République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOUBAKR BELKAID DE TLEMCEN

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'Obtention du Grade de Doctorat en Mathématiques

Option : Système Dynamique

Sous le thème

SUR L'EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR DES CLASSES DE PROBLEMES AUX LIMITES QUASILINEAIRES DANS LES ECHELLES DE TEMPS.

Présenté par : Mr Nehari Mohamed

Devant le jury composé de :

Président : Mr Yebdri Mustapha Pr. Univ. de Tlemcen

Examinateurs :

- Mme Benmerzouk Hadj Slimane Djamila Pr. Univ. de Tlemcen
- Mr Ouahab Abdelghani Pr. Univ. de Sidi Bel –Abbès
- Mr Senoussaoui Abderrahmane Pr. Univ.d'Oran 1

Directeur de thèse : Mr Derhab Mohamed Pr. Univ. de Tlemcen

Année Universitaire : 2015-2016

Remerciements

Je remercie le Bon Dieu tout puissant de m'avoir donné la force, ainsi que L'audace pour affronter toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon encadreur Mr ***Mohamed Derhab****, Professeur à l'université de Tlemcen, qui a constamment suivi la progression de cette thèse avec beaucoup de patience et persévérance.*

J'exprime ma profonde gratitude et remerciement, à Mr ***Mustapha Yebdri*** *Professeur à l'université de Tlemcen et mon encadreur de magistère pour L'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence de cet jury.*

De même j'exprime ma profonde gratitude et remerciement à Mme ***Djamila Hadj Slimane*** *Professeur à l'université de Tlemcen, Mr* ***Abdelghani Ouheb*** *Professeur à l'université de Sidi Bel Abbes et Mr* ***Abderrahmane Senoussaoui*** *Professeur à l'université d'Oran 1 d'avoir accepté de faire partie de ce jury.*

Sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à mon éducation et ma formation et ce depuis mon premier âge d'écolier jusqu'aux études universitaires.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

_ Mes parents qui avec leurs sacrifices m'ont permis de donner le meilleur de moi –même.

_ Mes frère et mes soeurs .

_ Ma femme et mes deux enfants : Nafissa et Youcef.

_ Mes amis .

Nehari Mohamed.

Table des Matières

Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier l'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles avec des conditions aux limites nonlocales dans les échelles de temps.

La théorie des échelles de temps a été intoduite par Stéphan Hilger dans sa thèse de doctorat en 1988. Cette théorie permet d'unifier l'analyse continue et l'analyse discrète.

Elle a connu un essor considérable au cours de ses dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, en biologie et surtout en informatique qui fait appel aux ensembles discrets et donc, les équations aux différences qui sont abondamment utilisées pour faire avancer cette science. Elle est très utile pour décrire des phénomènes saisonniers. Par exemple, ce pourrait être pour l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoir été pendant un certain temps sous forme de larve.

Les équations dynamiques dans les échelles de temps on été étudiées par plusieurs auteurs en utilisant le théorème du point fixe de Leray-Schauder, la méthode des sous et sur solutions, la théorie du degré de Mawhin et les théorèmes des points fixes dans les cônes (voir [3], [4], [8], [9], [15], [19], [25] et [28])...

Il est bien connu que la méthode de sous et sur solutions couplée avec la technique itérative dans les échelles de temps a été utilisée par plusieurs auteurs pour montrer l'existence des solutions pour des problèmes aux limites non linéaires (voir [7, Chapitre 6], [18], [22], [23, Chapitre 4], [24] et [29])...

Cette thèse est divisée en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre on introduit quelques définitions et notations concernant la théorie des échelles de temps.

Le deuxième chapitre est consacré a l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(u^{\Delta})\right)^{\Delta} = f(t,u^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T, \\ u(a)-a_0u^{\Delta}(a)=\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)u\,(s)\,\Delta s, \\ u(\sigma^2(b))+a_1u^{\Delta}(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)u\,(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{1}$$

où $\varphi_p(u)=|u|^{p-2}\,u,\ u\in\mathbb{R},\ p>1,\ [a,b]_T$ est un intervalle d'une échelle de temps T, $f:[a,b]_T\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une function continue, $g_i:\left[a,\sigma^2(b)\right]_T\to\mathbb{R}_+$ sont deux fonctions continues pour $i=1,2$ et a_0 et a_1 sont deux nombres réels positifs. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [13].

Dans le troisième chapitre on étudie l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta}=f(t,u,u^{\Delta}),\ \ t\in[a,b]_T\,, \\ c_1u(a)-c_2u^{\Delta}(a)=L_1(u), \\ d_1u(\sigma^2(b))+d_2u^{\Delta}(\sigma(b))=L_2(u), \end{cases} \tag{2}$$

où $\varphi_p(u)=|u|^{p-2}\,u$, avec $p>1$, $f:[a,b]_T\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue, $L_i:C\left(\left[a,\sigma^2(b)\right]_T\right)\to\mathbb{R}$ sont continues et croissantes pour $i=1,2$, $a\in T_k$, $b\in T^k$ et $c_i,d_i\in\mathbb{R}_+$ tels que: $c_1+c_2\neq 0$ et $d_1+d_2\neq 0$.

Les résultats de ce chapitre améliorent et généralisent ceux qui ont été obtenu dans [4] et [12].

Enfin dans le dernier chapitre, on étudie l'existence des solutions pour le système d'équations différentielles quasilinéaires avec des conditions aux limites nonlocales dans les échelles de temps suivant

$$
\begin{cases}
-(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta} = f(t, u^{\sigma}, v^{\sigma}), \ t \in [a,b]_T \,, \\
-(\varphi_q(v^{\Delta}))^{\Delta} = g(t, u^{\sigma}, v^{\sigma}), \ t \in [a,b]_T \,, \\
c_1 u(a) - c_2 u^{\Delta}(a) = L_1(u), \\
c_3 u(\sigma^2(b)) + c_4 u^{\Delta}(\sigma(b)) = L_2(u), \\
c_1' v(a) - c_2' v^{\Delta}(a) = L_3(v), \\
c_3' v(\sigma^2(b)) + c_4' v^{\Delta}(\sigma(b)) = L_4(v),
\end{cases} \tag{3}
$$

où $\varphi_p(u) = |u|^{p-2} u, \ p > 1, \ q > 1, \ c_i, c_i' \in \mathbb{R}_+$, pour $i = 1, ..., 4, \ f : [a,b]_T \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, et $g : [a,b]_T \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et $L_i : C(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues et croissantes.pour $i = 1, ..., 4$.

Les résultats de ce chapitre généralisent ceux qui ont été obtenu dans [11].

Chapitre 1

La théorie des échelles de temps

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et résultats concernant la théorie des échelles de temps. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [6], [7] et [20].

1.1 Les échelles de temps

Définition 1.1 *Une échelle de temps est une partie non vide fermée de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *Les ensembles suivants sont des échelles de temps:* $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, [0,1] \cup [2,3]\,, [0,1] \cup \mathbb{N}$.

Par contre les ensembles suivants $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ ne sont pas des échelles de temps.

On note une échelle de temps par le symbole T.

1.2 Les opérateurs de sauts

Définition 1.2 *Soit T une échelle de temps. Pour tout $t \in T$, on définit l'opérateur de saut supèrieur $\sigma : T \to T$ par*

$$\sigma(t) := \inf \{s \in T : s > t\}\,.$$

Définition 1.3 *Soit T une échelle de temps. Pour tout $t \in T$, on définit l'opérateur de saut infèrieur $\rho : T \to T$ par*

$$\rho(t) := \sup \{s \in T : s < t\}\,.$$

Remarque 1.1 *Dans ces définitions, on pose* $\inf \Phi = \sup T$, *c'est-à-dire* $\sigma(t) = t$ *si* T *admet un maximum* t.

Remarque 1 *On pose* $\sup \Phi = \inf T$, *c'est-à-dire* $\rho(t) = t$ *si* T *admet un minimun* t.

1.3 La classification des points dans une échelle de temps T.

Définition 1.4 *Un point* t *de* T *est dit dispersé à droite si* $\sigma(t) > t$.

Définition 1.5 *Un point* t *de* T *est dit dispersé à gauche si* $\rho(t) < t$.

Définition 1.6 *Un point* t *de* T *est dit isolé si il est à la fois dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.7 *Un point* t *de* T *est dit dense à droite si* $t < \sup T$ *et* $\sigma(t) = t$.

Définition 1.8 *Un point* t *de* T *est dit dense à gauche si* $t > \inf T$ *et* $\rho(t) = t$.

Définition 1.9 *Un point* t *de* T *est dit dense si il est à la fois dense à droite et à gauche.*

Définition 1.10 *La fonction de granulation* μ *est définie par*

$$\begin{array}{ccc} \mu & : & T \to [0, +\infty), \\ t & \longmapsto & \mu(t) = \sigma(t) - t. \end{array}$$

Définition 1.11 *L'ensemble* T^κ *est défini par*

$$T^\kappa = \begin{cases} T \backslash (\rho(\sup T), \sup T], & si\ \sup T < \infty, \\ T & si\ \sup T = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.12 *L'ensemble* T_κ *est défini par*

$$T_\kappa = \begin{cases} T \backslash (\inf T, \sigma(\inf T)], & si\ \inf T > \infty, \\ T & si\ \inf T = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.13 *On définit la fonction f^σ par*

$$\begin{aligned} f^\sigma &: \quad T \to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \quad f^\sigma(t) = f(\sigma(t)). \end{aligned}$$

Exemple 1.2 *Etudions les deux cas des échelles de temps $T = \mathbb{R}$ et $T = \mathbb{Z}$.*

i) Si $T = \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, +\infty) = t,$$

et

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t.$$

Par conséquent tout point t de $\mathbb{R}$ est un point dense et on a

$$\mu(t) = 0.$$

ii) Si $T = \mathbb{Z}$, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, ...\} = t+1,$$

et

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\{..., t-2, t-1\} = t-1.$$

Par conséquent tout point t de $\mathbb{Z}$ est un point isolé et on a

$$\mu(t) = 1.$$

1.4 Delta différentiabilité

Soit $f : T \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.14 *On dit que f admet une delta-dérivée en un point $t \in T^\kappa$ et on la note $f^\Delta(t)$*

si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de t tel que

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|, \forall s \in U.$$

Définition 1.15 *On dit que f est delta-différentiable dans T^{κ} si $f^{\Delta}(t)$ existe pour tout $t \in T^{\kappa}$.*

Exemple 1.3 *Soit la fonction $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Pour cet exemple $f^{\Delta}(t) = 0$, en effet pour chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| &= \left|\alpha - \alpha - 0(\sigma(t) - s)\right| \\ &= 0 \\ &\leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|, \forall s \in T. \end{aligned}$$

Exemple 1.4 *Soit la fonction $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$.*

Pour cet exemple $f^{\Delta}(t) = 1$, en effet pour chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| &= \varepsilon \left|\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)\right| \\ &= 0 \\ &\leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|, \forall s \in T. \end{aligned}$$

Théorème 1.1 *[6]Soit $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in T^{\kappa}$. Alors on a les propriétés suivantes*

(i) Si f est delta-différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii) Si f est continue en t et t est dispersé à droite, alors f est delta-différentiable en t et $f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$.

