2, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.

(H_1) Il existe une constante positive M_1 telle que
$u \mapsto f_1(x, u, v) + M_1\varphi_p(u)$ est croissante, pou tout $x \in I$, et tout $v \in \mathbb{R}$.

(H_2) Il existe une constante positive M_2 telle que
$v \mapsto f_2(x, u, v) + M_2\varphi_q(v)$ est croissante, pour tout $x \in I$, et tout $u \in \mathbb{R}$.

De plus, on suppose l'existence des couples de sous et sur solutions $(\underline{u}, \overline{u})$, $(\underline{v}, \overline{v})$ tels que

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) \text{ et } \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x), \text{ pour tout } x \in \overline{I}$$

On note par $\preceq$ la relation d'ordre définie sur $C^1(I) \times C^1(I)$ par

$$(u_1, v_1) \preceq (u_2, v_2) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(x) \leq v_1(x), \\ u_2(x) \leq v_2(x) \end{cases}, \text{ pour tout } x \in \overline{I}. .$$

Notation 3.1 *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$, on note par $C^1_{loc}(A)$ l'espace des fonctions qui sont $C^1(K)$ pour chaque compact K de A.*

Notation 3.2 *Dans ce chapitre on note par E l'espace suivant*

$$E := C^1_{loc}(I) \times C^1_{loc}(I)$$

et $\overline{E}$ l'espace suivant

$$\overline{E} := C^1_{loc}(\overline{I}) \times C^1_{loc}(\overline{I})$$

Définition 3.1 *On dit que (u, v) est une solution du système (3.1) si*
(i) $(u, v) \in \overline{E}$ et $(\varphi_p(u'), \varphi_q(v')) \in E$,

$$(ii) \begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f_1(x, u, v), \ x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ -(\varphi_q(v'))' = f_2(x, u, v), \ x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ u(0) - a_1u'(0) = L_1(u), \\ v(0) - a_2v'(0) = L_2(v), \end{cases}$$

3.3.1 Le système quasimonotone croissant

Dans cette section, on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite.
(H_3) la fonction f_1 est croissante par rapport à v et f_2 est croissante par rapport à u.

Tout d'abord, on donne la définition des couples des sous et sur solutions

Définition 3.2 *On dit que* $(\underline{u},\overline{u}),(\underline{v},\overline{v})$ *sont des couples des sous et sur solutions pour* (3.1) *si*
(*i*) $(\underline{u},\overline{u}),(\underline{v},\overline{v})\in\overline{E}^2$ *et* $(\varphi_p(\underline{u}'),\varphi_p(\overline{u}')),(\varphi_q(\underline{v}'),\varphi_q(\overline{v}'))\in E^2$,

$$(ii)\left\{\begin{array}{l} -(\varphi_p(\underline{u}'))'\leq f_1(x,\underline{u},\underline{v}),\ x\in(0,b),\ \textit{pour chaque } b>0,\\ -(\varphi_p(\overline{u}'))'\geq f_1(x,\overline{u},\overline{v}),\ x\in(0,b),\ \textit{pour chaque } b>0,\\ -(\varphi_q(\underline{v}'))'\leq f_2(x,\underline{u},\underline{v}),\ x\in(0,b),\ \textit{pour chaque } b>0,\\ -(\varphi_q(\overline{v}'))'\geq f_2(x,\overline{u},\overline{v}),\ x\in(0,b),\ \textit{pour chaque } b>0,\\ \underline{u}(0)-a_1\underline{u}'(0)\leq L_1(\underline{u}),\ \overline{u}(0)-a_1\overline{u}'(0)\geq L_1(\overline{u}),\\ \underline{v}(0)-a_2\underline{v}'(0)\leq L_2(\underline{v}),\ \overline{v}(0)-a_2\overline{v}'(0)\geq L_2(\overline{v}).\end{array}\right.$$

On a le résultat suivant

Théorème 3.3 *Supposons que les conditions* $(H_i)_{i=1,2,3}$ *sont satisfaites. Soient* $(\underline{u},\overline{u})$ *et* $(\underline{v},\overline{v})$ *deux couples de sous et sur solutions du système*(3.1) *telles que* $(\underline{u},\underline{v})\preceq(\overline{u},\overline{v})$, *pour tout* $x\in\overline{I}$. *Alors le système* (3.1) *admet une solution minimale* (u_*,v_*) *et une solution maximale* (u^*,v^*) *telles que pour toute solution* (u,v) *du système* (3.1) *avec* $(\underline{u},\underline{v})\preceq(u,v)\preceq(\overline{u},\overline{v})$, *on a*

$$(\underline{u},\underline{v})\preceq(u_*,v_*)\preceq(u,v)\preceq(u^*,v^*)\preceq(\overline{u},\overline{v})\ \ \textit{dans } \overline{I}.$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.
On considère les problèmes aux limites suivant

$$\left\{\begin{array}{l} -(\varphi_p(u_n'))'+M_1\varphi_p(u_n)=f_1(x,U_{n-1},V_{n-1})+M_1\varphi_p(U_{n-1}),\ x\in I_n,\\ u_n(0)-a_1u_n'(0)=L_1(U_{n-1}),\\ u_n(n)=u^{(0)}(n),\end{array}\right. \tag{3.4}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} -(\varphi_q(v_n'))'+M_2\varphi_q(v_n)=f_2(x,U_{n-1},V_{n-1})+M_2\varphi_q(V_{n-1}),\ x\in I_n,\\ v_n(0)-a_2v_n'(0)=L_2(V_{n-1}),\\ v_n(n)=v^{(0)}(n),\end{array}\right. \tag{3.5}$$

où les suites des fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont definés par

$$\left\{\begin{array}{l} U_0=u^{(0)},\text{où } u^{(0)}\text{soit la sur solution } \overline{u} \text{ ou la sous solution } \underline{u},\\ V_0=v^{(0)},\text{où } v^{(0)}\text{soit la sur solution } \overline{v} \text{ ou la sous solution } \underline{v},\end{array}\right.$$

et

$$U_n(x)=\left\{\begin{array}{l} u_n(x),\ x\in\overline{I}_n,\\ u^{(0)}(x),\ x\in I\backslash\overline{I}_n,\end{array}\right. \tag{3.6}$$

$$V_n(x) = \begin{cases} v_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ v^{(0)}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n, \end{cases} \tag{3.7}$$

où $I_n = (0, n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Étape1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le problème (3.4) admet une unique solution $u_n \in C^1(\overline{I}_n)$ et $\varphi_p(u_n') \in C^1(I_n)$.

Preuve :

i) Pour $n = 1$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1'))' + M\varphi_p(u_1) = f(x, u^{(0)}, v^{(0)}) + M\varphi_p(u^{(0)}),\ x \in I_n, \\ u_1(0) - au_1'(0) = L(u^{(0)}), \\ u_1(1) = u^{(0)}(1). \end{cases} \tag{3.8}$$

Comme les fonctions f et φ_p sont continues et $\left(u^{(0)}, v^{(0)}\right) \in \left(C^1(\overline{I})\right)^2$, alors d'après le Lemme 3.2 le problème 3.4 admet une unique solution u_1 telle que $u_1 \in C^1(\overline{I}_1)$ et $\varphi_p(u_1') \in C^1(I_1)$.

ii) Supposons pour $n > 1$ fixé, le problème (3.4) admet une unique solution telle que $u_n \in C^1(\overline{I}_n)$ et $\varphi_p(u_n') \in C^1(I_n)$,

et montrons que le problème suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_{n+1}'))' + M\varphi_p(u_{n+1}) = f(x, U_n, V_n) + M\varphi_p(U_n),\ x \in I_{n+1}, \\ u_{n+1}(0) - au_{n+1}'(0) = L(U_n), \\ u_{n+1}(n+1) = u^{(0)}(n+1), \end{cases} \tag{3.9}$$

admet une unique solution telle que $u_{n+1} \in C^1(\overline{I}_{n+1})$ et $\varphi_p(u_{n+1}') \in C^1(I_{n+1})$.

Puisque $\left(u^{(0)}, v^{(0)}\right) \in \left(C^1(\overline{I})\right)^2$, $(u_n, v_n) \in \left(C^1(\overline{I}_n)\right)^2$ et $u_n(n) = u^{(0)}(n)$ et $v_n(n) = v^{(0)}(n)$ alors d'après (3.6) et (3.7), les foncions U_n et V_n sont continues sur $\overline{I}$.

Maintenant, comme f, φ_p, U_n et V_n sont continues sur $\overline{I}$, donc d'après le Lemme 3.2 le problème (3.9) admet une solution unique telle que $u_{n+1} \in C^1(\overline{I}_{n+1})$ et $\varphi_p(u_{n+1}') \in C^1(I_{n+1})$.$\square$

Étape 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le problème (3.5) admet une solution unique $v_n \in C^1(\overline{I}_n)$ et $\varphi_q(v_n') \in C^1(I_n)$.

Preuve : La preuve est similaire à celle de l'**Étape 1**.$\square$

D'après **les étape 1** et **2,** pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le problème (3.4) admet

une solution unique $\overline{u}_n$ si $u^{(0)} = \overline{u}$ et une solution unique $\underline{u}_n$si $u^{(0)} = \underline{u}$ et le problème (3.5) admet une solution unique $\overline{v}_n$ si $v^{(0)} = \overline{v}$ et une solution unique $\underline{v}_n$si $v^{(0)} = \underline{v}$,
Maintenant, on construit les suites $\left(\overline{U}_n\right)_{n\geq 1}$, $(\underline{U}_n)_{n\geq 1}$, $\left(\overline{V}_n\right)_{n\geq 1}$ et $(\underline{v}_n)_{n\geq 1}$ dans la manière suivante

$$\begin{aligned} \overline{U}_n(x) &= \begin{cases} \overline{u}_n(x),\, x \in \overline{I}_n, \\ \overline{u}(x),\, x \in I\backslash\overline{I}_n, \end{cases}, \\ \underline{U}_n(x) &= \begin{cases} \underline{u}_n(x),\, x \in \overline{I}_n, \\ \underline{u}(x),\, x \in I\backslash\overline{I}_n. \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{V}_n(x) &= \begin{cases} \overline{v}_n(x),\, x \in \overline{I}_n, \\ \overline{v}(x),\, x \in I\backslash\overline{I}_n, \end{cases} \\ \underline{V}_n(x) &= \begin{cases} \underline{v}_n(x),\, x \in \overline{I}_n, \\ \underline{v}(x),\, x \in I\backslash\overline{I}_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Étape 3 : Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} \underline{u} \leq \underline{U}_1 \leq ... \leq \underline{U}_n \leq \underline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \leq ... \leq \overline{U}_1 \leq \overline{u} \text{ dans } \overline{I}, \\ \underline{v} \leq \underline{V}_1 \leq ... \leq \underline{V}_n \leq \underline{V}_{n+1} \leq \overline{V}_{n+1} \leq \overline{V}_n \leq ... \leq \overline{V}_1 \leq \overline{v} \text{ dans } \overline{I}. \end{cases}$$

Preuve : Il n'est pas difficile de voir que

$$\begin{cases} \underline{u} \leq \underline{U}_n \leq \overline{u} \text{ et } \underline{u} \leq \overline{U}_n \leq \overline{u} \text{ dans } \overline{I}. \\ \underline{v} \leq \underline{V}_n \leq \overline{v} \text{ et } \underline{v} \leq \overline{V}_n \leq \overline{v} \text{ dans } \overline{I}. \end{cases}$$

Maintenant, on montre que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} \overline{U}_n \leq \overline{U}_{n+1} \text{ et } \underline{U}_{n+1} \leq \underline{U}_n, \\ \overline{V}_n \leq \overline{V}_{n+1} \text{ et } \underline{V}_{n+1} \leq \underline{V}_n. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on distingue trois cas
Cas 1 : Si $x \in I\backslash\overline{I}_{n+1}$, on a

$$\begin{cases} \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_{n+1}(x) = \overline{U}_n(x) \leq \overline{u}(x), \\ \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x) = \overline{V}_{n+1}(x) = \overline{V}_n(x) \leq \overline{v}(x). \end{cases}$$

Cas 2 : Si $x \in \overline{I}_{n+1}\backslash\overline{I}_n$, on a

$$\begin{cases} \underline{u}(x) \leq \overline{u}_{n+1}(x) = \overline{U}_{n+1}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_n(x), \\ \underline{v}(x) \leq \overline{v}_{n+1}(x) = \overline{V}_{n+1}(x) \leq \overline{v}(x) = \overline{V}_n(x). \end{cases}$$

Cas 3 : Si $x \in \overline{I}_n$, on a $\overline{U}_{n+1} = \overline{u}_{n+1}$ et $\overline{V}_{n+1} = \overline{v}_{n+1}$.

i) Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(\overline{u}_2'))' + (\varphi_p(\overline{u}_1'))' + M_1\varphi_p(\overline{u}_2) - \varphi_p(\overline{u}_1) &= f_1(x, \overline{u}_1, \overline{v}_1) + M_1\varphi_p(\overline{u}_1) \\ &\quad - f_1(x, \overline{u}, \overline{v}) - M_1\varphi_p(\overline{u}), \text{ dans } I_1. \end{aligned}$$

Comme la fonction f_1 est croissante par rapport à v et $\overline{v}_1 \leq \overline{v}$, alors

$$f_1(x, \overline{u}_1, \overline{v}_1) + M_1\varphi_p(\overline{u}_1) \leq f_1(x, \overline{u}_1, \overline{v}) + M_1\varphi_p(\overline{u}_1), \text{dans } I_1.$$

D'après l'hypothèse (H_1) et comme $\overline{u}_1 \leq \overline{u}$, alors

$$f_1(x, \overline{u}_1, \overline{v}) + M_1\varphi_p(\overline{u}_1) \leq f_1(x, \overline{u}, \overline{v}) + M_1\varphi_p(\overline{u}), \text{dans } I_1.$$

Ce qui entraîne que

$$-(\varphi_p(\overline{u}_2'))' + M_1\varphi_p(\overline{u}_2) \leq -(\varphi_p(\overline{u}_1'))' + M_1\varphi_p(\overline{u}_1), \text{dans } I_1. \tag{3.10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \overline{u}_2(0) - a_1\overline{u}_2'(0) &= L_1(\overline{u}_1), \\ &\leq L_1(\overline{u}) \\ &\leq \overline{u}_1(0) - a_1\overline{u}_1'(0). \end{aligned} \tag{3.11}$$

et

$$\overline{u}_2(1) \leq \overline{u}(1) = \overline{u}_1(1). \tag{3.12}$$

D'après (3.10), (3.11), (3.12) et le Lemme 3.1, on a

$$\overline{u}_2(x) \leq \overline{u}_1(x),\ x \in \overline{I}_1.$$

D'une façon similaire, on montre que

$$\overline{v}_2(x) \leq \overline{v}_1(x),\ x \in \overline{I}_1.$$

ii) Supposons pour $k > 1$ fixé, on a

$$\overline{U}_k(x) \leq \overline{U}_{k-1}(x) \text{ et } \overline{V}_k(x) \leq \overline{V}_{k-1}(x), x \in \overline{I}_{k-1}. \tag{3.13}$$

et montrons que

$$\overline{U}_{k+1}(x) \leq \overline{U}_k(x) \text{ et } \overline{V}_{k+1}(x) \leq \overline{V}_k(x),\ x \in \overline{I}_k.$$

Soit $x \in I_k$, on a

$$\begin{array}{rcl} -(\varphi_p(\overline{U}'_{k+1}))' + M_1\varphi_p(\overline{U}_{k1}) + (\varphi_p(\overline{U}'_k))' - M_1\varphi_p(\overline{U}_k) & = & f_1(x, \overline{U}_k, \overline{V}_k) + M_1\varphi_p(\overline{U}_k) \\ & & -f_1(x, \overline{U}_{k-1}, \overline{V}_{k-1}) \\ & & -M_1\varphi_p(\overline{U}_{k-1}), \end{array}$$

D'après (3.13) et le deuxième cas, on a

$$\overline{U}_k(x) \leq \overline{U}_{k-1}(x) \text{ et } \overline{V}_k(x) \leq \overline{V}_{k-1}(x),\ x \in \overline{I}_k.$$

Comme la fonction f_1 est croissante par rapport à v et $\overline{V}_k \leq \overline{V}_{k-1}$, on a

$$f_1(x, \overline{U}_k, \overline{V}_k) + M_1\varphi_p(\overline{U}_k) \leq f_1(x, \overline{U}_k, \overline{V}_{k-1}) + M_1\varphi_p(\overline{U}_k)$$

D'après l'hypothèse (H_1), on a

$$f_1(x, \overline{U}_k, \overline{V}_{k-1}) + M_1\varphi_p(\overline{U}_k) \leq f_1(x, \overline{U}_{k-1}, \overline{V}_{k-1}) - M_1\varphi_p(\overline{U}_{k-1}), \text{ dans } I_k.$$

Ce qui entraîne que

$$-(\varphi_p(\overline{U}'_{k+1}))' + M_1\varphi_p(\overline{U}_{k+1}) \leq (\varphi_p(\overline{U}'_k))' + M_1\varphi_p(\overline{U}_k), \text{ dans } I_k. \quad (3.14)$$

D'autre part, on a

$$\begin{array}{rcl} \overline{U}_{k+1}(0) - a_1\overline{U}'_{k+1}(0) & = & L_1(\overline{U}_k), \\ & \leq & L_1(\overline{U}_{k-1}) \\ & \leq & \overline{U}_k(0) - a_1\overline{U}'_k(0), \end{array} \quad (3.15)$$

et

$$\overline{U}_{k+1}(k) \leq \overline{u}(k) = \overline{U}_k(k). \quad (3.16)$$

D'après (3.14), (3.15), (3.16) et le Lemme 3.1, on a

$$\overline{U}_{k+1}(x) \leq \overline{U}_k(x),\ x \in \overline{I}_k.$$

Par conséquent, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{U}_{n+1}(x) \leq \overline{U}_n(x),\ \forall x \in \overline{I}_n.$$

D'une façon similaire, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \overline{V}_{n+1}(x) \leq \overline{V}_n(x), \, \forall x \in \overline{I}_n.$$

D'après les **Cas 1, Cas 2 et Cas 3,** il résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \text{ et } \overline{V}_{n+1} \leq \overline{V}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

Par un raisonnement similaire, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \underline{U}_{n+1} \leq \underline{U}_n \text{ et } \underline{V}_{n+1} \leq \underline{V}_n \text{dans } \overline{I}.$$

Maintenant on va montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{U}_n \leq \overline{U}_n \text{ et } \underline{V}_n \leq \overline{V}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} \underline{U}_n(x) = \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) = \overline{U}_n(x), \text{ si } x \in I \backslash \overline{I}_n, \\ \underline{U}_n(x) = \underline{u}_n(x) \leq \overline{u}_n(x) = \overline{U}_n(x), \text{ si } x \in \overline{I}_n, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \underline{V}_n(x) = \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x) = \overline{V}_n(x), \text{ si } x \in I \backslash \overline{I}_n, \\ \underline{V}_n(x) = \underline{v}_n(x) \leq \overline{v}_n(x) = \overline{V}_n(x), \text{ si } x \in \overline{I}_n, \end{cases}$$

alors, on obtient

$$\underline{U}_n \leq \overline{U}_n \text{ et } \underline{V}_n \leq \overline{V}_n \text{ dans } \overline{I}.$$

La preuve de l'**Étape 3** est terminée.□
Soit $A = [0, b]$ avec $b > 0$,alors il existe un entier naturel l tel que $A \subset \overline{I}_l$.
Pour $k \geq l + 1$, les restrictions de $\left(\overline{U}_k\right)_{k \geq l+1}$ et $\left(\overline{V}_k\right)_{k \geq l+1}$ sur I_l satisfaient

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{U}'_k))' + M_1\varphi_p(\overline{U}_k) = f_1(x, \overline{U}_{k-1}, \overline{V}_{k-1}) + M_1\varphi_p(\overline{U}_{k-1}), \ x \in I_l, \\ \overline{U}_k(0) - a_1\overline{U}'_k(0) = L_1(\overline{U}_{k-1}), \\ \overline{U}_k(l) = \overline{u}_k(l), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\varphi_q(\overline{V}'_k))' + M_2\varphi_q(\overline{U}_k) = f_2(x, \overline{U}_{k-1}, \overline{V}_{k-1}) + M_2\varphi_q(\overline{U}_{k-1}), \ x \in I_l, \\ \overline{V}_k(0) - a_2\overline{V}'_k(0) = L_2(\overline{V}_{k-1}), \\ \overline{V}_k(l) = \overline{v}_k(l), \end{cases} \tag{3.17}$$

Étape 4 : la suite $(\overline{U}_k, \overline{V}_k)_{k\geq l+1}$ converge vers la solution maximale du système(3.1).

Preuve : Premièrement il n'est pas difficile de montrer que les suites $(\overline{U}_k)_{k\geq l+1}$et $\left(\overline{V}_k\right)_{k\geq l+1}$ sont uniformément bornées dans $C^1([0,l])$ c'est à dire

$$\left\|\overline{U}'_k\right\|_0 \leq K_l \text{ et } \left\|\overline{V}'_k\right\|_0 \leq K'_l \text{ pour tout } k \geq l+1,$$

Maintenant soit $\varepsilon > 0$ et $t, s \in [0,l]$ tels que $t < s$, alors pour chaque $k \geq l+1$, on a

$$\begin{aligned} \left|\varphi_p(\overline{U}'_k(s)) - \varphi_p(\overline{U}'_k(t))\right| &= \left|\int_t^s f_1(x, \overline{U}_{k-1}(x), \overline{V}_{k-1}(x))dx + M_1\left(\varphi_p(\overline{U}_{k-1}) - \varphi_p(\overline{U}_k)\right)\right| \\ &\leq \int_t^s \left(\left|f_1(x, \overline{U}_{k-1}(x), \overline{V}_{k-1}(x))\right| + M_1\left|\varphi_p(\overline{U}_{k-1}) - \varphi_p(\overline{U}_k)\right|\right)dx \\ &\leq M_{f_1}\left|s-t\right| + 2M_1M_p\left|s-t\right|, \end{aligned}$$

où

$$M_p = \max_{x\in\overline{I}_l}\{\left|\varphi_p(\overline{u}(x))\right|, \left|\varphi_p(\underline{u}(x))\right|\}.$$

Si on choisit $|s-t| \leq \dfrac{\varepsilon}{M_{f_1} + 2M_1M_p + 1}$, on obtient

$$\left|\varphi_p(\overline{U}'_k(s)) - \varphi_p(\overline{U}'_k(t))\right| < \varepsilon.$$

Ce qui implique que la suite $(\varphi_p(\overline{U}'_k))_{k\geq l+1}$ est équicontinue sur $[0,l]$. Puisque l'application φ_p^{-1} est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que

$$\left|\overline{U}'_k(s) - \overline{U}'_k(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(\overline{U}'_k(s))\right) - \varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(\overline{U}'_k(t))\right)\right| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire, la suite $(\overline{U}'_k)_{k\geq l+1}$ est équicontinue sur $[0,l]$.

Par un raisonnement similaire, on montre que

$$\left|\overline{V}'_k(s) - \overline{V}'_k(t)\right| = \left|\varphi_q^{-1}\left(\varphi_q(\overline{V}'_k(s))\right) - \varphi_q^{-1}\left(\varphi_q(\overline{V}'_k(t))\right)\right| < \varepsilon,$$

C'est à dire la suite $(\overline{V}'_k)_{k\geq l+1}$ est équicontinue sur $[0,l]$.

D'après le théorème d'*Ascoli-Arzèla*, il existe une sous suite $(\overline{U}_{k_j})_{k_j\in\mathbb{N}}$ de $(\overline{U}_k)_{k\geq l+1}$ et une sous suite $(\overline{V}_{k_j})_{k_j\in\mathbb{N}}$ de $(\overline{V}_k)_{k\geq l+1}$ qui convergent dans $C^1([0,l])$.
Posons
$$u = \lim_{k_j\to+\infty} \overline{U}_{k_j} \text{ et } v = \lim_{k_j\to+\infty} \overline{V}_{k_j}$$
alors
$$u' = \lim_{k_j\to+\infty} \overline{U}'_{k_j} \text{ et } v' = \lim_{k_j\to+\infty} \overline{V}'_{k_j}$$
D'autre part, les suites $(\overline{U}_k)_{k\geq l+1}$ et $(\overline{V}_k)_{k\geq l+1}$ sont décroissantes et minorées, donc les limites ponctuelles existent et on les notent par u et v. Ainsi on a $u = u^*$ et $v = v^*$. De plus la suite $(\overline{U}_k, \overline{V}_k)_{k\geq l+1}$converge dans $C^1(\overline{I}_l)\times C^1_l(\overline{I})$ vers (u^*, v^*) et de plus il n'est pas difficile de montrer que $(u^*, v^*) \in \overline{E}$ est une solution du système (3.1).
Maintenant, montrons que (u^*, v^*) est une solution maximale du problème (3.1) c'est à dire montrons que si (u, v) est une autre solution du problème (3.1) telle que $(\underline{u}, \underline{v}) \preceq (u, v) \preceq (\overline{u}, \overline{v})$, alors
$$(\underline{u}, \underline{v}) \preceq (u_*, v_*) \preceq (u, v) \preceq (u^*, v^*) \preceq (\overline{u}, \overline{v}) \text{ dans } \overline{I}.$$

Si (u, v) est une sous solution du problème (3.1), alors d'après l'**Étape 2,** on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u \leq \overline{U}_n \text{ et } v \leq \overline{V}_n$$
Par passage à la limite, quand $n \to +\infty$, on obtient
$$u \leq \lim_{n\to+\infty} \overline{U}_n = u^* \text{ et } v \leq \lim_{n\to+\infty} \overline{V}_n = v^*.$$
C'est à dire (u^*, v^*) est une solution maximale du problème (3.1).□

Étape 5 : La suite $(\underline{U}_n, \underline{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution minimale du système (3.1).
Preuve : La démonstration est similaire à celle de l'**Étape 4**.
Ce qui achève la preuve de notre résultat. ■

3.3.2 Le système quasimonotone décroissant

Dans cette section, on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite.
(H_4) la fonction f_1 est décroissante par rapport à v et f_2 est décroissante par rapport à u.

Dans ce cas, la définition des couples des sous et sur solution est

Définition 3.3 *On dit que* $(\underline{u},\overline{u}),(\underline{v},\overline{v})$ *sont des couples des sous et sur solutions pour* (3.1) *si*

(i) $(\underline{u},\overline{u}),(\underline{v},\overline{v})\in \overline{E}^2$ *et* $(\varphi_p(\underline{u}'),\varphi_p(\overline{u}')),(\varphi_q(\underline{v}'),\varphi_q(\overline{v}'))\in E^2$,

$$(ii)\left\{\begin{array}{l} -(\varphi_p(\underline{u}'))'\leq f_1(x,\underline{u},\overline{v}),\ x\in(0,b),\ \textit{pour chaque } b>0,\\ -(\varphi_p(\overline{u}'))'\geq f_1(x,\overline{u},\underline{v}), x\in(0,b),\ \textit{pour chaque } b>0,\\ -(\varphi_q(\underline{v}'))'\leq f_2(x,\overline{u},\underline{v}),\ x\in(0,b),\ \textit{pour chaque } b>0,\\ -(\varphi_q(\overline{v}'))'\geq f_2(x,\underline{u},\overline{v}), x\in(0,b),\ \textit{pour chaque } b>0,\\ \underline{u}(0)-a_1\underline{u}'(0)\leq L_1(\underline{u}),\overline{u}(0)-a_1\overline{u}'(0)\geq L_1(\overline{u}),\\ \underline{v}(0)-a_2\underline{v}'(0)\leq L_2(\underline{v}),\overline{v}(0)-a_2\overline{v}'(0)\geq L_2(\overline{v}). \end{array}\right.$$

On a le résultat suivant

Théorème 3.4 *Supposons que les conditions* $(H_i)_{i=1,2,4}$ *sont satisfaites. Soient* $(\underline{u},\overline{u})$ *et* $(\underline{v},\overline{v})$ *des couples de sous et sur solutions du système*(3.1) *telles que* $(\underline{u},\underline{v})\preceq(\overline{u},\overline{v})$, *pour tout* $x\in\overline{I}$. *Alors le système* (3.1) *admet une solution maximale-minimale* (u^*,v_*) *et une solution minimale-maximale* (u_*,v^*) *telles que pour toute solution* (u,v) *du système* (3.1) *avec* $(\underline{u},\underline{v})\preceq(u,v)\preceq(\overline{u},\overline{v})$, *on a*

$$(\underline{u},\underline{v})\preceq(u_*,v_*)\preceq(u,v)\preceq(u^*,v^*)\preceq(\overline{u},\overline{v})\ \ \textit{dans } \overline{I}.$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.
On considère les problèmes aux limites suivant

$$\left\{\begin{array}{l} -(\varphi_p(u_n'))'+M_1\varphi_p(u_n)=f_1(x,U_{n-1},V_{n-1})+M_1\varphi_p(U_{n-1}),\ x\in I_n,\\ u_n(0)-a_1u_n'(0)=L_1(U_{n-1}),\\ u_n(n)=u^{(0)}(n), \end{array}\right. \tag{3.18}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} -(\varphi_q(v_n'))'+M_2\varphi_q(v_n)=f_2(x,U_{n-1},V_{n-1})+M_2\varphi_q(V_{n-1}),\ x\in I_n,\\ v_n(0)-a_2v_n'(0)=L_2(V_{n-1}),\\ v_n(n)=v^{(0)}(n), \end{array}\right. \tag{3.19}$$

où les suites des fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par

$$\left\{\begin{array}{l} U_0=u^{(0)}, \text{où } u^{(0)}\text{soit la sur solution } \overline{u} \text{ ou bien la sous solution } \underline{u},\\ V_0=v^{(0)}, \text{où } v^{(0)}\text{soit la sur solution } \overline{v} \text{ ou bien la sous solution } \underline{v}, \end{array}\right.$$

et

$$U_n(x)=\left\{\begin{array}{l} u_n(x),\ x\in\overline{I}_n,\\ u^{(0)}(x),\ x\in I\backslash\overline{I}_n, \end{array}\right. \tag{3.20}$$

$$V_n(x)=\begin{cases} v_n(x),\ x\in \overline{I}_n,\\ v^{(0)}(x),\ x\in I\backslash\overline{I}_n,\end{cases} \tag{3.21}$$

où $I_n=(0,n)$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Étape1 : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le problème (3.18) admet une solution unique $u_n\in C^1(\overline{I}_n)$ et $\varphi_p(u_n')\in C^1(I_n)$.

Preuve :

i) Pour $n=1$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1'))'+M\varphi_p(u_1)=f(x,u^{(0)},v^{(0)})+M\varphi_p(u^{(0)}),\ x\in I_n,\\ u_1(0)-au_1'(0)=L(u^{(0)}),\\ u_1(1)=u^{(0)}(1).\end{cases} \tag{3.22}$$

Comme les fonctions f et φ_p sont continues et $\left(u^{(0)},v^{(0)}\right)\in\left(C^1(\overline{I})\right)^2$, alors d'après le Lemme 3.2 le problème 3.18 admet une solution unique u_1 telle que $u_1\in C^1(\overline{I}_1)$ et $\varphi_p(u_1')\in C^1(I_1)$.

ii) Supposons pour $n>1$ fixé, le problème (3.18) admet une solution unique telle que $u_n\in C^1(\overline{I}_n)$ et $\varphi_p(u_n')\in C^1(I_n)$,

et montrons que le problème suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_{n+1}'))'+M\varphi_p(u_{n+1})=f(x,U_n,V_n)+M\varphi_p(U_n),\ x\in I_{n+1},\\ u_{n+1}(0)-au_{n+1}'(0)=L(U_n),\\ u_{n+1}(n+1)=u^{(0)}(n+1),\end{cases} \tag{3.23}$$

admet une solution unique telle que $u_{n+1}\in C^1(\overline{I}_{n+1})$ et $\varphi_p(u_{n+1}')\in C^1(I_{n+1})$.

Puisque $\left(u^{(0)},v^{(0)}\right)\in\left(C^1(\overline{I})\right)^2$, $(u_n,v_n)\in\left(C^1(\overline{I}_n)\right)^2$ et $u_n(n)=u^{(0)}(n)$ et $v_n(n)=v^{(0)}(n)$ alors par (3.20) et (3.21), les foncions U_n et V_n sont continues sur $\overline{I}$.

Maintenant, comme f, φ_p, U_n et V_n sont continues sur $\overline{I}$, donc d'après le Lemme 3.2 le problème (3.23) admet une solution unique telle que $u_{n+1}\in C^1(\overline{I}_{n+1})$ et $\varphi_p(u_{n+1}')\in C^1(I_{n+1})$.$\square$

Étape 2 : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le problème (3.19) admet une solution unique $v_n\in C^1(\overline{I}_n)$ et $\varphi_q(v_n')\in C^1(I_n)$.

Preuve : La preuve est similaire à celle de l'étape 1.$\square$

D'après **les étape 1** et **2,** pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, le problème (3.18) admet une solution unique $\overline{u}_n$ si $u^{(0)}=\overline{u}$ et une solution unique $\underline{u}_n$si $u^{(0)}=\underline{u}$,

et le problème (3.19) admet une solution unique $\overline{v}_n$ si $v^{(0)} = \overline{v}$ et une solution unique $\underline{v}_n$si $v^{(0)} = \underline{v}$,
Maintenant, considérons les problèmes aux limites suivants

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_n'))' + M_1\varphi_p(\overline{u}_n) = f_1(x, \overline{U}_{n-1}, \underline{V}_{n-1}) + M_1\varphi_p(\overline{U}_{n-1}),\ x \in I_n, \\ \overline{u}_n(0) - a_1\overline{u}_n'(0) = L_1(\overline{U}_{n-1}), \\ \overline{u}_n(n) = u^{(0)}(n), \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -(\varphi_q(\underline{v}_n'))' + M_2\varphi_q(\underline{v}_n) = f_2(x, \overline{U}_{n-1}, \underline{V}_{n-1}) + M_2\varphi_q(\underline{V}_{n-1}),\ x \in I_n, \\ \underline{v}_n(0) - a_2\underline{v}_n'(0) = L_2(\underline{V}_{n-1}), \\ \underline{v}_n(n) = v^{(0)}(n), \end{array} \tag{3.24}$$

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_n'))' + M_1\varphi_p(\underline{u}_n) = f_1(x, \underline{U}_{n-1}, \overline{V}_{n-1}) + M_1\varphi_p(\underline{U}_{n-1}),\ x \in I_n, \\ \underline{u}_n(0) - a_1\underline{u}_n'(0) = L_1(\underline{U}_{n-1}), \\ \underline{u}_n(n) = u^{(0)}(n), \end{cases} \tag{3.25}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_q(\overline{v}_n'))' + M_2\varphi_q(v_n) = f_2(x, \underline{U}_{n-1}, \overline{V}_{n-1}) + M_2\varphi_q(\overline{V}_{n-1}),\ x \in I_n, \\ \overline{v}_n(0) - a_2\overline{v}_n'(0) = L_2(\overline{V}_{n-1}), \\ \overline{v}_n(n) = v^{(0)}(n), \end{cases}$$

où les suites $\left(\overline{U}_n, \underline{U}_n\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\underline{V}_n, \overline{V}_n\right)_{n\geq 1}$ sont définies de la manière suivante

$$\begin{aligned} \overline{U}_n(x) &= \begin{cases} \overline{u}_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \overline{u}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n, \end{cases} \\ \underline{U}_n(x) &= \begin{cases} \underline{u}_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \underline{u}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n. \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{V}_n(x) &= \begin{cases} \overline{v}_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \overline{v}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n, \end{cases} , \\ \underline{V}_n(x) &= \begin{cases} \underline{v}_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \underline{v}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Étape 3 : Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} \underline{u} \leq \underline{U}_1 \leq ... \leq \underline{U}_n \leq \underline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \leq ... \leq \overline{U}_1 \leq \overline{u} \text{ dans } \overline{I}, \\ \underline{v} \leq \underline{V}_1 \leq ... \leq \underline{V}_n \leq \underline{V}_{n+1} \leq \overline{V}_{n+1} \leq \overline{V}_n \leq ... \leq \overline{V}_1 \leq \overline{v} \text{ dans } \overline{I}. \end{cases}$$

Preuve : La preuve est similaire à celle de l'**Étape 3** du Théorème 3.3 □
Le reste de la preuve est similaire à celle du Théorème 3.3 . ■

3.3.3 Le système quasimonotone mixte

Dans cette section, on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite.
(H_5) la fonction f_1 est croissante par rapport à v et f_2 est décroissante par rapport à u.

Dans ce cas, la définition des couples des sous et sur solution est

Définition 3.4 *On dit que* $(\underline{u}, \overline{u}), (\underline{v}, \overline{v})$ *sont des couples des sous et sur solutions pour* (3.1) *si*
(i) $(\underline{u}, \overline{u}), (\underline{v}, \overline{v}) \in \overline{E}^2$ *et* $(\varphi_p(\underline{u}'), \varphi_p(\overline{u}')), (\varphi_q(\underline{v}'), \varphi_q(\overline{v}')) \in E^2$,

$$(ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq f_1(x, \underline{u}, \underline{v}), \ x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ -(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq f_1(x, \overline{u}, \overline{v}), \ x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ -(\varphi_q(\underline{v}'))' \leq f_2(x, \overline{u}, \underline{v}), \ x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ -(\varphi_q(\overline{v}'))' \geq f_2(x, \underline{u}, \overline{v}), \ x \in (0, b), \ \textit{pour chaque } b > 0, \\ \underline{u}(0) - a_1\underline{u}'(0) \leq L_1(\underline{u}), \overline{u}(0) - a_1\overline{u}'(0) \geq L_1(\overline{u}), \\ \underline{v}(0) - a_2\underline{v}'(0) \leq L_2(\underline{v}), \overline{v}(0) - a_2\overline{v}'(0) \geq L_2(\overline{v}). \end{cases}$$

Considérons les problèmes aux limites suivants

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_{n+2}'))' + M_1\varphi_p(u_{n+2}) = f_1(x, U_n, V_n) + M_1\varphi_p(U_n), \ x \in I_n, \\ u_{n+2}(0) - a_1u_{n+2}'(0) = L_1(U_n), \\ u_{n+2}(n) = u^{(0)}(n), \end{cases} \tag{3.26}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_q(v_{n+2}'))' + M_2\varphi_q(v_{n+2}) = f_2(x, U_{n+1}, V_n) + M_2\varphi_q(V_n), \ x \in I_n, \\ v_{n+2}(0) - a_2v_{n+2}'(0) = L_2(V_n), \\ v_{n+2}(n) = v^{(0)}(n), \end{cases} \tag{3.27}$$

où $I_n =]0, n[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u^{(0)}, v^{(0)}) \in C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$
Les suites des fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par

$$\begin{cases} U_0 = u^{(0)}, \text{où } u^{(0)}\text{soit la sur solution } \overline{u} \text{ ou bien la sous solution } \underline{u}, \\ V_0 = v^{(0)}, \text{où } v^{(0)}\text{soit la sur solution } \overline{v} \text{ ou bien la sous solution } \underline{v}, \end{cases}$$

et

$$U_n(x) = \begin{cases} u_n(x), \ x \in \overline{I}_n, \\ u^{(0)}(x), \ x \in I \backslash \overline{I}_n, \end{cases},$$

$$V_n(x) = \begin{cases} v_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ v^{(0)}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n, \end{cases}$$

Lemme 3.1 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, le problème* (3.26) *admet une solution unique* $u_n \in C^1(\overline{I}_n)$ *et* $\varphi_p(u_n') \in C^1(I_n)$.

Preuve: La preuve est similaire à celle de l'**étape 1** du Théorème 3.3 .
■

Lemme 3.2 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, le problème* (3.27) *admet une solution unique* $v_n \in C^1(\overline{I}_n)$ *et* $\varphi_q(v_n') \in C^1(I_n)$.

Preuve: La preuve est similaire à celle de l'**étape 2** du Théorème 3.3 .
■

D'après **le lemme 3.1** et **le lemme 3.2,** pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le problème (3.26) admet une solution unique $\overline{u}_n$ si $u^{(0)} = \overline{u}$ et une solution unique $\underline{u}_n$si $u^{(0)} = \underline{u}$,et le problème (3.27) admet une solution unique $\overline{v}_n$ si $v^{(0)} = \overline{v}$ et une solution unique $\underline{v}_n$si $v^{(0)} = \underline{v}$,
Maintenant, on pose que $W_0 = \overline{u}$, $W_1 = \underline{u}$, $Z_0 = \overline{v}$ et $Z_1 = \underline{v}$, on construit les suites$(W_n)_{n\geq 1}$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ comme suit

$$W_n(x) = \begin{cases} u_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \underline{u}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n. \end{cases} ,Z_n(x) = \begin{cases} v_n(x),\ x \in \overline{I}_n, \\ \underline{v}(x),\ x \in I \backslash \overline{I}_n. \end{cases} .$$

Lemme 3.3 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{cases} \underline{u} = W_1 \leq W_3 \leq ... \leq W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq ... \leq W_2 \leq W_0 = \overline{u} \text{ dans } \overline{I}, \\ \underline{v} = Z_1 \leq Z_3 \leq ... \leq Z_{2n+1} \leq Z_{2n} \leq ... \leq Z_2 \leq Z_0 = \overline{v} \text{ dans } \overline{I}. \end{cases}$$

Preuve : La preuve est similaire à celle de l'**étape 3** du Théorème 3.3
..□
D'après l'étape précédent , les suites $(W_{2n}, Z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_{2n+1}, Z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$sont monotones et bornées. Par conséquent on pose par définition

$$\lim_{n\to+\infty} (W_{2n}, Z_{2n}) = (u_{**}, v_{**})$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}(W_{2n+1}, Z_{2n+1}) = (u^{**}, v^{**})$$

On a le résultat suivant

Théorème 3.5 *Supposons que les conditions $(H_i)_{i=1,2,5}$ sont satisfaites. Soient $(\underline{u}, \overline{u})$ et $(\underline{v}, \overline{v})$ deux couples de sous et sur solutions du système*(3.1) *telles que $(\underline{u}, \underline{v}) \preceq (\overline{u}, \overline{v})$, pour tout $x \in \overline{I}$. Alors les suites $(W_{2n}, Z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_{2n+1}, Z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers (u_{**}, v_{**}) et (u^{**}, v^{**}) qui sont quasi-solutions pour le système* (3.1).