(iii) Si t est dense à droite , alors f est différentiable en t si et seulement si $\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ existe et finie.

Dans ce cas $f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$.

(iv) Si f est delta-différentiable en t alors $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$.

Théorème 1.2 *[6]Soient $f, g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions delta-différentiables en $t \in T^{\kappa}$, alors on a*

(i) $f+g$ est delta-différentiable en t et on a

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αf est delta-différentiable en t et on a

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) Si fg est delta-différentiable en t alors on a

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\\ &= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).\end{aligned}$$

(iv) Si $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est delta-différentiable en t et on a

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

(v) Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est delta-différentiable en t et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Définition 1.16 *Soit $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, f est dite deux foix delta-différentiables si f^{Δ} est delta-différentiable sur $T^{\kappa^2} = (T^{\kappa})^{\kappa}$ avec une dérivée $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta} : T^{\kappa^2} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Définition 1.17 *Soient f et g deux fonctions delta-différentiables et supposons f^{σ} est delta-différentiable, alors*

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta\Delta} &= (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta}\\ &= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta})^{\sigma}g^{\Delta} + (f^{\sigma})^{\Delta}g^{\Delta} + (f^{\sigma})^{\sigma}g^{\Delta\Delta}.\end{aligned}$$

Remarque 1.2 *La fonction* $(fg)^{\Delta}$ *est delta-différentiable si* f *et* g *sont delta-différentiables.*

1)_ Pour une fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \\ &= f(t+1) - f(t), \forall t \in T, \end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\ &= f^{\Delta}(t+1) - f^{\Delta}(t) \\ &= f(t+2) - f(t+1) - f(t+1) + f(t) \\ &= f(t+2) - 2f(t+1) + f(t). \end{aligned}$$

2)_ L'opérateur σ n'est pas continu en général, en effet

Remarque 1.3 *Soit* T *l'échelle de temps définie par:*

$$T = \left\{ \sin(\frac{\pi}{2(n+1)}),\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0, 1\}.$$

Si on pose $u_n = \sin(\frac{\pi}{2(n+1)})$, *alors on a*

$$\sigma(u_n) = u_{n+1} = \sin(\frac{\pi}{2(n+2)}) \longrightarrow 0 \neq 1 = \sigma(0),$$

donc σ *est discontinu au point* 0.

Théorème 1.3 *[7] (Théorème de la moyenne)*

Soit $g : [a, b]_T \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et supposons que* g *est delta-différentiable sur* $[a, b)_T$. *Alors il existe* $\xi, \tau \in [a, b)_T$ *tel que*

$$g^{\Delta}(\tau) \leq \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq g^{\Delta}(\xi).$$

Définition 1.18 *Soient* T *une échelle de temps et* $g : [a, b]_T \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. La fonction* $G : T^{\kappa} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est appelée primitive de* g *si* $G^{\Delta}(t) = g(t)$ *pour tout* $t \in T^{\kappa}$. *Dans ce cas on définit* *l'intégrale de g par*

$$\int_{t_1}^{t_2} g(s)\Delta s = G(t_2) - G(t_1), \text{ pour } t_1, t_2 \in T.$$

Théorème 1.4 *Soit $f : [a,b]_T \to \mathbb{R}$ une fonction tel que $[a,b]_T = \{t_k : k = 0, 1, ..., n\}$, alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(t_k) f(t_k).$$

Définition 1.19 *Soit T une échelle de temps, la fonction $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ est rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite et sa limite existe en tout point dense à gauche.*

Remarque 1.4 *Toute fonction continue est rd-continue.*

Le résultat suivant est du à Stéphan Hilger (voir [20]) et on peut le trouver dans [6] et [7].

Proposition 2 *Soient T une échelle de temps et g, h sont deux fonctions de T dans $\mathbb{R}$ tel que $h^{\Delta}(t) = g(t)$ alors on a les propriétés suivantes*

(i) Si g est rd-continue, alors g a une primitive $h : t \longrightarrow \int_s^t g(r)\Delta r = h(t) - h(s)$, pour $s, t \in T$.

(ii) Si g est rd-continue, alors $\left|\int_s^t g(r)\Delta r\right| \leq \int_s^t |g(r)|\,\Delta r$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Theoreme 2.8 dans [14].

Théorème 1.5 *[14] Soit T une échelle de temps et supposons que*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\widetilde{g}_n : [s,t]_T \longrightarrow \mathbb{R}$ est rd-continue;

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \widetilde{g}_n = g$ sur $[s,t]_T$ et g est rd-continue sur $[s,t]_T$;

(iii) Il existe une fonction rd-continue $\widetilde{g}$ tel que $|\widetilde{g}_n| \leq |\widetilde{g}|$ sur $[s,t]_T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_s^t \widetilde{g}_n(r)\Delta r = \int_s^t g(r)\Delta r.$$

Chapitre 2

Existence des solutions minimales et maximales pour un problème quasilineaire elliptique avec des conditions aux limites nonlocales dans les échelles de temps.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la construction des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(u^{\Delta})\right)^{\Delta} = f(t, u^{\sigma}),\, t \in [a,b]_T, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u\,(s)\, \Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u\,(s)\, \Delta s, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\varphi_p(u) = |u|^{p-2}\, u,\ u \in \mathbb{R},\ p > 1,\ [a,b]_T$ est un intervalle d'une échelle de temps T, $f : [a,b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une function continue, $g_i : \left[a, \sigma^2(b)\right]_T \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues, $i = 0{,}1$ et a_0 et a_1 sont deux nombres réels positifs.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, on donne quelques résultats préliminaires. Dans la deuxième section, on énonce et on montre le résultat principal de ce chapitre et dans la dernière section, on donne un exemple d'application. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [13].

Notation 3 *Dans ce chapitre on note par D l'ensemble suivant:*

$$D = \left\{ g \in C^1(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T) : \left(\varphi_p(g^\Delta)\right)^\Delta \text{ est rd-continue sur } [a,b]_T \right\}.$$

2.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques resultats préliminaires qui seront utiles pour la suite.

On considère le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = -\widehat{h}(t, u^\sigma), \ t \in [a,b]_T, \\ u(a) - a_2 u^\Delta(a) = c, \\ u(\sigma^2(b)) + a_3 u^\Delta(\sigma(b)) = d, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\widehat{h} : [a,b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante par rapport à la seconde variable, a_2 et a_3 sont des nombres réels positifs et c et d sont des nombres réels.

Lemme 2.1 *(Principe de comparaison faible).*

Soient u_1,u_2 deux fonctions tels que $u_i \in D$ pour $i = 1$,2, et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta + \widehat{h}(t, u_1^\sigma) \le -(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta + \widehat{h}(t, u_2^\sigma), \ t \in [a,b]_T, \\ u_1(a) - a_2 u_1^\Delta(a) \le u_2(a) - a_2 u_2^\Delta(a), \\ u_1(\sigma^2(b)) + a_3 u_1^\Delta(\sigma(b)) \le u_2(\sigma^2(b)) + a_3 u_2^\Delta(\sigma(b)), \end{cases} \tag{2.3}$$

alors $u_1(t) \le u_2(t)$, $\forall t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$.

Preuve: Supposons qu'il existe $t_0 \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$ tel que

$$w(t_0) := u_2(t_0) - u_1(t_0) = \min\left\{w(t) : a \le t \le \sigma^2(b)\right\} < 0,$$

et

$$w(t) > w(t_0),\ \forall t \in (t_0, \sigma^2(b)]_T. \tag{2.4}$$

On distingue les cas suivants

Cas 1:

i) Si $t_0 = a$ et $a = \sigma(a)$, on obtient la contradiction suivante

$$0 > u_2(a) - u_1(a) \geq a_2(u_2^\Delta(a) - u_1^\Delta(a)) = 0.$$

ii) Si $t_0 = a$ et $a < \sigma(a)$, on distingue deux sous-cas

1) Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors d'aprés (2.3) on a $w(a) > 0$ ce qui contredit la définition de t_0.

2) Si $w^\Delta(t_0) \leq 0$, alors $w(a) \geq w(\sigma(a))$ ce qui contredit aussi la définition de t_0.

Cas 2:

i) Si $t_0 = \sigma^2(b)$ et $\sigma^2(b) = \sigma(b)$, on obtient la contradiction

$$0 > u_2(\sigma^2(b)) - u_1(\sigma^2(b)) \geq -a_3(u_2^\Delta(\sigma(b)) - u_1^\Delta(\sigma(b))) = 0.$$

ii) Si $t_0 = \sigma^2(b)$ et $\sigma^2(b) > \sigma(b)$, on distingue deux sous-cas

1) Si $w^\Delta(\sigma(b)) > 0$, alors on a $w(\sigma^2(b)) > w(\sigma(b))$, mais ceci contredit la définition de t_0.

2) Si $w^\Delta(\sigma(b)) \leq 0$, alors d'aprés (2.3), on a $w(\sigma^2(b)) > 0$ ce qui contredit la définition de t_0.