Preuve: La preuve est similaire à celle du Théorème 3.3 ■

3.4 Applications

Dans cette section, on donne quelques exemples d'applications

Exemple 1

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f_1(x,u,v), \ x \in I, \\ -(\varphi_q(v'))' = f_2(x,u,v), \ x \in I, \\ u(0) - a_1 u'(0) = \int\limits_0^{\alpha_1} \dfrac{u(s)}{s+1} ds, \\ v(0) - a_2 v'(0) = \int\limits_0^{\alpha_2} \dfrac{v(s)}{s+1} ds, \end{cases} \tag{3.28}$$

où a_1, a_2,α_1 et α_2 sont des réels positifs tels que

$$1 - a_i \geq \alpha_i, \ i = 1, 2.$$

et

$$\begin{cases} f_1(t,u,v) = \frac{v^3}{t+1} - k(t+1)u; k > 1, \\ f_2(t,u,v) = \frac{u^3}{t+1} - k(t+1)v; \ \ k > 1. \end{cases} \tag{3.29}$$

Tout d'abord , il n'est pas difficile de vérifier que ce système est quasimonotone croissant.

On pose par définition $\underline{u} \equiv \underline{v} = 0$ et $\overline{u}(t) = \overline{v}(t) = t + 1$ pour tout $t \in \overline{I}$. Il est clair que $(\underline{u}, \underline{v})$ est un couple de sous solutions pour le système (3.28) , et par des calculs simples on trouve

$$\begin{cases} f_1(t,\overline{u},\overline{v}) \leq -(\varphi_p(\overline{u}'))' = 0, \\ f_2(t,\overline{u},\overline{v}) \leq -(\varphi_p(\overline{v}'))' = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

et

$$\begin{cases} \overline{u}(0) - a_1\overline{u}'(0) = 1 - a_1 \geq L_1(\overline{u}) = \alpha_1, \\ \overline{v}(0) - a_2\overline{v}'(0) = 1 - a_2 \geq L_2(\overline{v}) = \alpha_2. \end{cases} \tag{3.31}$$

Ainsi $(\underline{u},\overline{u})$ et $(\underline{v},\overline{v})$ sont des couples des sous et sur solutions du système (3.1) . Le théorème 3.3 implique qu'il existe une solution minimal (u_*,v_*) et une solution maximal.(u^*,v^*) telles que

$$(0,0) \preceq (u_*,v_*) \preceq (u^*,v^*) \preceq (t+1,t+1)\,, \text{ pour tout } t \in \overline{I}.$$

Exemple 2

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f_1(x,u,v), \;\; x \in I, \\ -(\varphi_q(v'))' = f_2(x,u,v), \;\; x \in I, \\ u(0) - a_1u'(0) = \int\limits_0^{\alpha_1} \dfrac{u(s)}{s+1}ds, \\ v(0) - a_2v'(0) = \int\limits_0^{\alpha_2} \dfrac{v(s)}{s+1}ds, \end{cases} \tag{3.32}$$

où

$$\begin{cases} f_1(t,u,v) = v^3(e^{-u^2} - 1), \\ f_2(t,u,v) = u^3(e^{-v^2} - 1), \end{cases} \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} L_1(u) = \int\limits_0^{\alpha_1} \dfrac{u(s)}{s+1}ds, \\ L_2(v) = \int\limits_0^{\alpha_2} \dfrac{v(s)}{s}ds, \end{cases} \tag{3.34}$$

et a_1, a_2,α_1 et α_2 sont des réels positifs tels que

$$1 - a_i \geq \alpha_i, \;\; i = 1,2.$$

Tout d'abord , il n'est pas difficile de vérifier que le système (3.32)est quasi-monotone décroissant.

Il est clair que $(\underline{u},\underline{v}) = (0,0)$ est un couple de sous solutions pour le système (3.32) , Maintenant, on pose que $\overline{u}(t)=\overline{v}(t)=\lambda(t+1)$ avec $t\in\overline{I}$ et $\lambda>0$.

Par des calculs simples, on a

$$\begin{cases} f_1(t,\overline{u},\underline{v})\leq -(\varphi_p(\overline{u}'))'=0, \\ f_2(t,\underline{u},\overline{v})\leq -(\varphi_p(\overline{v}'))'=0, \end{cases} \tag{3.35}$$

et

$$\begin{cases} \overline{u}(0)-a_1\overline{u}'(0)=\lambda(1-a_1)\geq L_1(\overline{u})=\lambda\alpha_1, \\ \overline{v}(0)-a_2\overline{v}'(0)=\lambda(1-a_2)\geq L_2(\overline{v})=\lambda\alpha_2. \end{cases} \tag{3.36}$$

Ainsi $(\underline{u},\overline{u})$ et $(\underline{v},\overline{v})$ sont des couples des sous et sur solutions du système (3.32) . Le théorème 3.4 implique qu'il existe une solution minimale -maximale(u_*,v^*) et une solution maximale-minimale.(u^*,v_*) telles que

$$(0,0)\preceq(u_*,v_*)\preceq(u^*,v^*)\preceq(\lambda(t+1),\lambda(t+1))\text{ , pour tout } t\in\ \overline{I}.$$

Exemple 3

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))'=f_1(x,u,v),\ x\in I, \\ -(\varphi_q(v'))'=f_2(x,u,v),\ x\in I, \\ u(0)-a_1u'(0)=\int\limits_0^{\alpha_1}\dfrac{u(s)}{s+1}ds, \\ v(0)-a_2v'(0)=\int\limits_0^{\alpha_2}\dfrac{v(s)}{s+1}ds, \end{cases} \tag{3.37}$$

où

$$\begin{cases} f_1(t,u,v)=\frac{v^3}{t+1}-k(t+1)u;\text{ avec } k>1, \\ f_2(t,u,v)=u^3(e^{-v^2}-1), \end{cases} \tag{3.38}$$

$$\begin{cases} L_1(u)=\int\limits_0^{\frac{\alpha_1}{2}}\dfrac{u(s)}{s+1}ds, \\ L_2(v)=\int\limits_0^{\frac{\alpha_2}{2}}\dfrac{v(s)}{s+1}ds. \end{cases} \tag{3.39}$$

et a_1, a_2,α_1 et α_2 sont des réels positifs tels que

$$1-a_i\geq\alpha_i,\ i=1,2.$$

Tout d'abord, il n'est pas difficile de vérifier que le système (3.32)est quasi-monotone mixte.

Maintenant, on pose par définition que $\underline{u} \equiv \underline{v} = 0$ et $\overline{u}(t) = \overline{v}(t) = \lambda(t+1)$ avec $t \in \overline{I}$ et $\lambda > 0$.

Par des calculs simples, on a

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(t, \underline{u}, \underline{v}) \geq -(\varphi_p(\underline{u}'))' = 0, \\ f_2(t, \overline{u}, \underline{v}) \geq -(\varphi_p(\underline{u}'))' = 0, \end{array}\right. \tag{3.40}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{u}(0) - a_1\underline{u}'(0) \leq L_1(\underline{u}) = 0, \\ \underline{v}(0) - a_2\underline{v}'(0) \leq L_2(\underline{v}) = 0. \end{array}\right. \tag{3.41}$$

D'autre part, on a

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(t, \overline{u}, \overline{v}) \leq -(\varphi_p(\overline{u}'))' = 0, \\ f_2(t, \underline{u}, \overline{v}) \leq -(\varphi_p(\overline{v}'))' = 0, \end{array}\right. \tag{3.42}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{u}(0) - a_1\overline{u}'(0) = \lambda(t+1) \geq L_1(\overline{u}) = \frac{\alpha_1\lambda}{2}, \\ \overline{v}(0) - a_2\overline{v}'(0) = \lambda(t+1) \geq L_2(\overline{v}) = \frac{\alpha_2\lambda}{2}. \end{array}\right. \tag{3.43}$$

Ainsi $(\underline{u}, \overline{u})$ et $(\underline{v}, \overline{v})$ sont des couples des sous et sur solutions du système (3.37) et par suite d'après le théorème 3.5, ce système admet au moins une quasi-solution.

Chapitre 4

Existence des solutions minimales et maximales pour un problème impulsif

Ce chapitre est le développement de l'article [28].

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est la construction des solutions minimales et maximales pour le problème quasilinéaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(t,u,u'), \ t \in J' := J \backslash \{t_0,..,t_{m+1}\}, \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)), \ k = 1,2,..,m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)), \ k = 1,2,..,m, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)u(x)\ dx, \ u(1) + bu'(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)u(x)\ dx, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $J = [0,1]$, $t_0 = 0 < t_1 < .. < t_m < t_{m+1} = 1$, avec m est une constante positive, $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a et b sont des nombres positifs, $h_i : J \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues ($i = 1,2$), I_k et $N_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et croissantes pour chaque $k = 1,..,m$, et $u(t_k^+)$ et $u(t_k^-)$ représentent la limite à droite et la limite à gauche de $u(t)$ au point $t = t_k$.

Les équations différentielles ordinaires avec des conditions aux limites intégrales ont été étudiées par la première fois par M. Picone [35].en 1908. Il a étudié les relations qui existent entre les équations intégrales et certaines équations différentielles d'ordre n avec des conditions aux limites intégrales.

En 1911, E. Hilb [22] a considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\widetilde{f}}{dx^2} + \widetilde{q}\,(x)\,\widetilde{f} = -\widetilde{g}\,(x)\,,\ x \in (0,1)\,, \\ \widetilde{\beta}\widetilde{f}\,(0) - \widetilde{\alpha}\widetilde{f'}\,(0) = -\int\limits_0^1 \widetilde{f}\,(z)\,K\,(z)\,dz, \\ h_2\widetilde{f}\,(1) - h_1\widetilde{f'}\,(1) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\widetilde{q} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $K : [0,1] \to \mathbb{R}$ son des fonctions et $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\alpha}$, h_2 et h_1 sont des constantes réelles.

En utilisant le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\widetilde{f}}{dx^2} + \widetilde{q}\,(x)\,\widetilde{f} = K\,(x) - \widetilde{g}\,(x)\,,\ x \in (0,1)\,, \\ \widetilde{f}\,(0) = \widetilde{\alpha},\ \widetilde{f'}\,(0) = \widetilde{\beta}, \\ h_2\widetilde{f}\,(1) - h_1\widetilde{f'}\,(1) = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

il a trouvé la fonction de Green pour le problème (1.1.2), et il a montré que le spectre est discret. L'importance de ce travail est que la présence de l'intégrale dans la première condition aux limites dans (1.1.2) induit la condition aux limites dans l'équation différentielle dans (1.1.3).

En 1912, R.Von Mises [48] a étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c(x)}\frac{dZ}{dx}\right) = (\lambda a\,(x) + b\,(x))\,Z, \\ \int\limits_{x_1}^{x_2} A\,(x)\,Z\,(x)\ \ dx = 0,\ \int\limits_{x_1}^{x_2} B\,(x)\,Z\,(x)\ \ dx = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

où c, a, b, A et B sont des fonctions continues et λ est un paramètre.
Il s'intéresse à ce problème car il intervient dans certains problèmes d'hydrodynamique (voir [43]).

En particulier l'application hydrodynamique est
$a\,(x) = x + \widehat{\beta},\ b\,(x) = c\,(x) = 1,\ \lambda = \dfrac{v}{\alpha^2\nu}\sqrt{-1};\ A\,(x) = \exp\,(x),\ B\,(x) = \exp\,(-x)\,;\ x_1 = 0,\ x_2 = \widehat{\alpha},$
où $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ sont des constantes, v est la vitesse, ν est le coefficient de la tonacité.

Les équations différentielles avec des conditions aux limites intégrales ont été étudiés par DJ Tamarkin, [46], W. M. Whyburn, N. Ciorănescu [15]. Voir [52] et [27].

les équations différentielles avec des conditions aux limites intégrales interviennent dans les problèmes hydrodynamiques, (voir [13] et [43]), les sciences médicales,(voir [12], [33] et [44]), les problèmes de semi-conducteurs [24], les processus de Markov [20], les problèmes de conduction thermique [11], la théorie de la diffusion des ions dans les canaux (voir [30], [38] et [54]) et l'écoulement de l'eau souterraine [19].

Il est bien connu que la méthode des sous et sur solution associée à une technique itérative a été utilisée pour construire les solutions pour les problèmes aux limites non linéaires par plusieurs auteurs (voir [8], [14], [16], [18], [23], [29] et [47]).

Le but de ce chapitre est de montrer que cette méthode est applicable pour étudier l'existence des solutions pour le problème $(1.1.1)$. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [28].

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la deuxième section, on donne quelques définitions et des résultats de comparaison qui seront utiles pour la suite. Dans la troisième section, on présente et on montre le résultat principal de ce chapitre. Dans la dernière section, on présente un exemple d'application.

4.2 Préliminaires

Dans cette section, on donne quelques notations, définitions et des résultats préliminaires qui sont importantes dans la suite de notre travail.

Tout d'abord, on définit l'espace $PC(J,\mathbb{R})$ par

$$PC(J,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} u : J \to \mathbb{R},\ u(t) \text{ est continue au point } t \neq t_k, \\ \text{continue à gauche de } t = t_k \text{ et ses limites à droite} \\ u(t_k^+) \text{ au } t = t_k \text{ existent, } k = 1,..,m. \end{array} \right\},$$

et l'espace $PC^1(J,\mathbb{R})$ par

$$PC^1(J,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} u : J \to \mathbb{R},\ u(t) \text{ et } u'(t) \text{ sont continues au } t \neq t_k, \\ \text{continues à gauche de } t = t_k \text{ et leur limites à droite} \\ u(t_k^+) \text{ et } u'(t_k^+) \text{ au } t = t_k \text{ existent, } k = 1,..,m. \end{array} \right\}.$$

Pour tout $u \in PC^1(J,\mathbb{R})$, on pose par définition

$$\|u\|_{PC^1(J,\mathbb{R})} = \max\{\|u\|_{PC(J,\mathbb{R})}, \|u'\|_{PC(J,\mathbb{R})},$$

où
$$\|u\|_{PC(J,\mathbb{R})}=\sup_{t\in J}|u(t)| \text{ et } \|u'\|_{PC(J,\mathbb{R})}=\sup_{t\in J}|u'(t)|.$$
$PC^1(J,\mathbb{R})$ est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_{PC^1(J,\mathbb{R})}$.

Maintenant, considérons le problème aux limites suivant
$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + M\varphi_p(u) = H(t,u'),\ t\in J', \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)),\ k=1,2,..,m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)),\ k=1,2,..,m, \\ u(0)-au'(0)=a_0,\ u(1)+bu'(1)=b_0, \end{cases} \tag{4.5}$$
où $H: J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction, a_0 et b_0 sont des nombres positives et $M>0$.

On suppose que les fonctions H, I_k et N_k, $k=1,..,m$ satisfont les conditions suivantes

(H$_1$) $H: J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue au $t\neq t_k$, $\lim\limits_{\substack{(s,v)\to(t,v_0)\\ s<t}} H(s,v)=H(t,v_0)$,
et $\lim\limits_{\substack{(s,v)\to(t,v_0)\\ s>t}} H(s,v)$ existe pour chaque $t=t_k$, $k=1,..,m$.

(H$_2$) I_k et $N_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont continues et croissantes pour chaque $k=1,..,m$.

Lemme 4.1 *(Principe de comparaison faible)*
Supposons que les conditions (H$_1$) et (H$_2$) sont satisfaites et soient u_1 et u_2 sachant que $u_i\in PC^1(J,\mathbb{R})$, $\varphi_p(u_i')\in PC^1(J,\mathbb{R})$, $i=1,2$, et
$$\begin{cases} F_1\left(t,u_1,u_1',(\varphi_p(u_1'))'\right)\le F_2\left(t,u_2,u_2',(\varphi_p(u_2'))'\right),\ t\in J', \\ u_1(t_k^+)-u_1(t_k^-)-I_k(u_1(t_k)) = u_2(t_k^+)-u_2(t_k^-)-I_k(u_2(t_k)),\ k=1,2,..,m, \\ u_1'(t_k^+)-u_1'(t_k^-)-N_k(u_1'(t_k)) \ge u_2'(t_k^+)-u_2'(t_k^-)-N_k(u_2'(t_k)),\ k=1,2,..,m, \\ u_1(0)-au_1'(0)\le u_2(0)-au_2'(0),\ u_1(1)+bu_1'(1)\le u_2(1)+bu_2'(1), \end{cases}$$
où
$$F_1\left(t,u_1,u_1',(\varphi_p(u_1'))'\right) = -(\varphi_p(u_1'))' + M\varphi_p(u_1) - H(t,u_1'),$$
et
$$F_2\left(t,u_2,u_2',(\varphi_p(u_2'))'\right) = -(\varphi_p(u_2'))' + M\varphi_p(u_2) - H(t,u_2').$$
Alors $u_1(t)\le u_2(t)$, pour tout $t\in J$.

Remarque 4.1 *La preuve de ce lemme est une généralisation du lemme* 3.2 *dans [18].*

Preuve: Supposons qu'il existe $t^* \in [0,1]$ tel que

$$u_1(t^*) - u_2(t^*) = \sup_{0 \leq t \leq 1} (u_1(t) - u_2(t)) = \varepsilon > 0.$$

Cas 1 : Si $t^* = 0$, on obtient la contradiction

$$0 < u_1(0) - u_2(0) \leq a\,(u_1'(0) - u_2'(0)) \leq 0.$$

Un raisonnement similaire est valable si on prend $t^* = 1$.
Cas 2 : Si $t^* \in J'$, alors puisque $(u_1 - u_2) \in PC^1\,(J, \mathbb{R})\,,$ on a

$$(u_1 - u_2)'(t^*) = 0,$$

ce qui entraîne que

$$\varphi_p(u_2'(t^*)) = \varphi_p(u_1'(t^*)).$$

Comme φ_p est strictement croissante, on obtient

$$-\,(\varphi_p(u_1'))'(t^*) + (\varphi_p(u_2'))'(t^*) = \lim_{t \to t^*} \frac{-\varphi_p(u_1')(t) + \varphi_p(u_2')(t)}{t - t^*} \geq 0. \quad (4.6)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} &-(\varphi_p(u_1'))'(t^*) + M\varphi_p(u_1(t^*)) + (\varphi_p(u_2'))'(t^*) - M\varphi_p(u_2(t^*)) \\ &\leq H(t^*, u_1'(t^*)) - H(t^*, u_2'(t^*)) = 0. \end{aligned}$$

ce qui donne

$$-(\varphi_p(u_1'))'(t^*) + (\varphi_p(u_2'))'(t^*) \leq M\varphi_p(u_2(t^*)) - M\varphi_p(u_1(t^*)).$$

Puisque $u_1(t^*) > u_2(t^*)$ et la fonction φ_p est strictement croissante, on obtient

$$-(\varphi_p(u_1'))'(t^*) + (\varphi_p(u_2'))'(t^*) < 0.$$

Ce qui est en contradiction avec (4.6).
Cas 3 : S'il existe $t^* \in J$ tel que $u_1(t^*) - u_2(t^*) = \varepsilon$, alors d'après les cas 1 et 2, on a $t^* = t_k$ pour certain $k = 1, 2, .., m$, et

$$u_1'(t_k) \geq u_2'(t_k). \quad (4.7)$$

Comme les fonctions I_k et N_k sont croissantes, on a

$$u_1(t_k^+) - u_2(t_k^+) = \varepsilon, \quad (4.8)$$

et

$$u_1'(t_k^+) \geq u_2'(t_k^+). \tag{4.9}$$

D'autre part, par la définition de ε, et comme $(u_1 - u_2)$ est décroissante à droite de t_k, on a

$$u_1'(t_k^+) \leq u_2'(t_k^+). \tag{4.10}$$

Alors d'après (1.2.4) et (1.2.5), on a

$$u_2'(t_k^+) = u_1'(t_k^+). \tag{4.11}$$

Comme φ_p est strictement croissante, on a

$$-(\varphi_p(u_1'))'(t_k^+) + (\varphi_p(u_2'))'(t_k^+) = \lim_{t \overset{>}{\to} t_k^+} \frac{-\varphi_p(u_1')(t) + \varphi_p(u_2')(t)}{t - t_k^+} \geq 0. \tag{4.12}$$

D'autre part, par (1.2.6), on a

$$\begin{aligned} &-(\varphi_p(u_1'))'(t_k^+) + M\varphi_p(u_1(t_k^+)) + (\varphi_p(u_2'))'(t_k^+) - M\varphi_p(u_2(t_k^+)) \\ &\leq H(t_k, u_1'(t_k^+)) - H(t_k, u_2'(t_k^+)) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$-(\varphi_p(u_1'))'(t_k^+) + (\varphi_p(u_2'))'(t_k^+) \leq M\varphi_p(u_2(t_k^+)) - M\varphi_p(u_1(t_k^+)). \tag{4.13}$$

D'après (1.2.3), on a $u_1(t_k^+) > u_2(t_k^+)$ et puisque la fonction φ_p est strictement croissante, on obtient

$$-(\varphi_p(u_1'))'(t_k^+) + (\varphi_p(u_2'))'(t_k^+) < 0. \tag{4.14}$$

Ce qui est en contradiction avec (1.2.7).
Cas 4 : Si $u_1(t) - u_2(t) < \varepsilon$ pout tout $t \in J$
Alors,

$$u_1(t_k^+) - u_2(t_k^+) = \varepsilon, \text{ pour certain } k = 1, 2, .., m.$$

On pose

$$\sup\left[u_1(t) - u_2(t),\, t_{k-1} < t \leq t_k\right] = \varepsilon_k > 0,\, k = 1, 2, .., m+1.$$

On a donc les deux possibilités suivantes

i) $u_1(\widetilde{t}) - u_2(\widetilde{t}) = \varepsilon_k$, pour certain $\widetilde{t} \in (t_{k-1}, t_k]$. D'après le deuxième cas, $\widetilde{t} \notin (t_{k-1}, t_k)$. Par contre, si $\widetilde{t} = t_k^-$ donc $u_2'(t_k) \leq u_1'(t_k)$ et $u_2'(t_k^+) \leq u_1'(t_k^+)$. En utilisant les arguments utilisés dans le cas 3, on montre que c'est impossible.

ii) $u_1(t_{k-1}^+) - u_2(t_{k-1}^+) = \varepsilon_k$.