Cas 3: Si $t_0 \in \big(a, \sigma^2(b)\big)_T$, on distingue quatre sous-cas:

Sous-cas 1: $\rho(t_0) = t_0 = \sigma(t_0)$.

i) Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors $\lim\limits_{t\to t_0} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0)$, ce qui entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) > 0$ sur $(t_0 - \delta, t_0]$, ce qui veut dire que w est croissante sur $(t_0 - \delta, t_0]$. Mais ceci contredit la définition de t_0.

ii) Si $w^\Delta(t_0) < 0$, alors $\lim\limits_{t\to t_0} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0) < 0$, ce qui entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) < 0$ sur $[t_0, t_0 + \delta)$, ce qui veut dire que w est décroissante sur $[t_0, t_0 + \delta)$. Mais ceci contredit la définition de t_0.

iii) Si $w^\Delta(t_0) = 0$, alors $u_1^\Delta(t_0) = u_2^\Delta(t_0)$ et par suite $\varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) = (\varphi_p(u_2^\Delta(t_0))$.

Comme φ_p est croissante, on obtient

$$-(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(t_0) + (\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{-\varphi_p(u_2^\Delta(t)) + \varphi_p(u_1^\Delta(t))}{t - t_0} \leq 0. \tag{2.5}$$

Mais en ce point, on a

$$-(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(t_0) + \widehat{h}(t_0, u_2^\sigma) + (\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(t_0) - \widehat{h}(t_0, u_1^\sigma) \geq 0.$$

C'est-à-dire que

$$-(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(t_0) + (\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(t_0) \geq \widehat{h}(t_0, u_1^\sigma) - \widehat{h}(t_0, u_2^\sigma).$$

Comme $u_2(t_0) < u_1(t_0)$ et $\widehat{h}$ est une fonction strictement croissante par rapport à la seconde variable, on obtient

$$-(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(t_0) + (\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(t_0) > 0.$$

Ce qui est en contradiction avec (2.5).

Sous-cas 2: $\rho(t_0) = t_0 < \sigma(t_0)$.

i) Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors $\lim\limits_{t\to t_0^-} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0)$, ce qui entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) > 0$ sur $(t_0 - \delta, t_0]$, ce qui veut dire que w est croissante sur $(t_0 - \delta, t_0]$. Mais ceci contredit la définition de t_0.

ii) Si $w^\Delta(t_0) \leq 0$, alors on a $w^\sigma(t_0) \leq w(t_0)$. Mais ça contredit la définition de t_0.

Sous-cas 3: $\rho(t_0) < t_0 = \sigma(t_0)$.

i) Si $w^\Delta(t_0) < 0$, alors $\lim\limits_{t\to t_0} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0) < 0$, ce qui entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) < 0$ sur $[t_0, t_0 + \delta)$, ce qui veut dire que w est décroissante sur $[t_0, t_0 + \delta)$. Mais ceci contredit la définition de t_0.

ii) Si $w^\Delta(t_0) \geq 0$, alors on a

$$u_2^\Delta(t_0) \geq u_1^\Delta(t_0).$$

Alors

$$\varphi_p(u_2^\Delta(t_0)) \geq \varphi_p(u_1^\Delta(t_0)).$$

D'autre part, comme $\rho(t_0)$ est un point dispersé à droite, on a

$$w^{\Delta}(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0.$$

d'où

$$u_2^{\Delta}(\rho(t_0)) < u_1^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Ce qui entraîne que

$$\varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))). \tag{2.6}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
(\varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(\rho(t_0)) &= \frac{\varphi_p(u_1^{\Delta})(t_0) - \varphi_p(u_1^{\Delta})(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
&< \frac{\varphi_p(u_2^{\Delta})(t_0) - \varphi_p(u_2^{\Delta})(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
&= (\varphi_p(u_2^{\Delta})^{\Delta}(\rho(t_0)).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que

$$\varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))),$$

et comme la fonction $\widehat{h}$ est croissante par rapport à la deuxième variable, on obtient:

$$-\varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_2^{\sigma}(t_0)) < -\varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))) + \widehat{h}((\rho(t_0)), u_1^{\sigma}(t_0)).$$

Ce qui est en contradiction avec (2.3).

Sous-cas 4: $\rho(t_0) < t_0 < \sigma(t_0)$.

i) Si $w^{\Delta}(t_0) \leq 0$, alors $w^{\sigma}(t_0) \leq w(t_0)$, ce qui contredit la définition de t_0.

ii) Si $w^{\Delta}(t_0) > 0$, alors on a

$$u_2^{\Delta}(t_0) > u_1^{\Delta}(t_0).$$

Ce qui entraîne que:

$$\varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)) > \varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)).$$

D'autre part, on a:

$$w^{\Delta}(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0.$$

C'est-à-dire:

$$u_2^{\Delta}(\rho(t_0)) < u_1^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Alors on a:

$$\varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))).$$

Par suite, on a:

$$\begin{aligned}
(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) &= \frac{\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
&< \frac{\varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
&= (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire:

$$(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) < (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Comme $\widehat{h}$ est une fonction strictement croissante par rapport à la deuxième variable, on obtient:

$$-(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) + \widehat{h}(t, u_1(t_0)) > -(\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) + \widehat{h}(t, u_2(t_0)).$$

Ce qui est en contradiction avec (2.3). ■

Remarque 2.1 *La preuve du Lemme 2.1 est une généralisation du Lemme* 3.4 *dans [1].*

Définition 2.1 *: On dit que $\alpha \in D$ est une sous solution de (2.2) si:*

$$\begin{cases}
-\left(\varphi_p(\alpha^{\Delta})\right)^{\Delta} \leq -\widehat{h}(t, \alpha^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\
\alpha(a) - a_2\alpha^{\Delta}(a) \leq c, \\
\alpha(\sigma^2(b)) + a_3\alpha^{\Delta}(\sigma(b)) \leq d.
\end{cases}$$

Définition 2.2 *: On dit que $\beta \in D$ est une sur solution de (2.2) si:*

$$\begin{cases}
-\left(\varphi_p(\beta^{\Delta})\right)^{\Delta} \geq -\widehat{h}(t, \beta^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T, \\
\beta(a) - a_2\beta^{\Delta}(a) \geq c, \\
\beta(\sigma^2(b)) + a_3\beta^{\Delta}(\sigma(b)) \geq d.
\end{cases}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 2.1 *: Supposons que α et β sont des sous et sur solutions du problème (2.2) tel que $\alpha(t) \leq \beta(t)$, pour tout $t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$. Alors le problème (2.2) admet une unique solution $u \in D$ tel que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \text{ pour tout } t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du Théorème 3.1 dans [1], on peut montrer que le problème (2.2) admet au moins une solution et à l'aide du Lemme 2.1 il résulte que ce problème admet une unique solution. ∎

Maintenant, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(u^\Delta)\right)^\Delta = f(t, u^\sigma),\ t \in [a,b]_T, \\ u(a) - a_0 u^\Delta(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)u(s)\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^\Delta(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)u(s)\Delta s, \end{cases} \tag{2.7}$$

où $f : [a,b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $g_i : \left[a, \sigma^2(b)\right]_T \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues ($i = 0{,}1$) et a_0 et a_1 sont deux nombres réels positifs.

Définition 2.3 *On dit que u est une solution de (2.7) si:*

i) $u \in D$.

ii) u satisfait (2.7).

Définition 2.4 *On dit que $\underline{u}$ est une sous solution de (2.7) si:*

i) $\underline{u} \in D$.

ii) $$\begin{cases} -\left(\varphi_p(\underline{u}^\Delta)\right)^\Delta \leq f(t, \underline{u}^\sigma),\ t \in [a,b]_T, \\ \underline{u}(a) - a_0 \underline{u}^\Delta(a) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}(s)\Delta s, \\ \underline{u}(\sigma^2(b)) + a_1 \underline{u}^\Delta(\sigma(b)) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{u}(s)\Delta s. \end{cases}$$

Définition 2.5 *On dit que $\overline{u}$ est une sur solution de (2.7) si:*

i) $\overline{u} \in D$.

ii) $$\begin{cases} -\left(\varphi_p(\overline{u}^\Delta)\right)^\Delta \geq f(t, \overline{u}^\sigma),\ t \in [a,b]_T, \\ \overline{u}(a) - a_0 \overline{u}^\Delta(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}(s)\Delta s, \\ \overline{u}(\sigma^2(b)) + a_1 \overline{u}^\Delta(\sigma(b)) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}(s)\Delta s. \end{cases}$$

2.3 Résultat principal

Dans cette section, on énonce et on montre le résultat principal de ce chapitre.

Sur la fonction f, on impose la condition suivante:

(H) Il existe une fonction continue $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strictement croissante tel que: $s\longmapsto f(t,s)+h(s)$ est croissante pour tout $t\in[a,b]_T$.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant:

Théorème 2.2 *Supposons que l'hypothèse (H) est satisfaite et soient $\underline{u}$ et $\overline{u}$ des sous et sur solutions respectivement du problème (2.7) tel que $\underline{u}\leq\overline{u}$ sur $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$, alors le problème (2.7) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$ tel que pour chaque solution u de (2.7) avec $\underline{u}\leq u\leq\overline{u}$ sur $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$, on a*

$$\underline{u}\leq u_\star\leq u\leq u^\star\leq\overline{u},\ t\in\left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin d'un résultat préliminaire:

Soient $\underline{w}$, $\overline{w}\in D$, tel que $\underline{u}\leq\underline{w}\leq\overline{w}\leq\overline{u}$, $t\in\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$.

On considère les problèmes aux limites suivants:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta+h(u^\sigma)=f(t,\overline{w}^\sigma)+h(\overline{w}^\sigma),\ t\in[a,b]_T\,,\\ u(a)-a_0u^\Delta(a)=\int_a^{\sigma^2(b)}g_1(s)\overline{w}(s)\Delta s,\\ u(\sigma^2(b))+a_1u^\Delta(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)}g_2(s)\overline{w}(s)\Delta s,\end{cases}\tag{2.8}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta+h(u^\sigma)=f(t,\underline{w}^\sigma)+h(\underline{w}^\sigma),\ t\in[a,b]_T\,,\\ u(a)-a_0u^\Delta(a)=\int_a^{\sigma^2(b)}g_1(s)\underline{w}(s)\Delta s,\\ u(\sigma^2(b))+a_1u^\Delta(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)}g_2(s)\underline{w}(s)\Delta s.\end{cases}\tag{2.9}$$

Lemme 2.2 *Soient $\underline{w}$ et $\overline{w}$ des sous et sur solutions respectivement du problème (2.7) et supposons que la condition (H) est satisfaite. Alors il existe deux solutions uniques $\widetilde{u}$ et $\widehat{u}$ de (2.8) et (2.9) respectivement tel que*

$$\underline{u}\leq\underline{w}\leq\widetilde{u}\leq\widehat{u}\leq\overline{w}\leq\overline{u}\ \textit{sur}\ \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

Preuve: La preuve est donnée en deux étapes.

Etape 1: $\underline{w}$ est une sous solution de (2.2).

Soit $t \in [a,b]_T$, on a

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(\underline{w}^\Delta))^\Delta + h(\underline{w}^\sigma) &\leq f(t,\underline{w}^\sigma) + h(\underline{w}^\sigma), \\ &\leq f(t,\overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\ -(\varphi_p(\underline{w}^\Delta))^\Delta + h(\underline{w}^\sigma) \leq f(t,\overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma). \tag{2.10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \underline{w}(a) - a_0\underline{w}^\Delta(a) &\leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{w}(s)\Delta s, \\ &\leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{w}(s)\Delta s. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\underline{w}(a) - a_0\underline{w}^\Delta(a) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{w}(s)\Delta s. \tag{2.11}$$

D'une manière analogue, on a

$$\underline{w}(\sigma^2(b)) + a_1\underline{w}^\Delta(\sigma(b)) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{w}(s)\Delta s. \tag{2.12}$$

Alors d'aprés (2.10), (2.11) et (2.12), il résulte que $\underline{w}$ est une sous solution de (2.2).

Etape 2: $\overline{w}$ est une sur solution de (2.2).

Soit $t \in [a,b]_T$, on a

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(\overline{w}^\Delta))^\Delta + h(\overline{w}^\sigma) &\geq f(t,\overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma), \\ &\geq f(t,\overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\ -(\varphi_p(\overline{w}^\Delta))^\Delta + h(\overline{w}^\sigma) \geq f(t,\overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma). \tag{2.13}$$

D'autre part, on a

$$\overline{w}(a) - a_0\overline{w}^{\Delta}(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{w}(s)\Delta s, \tag{2.14}$$

et

$$\overline{w}(\sigma^2(b)) + a_1\overline{w}^{\Delta}(\sigma(b)) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{w}(s)\Delta s. \tag{2.15}$$

Alors d'aprés (2.13), (2.14) et (2.15), il résulte que $\overline{w}$ est une sur solution de (2.2).

D'aprés les **Etapes 1** et **2** et puisque la fonction $u \mapsto f(t,u)+h(u)$ est continue et strictement croissante, alors d'aprés le Théorème 2.1, le problème (2.8) admet une unique solution tel que $\underline{w} \leq \widetilde{u} \leq \overline{w}$.

D'une manière analogue on montre que le problème (2.9) admet une unique solution tel que $\underline{w} \leq \widehat{u} \leq \overline{w}$ et en utilisant une preuve similaire à celle du Lemme 2.1, on a $\widetilde{u} \leq \widehat{u}$ sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$.

■

Preuve: du Théorème 2.2

La preuve est donnée en plusieurs étapes.

On pose $\underline{u}_0 = \underline{u}$, $\overline{u}_0 = \overline{u}$ et définissons les suites $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_{n+1})^{\Delta})^{\Delta} + h(\underline{u}_{n+1}^{\sigma}) = f(t,\underline{u}_n^{\sigma}) + h(\underline{u}_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \underline{u}_{n+1}(a) - a_0\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}_n(s)\Delta s, \\ \underline{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_1\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{u}_n(s)\Delta s, \end{cases} \tag{2.16}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_{n+1})^{\Delta})^{\Delta} + h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}) = f(t,\overline{u}_n^{\sigma}) + h(\overline{u}_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \overline{u}_{n+1}(a) - a_0\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_n(s)\Delta s, \\ \overline{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_1\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_n(s)\Delta s. \end{cases} \tag{2.17}$$

Etape 1: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Raisonnons par recurrence.

i) Pour $n = 0$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_1)^{\Delta})^{\Delta} + h(\underline{u}_1^{\sigma}) = f(t, \underline{u}^{\sigma}) + h(\underline{u}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \underline{u}_1(a) - a_0 \underline{u}_1^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}(s)\Delta s, \\ \underline{u}_1(\sigma^2(b)) + a_1 \underline{u}_1^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{u}(s)\Delta s, \end{cases} \tag{2.18}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_1)^{\Delta})^{\Delta} + h(\overline{u}_1^{\sigma}) = f(t, \overline{u}^{\sigma}) + h(\overline{u}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \overline{u}_1(a) - a_0 \overline{u}_1^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}(s)\Delta s, \\ \overline{u}_1(\sigma^2(b)) + a_1 \overline{u}_1^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{2.19}$$

Puisque $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont des sous et sur solutions de (2.18), alors d'aprés le Lemme 2.2, on a

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \overline{u}_1 \leq \overline{u}_0 = \overline{u} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

ii) Supposons pour $n > 1$, on a

$$\underline{u} \leq \underline{u}_{n-1} \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}_{n-1} \leq \overline{u} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T,$$

et montrons que

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Soit $t \in [a,b]_T$, on a

$$-(\varphi_p(\overline{u}_n)^{\Delta})^{\Delta} + h(\overline{u}_n^{\sigma}) = f(t, \overline{u}_{n-1}^{\sigma}) + h(\overline{u}_{n-1}^{\sigma}). \tag{2.20}$$

Puisque $\overline{u}_{n-1} \geq \overline{u}_n$ et en utilisant l'hypothèse (H), on obtient

$$f(t, \overline{u}_{n-1}^{\sigma}) + h(\overline{u}_{n-1}^{\sigma}) \geq f(t, \overline{u}_n^{\sigma}) + h(\overline{u}_n^{\sigma}). \tag{2.21}$$

Alors, d'aprés (2.20) et (2.21), on obtient

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\ -(\varphi_p(\overline{u}_n)^{\Delta})^{\Delta} \geq f(t, \overline{u}_n^{\sigma}). \tag{2.22}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\overline{u}_n(a) - a_0\overline{u}_n^{\Delta}(a) &= \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_{n-1}(s)\Delta s,\\ &\geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_n(s)\Delta s.\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\overline{u}_n(a) - a_0\overline{u}_n^{\Delta}(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_n(s)\Delta s, \tag{2.23}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{u}_n(\sigma^2(b)) + a_1\overline{u}_n^{\Delta}(\sigma(b)) &= \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_{n-1}(s)\Delta s,\\ &\geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_n(s)\Delta s.\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\overline{u}_n(\sigma^2(b)) + a_1\overline{u}_n^{\Delta}(\sigma(b)) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_n(s)\Delta s. \tag{2.24}$$

Alors, d'aprés (2.22),(2.23) et (2.24), il résulte que $\overline{u}_n$ est une sur solution de (2.17).

D'une manière analogue, on peut montrer que $\underline{u}_n$ est une sous solution de (2.17) et par suite d'aprés le Lemme 2.2, il existe une unique solution $\underline{u}_{n+1}$ et $\overline{u}_{n+1}$ de (2.16) et (2.17) tel que

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}, \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Par suite, il résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}, \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Etape 2: Il existe une constante positive C_1 indépendante de $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left\|\overline{u}_n^{\Delta}\right\|_0 := \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T} \left|\overline{u}_n^{\Delta}(t)\right| \leq C_1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effet: soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a, \sigma(b)]_T$. Puisque $\overline{u}_n$ est continue sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$ et $\overline{u}_n^{\Delta}$ est continue sur $[a,\sigma(b))_T$, alors d'aprés le Théorème 1.3, il existe ξ_n, $\tau_n \in \left[a,\sigma^2(b)\right)_T$ tel que

$$\overline{u}_n^{\Delta}\left(\tau_n\right) \leq \frac{\overline{u}_n\left(\sigma^2(b)\right)-\overline{u}_n\left(a\right)}{\sigma^2(b)-a} \leq \overline{u}_n^{\Delta}\left(\xi_n\right).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
-\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) &= -\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(\tau_n)+\int_{\tau_n}^{t}(f(s,\overline{u}_n^{\sigma}(s))+h(\overline{u}_n^{\sigma}(s))-h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(s)))\Delta s \\
&\leq \begin{array}{l}\varphi_p\left(\dfrac{\overline{u}_{n+1}\left(\sigma^2(b)\right)-\overline{u}_{n+1}\left(a\right)}{\sigma^2(b)-a}\right) \\ +\displaystyle\int_{\tau_n}^{t}(f(s,\overline{u}_n^{\sigma}(s))+h(\overline{u}_n^{\sigma}(s))-h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(s)))\Delta s\end{array} \\
&\leq \frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\varphi_p\left(\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right)-\underline{u}\left(a\right)\right)+K,
\end{aligned}$$

où:

$$K=\left(M_1(f)+2M_2(h)\right)\left(\sigma(b)-a\right),$$

$$M_1(f):=\max\left\{\left|f(t,u)\right|: t\in[a,b]_T\,,\ \underline{u}\leq u\leq\overline{u}\right\},$$

et

$$M_2(h):=\max\left\{\left|h(u)\right|:\underline{u}\leq u\leq\overline{u}\right\}.$$

Alors, si on pose

$$\widetilde{C_1}:=\frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\varphi_p\left(\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right)-\underline{u}\left(a\right)\right)+\left(M_1(f)+2M_2(h)\right)\left(\sigma\left(b\right)-a\right),$$

on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[a,\sigma\left(b\right)]_T\,,\ \ \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\leq\widetilde{C_1}.$$

Ce qui entraîne que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[a,\sigma\left(b\right)]_T\,,\ \overline{u}_{n+1}^{\Delta}(t)\leq\widetilde{C}_1^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.25}$$

D'une manière similaire, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T, \ \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) \geq \widetilde{C_2}, \tag{2.26}$$

où

$$\widetilde{C_2} := \frac{1}{(\sigma^2(b) - a)^{p-1}} \varphi_p\left(\underline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \overline{u}(a)\right) + (m_1(f) + 2m_2(h))(\sigma(b) - a),$$

avec

$$m_1(f) := \min\{f(t,u) : t \in [a,b]_T, \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\},$$

et

$$m_2(h) := \min\{|h(u)| : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}.$$

Ce qui entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T, \ \overline{u}_{n+1}^{\Delta}(t) \geq \left|\widetilde{C_2}\right|^{\frac{2-p}{p-1}} \widetilde{C_2}. \tag{2.27}$$

Maintenant si on pose par définition

$$C_1 := \max\left(\widetilde{C}_1^{\frac{1}{p-1}}, \left|\widetilde{C_2}\right|^{\frac{1}{p-1}}, \max_{t \in [a,\sigma(b)]_T} \left|\overline{u}^{\Delta}(t)\right|\right),$$

alors d'aprés (2.25) et (2.27), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T, \ \max_{t \in [a,\sigma(b)]_T} \left|\overline{u}_n^{\Delta}(t)\right| \leq C_1.$$

Etape 3: Il existe une constante positive C_3 indépendante de $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left\|\underline{u}_n^{\Delta}\right\|_0 := \max_{t \in [a,\sigma(b)]_T} \left|\underline{u}_n^{\Delta}(t)\right| \leq C_3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La preuve est similaire à celle de l'**Etape 2**.