On a,

$$u_1(t_{k-1}^-) - u_2(t_{k-1}^-) \leq u_1(t_{k-1}^+) - u_2(t_{k-1}^+).$$

Ce qui donne que $u_2(t_{k-1}) < u_1(t_{k-1})$. En utilisant un raisonnement similaire au Cas 4, on obtient une contradiction.

Finalement, on obtient

$$\sup\left[u_1(t) - u_2(t),\, t_1 < t \leq t_2\right] = \varepsilon_2 > 0. \tag{4.15}$$

et $u_1(t_1^+) - u_2(t_2^+) > 0$.

D'où

$$\sup\left[u_1(t) - u_2(t),\, 0 < t \leq t_1\right] = \varepsilon_1 > 0.$$

Puisque $u_1(t) - u_2(t) < \varepsilon_1$ pour $t \in (0, t_1)$ d'après le deuxième cas. Alors, on a

$$u_1(t_1) - u_2(t_1) = \varepsilon_1, \text{ et } u_2'(t_1) \leq u_1'(t_1).$$

Ainsi $u_2'(t_1^+) \leq u_1'(t_1^+)$. Mais cette inégalité et (1.2.10) encore donnent une contradiction comme dans le Cas 2. Par conséquent $u_2(t) \geq u_1(t)$ dans J.

La démonstration du lemme1.4 est terminée. ■

Définition 4.1 *On dit que u est une solution du problème(1.2.1) si*

i) $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$ et $\varphi_p(u') \in PC^1(J, \mathbb{R})$.

ii) u satisfait le problème (1.2.1).

Définition 4.2 *On dit que $\underline{u}$ est une sous solution du problème (1.2.1) si*

i) $\underline{u} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ et $\varphi_p(\underline{u}') \in PC^1(J, \mathbb{R})$.

ii) $$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq H(t, \underline{u}') - M\varphi_p(\underline{u}),\ t \in J', \\ \underline{u}(t_k^+) = \underline{u}(t_k^-) + I_k(\underline{u}(t_k)),\ k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}'(t_k^+) \geq \underline{u}'(t_k^-) + N_k(\underline{u}'(t_k)),\ k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}(0) - a\underline{u}'(0) \leq a_0,\ \underline{u}(1) + b\underline{u}'(1) \leq b_0. \end{cases}$$

Définition 4.3 *On dit que $\overline{u}$ est une sur solution du problème (1.2.1) si*

i) $\overline{u} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ et $\varphi_p(\overline{u}') \in PC^1(J, \mathbb{R})$.

ii) $$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq H(t, \overline{u}') - M\varphi_p(\overline{u}),\ t \in J', \\ \overline{u}(t_k^+) = \overline{u}(t_k^-) + I_k(\overline{u}(t_k)),\ k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}'(t_k^+) \leq \overline{u}'(t_k^-) + N_k(\overline{u}'(t_k)),\ k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) \geq a_0,\ \overline{u}(1) + b\overline{u}'(1) \geq b_0. \end{cases}$$

De plus si H est une fonction bornée, on a le résultat suivant

Théorème 4.1 *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont satisfaites et il existe $\underline{u}$ et $\overline{u}$ une sous et une sur solution respectivement du problème (1.2.1) tels que $\underline{u}(t) \leq \overline{u}(t)$ pour tout $t \in J$. Alors le problème (1.2.1) admet une unique solution $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$ avec $\varphi_p(u') \in PC^1(J, \mathbb{R})$ sachant que*

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t), \text{ pour tout } t \in J.$$

Preuve: En utilisant une preuve similaire à celle du théorème2.2 dans [36], on montre que le problème (1.2.1) admet au moins une solution et d'après le lemme4.1, on obtient que cette solution est unique. ■

Définition 4.4 *On dit que u est une solution du problème (1.1.1) si*
i) $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *et* $\varphi_p(u') \in PC^1(J, \mathbb{R})$.
ii) u satisfait le problème (1.1.1).

Définition 4.5 *On dit que $\underline{u}$ est une sous solution du problème (1.1.1) si*
i) $\underline{u} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *et* $\varphi_p(\underline{u}') \in PC^1(J, \mathbb{R})$.

$$ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq f(t, \underline{u}, \underline{u}'), \ t \in J', \\ \underline{u}(t_k^+) = \underline{u}(t_k^-) + I_k(\underline{u}(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}'(t_k^+) \geq \underline{u}'(t_k^-) + N_k(\underline{u}'(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}(0) - a\underline{u}'(0) \leq \int\limits_0^1 h_1(x)\underline{u}(x)dx, \ \underline{u}(1) + b\underline{u}'(1) \leq \int\limits_0^1 h_2(x)\underline{u}(x)dx. \end{cases}$$

Définition 4.6 *On dit que $\overline{u}$ est une sur solution du problème (1.1.1) si*
i) $\overline{u} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *et* $\varphi_p(\overline{u}') \in PC^1(J, \mathbb{R})$.

$$ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq f(t, \overline{u}, \overline{u}'), \ t \in J', \\ \overline{u}(t_k^+) = \overline{u}(t_k^-) + I_k(\overline{u}(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}'(t_k^+) \leq \overline{u}'(t_k^-) + N_k(\overline{u}'(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) \geq \int\limits_0^1 h_1(x)\overline{u}(x)dx, \ \overline{u}(1) + b\overline{u}'(1) \geq \int\limits_0^1 h_2(x)\overline{u}(x)dx. \end{cases}$$

Maintenant, on définit les conditions de *Nagumo-Wintner* .

Définition 4.7 *On dit que la fonction $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait aux conditions de Nagumo-Wintner relativement aux couples $\underline{u}$ et $\overline{u}$, s'il existe une* *constante $C \geq 0$ et des fonctions $Q \in L^p(J)$ et $\Psi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ continues, telles que*

$$|f(t,u,v)| \leq \Psi(|v|)\left(Q(t) + C\,|v|^{\frac{1}{p-1}}\right), \tag{4.16}$$

pour tout $(t,u,v) \in D$, avec

$$D = \left\{(t,u,v) \in J \times \mathbb{R}^2 : \underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)\right\},$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds = +\infty. \tag{4.17}$$

On a le résultat suivant

Lemme 4.2 *Supposons que les conditions (H_1) et (H_2) sont satisfaites, et que la fonction $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait aux conditions de Nagumo-Wintner dans D. Alors il existe une constante $K > 0$, telle que pour toute solution u du problème (1.1.1) vérifiant $\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)$, pour tout $t \in J$, u satisfait $\|u'\|_{PC(J,\mathbb{R})} \leq K$.*

Preuve: Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $s \in [0,1]$ telle que $|u'(s)| > K$.
On distingue les deux cas suivants

Cas A : Il existe un $k_0 \in \{0, 1, .., m\}$ tel que $s \in (t_k, t_{k+1}]$.

Cas B : Il existe un $k_0 \in \{0, 1, .., m\}$ tel que $s = t_{k_0}^+$.

Supposons que le premier cas A à lieu. Pour les autres cas , la preuve est similaire.

Puisque $\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)$, pour tout $t \in J$, on a

$$\min_{t \in \left[t_{k_0}^+, t_{k_0+1}^-\right]} |u'(t)| = M_{k_0}.$$

Prenons $K > \max\{M_{k_0}, \|\underline{u}'\|_{PC(J,\mathbb{R})}, \|\overline{u}'\|_{PC(J,\mathbb{R})}\}$ telle que

$$\int_{\varphi_p(M_{k_0})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds > \|Q\|_p \widetilde{S}^{\frac{p-1}{p}} + C\widetilde{S}^{\frac{1}{p}}. \tag{4.18}$$

Il existe $s_1,\ s_2 \in [t^+_{k_0}, t^-_{k_0+1}]$ tels que $|u'(s_1)| = M_{k_0}$ et $|u'(s_2)| = K$.
Sans perte de généralité, on suppose que $s_1 < s_2$, alors on a les deux cas suivantes

(i) $u'(s_1) = M_{k_0}$, $u'(s_2) = K$ et $M_{k_0} \leq u'(t) \leq K$, pour tout $t \in (s_1, s_2)$,

(ii) $u'(s_1) = -\ M_{k_0}$, $u'(s_2) = -K$ et $-K \leq u'(t) \leq -M_{k_0}$, pour tout $t \in (s_1, s_2)$.

Supposons que le cas (i) est satisfait. L'autre cas se démontre par d'une façon similaire.

Puisque u est une solution du problème (1.1.1) et par la condition de Nagumo-Wintner (1.2.11), on a

$$(\varphi_p(u'))'(t) \leq \Psi(u'(t)) \left(Q(t) + C\,(u'(t))^{\frac{1}{p-1}}\right),\ \forall t \in (s_1, s_2). \tag{4.19}$$

Maintenant si on pose $s = \varphi_p(u'(t))$ dans (1.2.13), on obtient

$$\int\limits_{\varphi_p(M_{k_0})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(|s|^{\frac{1}{p-1}}\right)} ds = \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\left(\varphi_p(u'(t))\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi(u'(t))} \left(\varphi_p(u'(t))\right)'\ dt. \tag{4.20}$$

Alors par (1.2.15), on a

$$\int\limits_{\varphi_p(M_{k_0})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(|s|^{\frac{1}{p-1}}\right)} ds = \int\limits_{s_0}^{s_2} \frac{\left(\varphi_p(u'(t))\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi(u'(t))} \left(\varphi_p(u'(t))\right)'\ dt,$$

et par (1.2.14), on a

$$
\begin{aligned}
\int_{\varphi_p(M_{k_0})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds &\leq \int_{s_1}^{s_2} \frac{\left(\varphi_p(u'(t))\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi(u'(t))} \Psi(u'(t)) \left(Q(t) + C\,(u'(t))^{\frac{1}{p-1}}\right) dt \\
&= \int_{s_1}^{s_2} \left(\varphi_p(u'(t))\right)^{\frac{1}{p}} \left(Q(t) + C\,(u'(t))^{\frac{1}{p-1}}\right) dt \\
&= \int_{s_1}^{s_2} (u'(t))^{\frac{p-1}{p}}\, Q(t)\ dt + C \int_{s_1}^{s_2} (u'(t))^{\frac{p-1}{p}}\, (u'(t))^{\frac{1}{p-1}}\ \ dt \\
&\leq \|Q\|_p \left(\int_{s_1}^{s_2} \left((u'(t))^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\ \ dt\right)^{\frac{p-1}{p}} + \\
&\quad + C \left(\int_{s_1}^{s_2} \left((u'(t))^{\frac{1}{p}}\right)^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{s_1}^{s_2} (1)^{\frac{p}{p-1}}\ \ dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \|Q\|_p\, (u(s_2) - u(s_1))^{\frac{p-1}{p}} + (u(s_2) - u(s_1))^{\frac{1}{p}}\, (s_2 - s_1) \\
&\leq \|Q\|_p\, \widetilde{S}^{\frac{p-1}{p}} + C \widetilde{S}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

Ce qui est en contradiction avec (1.2.13). ■

4.3 Résultat principal

Dans cette section, on énonce et on montre notre résultat principal.

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

(H_3) $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue pour $t \neq t_k$, $k = 1, 2, .., m$, $\lim\limits_{\substack{(s,u,v)\to(t,u_0,v_0)\\ s<t}} f(s,u,v) = f(t,u_0,v_0)$ et $\lim\limits_{\substack{(s,u,v)\to(t,u_0,v_0)\\ s>t}} f(s,u,v)$ existe pour $t = t_k$, $k = 1, .., m$.

(H_4) Il existe une constante positive M telle que $u \mapsto f(t,u,v) + M\varphi_p(u)$ est croissante, pour tout $t \in J$ et $v \in \mathbb{R}$.

De plus, on suppose l'existence d'une sous et d'une sur solutions $\underline{u}$ et $\overline{u}$ avec

$$\underline{u}(t) \leq \overline{u}(t), \text{ pour tout } t \in J.$$

On a le résultat suivant

Théorème 4.2 *Soient* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *la sous et la sur solution respectivement du problème (1.1.1) telles que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* J*. Supposons que les conditions* (H_3)*,* (H_4) *et les conditions de Nagumo-Wintner relativement à* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *sont satisfaites. Alors le problème (1.1.1) admet une solution minimale* u_* *et une solution maximale* u^* *telles que pour toute solution* u *du problème (1.1.1) avec* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *dans* J*, on a*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \overline{u} \text{ dans } J.$$

Pour la preuve de ce résultat, on a besoin d'un lemme préliminaire.
Soient $\underline{w}, \overline{w} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ fixées telles que
i) $\varphi_p(\underline{w}'), \varphi_p(\overline{w}') \in PC^1(J, \mathbb{R})$.
ii) $\underline{u} \leq \underline{w} \leq \overline{w} \leq \overline{u}$ dans J.
Pour tout $v \in \mathbb{R}$, on définit la fonction δ par

$$\delta(v) = \max\{-K, \min\{v, K\}\}, \text{ pour tout } v \in \mathbb{R},$$

où K la constante définie dans la preuve du lemme1.5. Alors la fonction δ est continue et bornée. En plus, on a $\delta(v) = v$, pour tout v tel que $|v| \leq K$ et $|\delta(v)| \leq K$, pour tout $v \in \mathbb{R}$.

Considérons les problèmes aux limites suivants

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + M\varphi_p(u) = f(t, \overline{w}, \delta(u')) + M\varphi_p(\overline{w}),\ t \in J', \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\overline{w}(x)\ dx,\ \ u(1) + bu'(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\overline{w}(x)\ dx, \end{cases} \tag{4.21}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + M\varphi_p(u) = f(t, \underline{w}, \delta(u')) + M\varphi_p(\underline{w}),\ t \in J', \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\underline{w}(x)\ dx,\ \ u(1) + bu'(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\underline{w}(x)\ dx. \end{cases} \tag{4.22}$$

On a le résultat suivant

Lemme 4.3 *Soient $\underline{w}$ et $\overline{w}$ la sous et la sur solutions respectivement du problème (1.1.1). Supposons que les conditions (H_3) et (H_4) et les conditions de Nagumo-Wintner relativement à $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont satisfaites. Alors il existe une unique solution $\widetilde{u}$ du (1.3.1) et $\widehat{u}$ du (1.3.2) sachant que*

$$\underline{u} \leq \underline{w} \leq \widetilde{u} \leq \widehat{u} \leq \overline{w} \leq \overline{u} \text{ dans } J.$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du lemme 5 dans [16]. ■

Preuve: du Théorème 1.4
La preuve du théorème 1.4 est donnée en plusieurs étapes.

On pose $\underline{u}_0 = \underline{u}$, $\overline{u}_0 = \overline{u}$ et on définit les suites $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}))' + M\varphi_p(\overline{u}_{n+1}) = f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}'_{n+1})) + M\varphi_p(\overline{u}_n), \ t \in J', \\ \overline{u}_{n+1}(t_k^+) = \overline{u}_{n+1}(t_k^-) + I_k(\overline{u}_{n+1}(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}'_{n+1}(t_k^+) = \overline{u}'_{n+1}(t_k^-) + N_k(\overline{u}'_{n+1}(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}_{n+1}(0) - a\overline{u}'_{n+1}(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\overline{u}_n(x)\ dx, \\ \overline{u}_{n+1}(1) + b\overline{u}'_{n+1}(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\overline{u}_n(x)\ dx, \end{cases} \qquad (P_{n+1})$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'_{n+1}))' + M\varphi_p(\underline{u}_{n+1}) = f(t, \underline{u}_n, \delta(\underline{u}'_{n+1})) + M\varphi_p(\underline{u}_n), \ t \in J', \\ \underline{u}_{n+1}(t_k^+) = \underline{u}_{n+1}(t_k^-) + I_k(\underline{u}_{n+1}(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}'_{n+1}(t_k^+) = \underline{u}'_{n+1}(t_k^-) + N_k(\underline{u}'_{n+1}(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}_{n+1}(0) - a\underline{u}'_{n+1}(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\underline{u}_n(x)\ dx, \\ \underline{u}_{n+1}(1) + b\underline{u}'_{n+1}(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\underline{u}_n(x)\ dx. \end{cases} \qquad (Q_{n+1})$$

Étape 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u} \leq \underline{u}_1 \leq ... \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq ... \leq \overline{u}_1 \leq \overline{u} \text{ dans } J.$$

Preuve

i) Pour $n = 0$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_1'))' + M\varphi_p(\overline{u}_1) = f(t, \overline{u}, \delta(\overline{u}_1')) + M\varphi_p(\overline{u}),\ t \in J', \\ \overline{u}_1(t_k^+) = \overline{u}_1(t_k^-) + I_k(\overline{u}_1(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}_1'(t_k^+) = \overline{u}_1'(t_k^-) + N_k(\overline{u}_1'(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}_1(0) - a\overline{u}_1'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\overline{u}(x)\ dx,\ \ \overline{u}_1(1) + b'\overline{u}_1(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\overline{u}(x)\ dx, \end{cases} \qquad (P_1)$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_1'))' + M\varphi_p(\underline{u}_1) = f(t, \underline{u}, \delta(\underline{u}_1')) + M\varphi_p(\underline{u}),\ t \in J', \\ \underline{u}_1(t_k^+) = \underline{u}_1(t_k^-) + I_k(\underline{u}_1(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}_1'(t_k^+) = \underline{u}_1'(t_k^-) + N_k(\underline{u}_1'(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}_1(0) - a\underline{u}_1'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\underline{u}(x)\ dx,\ \ \underline{u}_1(1) + b\underline{u}_1'(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\underline{u}(x)\ dx. \end{cases} \qquad (Q_1)$$

Puisque $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont la sous et la sur solutions du problème (1.1.1), alors d'après le lemme 1.6, on obtient

$$\underline{u} \leq \underline{u}_1 \leq \overline{u}_1 \leq \overline{u} \text{ dans } J.$$

ii) Supposons pour $n > 1$ fixé, on a

$$\underline{u} \leq \underline{u}_{n-1} \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}_{n-1} \leq \overline{u} \text{ dans } J,$$

et montrons que

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ dans } J.$$

Sot $t \in J'$, on a

$$-\left(\varphi_p(\overline{u}_n')\right)' + M\varphi_p(\overline{u}_n) = f(t, \overline{u}_{n-1}, \delta(\overline{u}_n')) + M\varphi_p(\overline{u}_{n-1}). \qquad (4.23)$$

Comme $\overline{u}_n \leq \overline{u}_{n-1}$ et en utilisant l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$, on obtient

$$f(t, \overline{u}_{n-1}, \delta(\overline{u}_n')) + M\varphi_p(\overline{u}_{n-1}) \geq f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}_n')) + M\varphi_p(\overline{u}_n). \qquad (4.24)$$

D'après (1.3.3) et (1.3.4), on a

$$\forall t \in J',\ -\left(\varphi_p(\overline{u}_n')\right)' \geq f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}_n')).$$

Maintenant on utilise une preuve similaire à celle du lemme 1.5, on montre que $\|\overline{u}_n'\|_{PC(J,\mathbb{R})} \leq K$. Ainsi $\delta(\overline{u}_n') = \overline{u}_n'$ et on obtient

$$\forall t \in J', \ -(\varphi_p(\overline{u}_n'))' \geq f(t, \overline{u}_n, \overline{u}_n'). \tag{4.25}$$

D'autre part, on a

$$\overline{u}_n(t_k^+) = \overline{u}_n(t_k^-) + I_k(\overline{u}_n(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \tag{4.26}$$

$$\overline{u}_n'(t_k^+) = \overline{u}_n'(t_k^-) + N_k(\overline{u}_n'(t_k)), \ k = 1, 2, .., m, \tag{4.27}$$

et

$$\overline{u}_n(0) - a\overline{u}_n'(0) \geq \int_0^1 h_1(x)\overline{u}_n(x)\, dx, \tag{4.28}$$

$$\overline{u}_n(1) + b\overline{u}_n'(1) \geq \int_0^1 h_2(x)\overline{u}_n(x)\, dx. \tag{4.29}$$

D'après (1.3.5), (4.26), (1.3), (1.3.6) et (1.3.7), il résulte que $\overline{u}_n$ est une sur solution du problème (1.1.1). D'une façon similaire, on peut montrer que $\underline{u}_n$ est une sous solution du problème (1.1.1). Donc d'après le lemme1.6, il existe une unique solution $\overline{u}_{n+1}$ du (P_{n+1}) et $\underline{u}_{n+1}$ du (Q_{n+1}) telle que

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ dans } J.$$

Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ dans } J.$$

Étape 2 : La suite $(\overline{u}_n)_{n\geq 1}$ converge vers la solution maximale du (1.1.1).
Preuve : D'après l' **Étape 1** et le fait que $\|\overline{u}_n'\|_{PC(J,\mathbb{R})} \leq K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(\overline{u}_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $PC^1(J, \mathbb{R})$. Soient $J_1 = [0, t_1]$, $J_2 = (t_1, t_2]$, ..., $J_m = (t_{m-1}, t_m]$, $J_{m+1} = (t_m, 1]$. Ainsi $J = \bigcup_{k=1}^{k=m+1} J_k$.