Etape 4: La suite $(\overline{u}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_T$.

Soient $\varepsilon > 0$ et t, $s \in [a, \sigma(b)]_T$ tel que $t < s$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| \leq (M_1(f) + 2M_2(h))|s - t|.$$

Si on pose $K_1 := M_1(f) + 2M_2(h)$, on a

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| \leq K_1 \left|s - t\right|.$$

Alors, si on choisit $|s - t| < \dfrac{\varepsilon}{K_1 + 1}$, on obtient

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| < \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}))_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_T$.

Or, comme l'application φ_p^{-1} est un homeomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que

$$\left|\overline{u}_n^{\Delta}(s) - \overline{u}_n^{\Delta}(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s)) - \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t))\right|,$$

c'est-à-dire la suite $(\overline{u}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_T$.

Etape 5: La suite $\left(\underline{u}_n^{\Delta}\right)$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_T$.

La preuve est similaire à celle de l'**Etape 4**.

Etape 6: La suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution maximale de (2.7).

D'aprés les **Etapes 1, 2** et **4** la suite de fonctions $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $C^1(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T)$ et $(\overline{u}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_T$, alors d'aprés le Théorème d'Arzéla-Ascoli il existe une sous-suite $(\overline{u}_{n_j})$ de $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T)$.

Soit

$$u := \lim_{n_j \to +\infty} = \overline{u}_{n_j}.$$

Alors

$$u^{\Delta} = \lim_{n_j \to +\infty} = \overline{u}_{n_j}^{\Delta}.$$

Or d'aprés l'**Etape 1** la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers une fonction qu'on note par $u^\star$ et par unicité de la limite, on a $u = u^\star$ et la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^1(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T)$ vers $u^\star$.

Soit $t \in [a, b]_T$, on a

$$-\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) = -\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(a) + \int_a^t (f(\tau, \overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(\tau)))\Delta\tau.$$

Maintenant, si on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$(f(\tau,\overline{u}_n^\sigma(\tau))+h(\overline{u}_n^\sigma(\tau))-h(\overline{u}_{n+1}^\sigma(\tau)))\to(f(\tau,u^{\star\sigma}(\tau)),$$

D'autre part on a

$$\exists K_2>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall\tau\in[a,b]_T\,,\ \left|(f(\tau,\overline{u}_n^\sigma(\tau))+h(\overline{u}_n^\sigma(\tau))-h(\overline{u}_{n+1}^\sigma(\tau)))\right|\leq K_2.$$

Alors d'aprés le Théorème 1.5, on a

$$-\varphi_p(u^{\star\Delta})(t)=\varphi_p(u^{\star\Delta})(a)+\int_a^t f(\tau,u^{\star\sigma}(\tau))\Delta\tau.$$

Ainsi, on obtient

$$\forall t\in[a,b]_T\,,\ -(\varphi_p(u^{\star\Delta}))^\Delta=f(t,u^{\star\sigma}). \tag{2.28}$$

De même d'aprés le Théorème 1.5, on a

$$u^\star(a)-a_0u^{\star\Delta}(a)=\int_a^{\sigma^2(b)}g_1(s)u^\star(s)\Delta s, \tag{2.29}$$

et

$$u^\star(\sigma^2(b))+a_1u^{\star\Delta}(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)}g_2(s)u^\star(s)\Delta s. \tag{2.30}$$

Alors, d'aprés (2.28),(2.29) et (2.30), il résulte que $u^\star$ est une solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta=f(t,u^\sigma),\ t\in[a,b]_T\,,\\ u(a)-a_0u^\Delta(a)=\int_a^{\sigma^2(b)}g_1(s)u(s)\Delta s,\\ u(\sigma^2(b))+a_1u^\Delta(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)}g_2(s)u(s)\Delta s.\end{cases} \tag{2.31}$$

Maintenant, on montre que si u est une autre solution de (2.7) tel que $\underline{u}\leq u\leq\overline{u}$ sur $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$, alors $u\leq u^\star$ sur $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$.

Comme u est une sous solution de (2.7), alors d'aprés l'**Etape 1**, on a

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u\leq\overline{u}_n.$$

Si on fait tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$u \leq \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n = u^\star.$$

C'est-à-dire $u^\star$ est une solution maximale du (2.7).

Etape 7: La suite $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution minimale $u_\star$ du problème (2.7).

La preuve est similaire à celle de l'**Etape 6**.

La preuve de notre résultat est terminée. ■

2.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple d'application.

On considère le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = \lambda_1 (u^\sigma)^{k_1} - (u^\sigma)^{k_2} + M,\ t \in [0,10]_T, \\ u(0) = 0,\ u(\sigma^2(10)) = \int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_2(s)u(s)\Delta s, \end{cases} \tag{2.32}$$

où $k_1 > 0$, $k_2 > k_1$, λ_1 et M, sont des nombres réels positifs, $g_2(s) = ks$, où k est un paramètre réel positif.

Cas 1: Si $T = \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \lambda_1 u^{k_1} - u^{k_2} + M,\ t \in [0,10], \\ u(0) = 0,\ u(10) = \int\limits_0^{10} g_1(s)u(s)ds. \end{cases} \tag{2.33}$$

Proposition 4 *Supposons que $0 < k \leq \dfrac{1}{50}$, alors le problème (2.33) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$.*

Preuve: On pose $(\underline{u}, \overline{u}) = (\Phi_1, \Phi_2)$, où $\Phi_1(t) = 0$ pour tout $t \in [0,10]$ et $\Phi_2(t) = L$, pour tout $t \in [0,10]$.

Tout d'abord, il n'est pas difficile de vérifier que Φ_1 est une sous solution de (2.33).

Maintenant, Φ_2 est une sur solution de (2.33) si on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_2'))'(t) \geq \lambda_1 \Phi_2^{k_1}(t) - \Phi_2^{k_2}(t) + M,\ t \in [0,10], \\ \Phi_2(0) = L \geq 0,\ \Phi_2(10) = L \geq \int\limits_0^{10} g_2(s)\Phi_2(s)\,ds. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} 0 \geq \lambda_1 L^{k_1} - L^{k_2} + M,\ t \in [0,10], \\ \Phi_2(0) = L \geq 0,\ \Phi_2(10) = L \geq 50kL. \end{cases}$$

Comme $k_2 > k_1$, alors si on choisit L suffisament grand et $k \leq \frac{1}{50}$, on obtient Φ_2 est une sur solution de (2.33) et par conséquent d'aprés le Théorème 2.2, il résulte que le problème (2.33) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$. ■

Cas 2: Si $T = \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta(t) = \lambda_1 u^{k_1}(t+1) - u^{k_2}(t+1) + M,\ t \in [0,10]_\mathbb{N}, \\ u(0) = 0,\ u(12) = \sum\limits_{s=0}^{11} g_2(s)u(s). \end{cases} \tag{2.34}$$

Proposition 5 *Supposons que $M > 3$ et $\dfrac{12e^{-12}}{\sum\limits_{i=0}^{11} i^2 e^{-i}} \leq k \leq \dfrac{1}{66}$, alors le problème (2.34) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$.*

Preuve: On pose $(\underline{u}, \overline{u}) = (\Phi_3, \Phi_2)$ où $\Phi_3(t) = te^{-t}$, pour tout $t \in [0,12]_\mathbb{N}$ et $\Phi_2(t) = L$, pour tout $t \in [0,12]_\mathbb{N}$.

Φ_3 est une sous solution du problème (2.34) si on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_3^\Delta))^\Delta(t) \leq \lambda_1 \Phi_3^{k_1}(t+1) - \Phi_3^{k_2}(t+1) + M,\ t \in [0,10]_\mathbb{N}, \\ \Phi_3(0) \leq 0,\ \Phi_3(12) \leq \sum\limits_{s=0}^{11} g_2(s)\Phi_3(s). \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t) \leq \lambda_1 (t+1)^{k_1} e^{-k_1(t+1)} - (t+1)^{k_2} e^{-k_2(t+1)} + M, \; t \in [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_3(0) = 0 \leq 0, \\ \Phi_3(12) = 12e^{-12} \leq k \sum\limits_{i=0}^{11} i^2 e^{-i}, \end{cases}$$

où

$$(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t) = \varphi_p(\Phi_3(t+2) - \Phi_3(t+1)) - \varphi_p(\Phi_3(t+1) - \Phi_3(t)).$$

Comme

$$-(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t) - \lambda_1 (t+1)^{k_1} e^{-k_1(t+1)} + (t+1)^{k_2} e^{-k_2(t+1)} < 3, \; \forall t \in [0,10]_{\mathbb{N}}.$$

Alors si on choisit $M > 3$ et $k \geq \dfrac{12e^{-12}}{\sum\limits_{i=0}^{11} i^2 e^{-i}}$, on obtient Φ_3 est une sous solution du problème (2.34).

De même Φ_2 est une sur solution de (2.34) si on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_2^{\Delta}))^{\Delta}(t) \geq \lambda_1 \Phi_2^{k_1}(t+1) - \Phi_2^{k_2}(t+1) + M, \; \forall t[0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_2(0) \leq 0, \; \Phi_3(12) \geq \sum\limits_{s=0}^{11} g_2(s)\Phi_3(s). \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} 0 \geq \lambda_1 L^{k_1} - L^{k_2} + M, \; t \in [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_2(0) = L \geq 0, \; \Phi_2(12) = L \geq \sum\limits_{s=0}^{11} g_2(s) L = kL \sum\limits_{i=0}^{11} i = 66kL. \end{cases}$$

Puisque $k_2 > k_1$, alors si on choisit L suffisament grand et $k \leq \frac{1}{66}$, on obtient Φ_2 est une sur solution de (2.34) et par conséquent d'aprés le Théorème 2.2, il résulte que le problème (2.34) admet une solution maximale $u^{\star}$ et une solution minimale $u_{\star}$. ∎

Chapitre 3

Existence des solutions extrémales pour certaines problèmes quasilineaires avec des conditions aux limites nonlocales et avec une nonlinéarité dépendant de la première dérivée dans les échelles de temps.

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la construction des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = f(t,u,u^\Delta),\ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1u(a) - c_2u^\Delta(a) = L_1(u), \\ d_1u(\sigma^2(b)) + d_2u^\Delta(\sigma(b)) = L_2(u), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\varphi_p(u) = |u|^{p-2}\,u$, avec $p > 1$, $f : [a,b]_T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $L_i : C(\left[a,\sigma^2(b)\right]_T) \to \mathbb{R}$ sont continues et croissantes pour $(i = 1,2)$, $a \in T_k$, $b \in T^k$ et $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ tels que: $c_1 + c_2 \neq 0$ et $d_1 + d_2 \neq 0$.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, on donne quelques résultats préliminaires. Dans la deuxième section, on énonce et on montre le résultat principal de ce chapitre et dans la dernière section, on donne un exemple d'application.

Notation 6 *Dans ce chapitre on note par D l'ensemble suivant*

$$D = \left\{ g \in C^1(\left[a,\sigma^2(b)\right]_T) : \left(\varphi_p(g^\Delta)\right)^\Delta \text{ est rd-continue sur } [a,b]_T \right\}.$$

3.2 Résultats préliminaires

Dans cette section on donne quelques résultats préliminaires qui seront utiles pour la suite.

On considère le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = F(t,u^\Delta) - \widehat{h}(t,u),\ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1u(a) - c_2u^\Delta(a) = A, \\ d_1u(\sigma^2(b)) + d_2u^\Delta(\sigma(b)) = B, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $F : [a,b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue strictement décroissante par rapport à la seconde variable, $\widehat{h} : [a,b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante par rapport à la deuxième variable et A et B deux constantes réels.

Lemme 3.1 *(Principe de comparaison faible).*

Soient u_1, u_2 deux fonctions tels que $u_i \in D$ pour $i = 1{,}2$, et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta - F(t, u_1^\Delta) + \widehat{h}(t, u_1) \leq -(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta - F(t, u_2^\Delta) + \widehat{h}(t, u_2), \ t \in [a, b]_T\,, \\ c_1 u_1(a) - c_2 u_1^\Delta(a) \leq c_1 u_2(a) - c_2 u_2^\Delta(a), \\ d_1 u_1(\sigma^2(b)) + d_2 u_1^\Delta(\sigma(b)) \leq d_1 u_2(\sigma^2(b)) + d_2 u_2^\Delta(\sigma(b)), \end{cases} \tag{3.3}$$

alors

$$u_1(t) \leq u_2(t), \ \forall t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Preuve: Supposons qu'il existe $t_0 \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$ tel que

$$w(t_0) := u_2(t_0) - u_1(t_0) = \min\left\{w(t) : a \leq t \leq \sigma^2(b)\right\} < 0,$$

et

$$w(t) > w(t_0),\text{pour tout } t \in (t_0, \sigma^2(b)]_T. \tag{3.4}$$

On distingue quatre cas

Cas 1:

i) Si $t_0 = a$ et $a = \sigma(a)$, on obtient la contradiction:

$$0 > c_1(u_2(a) - u_1(a)) \geq c_2(u_2^\Delta(a) - u_1^\Delta(a)) = 0.$$

ii) Si $t_0 = a$ et $a < \sigma(a)$, on distingue deux sous-cas

Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors d'aprés (3.3) on obtient $w(a) > 0$ ce qui contredit la définition de t_0.

Si $w^\Delta(t_0) \leq 0$, alors $w(a) \geq w(\sigma(a))$ ce qui contredit la définition de t_0.

Cas 2:

i) Si $t_0 = \sigma^2(b)$ et $\sigma^2(b) = \sigma(b)$, on obtient la contradiction:

$$0 > d_1(u_2(\sigma^2(b)) - u_1(\sigma^2(b))) \geq -d_2(u_2^\Delta(\sigma(b)) - u_1^\Delta(\sigma(b))) = 0.$$

ii) Si $t_0 = \sigma^2(b)$ et $\sigma^2(b) > \sigma(b)$, on distingue deux sous-cas

Si $w^\Delta(\sigma(b)) > 0$, alors on a $w(\sigma^2(b)) > w(\sigma(b))$ ce qui contredit la définition de t_0.

Si $w^\Delta(\sigma(b)) \leq 0$, alors d'aprés (3.3) on obtient $w(\sigma^2(b)) > 0$ ce qui contredit la définition de t_0.

Cas 3: Si $t_0 \in \big(a, \sigma^2(b)\big)_T$, on distingue quatre sous-cas

Sous-cas 1: $\rho(t_0) = t_0 = \sigma(t_0)$.

i) Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors $\lim_{t \to t_0} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0)$, ce qui entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) > 0$ sur $(t_0 - \delta, t_0]$, alors w est croissante sur $(t_0 - \delta, t_0]$ ce qui contredit la définition de t_0.

ii) Si $w^\Delta(t_0) < 0$, alors $\lim_{t \to t_0} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0) < 0$ ce qui entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) < 0$ sur $[t_0, t_0 + \delta)$, c'est-à-dire que, w est décroissante sur $[t_0, t_0 + \delta)$ ce qui contredit la définition de t_0.

iii) Si $w^\Delta(t_0) = 0$, alors $u_1^\Delta(t_0) = u_2^\Delta(t_0)$ et ainsi $\varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) = (\varphi_p(u_2^\Delta(t_0))$.

Puisque φ_p est croissante, on obtient

$$-(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(t_0) + (\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{-\varphi_p(u_2^\Delta(t)) + \varphi_p(u_1^\Delta(t))}{t - t_0} \leq 0. \tag{3.5}$$

Mais en ce point on a

$$-(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(t_0) - F(t_0, u_2^\Delta) + \widehat{h}(t_0, u_2^\sigma) + (\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(t_0) + F(t_0, u_1^\Delta) - \widehat{h}(t_0, u_1^\sigma) \geq 0.$$

C'est-à-dire

$$-(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(t_0) + (\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(t_0) \geq \widehat{h}(t_0, u_1^\sigma) - \widehat{h}(t_0, u_2^\sigma).$$

Puisque $u_2^\sigma(t_0) < u_1^\sigma(t_0)$ et la fonction $\widehat{h}$ est strictement croissante par rapport à la deuxième variable, on obtient

$$-\varphi_p(u_2^\Delta(t_0))^\Delta + \varphi_p(u_1^\Delta(t_0))^\Delta > 0.$$

Ce qui est en contradiction avec (3.5).

Sous-cas 2: $\rho(t_0) = t_0 < \sigma(t_0)$.

i) Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors il existe un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) > 0$ sur $(t_0 - \delta, t_0]$, ce qui signifie que w est strictement croissante sur $(t_0 - \delta, t_0]$. Mais ça contredit la définition de t_0.

ii) Si $w^\Delta(t_0) \leq 0$, alors on a $w^\sigma(t_0) \leq w(t_0)$ ce qui contredit la définition de t_0.

Sous-cas 3: $\rho(t_0) < t_0 = \sigma(t_0)$.

i) Si $w^\Delta(t_0) < 0$, alors il existe un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) < 0$ sur $[t_0, t_0 + \delta)$, ce qui signifie que w est strictement décroissante sur $[t_0, t_0+\delta)$. Mais ça contredit la définition de t_0.

ii) Si $w^\Delta(t_0) \geq 0$, alors on a

$$u_1^\Delta(t_0) \leq u_2^\Delta(t_0).$$

Ce qui entraîne que

$$\varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) \leq \varphi_p(u_2^\Delta(t_0)).$$

D'autre part, on a

$$w^\Delta(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0.$$

C'est-à-dire

$$u_2^\Delta(\rho(t_0)) < u_1^\Delta(\rho(t_0)).$$

Ce qui entraîne que

$$\varphi_p(u_2^\Delta(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^\Delta(\rho(t_0))).$$

Par suite on a

$$\begin{array}{rcl}
(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)) & = & \dfrac{\varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) - \varphi_p(u_1^\Delta(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
& < & \dfrac{\varphi_p(u_2^\Delta(t_0)) - \varphi_p(u_2^\Delta(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
& = & (\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)).
\end{array}$$

Ce qui signifie que

$$(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)) < (\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)).$$

Puisque la fonction $\widehat{h}$ est strictement croissante par rapport à la seconde variable et F est strictement décroissante par rapport à la seconde variable, on obtient

$$\begin{array}{rl}
& -(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)) - F(\rho(t_0), u_2^\Delta) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_2^\sigma(\rho(t_0))) \\
< & -(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta(\rho(t_0)) - F(\rho(t_0), u_1^\Delta) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_1^\sigma(\rho(t_0))).
\end{array}$$

Ce qui est en contradiction avec (3.3).