Maintenant soit $\varepsilon > 0$ et $t, s \in J_1$ sachant que $t < s$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s)) - \varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t))\right| &= \left|\int_t^s \begin{pmatrix} f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) \\ +M\left(\varphi_p(\overline{u}_n(\tau)) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right) \end{pmatrix} d\tau\right| \\
&\leq \int_t^s \left| \begin{matrix} f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) \\ +M\left(\varphi_p(\overline{u}_n(\tau)) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right) \end{matrix} \right| d\tau \\
&\leq (M_1(f) + 2MM_2)\,|s-t|,
\end{aligned}$$

où

$$M_1(f) = \sup\left\{|f(t,u,v)|,\ t \in J,\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ et } |v| \leq K\right\},$$

et

$$M_2 = \max\left\{\left|\varphi_p(u)\right|,\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\}.$$

Si on pose par définition $K_1 = M_1(f) + 2MM_2$, on a

$$\left|\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s)) - \varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t))\right| \leq K_1\,|s-t|.$$

Si on choisit$|s-t| \leq \dfrac{\varepsilon}{K_1+1}$, on obtient

$$\left|\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s)) - \varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t))\right| < \varepsilon.$$

C'est à dire la suite $\left(\varphi_p(\overline{u}'_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur J_1.
Maintenant comme l'application φ_p^{-1} est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que

$$\left|\overline{u}'_{n+1}(s) - \overline{u}'_{n+1}(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s))\right) - \varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t))\right)\right| < \varepsilon,$$

c'est à dire la suite $(\overline{u}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur J_1.
D'après le théorème d'Ascoli -Arzéla, il existe une sous suite $(\overline{u}_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converges dans $C^1(J_1)$.
Maintenant considérons la sous suite $(\overline{u}_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'intervalle J_2. Dans cet intervalle, la sous suite $(\overline{u}_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée et équicontinue. Alors elle admet une sous suite $(\overline{u}_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément dans l'intervalle$(t_1, t_2]$.

On continue cette procédure dans les intervalles$(t_2, t_3]$, .., $(t_m, t_{m+1}]$, il en résulte que la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous suite $(\overline{u}_n^{(m+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément dans l'intervalle J.
Soit

$$u^{(m+1)} = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n^{(m+1)}.$$

donc

$$\left(u^{(m+1)}\right)' = \lim_{n\to+\infty} \left(\overline{u}_n^{(m+1)}\right)'.$$

Mais d'après l'**Étape 1** la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée, alors sa limite ponctuelle existe et notée par u^*. Ainsi, on obtient $u^{(m+1)} = u^*$.
De plus, cette suite converge vers u^*.
Soit $k \in \{0, .., m\}$ fixé, et $t, s \in (t_k, t_{k+1})$, on a

$$-\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s)) = \varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t)) + \int_t^s \begin{pmatrix} f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) \\ +M\left(\varphi_p(\overline{u}_n) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1})\right) \end{pmatrix} d\tau.$$

Si on fait tendre n vers$+\infty$, on obtient

$$\widehat{f}(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\tau, u^*(\tau), \delta(\left(u^*\right)'(\tau))),$$

où

$$\widehat{f}(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) = f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) + M\left(\varphi_p(\overline{u}_n(\tau)) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right).$$

De plus, il existe un nombre strictement positif K_3 tel que pour tout n dans $\mathbb{N}$ et τ dans J, on a

$$\left|f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) + M\left(\varphi_p(\overline{u}_n) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1})\right)\right| \leq K_3.$$

Alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que

$$-\varphi_p(\left(u^*\right)'(s))) = \varphi_p(\left(u^*\right)'(t))) + \int_t^s f(\tau, u^*(\tau), \delta(\left(u^*\right)'(\tau))))d\tau.$$

Ainsi, on obtient

$$\forall\ t \in (t_k, t_{k+1})\,,\ \ -\left(\varphi_p((u^*)')\right)' = f(t, u^*, \delta(u^{*'})). \tag{4.30}$$

Donc, pour chaque $k = 1, .., m$, on a

$$\forall\ t \in (t_k, t_{k+1})\,,\ \ -(\varphi_p((u^*)'))' = f(t, u^*, \delta(u^{*'})).$$

Par suite

$$\forall\ t \in\ \ J',\ \ -(\varphi_p((u^*)'))' = f(t, u^*, \delta(u^{*'})). \tag{4.31}$$

De plus, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\left\{\begin{array}{l} u^*(0) - au^{*'}(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)u^*(x)\ dx, \\ u^*(1) + bu^{*\prime}(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)u^*(x)\ dx. \end{array}\right. \tag{4.32}$$

D'autre part, puisque les fonctions I_k et N_k sont continues, on a

$$u^*(t_k^+) = u^*(t_k^-) + I_k(u^*(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \tag{4.33}$$

et

$$u^{*\prime}(t_k^+) = u^{*\prime}(t_k^-) + N_k(u^{*\prime}(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m. \tag{4.34}$$

D'après (1.3.9), (1.3.10), (4.33) et (1.3), on obtient que u^* est une solution du problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l} -(\varphi_p(u^{*\prime}))' = f(t, u^*, \delta(u^{*\prime})),\ \ t \in J', \\ u^*(t_k^+) = u^*(t_k^-) + I_k(u^*(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ u^{*\prime}(t_k^+) = u^{*\prime}(t_k^-) + N_k(u^{*\prime}(t_k)),\ \ k = 1, 2, .., m, \\ u^*(0) - au^{*'}(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)u^*(x)\ dx,\ \ u^*(1) + bu^{*\prime}(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)u^*(x)\ dx. \end{array}\right.$$

En utilisant une preuve similaire à celle du lemme 1.5, on montre que $\left\|(u^*)'\right\|_{PC(J,\mathbb{R})} \leq K$. Ainsi $\delta(u^{*\prime}) = u^{*\prime}$ et par conséquent u^* est une solution du (1.1.1).
Maintenant, on montre que si u est une autre solution du (1.1.1) sachant que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans J, alors $u \leq u^*$ dans J.
Puisque u est une solution du (1.1.1), et d'après l'**Étape 1**, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u \leq \overline{u}_n.$$

En fait tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$u \leq \lim_{n \to +\infty} \overline{u}_n = u^*,$$

ce qui implique que u^*est une solution maximale du problème (1.1.1).
Étape 3 : La suite $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution minimale du (1.1.1).
Preuve : la preuve est similaire à celle de l'**Étape 2.**
Ce qui achève la démonstration de notre résultat principal.

■

4.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple d'application.
On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = g(t)u^k(t)\left(1+|u'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right),\ t\in J' = [0,1]\backslash\{\frac{1}{2}\}, \\ u(\frac{1}{2}^+) = u(\frac{1}{2}^-)+\frac{1}{2}, \\ u'(\frac{1}{2}^+) = u'(\frac{1}{2}^-)+1, \\ u(0) = \int\limits_0^1 u(t)\sin t\ dt,\ u(1) = \int\limits_0^1 u\,(t)\cos t\ dt, \end{cases} \tag{4.35}$$

où $p>1$, $k=2l+1$, $l\in\mathbb{N}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction définie par

$$g(t) = \begin{cases} -t-1, & \text{si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]; \\ \dfrac{\sin(t-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}-t}, & \text{si } t\in\left]\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

La fonction g est continue pour $t\neq\dfrac{1}{2}$, $g(\frac{1}{2}^-) = -\dfrac{3}{2}$ et $g(\frac{1}{2}^+) = -1$.

On pose par définition

$$f(t,u,u') = g(t)u^k(t)\left(1+|u'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right). \tag{4.36}$$

Soit

$$\underline{u}(t) = \begin{cases} -t-1, & \text{si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]; \\ -1, & \text{si } t\in\left]\frac{1}{2},1\right]; \end{cases}$$

et

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]; \\ 1+t, & \text{si } t\in\left]\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

Pour tout $t\in J$, on a

$$\underline{u}(t)\leq\overline{u}(t).$$

Il est facile de vérifier que

$$0 = -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq g(t)\underline{u}^k(t)\left(1 + |\underline{u}'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right) = 2(-t-1)^{k+1}, \ \forall \ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

et

$$0 = -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq g(t)\underline{u}^k(t)\left(1 + |\underline{u}'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{\sin(t-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}-t}(-1)^k, \ \forall \ t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right].$$

Ainsi

$$-(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq f(t, \underline{u}, \underline{u}'), \text{ pour tout } t \in J'. \tag{4.37}$$

De plus, on a

$$\begin{cases} \underline{u}(\frac{1}{2}^+) = -1 = \underline{u}(\frac{1}{2}^-) + \frac{1}{2}, \\ \underline{u}'(\frac{1}{2}^+) = 0 = \underline{u}'(\frac{1}{2}^-) + 1, \end{cases} \tag{4.38}$$

et

$$\begin{cases} \underline{u}(0) = -1 \leq \cos 1 - \frac{5}{2}\cos\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2} + 1 = \int\limits_0^1 \underline{u}(t)\sin t \ dt, \\ \underline{u}(1) = -1 \leq \cos\frac{1}{2} - \sin 1 + \frac{5}{2}\sin\frac{1}{2} - 1 = \int\limits_0^1 \underline{u}(t)\cos t \ dt. \end{cases} \tag{4.39}$$

D'après (1.4.3), (4.38) et (4.39), la fonction $\underline{u}$ est une sous solution du (1.4.1).

D'autre part, on a

$$-(\varphi_p(\overline{u}'))' = 0 \geq -t = g(t)\overline{u}^k(t)\left(1 + |\overline{u}'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right), \text{ pour tout } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$$

et

$$-(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq 2\frac{\sin(t-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}-t}(t+1)^k = g(t)\overline{u}^k(t)\left(1 + |\overline{u}'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right), \text{ pour tout } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Ainsi

$$-(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq f(t, \overline{u}, \overline{u}'), \text{ pour tout } t \in J'. \tag{4.40}$$

De plus, on a

$$\begin{cases} \overline{u}(\frac{1}{2}^+) = \frac{3}{2} = \overline{u}(\frac{1}{2}^-) + \frac{1}{2}, \\ \overline{u}'(\frac{1}{2}^+) = 1 = \overline{u}'(\frac{1}{2}^-) + 1, \end{cases} \tag{4.41}$$

et

$$\begin{cases} \overline{u}(0) = 1 \geq \sin 1 - 2\cos 1 + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{2} + 1 = \int\limits_0^1 \overline{u}(t)\sin t \; dt, \\ \\ \overline{u}(1) = 2 \geq \cos 1 + 2\sin 1 - \cos\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2} = \int\limits_0^1 \overline{u}(t)\cos t \; dt. \end{cases} \tag{4.42}$$

D'après (1.4.8), (4.41) et (4.42), la fonction $\overline{u}$ est une sur solution du problème (1.4.1).

D'autre part, il n'est pas difficile de montrer que la fonction f définie par (1.4.2) vérifie les hypothèses du Théorème 1.4. Par conséquent le problème (1.4.1) a une solution minimale u_* et une solution maximale u^* telles que

$$\underline{u}(t) \leq u_*(t) \leq u^*(t) \leq \overline{u}(t), \text{ pour tout } t \in J.$$

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal and D. O'Regan, An *infinite interval problem arising in circulary symmetric deformations of shallow membrane caps, Internat. J. Non-Linear Mech.* 39 (2004), 779-784.

[2] R.P. Agarwal and D. O'Regan, *Boundary value problems of nonsingular type of the semi-infinite interval*, Tohoku Math. J. 51 (1999), 391-397.

[3] R.P. Agarwal and D. O'Regan, *Boundary value problems on the half line in the theory of colloids*, Math. Probl. Eng. 8 (2002), 143-150.

[4] R.P. Agarwal and D. O'Regan, *Infinite interval problem arising in non-linear mechanics and non-Newtonian fluid flows,* Internat. J. Non-Linear Mech. 38 (2003), 1369-1376.

[5] R.P. Agarwal, D. O'Regan, *Infinite Interval Problems for Differential, Difference and integral equations*, Kluwer Academic Publisher, 2001.

[6] R.P. Agarwal, D. O'Regan, *Infinite Interval problems modeling phenomena ahich arise in the theory of plasma and electrical potential theory*, Stud. Appl. Math.111(2003), 339-358.

[7] B. Ahmad, A. Alsaedi and B. Alghamdi, *Analytic approximation of solutions of the forced Duffing equation with integral boundary conditions*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 9 (2008), 1727-1740.

[8] B. Ahmad, A. Alsaedi and D. Garout, *Monotone iteration scheme for impulsive three-point nonlinear boundary value problems with quadratic convergence*, J. Korean. Math. Soc. 45 (2008), 1275-1295.

[9] P. Amster and A. Deboli, *A Neumann boundary value problem on an unbounded interval*, Electron. J. Differential Equations**(2008),** vol 2008, No 90, pp 1-5.

[10] I. Bachir and H. Mâagli, *existence and uniqueness for superlinear second-order differential equations on the half-line,* Electron. J. Differential Equations*,* Vol **2015** (2015), No 08, pp 1-14.

[11] B.B. Bainov and V.C. Covachev, *Impulsive Differential Equations with a small parameter*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, 24, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.

[12] B.B. Bainov and P.S. Simeonov, *Impulsive Differential Equations : Asymptotic properties of the solutions*, World Scientific, Singapore, 1995.

[13] J.V. Baxley, *Existence and uniqueness for nonlinear boundary value problems on infinite intervals*, J. Math. Anal. Appl **(1990),**147, pp 122-133.

[14] M. Benchohra, F. Berhoun and J. J. Nieto, *Existence results for impulsive boundary value problem with integral boundary conditions*, Dynam. Systems Appl. 19 (2010), 585-598.

[15] M. Benchohra, J. Henderson and S.K. Ntouyas, *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2, New York, 2006.

[16] A. K. Ben-Naoum, C. De Coster, *On the existence and multiplicity of positive solutions of the p–Laplacian separated boundary value problem*, Differential Integral Equations 10 (1997), pp 1093–1112.

[17] S. R. Bernfeld and J. Chandra, *Minimal and maximal solutions of nonlinear boundary value problems*, Pacific J. Math. 71 (1977), 13-20.

[18] A. Boucherif and S. M. Bouguima, *Solvability of non local multipoint boundary value problems*, Nonlinear Stud. 8 (2001), 395-406.

[19] A. Boucherif and J. Henderson, *Positive solutions of second order boundary value problems with changing signs Carathéodory nonlinearities*, Electronic J. Qual. Theory Differ. Equ. 7 (2006), 1-14.

[20] A Cabada, J.J. Nieto, D. Franco and S.T. Trofimchuk, *A generalization of the monotone method for second order periodic boundary value problem with impulses at fixed points*, Dyn. Cont. Discrete. Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 7 (2000), 145-158.

[21] J. R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math. 21 (1963), 155-160.

[22] V. Capasso and K. Kunisch, *A reaction-diffusion system arising in modelling man-environment diseases*, Quart. Appl. Math. 46 (1988), 431-450.

[23] R. Yu Chegis, *Numerical solution of a heat conduction problem with an integral boundary condition*, Litovsk. Mat. Sb. 24 (1984), 209-215.

[24] M. Cherpion, C. De Coster, P. Habets P, *Monotone iterative methods for boundary value problems*, Differential Integral Equations 12 (1999), 309-338.

[25] N. Ciorănescu, Sur les conditions linéaires dans l'intégration des équations différentielles ordinaires, Mat. Z. 35 (1932), 603-608.

[26] A.Constantin, *On an infinite tnterval boundary value problem,* Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol CLXXVI (1999), pp 379-394.

[27] M. Derhab, *Existence of minimal and maximal solutions for a quasilinear elliptic equation with integral boundary value conditions*, Electron.J. Qual. Theory. Differ. Equ (**2011),N° 6**, pp 1-18.

[28] M. Derhab, H. Mekni, *Existence of Minimal and Maximal Solutions for a Second Order Quasilinear Impulsive Differential Equation with Integral Boundary Conditions*, Comm. Appl. Nonlinear. Anal, V 22(**2015**), N 1, pp 1 - 21

[29] M. Derhab, H. Mekni, *Existence of Extremal Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation with Nonlocal Boundary Condition on an Unbounded Domain*, submitted.

[30] M. Derhab and H. Mekni, Existence of Extremal Solutions for a Quasilinear Differential Equation with Nonlocal Boundary Condition on the Half Line and Without Condition at Infinity, Submitted.

[31] A. Dishliev, K. Dishlieva and S. Nenov, *Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and Applications*, Academic Publications, Ltd., 2012.

[32] S. Djebali and S. Zahar, Bounded solutions for a derivative dependent boundary value problem on the half-line, Dynam. Systems Appl. 19 (2010), 545-556.

[33] P. W. Eloe, *the quasilinearization method on an unbounded domain*, Proc. Amer. Math. Soc, Vol 131, N° 5, page 1481-1488.

[34] P. W. Eloe, L. J. Grimm and J. Mashburn, A boundary value problem on an unbounded domain, Differential Equations and Dynamical Systems 8 (2000), 125-140.

[35] P. W. Eloe, E. R. Kaufmann and C. C. Tisdell, Multiple solutions of a boundary value problem on an unbounded domain, Dynam. Systems Appl. 15 (2006), 53-64.

[36] L.H. Erbe and X. Liu, *Existence results for boundary value problems of second order impulsive differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 149 (1990), 56-69.

[37] L. Erbe and K. Schmitt, On radial solutions of some semilinear elliptic equations, Differential and Integral Equations 1 (1988), 71-78.

[38] R. E. Ewing and T. Lin, *A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media*, Adv. Water Resour. 14 (1991), 89-97.

[39] W. Feller, *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations*, Ann. Math. 55 (1952), 468-519.

[40] M. Frigon and D. O'Regan, *Boundary value problems for second order impulsive differential equations using set-valued maps*, Appl. Anal. 58 (1995), 325-333

[41] M. Frigon and D. O'Regan, *Existence theory of compact and noncompact intervals,* Comm. Appl. Nonlinear Anal. 2 (1995), 75-82.

[42] J. Jeong, C. H. Kim and E. K. Lee, *Solvability for nonlocal boundary value problems on a half line with* $dim(Ker\ L)$= 2, Bound. Value Probl. **2014** (2014), Article 167, 11 pages.

[43] E. Hilb, Über Reihenentwicklungen, welche ans speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen entspringen, J. Reine Angew. Math. 140 (1911), 205-229.

[44] Sh. Hu and V. Lakshmikanthan, *Periodic boundary value problems for second order impulsive differential systems*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 75-85.

[45] N. I. Ionkin, *Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions*, Differ. Equ. 13 (1977), 294-304.

[46] J. Graham-Eagle, Monotone methods for semilinear elliptic equations in unbounded domains, J. Math. Anal. Appl. 137 (1989), 122-131.

[47] A.Granas, R.B. Guenther, J.W. Lee and D.O'regan, *Boundary value problems on infinite intervals and semiconductor devices*, J. Math. Anal. Appl **(1986),**116, pp 335-348.

[48] O.A.Gross, *The boundary value problem on an infinite interval : Existence, Uniqueness and asymptotic behavior of bounded solutions to a class of nonlinear second order differential equations,* J. Math. Anal. Appl 7,100-109 (1963).

[49] N. Kawano, E. Yanagida, S. Yotsutani, *Structure theorems for positive radial solutions to* $\Delta u + K(|x|)\, u^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^n$, Funkial. Ekvac. **36** (1993), 557-579.

[50] A. Khadra, X. Liu and X. Shen, *Robust impulsive synchronization and application to communication security*, Dyn. Contin. Discrete. Impuls. Syst. Ser.B. App. Algorithms 10 (2003), 403-416.

[51] R. E. Kidder, *Unsteady flow of gas through a semi-infinite porous medium*, J. Appl. Mech. **24** (1957), 329-332.

[52] C. G. Kim, *Solvability of multi-point boundary value problems on the half-line,* J. Nonlinear Sci. Appl. **5** (2012), 27-33.

[53] A. M. Krall, *Differential-boundary operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), 429-458.

[54] A. M. Krall, *The development of general differential and general differential-boundary systems*, Rocky Mountain J.Math. 5 (1975), 493-542.