Sous-cas 4: $\rho(t_0) < t_0 < \sigma(t_0)$.

i) Si $w^{\Delta}(t_0) \leq 0$, alors $w^{\sigma}(t_0) \leq w(t_0)$. Ceci contredit la définition de t_0.

ii) Si $w^{\Delta}(t_0) > 0$, alors on a

$$u_1^{\Delta}(t_0) < u_2^{\Delta}(t_0).$$

Ce qui entraîne que

$$\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) < \varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)).$$

D'autre part, on a

$$w^{\Delta}(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0.$$

C'est-à-dire

$$u_2^{\Delta}(\rho(t_0)) < u_1^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Ce qui entraîne que

$$\varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) &= \frac{\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
&< \frac{\varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
&= (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) < (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Puisque la fonction $\widehat{h}$ est strictement croissante par rapport à la seconde variable et F est strictement décroissante par rapport à la seconde variable, on obtient

$$\begin{aligned}
& -(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) - F(\rho(t_0), u_1^{\Delta}) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_1^{\sigma}(\rho(t_0))) \\
> \quad & -(\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) - F(\rho(t_0), u_2^{\Delta}) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_2^{\sigma}(\rho(t_0))).
\end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec (3.3). ■

Définition 3.1 *On dit que α est une sous solution de (3.2) si:*

i) $\alpha \in D$.

ii) $\begin{cases} -(\varphi_p(\alpha^\Delta))^\Delta \leq F(t,\alpha^\Delta) - \widehat{h}(t,\alpha), \ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1\alpha(a) - c_2\alpha^\Delta(a) \leq A, \\ d_1\alpha(\sigma^2(b)) + d_2\alpha^\Delta(\sigma(b)) \leq B. \end{cases}$

Définition 3.2 *On dit que β est une sur solution de (3.2) si:*

i) $\beta \in D$.

ii) $\begin{cases} -(\varphi_p(\beta^\Delta))^\Delta \geq F(t,\beta^\Delta) - \widehat{h}(t,\beta), \ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1\beta(a) - c_2\beta^\Delta(a) \geq A, \\ d_1\beta(\sigma^2(b)) + d_2\beta^\Delta(\sigma(b)) \geq B. \end{cases}$

Maintenant, si on suppose de plus F est une fonction bornée, alors on a le résultat suivant:

Théorème 3.1 *Supposons que α et β sont les sous et sur solutions de problème(3.2) tel que $\alpha \leq \beta$ sur $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$. Alors le problème (3.2) admet une unique solution $u \in D$ tel que:*

$$\alpha \leq u \leq \beta \ sur \ \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

Preuve: En utilisant une preuve similaire à celle du Théorème 3.1 dans [4] on montre que le problème (3.2) admet au moins une solution et d'aprés le Lemme 3.1, il résulte que cette solution est unique. ■

3.3 Résultat principal

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = f(t,u,u^\Delta), \ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1u(a) - c_2u^\Delta(a) = L_1(u), \\ d_1u(\sigma^2(b)) + d_2u^\Delta(\sigma(b)) = L_2(u), \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\varphi_p(u) = |u|^{p-2}\,u$, avec $p > 1$, $f : [a,b]_T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $L_i : C(\left[a,\sigma^2(b)\right]_T) \to \mathbb{R}$ sont continues et croissantes pour $i = 1,2$, $a \in T_k, b \in T^k$ et $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ tels que: $c_1 + c_2 \neq 0$ et $d_1 + d_2 \neq 0$.

Définition 3.3 *On dit que $\underline{u}$ est une sous solution de (3.6) si:*

i) $\underline{u} \in D$.

$$ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}^\Delta))^\Delta \leq f(t, \underline{u}, \underline{u}^\Delta), \ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1\underline{u}(a) - c_2\underline{u}^\Delta(a) \leq L_1(\underline{u}), \\ d_1\underline{u}(\sigma^2(b)) + d_2\ \underline{u}^\Delta(\sigma(b)) \leq L_2(\underline{u}). \end{cases}$$

Définition 3.4 *On dit que $\overline{u}$ est une sur solution de (3.6) si:*

i) $\overline{u} \in D$.

$$ii) \begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}^\Delta))^\Delta \geq f(t, \overline{u}, \overline{u}^\Delta), \ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1\overline{u}(a) - c_2\overline{u}^\Delta(a) \geq L_1(\overline{u}), \\ d_1\overline{u}(\sigma^2(b)) + d_2\overline{u}^\Delta(\sigma(b)) \geq L_2(\overline{u}). \end{cases}$$

Maintenant, on définit la condition de Nagumo-Bernestein

Définition 3.5 *(Condition de Nagumo-Bernstein).*

On dit que $f : [a,b]_T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait la condition de Nagumo-Bernstein relativement aux valeurs $\underline{u}$ et $\overline{u}$ si il existe $Q : [a,b]_T \to \mathbb{R}_+$ et $\Psi : [a,b]_T \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues tel que:

$$|f(t,u,v)| \leq Q(t) + \Psi\,(t)\,|v|^{p-1}\,, \tag{3.7}$$

pour tout $(t,u,v) \in D'$ où $D' = \left\{(t,u,v) \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T \times \mathbb{R}^2 : \underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)\right\}$.

On a le résultat suivant:

Lemme 3.2 *Si $f : [a,b]_T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait la condition de Nagumo-Bernestein (3.7), alors il existe une constante $K > 0$, tel que pour toute solution u de (3.6) vérifiant $\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)$, pour tout $t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, on a $\left\|u^\Delta\right\|_0 \leq K$.*

Preuve: Puisque u est continue sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$ et u^Δ est continue sur $[a, \sigma(b))_T$, alors d'aprés le Théorème 1.3, il existe ξ, $\tau \in [a, \sigma(b)]_T$ tel que

$$u^\Delta\,(\tau) \leq \frac{u\left(\sigma^2(b)\right) - u\,(a)}{\sigma^2(b) - a} \leq u^\Delta\,(\xi)\,,$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
-\varphi_p(u^\Delta)(t) &= -\varphi_p(u^\Delta)(\tau) + \int_\tau^t f(s,u^\sigma(s),u^\Delta(s))\Delta s \\
&\leq \varphi_p\left(\frac{u\left(\sigma^2(b)\right)-u(a)}{\sigma^2(b)-a}\right) + \int_\tau^t f(s,u^\sigma(s),u^\Delta(s))\Delta s \\
&\leq \frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\left|\varphi_p\left(u\left(\sigma^2(b)\right)-u(a)\right)\right| + \left|\int_\tau^t f(s,u^\sigma(s),u^\Delta(s))\Delta s\right| \\
&\leq \frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\left|\varphi_p\left(u\left(\sigma^2(b)\right)-u(a)\right)\right| + signe(t-\tau)\int_\tau^t \left|f(s,u^\sigma(s),u^\Delta(s))\right|\Delta s \\
&\leq \frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\left|\varphi_p\left(u\left(\sigma^2(b)\right)-u(a)\right)\right| + signe(t-\tau)\int_\tau^t (Q(s)+\Psi(s)\left|u^\Delta(s)\right|^{p-1})\Delta s \\
&\leq \frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\left|\varphi_p\left(u\left(\sigma^2(b)\right)-u(a)\right)\right| + (\sigma(b)-a)\left(\|Q\|_0+\|\Psi\|_0\left\|u^\Delta\right\|_0^{p-1}\right).
\end{aligned}$$

Par suite, si on suppose $(\sigma(b)-a)\|\Psi\|_0 < 1$, on obtient

$$\left\|u^\Delta\right\|_0^{p-1} \leq \frac{\frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\left|\varphi_p\left(u\left(\sigma^2(b)\right)-u(a)\right)\right| + (\sigma(b)-a)\|Q\|_0}{1-(\sigma(b)-a)\|\Psi\|_0}.$$

Maintenant si on pose par définition

$$K^{p-1} = \frac{\frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\left|\varphi_p\left(u\left(\sigma^2(b)\right)-u(a)\right)\right| + (\sigma(b)-a)\|Q\|_0}{1-(\sigma(b)-a)\|\Psi\|_0},$$

on obtient

$$\left\|u^\Delta\right\|_0 \leq K.$$

■

Maintenant, on suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

(H_1) Il existe $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue est strictement croissante tel que: $s \longmapsto f(t,s,z)+h(s)$ est croissante pour tout $t\in[a,b]_T$ et pour tout $z\in\mathbb{R}$.

(H_2) La fonction $z \longmapsto f(t,s,z)$ est décroissante pour tout $t\in[a,b]_T$ et pour tout $s\in\mathbb{R}$.

Théorème 3.2 *Soient $\underline{u}$ et $\overline{u}$ la sous et la sur solution respectivement du problème (3.6) tel que: $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, et supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) et la condition de Nagumo-Bernestein relativement aux valeurs $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont satisfaites. Alors le problème (3.6) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$ tel que pour chaque $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, on a*

$$\underline{u} \leq u_\star \leq u \leq u^\star \leq \overline{u}, \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Pour la preuve de ce théorème, on a besoin d'un lemme préliminaire.

Soient $\underline{w}$ et $\overline{w} \in D$ tel que $\underline{u} \leq \underline{w} \leq \overline{w} \leq \overline{u}$ dans $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$.

Pour tout $v \in \mathbb{R}$, on pose par définition $\delta(v) = \max\{-K, \min\{v, K\}\}$, où K est une constante définie dans la preuve du Lemme 3.2. Alors la fonction δ est continue, bornée et croissante.

On considère les problèmes aux limites suivants:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta + h(u) = f(t, \overline{w}, \delta(u^\Delta)) + h(\overline{w}), \; t \in [a, b]_T, \\ c_1 u(a) - c_2 u^\Delta(a) = L_1(\overline{w}), \\ d_1 u(\sigma^2(b)) + d_2 u^\Delta(\sigma(b)) = L_2(\overline{w}), \end{cases} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta + h(u) = f(t, \underline{w}, \delta(u^\Delta)) + h(\underline{w}), \; t \in [a, b]_T, \\ c_1 u(a) - c_2 u^\Delta(a) = L_1(\underline{w}), \\ d_1 u(\sigma^2(b)) + d_2 u^\Delta(\sigma(b)) = L_2(\underline{w}). \end{cases} \tag{3.9}$$

Lemme 3.3 *Soient $\underline{w}$ et $\overline{w}$ la sous et la sur solution respectivement du problème (3.6) et supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) et la condition de Nagumo-Bernestein relativement aux valeurs $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont satisfaites, alors il existe une unique solution $\widetilde{u}$ et $\widehat{u}$ de (3.8) et (3.9) respectivement tel que*

$$\underline{u} \leq \underline{w} \leq \widetilde{u} \leq \widehat{u} \leq \overline{w} \leq \overline{u}, \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.

Etape 1: $\underline{w}$ est une sous solution de (3.8).