[55] G. S. Ladde, V. Lakshmikantham and A. S. Vatsla, Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations, Pitman Publishing Co., Boston, 1985.

[56] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P.S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[57] E. K. Lee and Y. H. Lee, *A result on three solutions theorem and its application to p-Lapalcian systems with singular weights*, Bound. Value. Probl 2012, 2012 :63, 1-20.

[58] J. L. Lions, Quelques Methodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Nonlineaires.Editions Dunod-Gautiers-Villars, Paris 1969.

[59] B. Liu, L. Liu and Y. Wu, *Multiple solutions of singular three-point boundary value problems on* $[0, +\infty)$, Nonlinear Anal.**(2009),** 70, pp 3348-3357.

[60] B. Liu, L. Liu and Y. Wu, *Unbounded solutions for three-point boundary value problems with nonlinear boundary conditions on* $[0, +\infty)$, Nonlinear Anal.**(2010),** 73, pp 2923-2932.

[61] Y. Liu, Monotone iteration method for differential equations involving integral boundary conditions on the half line, Appl. Anal. 92 (2013), 72-95.

[62] E. Liz and J. J. Nieto, *The monotone iterative technique for periodic boundary value problems of second order impulsive differential equations*, Comment. Math. Univ. Carolin. 34 (1993), 405-411.

[63] E. J. Mapes and M. F. Schumaker, *Framework models of ion permeation through membrane channels and the generalized King-Altman method*, Bull. Math. Biol. 68 (2006), 1429-1460.

[64] V. D. Milman and A. D. Myshkis, *On the stability of motion in the presence of impulses*, Sib. Math. J. 1 (1960), 233-237, (in Russian).

[65] N. Minorsky, *Introduction to non-linear mechanics*, J.W. Edwards, 1947.

[66] F. H. Murray, On certain linear differential equations of the second order, Ann. of Math. (2) 24 (1922), 69-88.

[67] T. Y. Na, *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1979.

[68] F. Nicoud and T. Schfönfeld, *Integral boundary conditions for unsteady biomedical CFD applications*, Int. J. Numer. Meth. Fluids 40 (2002), 457-465.

[69] J. J. Nieto and D. O'Regan, *Variational approach to impulsive differential equations*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 10 (2009), 680-690.

[70] E. S. Noussair, On semilinear elliptic boundary value problems in unbounded domains, J. Differential Equations 41 (1981), 482-495.

[71] E. S. Noussair, On the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, J. Differential Equations 34 (1979), 334-348.

[72] A. Ogata, On bounded positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems in an exterior domains, Funkcial. Ekvac. 17 (1974), 207-222.

[73] D. O'Regan and R. Precup, *Positive solutions of nonlinear systems with p-Laplacian on finite and semi-infinite intervals*, Positivity **11** (2007), 537-548.

[74] C.V.Pao, *Nonlinear elliptic boundary value problems in unbounded domains*, Nonlinear Anal.**(1992),** vol 18, No 8, pp 759-774.

[75] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

[76] E. Picard, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, J. Math. 6 (1890), 145-210.

[77] E. Picard, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*, J. Math. 9 (**1893**), 217-27.

[78] M. Picone, *I teoremi d'esistenza per gl'integrali di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni*, Rend. Acc. Lincei, 17 (1908), 340-347.

[79] I. Rachunkova and M.Tvrdý, *Second order periodic problem with ϕ-Laplacian and impulses*, Nonlinear Anal. 63 (2005), e257-e266.

[80] A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.

[81] M. F. Schumaker, *Boundary conditions and trajectories of diffusion processes*, J. Chem. Phys. 116 (2002), 2469-2473.

[82] Y. A. Sharifov and N. B. Mamedova, *Optimal Control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions*, Differ. Equ. 50 (2014), 401-409.

[83] J. Shen and W. Wang, *Impulsive boundary value problems with nonlinear boundary conditions*, Nonlinear Anal. 69 (2008), 4055-4062.

[84] G.Shi and X.Meng, *Monotone iterative for fourth-order p-Laplacian boundary value problems with impulsive effects*, Appl. Math. Comput. 181 (2006), 1243-1248.

[85] A. L. Skubachevskii, *Nonclassical boundary value problems*, J. Math. Sci. 155 (2008), 199-334.

[86] A. Sommerfeld, A. Sommerfeld, *Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklaerung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen*, Proceedings of the Fourth International Congress of Mathematicians, Rome, 3 (1908), 116-124.

[87] A. M. Spagnuolo, V. Dirita and D. Kirschner, *A model for vibrio cholerae colonization of the human intestine*, J. Theoret. Biol. 289 (2011), 247-258.

[88] G. Tr. Stamov, *Almost Periodic Solutions of Impulsive Differntial Equations*, Lecture Notes in Math. Vol 2047, 2012.

[89] R. Stańczy, Bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains, J. Appl. Anal. 6 (2000), 129-138.

[90] J. Tamarkin, *Some general problems of the theory of-differential equations and expansion of an arbitrary function in series of-fundamental functions*, Math. Z. 27 (1928), 1-54.

[91] A. Varma and N. R. Amundson, *Maximal and minimal solutions, effectiveness factors for chemical reaction in porous catalysts*, Chem. Eng.Sci. 28 (1973), 91-104.

[92] V. Volpert, Elliptic Partial Differential Equations. Volume 1 : Fredholm Theory of Elliptic Problems in Unbounded domains, Monographs in Mathematics, Birkhäuser, 2011.

[93] V. Volpert, Elliptic Partial Differential Equations. Volume 2 : Reaction-Diffusion Equations, Monographs in Mathematics, Birkhäuser, 2014.

[94] R. Von Mises, Beitrag Zum Oszillationproblem, Festchrift Heinrich Weber, Leipzig (1912), 252-282.

[95] L. Wang, M. Pei and W. Ge, *A Generalized quasilinearization method for nonlinear second-order impulsive differential equations involving the p-laplacian*, Acta. Appl. Math. 110 (2010), 247-257.

[96] J. R. L. Webb, *Optimal constants in a nonlocal boundary value problem*, Nonlinear Anal. 63 (2005), 672-685.

[97] J. R. L. Webb, *Existence of solutions for a thermostat model*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 13 (2012), 923-938.

[98] W. M. Whyburn, *Differential equations with general boundary conditions*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 692-704.

[99] P. K. Wong, Existence and asymptotic behavior of proper solutions of class of second-order nonlinear differential equations, Pacific J. Math. 13 (1963), 737-760.

[100] X. Xian, D. O'Regan and R.P. Agarwal, *Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-order upper and lower solution conditions*, Bound. Value. Probl., (2008), Article ID 197205, 21 pages.

[101] A. Yang and W. Ge, *Positive solutions for second-order boundary value problem with integral boundary conditions at resonance on a half-line,*

Journal of inequalities in pure and applied mathematics, **10** (2009), Article 9, 10 pages.

[102] H. M. Yin, *On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. 294 (2004), 712-728.

[103] F. Yoruk and N. A. Hamal, *Existence results for nonlinear boundary value problems with integral boundary conditions on an infinite interval*, Bound. Value Probl. **2012** (2012), Article 127, 17 pages.

[104] T. Yoshizawa, *Note on the non-increasing solutions of* $y'' = f(x, y, y')$, Memoirs of the College, University of Kyoto, Series, A, **27** Mathematics (1952), 152-163.

Publication

INTERNATIONAL PUBLICATIONS (USA)

Communications on Applied Nonlinear Analysis
Volume 22(2015), Number 1, 1–21

Existence of Minimal and Maximal Solutions for a Second Order Quasilinear Impulsive Differential Equation with Integral Boundary Conditions

Mohammed Derhab[1] and Hayat Mekni[2]
University Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Dynamic Systems and Applications Laboratory
Department of Mathematics
Faculty of Sciences
B.P.119, Tlemcen, 13000, Algeria
[1]e-mail : derhab@yahoo.fr
[2] e-mail : h.mekni1@yahoo.fr

Communicated by Paul Eloe
(Received August 29, 2014; Revised Version Accepted December 7, 2014)

Abstract

This work is concerned with the construction of the minimal and maximal solutions for a second order quasilinear impulsive differential equation with integral boundary conditions,where the nonlinearity is a continuous function depending on the first derivative of the unknown function. We also give an example to illustrate our results.

Key words : Impulsive differential equations, integral boundary conditions, upper and lower solutions, monotone iterative technique, p-Laplacian, Nagumo Wintner condition.

AMS Subject Classification : 34B10, 34B15

1.1 Introduction :

This work is concerned with the construction of the minimal and the maximal solutions of the following quasilinear impulsive differential equation with integral boundary conditions

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(t,u,u'), t \in J' = J \setminus \{t_0,..,t_{m+1}\}, \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)), k = 1,2,..,m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)), k = 1,2,..,m, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)u(x)dx, u(1) + bu'(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)u(x)dx, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

where $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y, y \in \mathbb{R}, p > 1, J = [0,1], t_0 = 0 < t_1 < .. < t_m < t_{m+1} = 1$, where m is a fixed positive integer, $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, a$ and b are positive real numbers, $h_i : J \to \mathbb{R}_+$ are continuous functions $(i = 1,2)$, I_k and $N_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous and nondecreasing functions for each $k = 1,..,m$, and $u(t_k^+)$ and $u(t_k^-)$ represent the right-hand limit and left-hand limit of $u(t)$ at $t = t_k$.

Dynamical systems with discontinuous trajectories or, in other terms, impulsive differential equations, were considered at the beginning of the development of nonlinear mechanics (see [32]) and the first mathematical study of this subject was initiated by V. D. Milman and A. D. Myshkis [31]. Later, numerous works of many mathematicians were devoted to study impulsive differential equations, see for example the books [6], [17], [28], [37] and [45] and the papers [2], [4], [3], [5], [10], [18], [21], [23], [29], [34], [36], [39], [40], [41] and [49]. Impulsive differential equations arise naturally in medicine, biology, ecology, population dynamics, mechanics, engineering and chaos theory ; see, for example, [17], [25] and [45] and the references cited therein.

On the other hand, ordinary differential equations with integral boundary conditions were first considered by M. Picone [35] in 1908. He investigated relationships that exist between integral equations and certain special nth-order differential equations with integral boundary conditions.

In 1911, E. Hilb [22] considered the following problem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\widetilde{f}}{dx^2} + \widetilde{q}(x)\widetilde{f} = -\widetilde{g}(x), x \in (0,1), \\ \widetilde{\beta}\widetilde{f}(0) - \widetilde{\alpha}\widetilde{f}'(0) = -\int\limits_0^1 \widetilde{f}(z) K(z)\, dz, \\ h_2\widetilde{f}(1) - h_1\widetilde{f}'(1) = 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

where $\widetilde{q} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ and $K : [0,1] \to \mathbb{R}$ are smooth functions and $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\alpha}$, h_2 and h_1 are real constants.

By using the following problem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\widetilde{f}}{dx^2} + \widetilde{q}(x)\widetilde{f} = K(x) - \widetilde{g}(x), x \in (0,1), \\ \widetilde{f}(0) = \widetilde{\alpha}, \widetilde{f}'(0) = \widetilde{\beta}, \\ h_2\widetilde{f}(1) - h_1\widetilde{f}'(1) = 0, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

he derived the Green function for the problem (1.1.2), showed that the spectrum is discrete, and derived a nonself-adjoint eigenfunction expansion. The importance of this work is that the presence of the integral in the first boundary conditions in (1.1.2) induces the boundary term in the differential equation in (1.1.3).

In 1912, R.Von Mises [48] studied the following problem

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c(x)}\frac{dZ}{dx}\right) = (\lambda a(x) + b(x)) Z, \\ \int\limits_{x_1}^{x_2} A(x) Z(x)\, dx = 0, \int\limits_{x_1}^{x_2} B(x) Z(x)\, dx = 0, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

where c, a, b, A and B are continuous functions and λ is a parameter. He is interested in this problem because of its occurrence in certain problems of hydrodynamics (see [43]). His special case of hydrodynamic application had $a(x) = x + \widehat{\beta}$, $b(x) = c(x) = 1$, $\lambda = \dfrac{v}{\alpha^2\nu}\sqrt{-1}$; $A(x) = \exp(x)$, $B(x) = \exp(-x)$; $x_1 = 0$, $x_2 = \widehat{\alpha}$, where $\widehat{\alpha}$ and $\widehat{\beta}$ are a constants, v is the speed, ν is the tenacity coefficient. R. Von Mises obtained existence and oscillations theorems for problem (1.1.4) by using sturm's method of passage to the limit from an algebraic system. After this work differential equations with integral boundary conditions were studied by D. J. Tamarkin [46], W. M. Whyburn, N. Ciorănescu [15] and many others. The reader can consult the survey paper of W. M. Whyburn [52] for details and references up to

1942 or A. M. Krall [27] for more historical informations and references up to 1975.

Problems with integral boundary conditions arise naturally in hydrodynamics problems (see [13] and [43]), medical sciences (see [12], [33] and [44]), semiconductor problems [24], Markov processes [20], thermal conduction problems [11], theory of ion diffusion in channels (see [30], [38] and [54]) and underground water flow [19].

It is well know that the method of upper and lower solutions coupled with monotone iterative technique has been used to prove existence of solutions of nonlinear boundary value problems by various authors (see [8], [14], [16], [18], [23], [29] and [47]).

The purpose of this work is to show that it can be applied successfully to problems with integral boundary conditions of type (*1.1.1*). Our results improve and generalize those obtained in [16], [18] and [29].

The plan of this paper is as follows : In section 2, we give some preliminary results that will be used throughout the paper. In section 3, we state and prove our main result. Finally in section 4, we give an example to illustrate our results.

1.2 Preliminaries

In this section, we give some definitions and preliminary results that will be used in the remainder of this paper.

Let

$$PC\left(J,\mathbb{R}\right)=\left\{\begin{array}{l} u:J\rightarrow\mathbb{R},u(t)\text{ is continuous at }t\neq t_k,\\ \text{left continuous at }t=t_k\text{ and its right hand limit}\\ u(t_k^+)\text{ at }t=t_k\text{ exists, }k=1,..,m.\end{array}\right\},$$

and

$$PC^1\left(J,\mathbb{R}\right)=\left\{\begin{array}{l} u:J\rightarrow\mathbb{R},u(t)\text{ and }u'(t)\text{ are continuous at }t\neq t_k,\\ \text{left continuous at }t=t_k\text{ and their right hand limits}\\ u(t_k^+)\text{ and }u'(t_k^+)\text{ at }t=t_k\text{exists, }k=1,..,m.\end{array}\right\}.$$

For each $u\in PC^1\left(J,\mathbb{R}\right)$, let

$$\|u\|_{PC^1(J,\mathbb{R})}=\max\{\|u\|_{PC(J,\mathbb{R})},\|u'\|_{PC(J,\mathbb{R})}\},$$

where

$$\|u\|_{PC(J,\mathbb{R})} = \sup_{t\in J} |u(t)| \text{ and } \|u'\|_{PC(J,\mathbb{R})} = \sup_{t\in J} |u'(t)| .$$

Then $PC^1(J,\mathbb{R})$ is a real Banach space with the norm $\|u\|_{PC^1(J,\mathbb{R})}$. We consider the following boundary value problem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + M\varphi_p(u) = H(t,u'), t \in J', \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)), k = 1,2,..,m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)), k = 1,2,..,m, \\ u(0) - au'(0) = a_0, u(1) + bu'(1) = b_0, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

where $H : J\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function, a_0 and b_0 are a real numbers and $M > 0$.

We assume that H, I_k and N_k, $k = 1,..,m$ satisfies the following conditions

(H$_1$) $H : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$is continuous at $t \neq t_k$, $\lim\limits_{\substack{(s,v)\to(t,v_0)\\ s<t}} H(s,v) = H(t,v_0)$,

and $\lim\limits_{\substack{(s,v)\to(t,v_0)\\ s>t}} H(s,v)$ exist for $t = t_k$, $k = 1,..,m$.

(H$_2$) I_k and $N_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous and nondecreasing for each $k = 1,..,m$.

Lemme 1.4 *(Weak comparison principle)*
Assume that the conditions (H$_1$) and (H$_2$) are satisfied and let u_1 and u_2 be such that $u_i \in PC^1(J,\mathbb{R})$, $\varphi_p(u_i'^1(J,\mathbb{R})$, $i = 1,2,$ and

$$\begin{cases} F_1\left(t,u_1,u_1',(\varphi_p(u_1'')\right) \leq F_2\left(t,u_2,u_2',(\varphi_p(u_2'))'\right), t \in J', \\ u_1(t_k^+) - u_1(t_k^-) - I_k(u_1(t_k)) = u_2(t_k^+) - u_2(t_k^-) - I_k(u_2(t_k)), k = 1,2,..,m, \\ u_1'(t_k^+) - u_1'(t_k^-) - N_k(u_1'(t_k)) \geq u_2'(t_k^+) - u_2'(t_k^-) - N_k(u_2'(t_k)), k = 1,2,..,m, \\ u_1(0) - au_1'(0) \leq u_2(0) - au_2'(0), u_1(1) + bu_1'(1) \leq u_2(1) + bu_2'(1), \end{cases}$$

where

$$F_1\left(t,u_1,u_1',(\varphi_p(u_1'')\right) = -(\varphi_p(u_1'))' + M\varphi_p(u_1) - H(t,u_1'),$$

and

$$F_2\left(t,u_2,u_2',(\varphi_p(u_2'')\right) = -(\varphi_p(u_2'))' + M\varphi_p(u_2) - H(t,u_2').$$

Then $u_1(t) \leq u_2(t)$, for all $t \in J$.

Preuve: Assume that there exists $t^* \in [0,1]$ such that

$$u_1(t^*) - u_2(t^*) = \sup_{0\leq t\leq 1}(u_1(t) - u_2(t)) = \varepsilon > 0.$$

Case 1 : If $t^* = 0$, we obtain the contradiction

$$0 < u_1(0) - u_2(0) \leq a\,(u_1'(0) - u_2'(0)) \leq 0.$$

A similar argument holds if $t^* = 1$.
Case 2 : If $t^* \in J'$, then since $(u_1 - u_2) \in PC^1\,(J, \mathbb{R})$, we have

$$(u_1 - u_2)'^*) = 0,$$

which implies that

$$\varphi_p(u_2'^*)) = \varphi_p(u_1'(t^*)).$$

Since φ_p is strictly increasing, we obtain

$$-(\varphi_p(u_1'))'^*) + (\varphi_p(u_2'))'^*) = \lim_{t\to t^*}\frac{-\varphi_p(u_1')(t) + \varphi_p(u_2')(t)}{t - t^*} \geq 0.$$

But at this point, we have

$$\begin{aligned}&-(\varphi_p(u_1'))'^*) + M\varphi_p(u_1(t^*)) + (\varphi_p(u_2'))'^*) - M\varphi_p(u_2(t^*))\\ &\leq H(t^*, u_1'^*)) - H(t^*, u_2'(t^*)) = 0.\end{aligned}$$

Which means that

$$-(\varphi_p(u_1'))'^*) + (\varphi_p(u_2'))'^*) \leq M\varphi_p(u_2(t^*)) - M\varphi_p(u_1(t^*)).$$

Since $u_1(t^*) > u_2(t^*)$ and the function φ_p is strictly increasing, then it follows that

$$-(\varphi_p(u_1'))'^*) + (\varphi_p(u_2'))'^*) < 0.$$

Which is a contradiction.
Case 3 : If there is a $t^* \in J$ such that $u_1(t^*) - u_2(t^*) = \varepsilon$, then by **Case1** and **Case2**, we have $t^* = t_k$ for some $k = 1, 2, .., m$, and

$$u_1'(t_k) \geq u_2'(t_k). \tag{1.2.2}$$

Since the functions I_k and N_k are nondecreasing, one has

$$u_1(t_k^+) - u_2(t_k^+) = \varepsilon, \tag{1.2.3}$$

and

$$u_1'(t_k^+) \geq u_2'(t_k^+). \tag{1.2.4}$$

On the other hand by the definition of ε, $(u_1 - u_2)$ is nonincreasing in the right of t_k, then we have

$$u_1'(t_k^+) \leq u_2'(t_k^+). \tag{1.2.5}$$

Then by (1.2.4) and (1.2.5), it follows that

$$u_2'(t_k^+) = u_1'(t_k^+). \tag{1.2.6}$$

Since φ_p is strictly increasing, we obtain

$$-\left(\varphi_p(u_1')\right)'(t_k^+) + \left(\varphi_p(u_2')\right)'(t_k^+) = \lim_{t \overset{>}{\to} t_k^+} \frac{-\varphi_p(u_1')(t) + \varphi_p(u_2')(t)}{t - t_k^+} \geq 0. \tag{1.2.7}$$

On the other hand by (1.2.6), it follows that

$$\begin{aligned}
&-(\varphi_p(u_1'))'(t_k^+) + M\varphi_p(u_1(t_k^+)) + (\varphi_p(u_2'))'(t_k^+) - M\varphi_p(u_2(t_k^+)) \\
&\leq H(t_k, u_1'(t_k^+)) - H(t_k, u_2'(t_k^+)) = 0.
\end{aligned}$$

Which means that

$$-\left(\varphi_p(u_1')\right)'(t_k^+) + \left(\varphi_p(u_2')\right)'(t_k^+) \leq M\varphi_p(u_2(t_k^+)) - M\varphi_p(u_1(t_k^+)). \tag{1.2.8}$$

By (1.2.3), we have $u_1(t_k^+) > u_2(t_k^+)$ and since the function φ_p is strictly increasing, then it follows that

$$-\left(\varphi_p(u_1')\right)'(t_k^+) + \left(\varphi_p(u_2')\right)'(t_k^+) < 0. \tag{1.2.9}$$

Which is a contradiction with (1.2.7).
Case 4 : If $u_1(t) - u_2(t) < \varepsilon$ for all $t \in J$. Then we have

$$u_1(t_k^+) - u_2(t_k^+) = \varepsilon, \text{ for some } k = 1, 2, .., m.$$

We put

$$\sup\left[u_1(t) - u_2(t), t_{k-1} < t \leq t_k\right] = \varepsilon_k > 0, k = 1, 2, .., m+1.$$

We have the following two possibilities
i) $u_1(\widetilde{t}) - u_2(\widetilde{t}) = \varepsilon_k$, for some $\widetilde{t} \in (t_{k-1}, t_k]$. By **Case 2** $\widetilde{t} \notin (t_{k-1}, t_k)$.

However, if $\widetilde{t} = t_k^-$ then $u_2'(t_k) \leq u_1'(t_k)$ and $u_2'(t_k^+) \leq u_1'(t_k^+)$. Now repeating the arguments used in **Case 3** shows that this is impossible.
ii) $u_1(t_{k-1}^+) - u_2(t_{k-1}^+) = \varepsilon_k$.
Hence,

$$u_1(t_{k-1}^-) - u_2(t_{k-1}^-) \leq u_1(t_{k-1}^+) - u_2(t_{k-1}^+)$$

We get $u_2(t_{k-1}) < u_1(t_{k-1})$. Repeating the same procedure we employed so far in **Case 4** inductively, either we get a contradiction on the way or we have finally

$$\sup\left[u_1(t) - u_2(t), t_1 < t \leq t_2\right] = \varepsilon_2 > 0. \tag{1.2.10}$$

and $u_1(t_1^+) - u_2(t_2^+) > 0$. Hence

$$\sup\left[u_1(t) - u_2(t), 0 < t \leq t_1\right] = \varepsilon_1 > 0.$$

Since $u_1(t) - u_2(t) < \varepsilon_1$ for $t \in (0, t_1)$ by **Case 2**. So, we get

$$u_1(t_1) - u_2(t_1) = \varepsilon_1, \text{ and } u_2'(t_1) \leq u_1'(t_1).$$

and thus $u_2'(t_1^+) \leq u_1'(t_1^+)$. However, this and (1.2.10) imply again a contradiction as in the **Case 2**. Thus $u_2(t) \geq u_1(t)$ on J.
The proof of Lemma 1.4 is complete. □

The proof of this Lemma is a generalization to that of Lemma 3.2 in [18].

Définition 1.8 *We say that u is a solution of (1.2.1) if*
i) $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *and* $\varphi_p(u'^1(J, \mathbb{R})$.
ii) u satisfies (1.2.1).

Définition 1.9 *We say that $\underline{u}$ is a lower solution of (1.2.1) if*
i) $\underline{u} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *and* $\varphi_p(\underline{u}'^1(J, \mathbb{R})$.

$$ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq H(t, \underline{u}') - M\varphi_p(\underline{u}), t \in J', \\ \underline{u}(t_k^+) = \underline{u}(t_k^-) + I_k(\underline{u}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}'(t_k^+) \geq \underline{u}'(t_k^-) + N_k(\underline{u}'(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}(0) - a\underline{u}'(0) \leq a_0, \underline{u}(1) + b\underline{u}'(1) \leq b_0. \end{cases}$$

Définition 1.10 *We say that $\overline{u}$ is an upper solution of (1.2.1) if*
i) $\overline{u} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *and* $\varphi_p(\overline{u}'^1(J, \mathbb{R})$.

$$ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq H(t, \overline{u}') - M\varphi_p(\overline{u}), t \in J', \\ \overline{u}(t_k^+) = \overline{u}(t_k^-) + I_k(\overline{u}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}'(t_k^+) \leq \overline{u}'(t_k^-) + N_k(\overline{u}'(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) \geq a_0, \overline{u}(1) + b\overline{u}'(1) \geq b_0. \end{cases}$$

Now, if moreover H is a bounded function, then we have the following result

Théorème 1.3 *Suppose (H_1) and (H_2) hold and there exists* $\underline{u}$ *and* $\overline{u}$ *lower and upper solutions respectively for the problem (1.2.1) such that* $\underline{u}(t) \leq \overline{u}(t)$ *for all* $t \in J$*. Then the problem (1.2.1) admits a unique solution* $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *with* $\varphi_p(u'^1(J, \mathbb{R})$ *such that*

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t), \text{ for all } t \in J.$$

Preuve: Using a proof similar to that of Theorem 2.2 in [36], we can prove that the problem (1.2.1) admits at least one solution and by Lemma 1.4, it follows that this problem admits a unique solution. □

Définition 1.11 *We say that* u *is a solution of (1.1.1) if*

i) $u \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *and* $\varphi_p(u'^1(J, \mathbb{R})$.

ii) u *satisfies (1.1.1).*

Définition 1.12 *We say that* $\underline{u}$ *is a lower solution of (1.1.1) if*

i) $\underline{u} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *and* $\varphi_p(\underline{u}'^1(J, \mathbb{R})$.

$$ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'))' \leq f(t, \underline{u}, \underline{u}'), t \in J', \\ \underline{u}(t_k^+) = \underline{u}(t_k^-) + I_k(\underline{u}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}'(t_k^+) \geq \underline{u}'(t_k^-) + N_k(\underline{u}'(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}(0) - a\underline{u}'(0) \leq \int\limits_0^1 h_1(x)\underline{u}(x)dx, \underline{u}(1) + b\underline{u}'(1) \leq \int\limits_0^1 h_2(x)\underline{u}(x)dx. \end{cases}$$

Définition 1.13 *We say that* $\overline{u}$ *is an upper solution of (1.1.1) if*

i) $\overline{u} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ *and* $\varphi_p(\overline{u}'^1(J, \mathbb{R})$.

$$ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq f(t, \overline{u}, \overline{u}'), t \in J', \\ \overline{u}(t_k^+) = \overline{u}(t_k^-) + I_k(\overline{u}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}'(t_k^+) \leq \overline{u}'(t_k^-) + N_k(\overline{u}'(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}(0) - a\overline{u}'(0) \geq \int\limits_0^1 h_1(x)\overline{u}(x)dx, \overline{u}(1) + b\overline{u}'(1) \geq \int\limits_0^1 h_2(x)\overline{u}(x)dx. \end{cases}$$

Now, we define the Nagumo-Wintner condition.

Définition 1.14 *We say that the function $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfies a Nagumo-Wintner condition relative to the pair $\underline{u}$ and $\overline{u}$, if there exist $C \geq 0$ and a functions $Q \in L^p(J)$ and $\Psi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ continuous, such that*

$$|f(t,u,v)| \leq \Psi(|v|) \left(Q(t) + C\, |v|^{\frac{1}{p-1}} \right), \tag{1.2.11}$$

for all $(t,u,v) \in D$, where

$$D = \left\{ (t,u,v) \in J \times \mathbb{R}^2 : \underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t) \right\},$$

and

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds = +\infty. \tag{1.2.12}$$

We have the following result

Lemme 1.5 *Assume that the conditions (H_1) and (H_2) are satisfied and $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfies Nagumo-Wintner conditions (1.2.11) and (1.2.12) in D. Then there exists a constant $K > 0$, such that every solution of problem (1.1.1) verifying $\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)$, for all $t \in J$, satisfies $\|u'\|_{PC(J,\mathbb{R})} \leq K$.*

Preuve: Suppose to the contrary that there exists $s \in [0,1]$ such that $|u'(s)| > K$. Then we have the following two cases

Case A : There exists $k_0 \in \{0, 1, .., m\}$ such that $s \in (t_k, t_{k+1}]$.

Case B : There exists $k_0 \in \{0, 1, .., m\}$ such that $s = t_{k_0}^+$.

We only consider **Case B**. A similar argument holds for **Case A**.

Since $\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)$, for all $t \in J$, we have

$$\min_{t \in \left[t_{k_0}^+, t_{k_0+1}^-\right]} |u'(t)| = M_{k_0}.$$

Take $K > \max\{M_{k_0}, \|\underline{u}'\|_{PC(J,\mathbb{R})}, \|\overline{u}'\|_{PC(J,\mathbb{R})}\}$ such that

$$\int_{\varphi_p(M_{k_0})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds > \|Q\|_p \widetilde{S}^{\frac{p-1}{p}} + C\widetilde{S}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2.13}$$

There exists s_1, $s_2 \in [t_{k_0}^+, t_{k_0+1}^-]$ such that $|u'(s_1)| = M_{k_0}$ and $|u'(s_2)| = K$.

Without loss of generality, we assume that $s_1 < s_2$, then we have the following two cases

(i) $u'(s_1) = M_{k_0}$, $u'(s_2) = K$ and $M_{k_0} \leq u'(t) \leq K$, for all $t \in (s_1, s_2)$,

(ii) $u'(s_1) = -M_{k_0}$, $u'(s_2) = -K$ and $-K \leq u'(t) \leq -M_{k_0}$, for all $t \in (s_1, s_2)$.

Assume that the case (i) holds. The other can be handled in a similar way.

Since u is a solution of the problem (1.1.1) and by Nagumo-Wintner condition (1.2.11), we have

$$(\varphi_p(u'))'(t) \leq \Psi(u'(t)) \left(Q(t) + C\,(u'(t))^{\frac{1}{p-1}}\right), \text{ for all } t \in (s_1, s_2). \quad (1.2.14)$$

Now if we put $s = \varphi_p(u'(t))$ in (1.2.13), we obtain

$$\int\limits_{\varphi_p(M_{k_0})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds = \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\left(\varphi_p(u'(t))\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi(u'(t))} \left(\varphi_p(u'(t))\right)' dt. \quad (1.2.15)$$

Then by (1.2.15), it follows that

$$\int\limits_{\varphi_p(M_{k_0})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds = \int\limits_{s_0}^{s_2} \frac{\left(\varphi_p(u'(t))\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi(u'(t))} \left(\varphi_p(u'(t))\right)' dt,$$

and by (1.2.14), we have

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\varphi_p(M_{k_0})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi(|s|^{\frac{1}{p-1}})} ds &\leq \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\left(\varphi_p(u'(t))\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi(u'(t))} \Psi(u'(t)) \left(Q(t) + C\,(u'(t))^{\frac{1}{p-1}}\right) dt \\
&= \int\limits_{s_1}^{s_2} \left(\varphi_p(u'(t))\right)^{\frac{1}{p}} \left(Q(t) + C\,(u'(t))^{\frac{1}{p-1}}\right) dt \\
&= \int\limits_{s_1}^{s_2} (u'(t))^{\frac{p-1}{p}} Q(t) dt + C \int\limits_{s_1}^{s_2} (u'(t))^{\frac{p-1}{p}} (u'(t))^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq \|Q\|_p \left(\int\limits_{s_1}^{s_2} \left((u'(t))^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} + \\
&\quad + C \left(\int\limits_{s_1}^{s_2} \left((u'(t))^{\frac{1}{p}}\right)^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{s_1}^{s_2} (1)^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \|Q\|_p \left(u(s_2) - u(s_1)\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(u(s_2) - u(s_1)\right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1) \\
&\leq \|Q\|_p \widetilde{S}^{\frac{p-1}{p}} + C \widetilde{S}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

which is a contradiction with (1.2.13). □

1.3 Main results

In this section, we state and prove our main result. On the nonlinearity f, we shall impose the following conditions

(H$_3$) $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is continuous for $t \neq t_k$, $k = 1, 2, .., m$, $\lim\limits_{\substack{(s,u,v)\to(t,u_0,v_0)\\ s<t}} f(s,u,v) = f(t,u_0,v_0)$ and $\lim\limits_{\substack{(s,u,v)\to(t,u_0,v_0)\\ s>t}} f(s,u,v)$ exist for $t = t_k$, $k = 1, .., m$.

(H$_4$) There exists a positive real number M such that $u \to f(t,u,v) + M\varphi_p(u)$ is increasing, for all $t \in J$ and $v \in \mathbb{R}$.

Also, we will assume the existence of an ordered pair of lower and upper solutions $\underline{u}$ and $\overline{u}$ satisfying

$$\underline{u}(t) \leq \overline{u}(t), \text{ for all } t \in J.$$

The main result of this work is

Théorème 1.4 *Let $\underline{u}$ and $\overline{u}$ be a lower and upper solution respectively for problem (1.1.1) such that $\underline{u} \leq \overline{u}$ in J. Assume that the conditions (H_3) and (H_4) are satisfied and the Nagumo-Wintner conditions relative to $\underline{u}$ and $\overline{u}$ holds. Then the problem (1.1.1) has a maximal solution u^* and a minimal solution u_* such that for every solution u of (1.1.1) with $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ in J, we have*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \overline{u} \text{ in } J.$$

For the proof of this theorem, we need a preliminary lemma

Let $\underline{w}, \overline{w} \in PC^1(J, \mathbb{R})$ be fixed such that

i) $\varphi_p(\underline{w}'), \varphi_p(\overline{w}'^1(J, \mathbb{R})$.

ii) $\underline{u} \leq \underline{w} \leq \overline{w} \leq \overline{u}$ in J.

For all $v \in \mathbb{R}$, we define the function δ by

$$\delta(v) = \max\{-K, \min\{v, K\}\}, \text{ for all } v \in \mathbb{R},$$

where K is the constant defined in the proof of Lemma 1.5. Then the function δ is continuous and bounded. In fact, we have $\delta(v) = v$, for all v such that $|v| \leq K$ and $|\delta(v)| \leq K$, for all $v \in \mathbb{R}$.

We consider the following problems

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + M\varphi_p(u) = f(t, \overline{w}, \delta(u')) + M\varphi_p(\overline{w}), t \in J', \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\overline{w}(x)dx, u(1) + bu'(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\overline{w}(x)dx, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

and

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' + M\varphi_p(u) = f(t, \underline{w}, \delta(u')) + M\varphi_p(\underline{w}), t \in J', \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + I_k(u(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ u'(t_k^+) = u'(t_k^-) + N_k(u'(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ u(0) - au'(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\underline{w}(x)dx, u(1) + bu'(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\underline{w}(x)dx. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Lemme 1.6 *Let $\underline{w}$ and $\overline{w}$ be a lower and upper solutions respectively for problem (1.1.1). Assume that the conditions (H_3) and (H_4) are satisfied and the Nagumo-Wintner conditions relative to $\underline{u}$ and $\overline{u}$ holds. Then there exists a unique solution $\widetilde{u}$ and $\widehat{u}$ of (1.3.1) and (1.3.2) such that*

$$\underline{u} \leq \underline{w} \leq \widetilde{u} \leq \widehat{u} \leq \overline{w} \leq \overline{u} \in J.$$

Preuve: The proof of this lemma is similar to that of Lemma 5 in [16]. So, it is omitted. □

Preuve: of Theorem 1.4 : The proof will be given in several steps.

We take $\underline{u}_0 = \underline{u}$, $\overline{u}_0 = \overline{u}$ and define the sequences $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ by

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}))' + M\varphi_p(\overline{u}_{n+1}) = f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}'_{n+1})) + M\varphi_p(\overline{u}_n), t \in J', \\ \overline{u}_{n+1}(t_k^+) = \overline{u}_{n+1}(t_k^-) + I_k(\overline{u}_{n+1}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}'_{n+1}(t_k^+) = \overline{u}'_{n+1}(t_k^-) + N_k(\overline{u}'_{n+1}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}_{n+1}(0) - a\overline{u}'_{n+1}(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\overline{u}_n(x)dx, \\ \overline{u}_{n+1}(1) + b\overline{u}'_{n+1}(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\overline{u}_n(x)dx, \end{cases} \tag{P_{n+1}}$$

and

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'_{n+1}))' + M\varphi_p(\underline{u}_{n+1}) = f(t, \underline{u}_n, \delta(\underline{u}'_{n+1})) + M\varphi_p(\underline{u}_n), t \in J', \\ \underline{u}_{n+1}(t_k^+) = \underline{u}_{n+1}(t_k^-) + I_k(\underline{u}_{n+1}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}'_{n+1}(t_k^+) = \underline{u}'_{n+1}(t_k^-) + N_k(\underline{u}'_{n+1}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}_{n+1}(0) - a\underline{u}'_{n+1}(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\underline{u}_n(x)dx, \\ \underline{u}_{n+1}(1) + b\underline{u}'_{n+1}(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\underline{u}_n(x)dx. \end{cases} \qquad (Q_{n+1})$$

Step 1 : For each $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\underline{u} \leq \underline{u}_1 \leq ... \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq ... \leq \overline{u}_1 \leq \overline{u} \text{ in } J.$$

Proof

i) For $n = 0$, we have

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}'_1))' + M\varphi_p(\overline{u}_1) = f(t, \overline{u}, \delta(\overline{u}'_1)) + M\varphi_p(\overline{u}), t \in J', \\ \overline{u}_1(t_k^+) = \overline{u}_1(t_k^-) + I_k(\overline{u}_1(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}'_1(t_k^+) = \overline{u}'_1(t_k^-) + N_k(\overline{u}'_1(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}_1(0) - a\overline{u}'_1(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\overline{u}(x)dx, \overline{u}_1(1) + b'\overline{u}_1(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\overline{u}(x)dx, \end{cases} \qquad (P_1)$$

and

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}'_1))' + M\varphi_p(\underline{u}_1) = f(t, \underline{u}, \delta(\underline{u}'_1)) + M\varphi_p(\underline{u}), t \in J', \\ \underline{u}_1(t_k^+) = \underline{u}_1(t_k^-) + I_k(\underline{u}_1(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}'_1(t_k^+) = \underline{u}'_1(t_k^-) + N_k(\underline{u}'_1(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ \underline{u}_1(0) - a\underline{u}'_1(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)\underline{u}(x)dx, \underline{u}_1(1) + b\underline{u}'_1(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)\underline{u}(x)dx. \end{cases} \qquad (Q_1)$$

Since $\underline{u}$ and $\overline{u}$ are lower and upper solutions of problem (1.1.1), then by Lemma 1.6, it follows that

$$\underline{u} \leq \underline{u}_1 \leq \overline{u}_1 \leq \overline{u} \text{ in } J.$$

ii) Assume for fixed $n > 1$, we have

$$\underline{u} \le \underline{u}_{n-1} \le \underline{u}_n \le \overline{u}_n \le \overline{u}_{n-1} \le \overline{u} \text{ in } J,$$

and we show that

$$\underline{u} \le \underline{u}_n \le \underline{u}_{n+1} \le \overline{u}_{n+1} \le \overline{u}_n \le \overline{u} \text{ in } J.$$

Let $t \in J'$, we have

$$-(\varphi_p(\overline{u}'_n))' + M\varphi_p(\overline{u}_n) = f(t, \overline{u}_{n-1}, \delta(\overline{u}'_n)) + M\varphi_p(\overline{u}_{n-1}). \quad (1.3.3)$$

Since $\overline{u}_n \le \overline{u}_{n-1}$ and using the hypothesis (H_3), we obtain

$$f(t, \overline{u}_{n-1}, \delta(\overline{u}'_n)) + M\varphi_p(\overline{u}_{n-1}) \ge f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}'_n)) + M\varphi_p(\overline{u}_n). \quad (1.3.4)$$

Then by (1.3.3) and (1.3.4), it follows that

$$\forall t \in J', -(\varphi_p(\overline{u}'_n))' \ge f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}'_n)).$$

Now by using a proof similar to that of Lemma 1.5, we can prove that $\|\overline{u}'_n\|_{PC(J,\mathbb{R})} \le K$. Hence $\delta(\overline{u}'_n) = \overline{u}'_n$ and we obtain

$$\forall t \in J', -(\varphi_p(\overline{u}'_n))' \ge f(t, \overline{u}_n, \overline{u}'_n). \quad (1.3.5)$$

On the other hand, we have

$$\begin{cases} \overline{u}_n(t_k^+) = \overline{u}_n(t_k^-) + I_k(\overline{u}_n(t_k)), & k = 1, 2, .., m, \\ \overline{u}'_n(t_k^+) = \overline{u}'_n(t_k^-) + N_k(\overline{u}'_n(t_k)), & k = 1, 2, .., m. \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} \overline{u}_n(0) - a\overline{u}'_n(0) &= \int_0^1 h_1(x)\overline{u}_{n-1}(x)dx \\ &\ge \int_0^1 h_1(x)\overline{u}_n(x)dx. \end{aligned}$$

That is

$$\overline{u}_n(0) - a\overline{u}'_n(0) \ge \int_0^1 h_1(x)\overline{u}_n(x)dx, \quad (1.3.6)$$

and

$$\begin{aligned}\overline{u}_n(1)+b\overline{u}_n'(1) &= \int_0^1 h_2(x)\overline{u}_{n-1}(x)dx \\ &\geq \int_0^1 h_2(x)\overline{u}_n(x)dx.\end{aligned}$$

That is

$$\overline{u}_n(1)+b\overline{u}_n'(1) \geq \int_0^1 h_2(x)\overline{u}_n(x)dx. \tag{1.3.7}$$

Then by (1.3.5), (1.3), (1.3.6) and (1.3.7), it follows that $\overline{u}_n$ is an upper solution of (1.1.1). Similarly, we can prove that $\underline{u}_n$ is a lower solution of (1.1.1). Then by Lemma 1.6, there exists a unique solution $\overline{u}_{n+1}$ and $\underline{u}_{n+1}$of (P_{n+1}) and (Q_{n+1}) such that

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ in } J.$$

Hence, we have

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ in } J.$$

Step 2 : The sequence $(\overline{u}_n)_{n\geq 1}$ converge to a maximal solution of (1.1.1).

Proof : By **Step 1** and since $\|\overline{u}_n'\|_{PC(J,\mathbb{R})} \leq K$, for all $n \in \mathbb{N}$, it follows that the sequence $(\overline{u}_n')_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded in $PC^1(J,\mathbb{R})$.

Let $J_1 = [0,t_1]$, $J_2 = (t_1,t_2]$, ..., $J_m = (t_{m-1},t_m]$, $J_{m+1} = (t_m,1]$. Then $J = \bigcup\limits_{k=1}^{k=m+1} J_k$.

Now let $\varepsilon > 0$, and $t,s \in J_1$ such that $t < s$, then for each $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned}\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}'(s)) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}'(t))\right| &= \left|\int_t^s \begin{pmatrix} f(\tau,\overline{u}_n(\tau),\delta(\overline{u}_{n+1}'(\tau))) \\ +M\left(\varphi_p(\overline{u}_n(\tau)) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right)\end{pmatrix} d\tau\right| \\ &\leq \int_t^s \left|\begin{matrix} f(\tau,\overline{u}_n(\tau),\delta(\overline{u}_{n+1}'(\tau))) \\ +M\left(\varphi_p(\overline{u}_n(\tau)) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right)\end{matrix}\right| d\tau \\ &\leq (M_1(f)+2MM_2)\,|s-t|,\end{aligned}$$

where

$$M_1(f) = \sup \{ |f(t,u,v)|, t \in J, \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ and } |v| \leq K \},$$

and

$$M_2 = \max \left\{ \left| \varphi_p(u) \right|, \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \right\}.$$

If we put $K_1 = M_1(f) + 2MM_2$, one has

$$\left| \varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s)) - \varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t)) \right| \leq K_1 |s - t|.$$

Then if we choose

$$|s - t| \leq \frac{\varepsilon}{K_1 + 1},$$

we obtain

$$\left| \varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s)) - \varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t)) \right| < \varepsilon.$$

Therefore the sequence $\left(\varphi_p(\overline{u}'_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ is equicontinuous on J_1.

Now since the mapping φ_p^{-1} is an increasing homeomorphism from $\mathbb{R}$ onto $\mathbb{R}$, we deduce from

$$\left| \overline{u}'_{n+1}(s) - \overline{u}'_{n+1}(t) \right| = \left| \varphi_p^{-1} \left(\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s)) \right) - \varphi_p^{-1} \left(\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t)) \right) \right| < \varepsilon,$$

that the sequence $(\overline{u}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is equicontinuous on J_1.

Hence by the *Arzéla-Ascoli* theorem, there exists a subsequence $(\overline{u}_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ of $(\overline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ which converges in $C^1(J_1)$.

Consider the subsequence $(\overline{u}_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ on the interval J_2. On this interval the subsequence $(\overline{u}_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ is uniformly bounded and equicontinuous. So, it has a subsequence $(\overline{u}_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ uniformly convergent on the interval $(t_1, t_2]$

Continuing this process for the intervals $(t_2, t_3], .., (t_m, t_{m+1}]$, we see that the sequence $(\overline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ has a subsequence $(\overline{u}_n^{(m+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ which will converge uniformly on the interval J.

Let

$$u^{(m+1)} = \lim_{n \to +\infty} \overline{u}_n^{(m+1)}.$$

Then

$$\left(u^{(m+1)} \right)' = \lim_{n \to +\infty} \left(\overline{u}_n^{(m+1)} \right)'.$$

But by **Step 1**, the sequence $(\overline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is decreasing and bounded from below, then the pointwise limit of this sequence exists and it is denoted by u^*. Hence, we have $u^{(m+1)} = u^*$ and moreover, the whole sequence converges to u^*.

Let $k \in \{0, .., m\}$ fixed, and $t, s \in (t_k, t_{k+1})$, we have

$$-\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(s)) = -\varphi_p(\overline{u}'_{n+1}(t)) + \int_t^s \begin{pmatrix} f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) \\ +M\left(\varphi_p(\overline{u}_n) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1})\right) \end{pmatrix} d\tau.$$

Now, as $n \to +\infty$, we obtain

$$\widehat{f}(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\tau, u^*(\tau), \delta((u^*)'(\tau))),$$

where

$$\widehat{f}(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) = f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) + M\left(\varphi_p(\overline{u}_n(\tau)) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right).$$

Also, there exists a strictly positive number K_3 such that for all n in $\mathbb{N}$ and τ in J, we have

$$\left|f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}'_{n+1}(\tau))) + M\left(\varphi_p(\overline{u}_n) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1})\right)\right| \leq K_3.$$

Hence, the dominated convergence theorem of Lebesgue implies that

$$-\varphi_p((u^*)'(s))) = -\varphi_p((u^*)'(t))) + \int_t^s f(\tau, u^*(\tau), \delta((u^*)'(\tau))))d\tau.$$

Thus, we obtain

$$\forall t \in (t_k, t_{k+1}), -(\varphi_p((u^*)'))'^*, \delta(u^{*'})). \tag{1.3.8}$$

Then, for each $k = 1, .., m$, we have

$$\forall t \in (t_k, t_{k+1}), -(\varphi_p((u^*)'))'^*, \delta(u^{*'})).$$

That is

$$\forall t \in J', -(\varphi_p((u^*)'))'^*, \delta(u^{*'})). \tag{1.3.9}$$

Also, by the dominated convergence theorem of Lebesgue, we have

$$\begin{cases} u^*(0) - au^{*'}(0) = \int_0^1 h_1(x)u^*(x)dx, \\ u^*(1) + bu^{*\prime}(1) = \int_0^1 h_2(x)u^*(x)dx. \end{cases} \tag{1.3.10}$$

On the other hand since the functions I_k and N_k are continuous, one has

$$\begin{cases} u^*(t_k^+) = u^*(t_k^-) + I_k(u^*(t_k)), & k = 1, 2, .., m, \\ u^{*\prime}(t_k^+) = u^{*\prime}(t_k^-) + N_k(u^{*\prime}(t_k)), & k = 1, 2, .., m. \end{cases}$$

By (1.3.9),(1.3.10) and (1.3), it follows that u^* is a solution of the following problem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{*\prime}))^{\prime *}, \delta(u^{*\prime})), t \in J', \\ u^*(t_k^+) = u^*(t_k^-) + I_k(u^*(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ u^{*\prime}(t_k^+) = u^{*\prime}(t_k^-) + N_k(u^{*\prime}(t_k)), k = 1, 2, .., m, \\ u^*(0) - au^{*'}(0) = \int\limits_0^1 h_1(x)u^*(x)dx, u^*(1) + bu^{*\prime}(1) = \int\limits_0^1 h_2(x)u^*(x)dx. \end{cases}$$

Now using a proof similar to that of Lemma 1.5, we prove that $\left\|(u^*)'\right\|_{PC(J,\mathbb{R})} \leq K$. Hence $\delta(u^{*\prime}) = u^{*\prime}$ and consequently u^* is a solution of (1.1.1).

Now, we proved that if u is another solution of (1.1.1) such that $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ in J, then $u \leq u^*$ in J. Since u is a lower solution of (1.1.1), then by **Step1,** we have

$$\forall n \in \mathbb{N}, u \leq \overline{u}_n.$$

Letting $n \longrightarrow +\infty$, we obtain

$$u \leq \lim_{n \to +\infty} \overline{u}_n = u^*,$$

which means that u^* is a maximal solution of problem (1.1.1).

Step 3 : The sequence $(\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges to minimal solution of (1.1.1).

Proof : The proof is similar to that of **Step 2,** so it is omitted.

The proof of our result is complete. $\square$

1.4 Application

In this section, we apply the previous result to the following problem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))^{\prime k}(t)\left(1 + |u'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right), t \in J' = [0, 1] \backslash \{\frac{1}{2}\}, \\ u(\frac{1}{2}^+) = u(\frac{1}{2}^-) + \frac{1}{2}, \\ u'(\frac{1}{2}^+) = u'(\frac{1}{2}^-) + 1, \\ u(0) = \int\limits_0^1 u(t) \sin t dt, u(1) = \int\limits_0^1 u\,(t) \cos t dt, \end{cases} \tag{1.4.1}$$

where $p>1$, $k=2l+1$, $l\in\mathbb{N}$ and $g:J\to\mathbb{R}$ is a function defined by

$$g(t)=\begin{cases}-t-1, & \text{if } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\\ \dfrac{\sin(t-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}-t}, & \text{if } t\in\left]\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

The function g is continuous for $t\neq\dfrac{1}{2}$, $g(\frac{1}{2}^-)=-\dfrac{3}{2}$ and $g(\frac{1}{2}^+)=-1$.

We put by definition

$$f(t,u,u'^k(t)\left(1+|u'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right). \tag{1.4.2}$$

Let

$$\underline{u}(t)=\begin{cases}-t-1, & \text{if } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\\ -1, & \text{if } t\in\left]\frac{1}{2},1\right];\end{cases}$$

and

$$\overline{u}(t)=\begin{cases}1, & \text{if } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right];\\ 1+t, & \text{if } t\in\left]\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

We have

$$\underline{u}(t)\leq\overline{u}(t),\ \text{for all } t\in J.$$

It is easy to check that

$$0=-(\varphi_p(\underline{u}'))'\leq g(t)\underline{u}^k(t)\left(1+|\underline{u}'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right)=2(-t-1)^{k+1},\ \forall t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],$$

and

$$0=-(\varphi_p(\underline{u}'))'\leq g(t)\underline{u}^k(t)\left(1+|\underline{u}'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right)=\frac{\sin(t-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}-t}(-1)^k,\ \forall t\in\left]\frac{1}{2},1\right].$$

That is

$$-\left(\varphi_p(\underline{u}')\right)'\leq f(t,\underline{u},\underline{u}'),\ \text{for all } t\in J'. \tag{1.4.3}$$

Also, we have

$$\underline{u}(\frac{1}{2}^+)=-1=\underline{u}(\frac{1}{2}^-)+\frac{1}{2}, \tag{1.4.4}$$

$$\underline{u}'(\frac{1}{2}^+)=0=\underline{u}'(\frac{1}{2}^-)+1, \tag{1.4.5}$$

$$\underline{u}(0) = -1 \leq \cos 1 - \frac{5}{2}\cos\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2} + 1 = \int_0^1 \underline{u}(t)\sin t dt, \tag{1.4.6}$$

and

$$\underline{u}(1) = -1 \leq \cos\frac{1}{2} - \sin 1 + \frac{5}{2}\sin\frac{1}{2} - 1 = \int_0^1 \underline{u}(t)\cos t dt. \tag{1.4.7}$$

Then by (1.4.3), (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6) and (1.4.7), it follows that $\underline{u}$ is a lower solution of problem (1.4.1).

On the other hand, we have

$$-(\varphi_p(\overline{u}'))' = 0 \geq -t = g(t)\overline{u}^k(t)\left(1 + |\overline{u}'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right), \text{ for all } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$$

and

$$-(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq 2\frac{\sin(t-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}-t}(t+1)^k = g(t)\overline{u}^k(t)\left(1 + |\overline{u}'(t)|^{\frac{1}{p-1}}\right), \text{ for all } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

That is

$$-(\varphi_p(\overline{u}'))' \geq f(t, \overline{u}, \overline{u}'), \text{ for all } t \in J'. \tag{1.4.8}$$

Also, we have

$$\overline{u}(\frac{1}{2}^+) = \frac{3}{2} = \overline{u}(\frac{1}{2}^-) + \frac{1}{2}, \tag{1.4.9}$$

$$\overline{u}'(\frac{1}{2}^+) = 1 = \overline{u}'(\frac{1}{2}^-) + 1, \tag{1.4.10}$$

$$\overline{u}(0) = 1 \geq \sin 1 - 2\cos 1 + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{2} + 1 = \int_0^1 \overline{u}(t)\sin t \, dt, \tag{1.4.11}$$

and

$$\overline{u}(1) = 2 \geq \cos 1 + 2\sin 1 - \cos\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2} = \int\limits_0^1 \overline{u}(t)\cos t\ dt. \qquad (1.4.12)$$

Then by (1.4.8), (1.4.9), (1.4.10), (1.4.11) and (1.4.12), it follows that $\overline{u}$ is a upper solution of problem (1.4.1).

On the other hand, it is not difficult to prove that the function f defined by (1.4.2) satisfies the hypothesis of Theorem 1.4 and consequently, it follows that the problem (1.4.1) has a minimal and a maximal solutions.

Acknowledgment : The authors would like to thank the referee for his (or her) valuable suggestions.

Bibliographie

[1] B. Ahmed, A. Alsaedi and B. Alghamdi, Analytic approximation of solutions of the forced Duffing equation with integral boundary conditions, Nonlinear Anal. Real World Appl. 9 (2008), 1727-1740.

[2] B. Ahmad, A. Alsaedi and D. Garout, Monotone iteration scheme for impulsive three-point nonlinear boundary value problems with quadratic convergence, J. Korean Math. Soc. 45 (2008), 1275-1295.

[3] B.B. Bainov and V.C. Covachev, Impulsive Differential Equations with a small parameter, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, 24, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.

[4] B.B. Bainov and P.S. Simeonov, Impulsive Differential Equations : Asymptotic properties of the solutions, World Scientific, Singapore, 1995.

[5] M. Benchohra, F. Berhoun and J. J. Nieto, Existence results for impulsive boundary value problem with integral boundary conditions, Dynam. Systems Appl. 19 (2010), 585-598.

[6] M. Benchohra, J. Henderson and S.K. Ntouyas, Impulsive Differential Equations and Inclusions, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2, New York, 2006.

[7] S. R. Bernfeld and J. Chandra, Minimal and maximal solutions of nonlinear boundary value problems, Pacific J. Math. 71 (1977), 13-20.

[8] A. Boucherif and S. M. Bouguima, Solvability of non local multipoint boundary value problems, Nonlinear Stud. 8 (2001), 395-406.

[9] A. Boucherif and J. Henderson, Positive solutions of second order boundary value problems with changing signs Carathéodory nonlinearities, Electronic J. Qual. Theory Differ. Equ. 7 (2006), 1-14.

[10] A Cabada, J.J. Nieto, D. Franco and S.T. Trofimchuk, A generalization of the monotone method for second order periodic boundary value problem with impulses at fixed points, Dyn. Cont. Discrete. Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 7 (2000), 145-158.

[11] J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, Quart. Appl. Math. 21 (1963), 155-160.

[12] V. Capasso and K. Kunisch, A reaction-diffusion system arising in modelling man-environment diseases, Quart. Appl. Math. 46 (1988), 431-450.

[13] R. Yu Chegis, Numerical solution of a heat conduction problem with an integral boundary condition, Litovsk. Mat. Sb. 24 (1984), 209-215.

[14] M. Cherpion, C. De Coster, P. Habets P, Monotone iterative methods for boundary value problems, Differential Integral Equations 12 (1999), 309-338.

[15] N. Ciorănescu, Sur les conditions linéaires dans l'intégration des équations différentielles ordinaires, Mat. Z. 35 (1932), 603-608.

[16] M. Derhab, Existence of minimal and maximal solutions for a quasilinear elliptic equation with integral boundary value conditions, Electronic J. Qual. Theory Differ. Equ. 6 (2011), 1-18.

[17] A. Dishliev, K. Dishlieva and S. Nenov, Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and Applications, Academic Publications, Ltd., 2012.

[18] L.H. Erbe and X. Liu, Existence results for boundary value problems of second order impulsive differential equations, J. Math. Anal. Appl. 149 (1990), 56-69.

[19] R. E. Ewing and T. Lin, A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media. Adv. Water Resour. 14 (1991), 89-97.

[20] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, Ann. Math. 55 (1952), 468-519.

[21] M. Frigon and D. O'Regan, Boundary value problems for second order impulsive differential equations using set-valued maps, Appl. Anal. 58 (1995), 325-333.

[22] E. Hilb, Über Reihenentwicklungen, welche ans speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen entspringen, J. Reine Angew. Math. 140 (1911), 205-229.

[23] Sh. Hu and V. Lakshmikanthan, Periodic boundary value problems for second order impulsive differential systems, Nonlinear Anal. 13 (1989), 75-85.

[24] N. I. Ionkin, Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differ. Equ. 13 (1977), 294-304.

[25] A. Khadra, X. Liu and X. Shen, Robust impulsive synchronization and application to communication security, Dyn. Contin. Discrete. Impuls. Syst. Ser.B App. Algorithms 10 (2003), 403-416.

[26] A. M. Krall, Differential-boundary operators, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), 429-458.

[27] A. M. Krall, The development of general differential and general differential-boundary systems. Rocky Mountain J.Math. 5 (1975), 493-542.

[28] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P.S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1989.

[29] E. Liz and J. J. Nieto, The monotone iterative technique for periodic boundary value problems of second order impulsive differential equations, Comment. Math. Univ. Carolin. 34 (1993), 405-411.

[30] E. J. Mapes and M. F. Schumaker, Framework models of ion permeation through membrane channels and the generalized King-Altman method. Bull. Math. Biol. 68 (2006), 1429-1460.

[31] V. D. Milman and A. D. Myshkis, On the stability of motion in the presence of impulses, Sib. Math. J. 1 (1960), 233-237, (in Russian).

[32] N. Minorsky, Introduction to non-linear mechanics, J.W. Edwards, 1947.

[33] F. Nicoud and T. Schfönfeld, Integral boundary conditions for unsteady biomedical CFD applications, Int. J. Numer. Meth. Fluids 40 (2002), 457-465.

[34] J. J. Nieto and D. O'Regan, Variational approach to impulsive differential equations, Nonlinear Anal. Real World Appl. 10 (2009), 680-690.

[35] M. Picone, I teoremi d'esistenza per gl'integrali di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni, Rend. Acc. Lincei, 17 (1908), 340-347.

[36] I. Rachunkova and M.Tvrdý, Second order periodic with $\phi-$laplacian and impulses, Nonlinear Anal. 63 (2005), e257-e266.

[37] A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1995.

[38] M. F. Schumaker, Boundary conditions and trajectories of diffusion processes, J. Chem. Phys. 116 (2002), 2469-2473.

[39] Y. A. Sharifov and N. B. Mamedova, Optimal Control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, Differ. Equ. 50 (2014), 401-409.

[40] J. Shen and W. Wang, Impulsive boundary value problems with nonlinear boundary conditions, Nonlinear Anal. 69 (2008), 4055-4062.

[41] G.Shi and X.Meng, Monotone iterative for fourth-order p-Laplacian boundary value problems with impulsive effects, Appl. Math. Comput. 181 (2006), 1243-1248.

[42] A. L. Skubachevskii, Nonclassical boundary value problems. I, J. Math. Sci. 155 (2008), 199-334.

[43] A. Sommerfeld, A. Sommerfeld, Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklaerung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen. Proceedings of the Fourth International Congress of Mathematicians, Rome, 3 (1908), 116-124.

[44] A. M. Spagnuolo, V. Dirita and D. Kirschner, A model for vibrio cholerae colonization of the human intestine. J. Theoret. Biol. 289 (2011), 247-258.

[45] G. Tr. Stamov, Almost Periodic Solutions of Impulsive Differntial Equations, Lecture Notes in Math. Vol 2047, 2012.

[46] J. Tamarkin, Some general problems of the theory of-differential equations and expansion of an arbitrary function in series of-fundamental functions. Math. Z. 27 (1928), 1-54.

[47] A. Varma and N. R. Amundson, Maximal and minimal solutions, effectiveness factors for chemical reaction in porous catalysts. Chem. Eng.Sci. 28 (1973), 91-104.

[48] R. Von Mises, Beitrag Zum Oszillationproblem, Festchrift Heinrich Weber, Leipzig (1912), 252-282.

[49] L. Wang, M. Pei and W. Ge, A Generalized quasilinearization method for nonlinear second-order impulsive differential equations involving the p-laplacian, Acta Appl Math. 110 (2010), 247-257.

[50] J. R. L. Webb, Optimal constants in a nonlocal boundary value problem, Nonlinear Anal. 63 (2005), 672-685.

[51] J. R. L. Webb, Existence of solutions for a thermostat model, Nonlinear Anal. Real World Appl. 13 (2012), 923-938.

[52] W. M. Whyburn, Differential equations with general boundary conditions, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 692-704.

[53] X. Xian, D. O'Regan and R.P. Agarwal, Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-order upper and lower solution conditions, Bound. Value. Probl., (2008), Article ID 197205, 21 pages.

[54] H. M. Yin, On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions, J. Math. Anal. Appl. 294 (2004), 712-728.