Soit $t \in [a,b]_T$, on a

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(\underline{w}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{w}) &\leq f(t, \underline{w}, \underline{w}^{\Delta}) + h(\underline{w}), \\ &\leq f(t, \overline{w}, \underline{w}^{\Delta}) + h(\underline{w}). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in [a,b]_T\,, \ -(\varphi_p(\underline{w}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{w}) \leq f(t, \overline{w}, \underline{w}^{\Delta}) + h(\underline{w})$$

Puisque $\underline{w}$ est une sous solution de (3.6) et $\underline{u} \leq \underline{w} \leq \overline{u}$ sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, alors en utilisant une preuve similaire à celle du Lemme 3.2, on montre que $\left\|\underline{w}^{\Delta}\right\|_0 \leq K$. Par suite on a $\delta(\underline{w}^{\Delta}) = \underline{w}^{\Delta}$ et par conséquent

$$\forall t \in [a,b]_T\,, \ -(\varphi_p(\underline{w}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{w}) \leq f(t, \overline{w}, \delta(\underline{w}^{\Delta})) + h(\overline{w}). \tag{3.10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} c_1\underline{w}(a) - c_2\underline{w}^{\Delta}(a) &\leq L_1(\underline{w}), \\ &\leq L_1(\overline{w}). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$c_1\underline{w}(a) - c_2\underline{w}^{\Delta}(a) \leq L_1(\overline{w}). \tag{3.11}$$

De même, on a

$$d_1\underline{w}(\sigma^2(b)) + d_2\underline{w}^{\Delta}(\sigma(b)) \leq L_2(\overline{w}). \tag{3.12}$$

Alors d'aprés (3.10),(3.11) et (3.12), il résulte que $\underline{w}$ est une sous solution de (3.8).

Etape 2: $\overline{w}$ est une sur solution de (3.8).

Soit $t \in [a,b]_T$, on a

$$-(\varphi_p(\overline{w}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\overline{w}) \geq f(t, \overline{w}, \overline{w}^{\Delta}) + h(\overline{w}).$$

En utilisant une preuve similaire à celle du Lemme 3.2, on montre que $\left\|\overline{w}^{\Delta}\right\|_0 \leq K$. Par suite on a $\delta(\overline{w}^{\Delta}) = \overline{w}^{\Delta}$, donc

$$\forall t \in [a,b]_T\,, \quad -\left(\varphi_p(\overline{w}^{\Delta})\right)^{\Delta} + h(\overline{w}) \geq f(t, \overline{w}, \delta(\overline{w}^{\Delta})) + h(\overline{w}). \tag{3.13}$$

D'autre part on a

$$c_1\overline{w}(a) - c_2^{\Delta}\overline{w}(a) \geq L_1(\overline{w}). \tag{3.14}$$

et

$$d_1\overline{w}(\sigma^2(b)) + d_2\overline{w}^{\Delta}(\sigma(b)) \geq L_2(\overline{w}). \tag{3.15}$$

Alors d'aprés (3.13),(3.14) et (3.15), il suit que $\overline{w}$ est une sur solution de (3.8).

D'aprés les **Etapes 1** et **2** et comme $(t, u^{\Delta}) \longmapsto f(t, \overline{w}, \delta(u^{\Delta})) + h(\overline{w})$ est une fonction continue, bornée et strictement décroissante par rapport à la seconde variable et $h : u \longmapsto h(u)$ est une fonction continue et strictement croissante, alors d'aprés le Théorème 3.1 le problème (3.8) admet une unique solution $\widetilde{u}$ de (3.8) tel que $\underline{w} \leq \widetilde{u} \leq \overline{w}$ sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$.

D'une façon similaire, on montre qu'il existe une unique solution $\widehat{u}$ de (3.9) tel que $\underline{w} \leq \widehat{u} \leq \overline{w}$ sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$.

Finalement en utilisant une preuve similaire à celle du lemme 3.1, on montre que $\widetilde{u} \leq \widehat{u}$ sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$. ■

Preuve: du Théorème3.2: La preuve est donnée en plusieurs étapes:

On pose $\underline{u}_0 = \underline{u}$, $\overline{u}_0 = \overline{u}$ et on définit les suites $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{u}_{n+1}^{\Delta}) = f(t, \underline{u}_n, \delta(\underline{u}_{n+1}^{\Delta})) + h(\underline{u}_n), \ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1\underline{u}_{n+1}(a) - c_2\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(a) = L_1(\underline{u}_n), \\ d_1\underline{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + d_2\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = L_2(\underline{u}_n), \end{cases} \tag{3.16}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h(\overline{u}_{n+1}) = f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})) + h(\overline{u}_n), \ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1\overline{u}_{n+1}(a) - c_2\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(a) = L_1(\overline{u}_n), \\ d_1\overline{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + d_2\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = L_2(\overline{u}_n). \end{cases} \tag{3.17}$$

Etape 1: Raisonons par recurrence et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

i) Pour $n = 0$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_1^{\Delta}))^{\Delta} + h(\underline{u}_1) = f(t, \underline{u}_0, \delta(\underline{u}_1^{\Delta})) + h(\underline{u}_0), \ t \in [a, b]_T, \\ c_1 \underline{u}_1(a) - c_2 \underline{u}_1^{\Delta}(a) = L_1(\underline{u}_0), \\ d_1 \underline{u}_1(\sigma^2(b)) + d_2 \underline{u}_1^{\Delta}(\sigma(b)) = L_2(\underline{u}_0), \end{cases} \tag{3.18}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_1^{\Delta}))^{\Delta} + h(\overline{u}_1) = f(t, \overline{u}_0, \delta(\overline{u}_1^{\Delta})) + h(\overline{u}_0), \ t \in [a, b]_T, \\ c_1 \overline{u}_1(a) - c_2^{\Delta} \overline{u}_1(a) = L_1(\overline{u}_0), \\ d_1 \overline{u}_1(\sigma^2(b)) + d_2^{\Delta} \overline{u}_1(\sigma(b)) = L_2(\overline{u}_0). \end{cases} \tag{3.19}$$

Comme $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont des sous et sur solutions du problème (3.6), alors d'aprés le Lemme 3.3, on obtient

$$\underline{u} \leq \underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \overline{u}_1 \leq \overline{u}_0 \leq \overline{u}.$$

ii) Supposons pour $n > 0$ fixé, on a

$$\underline{u} \leq \underline{u}_{n-1} \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}_{n-1} \leq \overline{u},$$

et montrons que

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}.$$

Soit $t \in [a, b]_T$, on a

$$-(\varphi_p(\overline{u}_n^{\Delta}))^{\Delta} + h(\overline{u}_n) = f(t, \overline{u}_{n-1}, \delta(\overline{u}_n^{\Delta})) + h(\overline{u}_{n-1}), \tag{3.20}$$

et comme $\overline{u}_{n-1} \geq \overline{u}_n$, alors d'aprés l'hypothèse (H_1), on obtient

$$f(t, \overline{u}_{n-1}, \delta(\overline{u}_n^{\Delta})) + h(\overline{u}_{n-1}) \geq f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}_n^{\Delta})) + h(\overline{u}_n). \tag{3.21}$$

Donc d'aprés (3.20) et (3.21), il résulte que

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\; -(\varphi_p(\overline{u}_n))^{\Delta} \geq f(t, \overline{u}_n, \delta(\overline{u}_n^{\Delta})).$$

Maintenant en utilisant un raisonnement similaire à celui du Lemme 3.2, on montrer que $\left\|\overline{u}_n^{\Delta}\right\|_0 \leq K$ alors $\delta(\overline{u}_n^{\Delta}) = \overline{u}_n^{\Delta}$, et par suite on obtient

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\; -(\varphi_p(\overline{u}_n^{\Delta}))^{\Delta} \geq f(t, \overline{u}_n, \overline{u}_n^{\Delta}). \tag{3.22}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} c_1\overline{u}_n(a) - c_2^{\Delta}\overline{u}_n(a) &= L_1(\overline{u}_{n-1}), \\ &\geq L_1(\overline{u}_n). \end{aligned} \tag{3.23}$$

et

$$\begin{aligned} d_1\overline{u}_n(\sigma^2(b)) + d_2^{\Delta}\overline{u}_n(\sigma(b)) &= L_2(\overline{u}_{n-1}), \\ &\geq L_2(\overline{u}_n). \end{aligned} \tag{3.24}$$

D'aprés (3.22), (3.23) et (3.24), il résulte que $\overline{u}_n$ est une sur solution de (3.6) et d'une manière analogue on montre que $\underline{u}_n$ est une sous solution de (3.6), alors d'aprés le Théorème 3.1, il existe une unique solution $\underline{u}_{n+1}$ et $\overline{u}_{n+1}$ de (3.16) et (3.17) respectivement tel que

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}.$$

Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\; \underline{u} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1}.$$

Etape 2: Montrons que la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution maximale de (3.6).

D'aprés l'**Etape 1** et puisque $\left\|\overline{u}_n^{\Delta}\right\|_0 \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $C^1_{rd}\left(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T\right)$.

Maintenant, soit $\varepsilon_1 > 0$ et $t, s \in [a, \sigma(b)]_T$ tel que $t < s$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(s)) - \varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(t))\right| &= \left|\int_t^s \left(f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(\tau)) + h(\overline{u}_n(\tau)) - h(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(\tau))\right)\Delta\tau\right|, \\
&\leq \int_t^s \left|\left(f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(\tau)) + h(\overline{u}_n(\tau)) - h(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(\tau))\right)\right|\Delta\tau, \\
&\leq (M_1(f) + 2M_2(h))\,|s-t|\,.
\end{aligned}$$

où

$$M_1(f) = \max\left\{|f(t,s,z)| : t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T,\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ et } |z| \leq K\right\},$$

et

$$M_2(h) = \max\left\{|h(u)| : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\}.$$

Si on pose par définition

$$K_1 := M_1(f) + 2M_2(h),$$

on obtient

$$\left|\varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(s)) - \varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(t))\right| \leq K_1\,|s-t|\,.$$

Par suite, si on choisit $|s-t| \leq \frac{\varepsilon_1}{K_1+1}$, on obtient

$$\varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(s)) - \left|\varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_{n+1}(t))\right| \leq \varepsilon_1.$$

Alors la suite $(\varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_T$ et comme φ_p^{-1} est un homeomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left|\overline{u}^{\Delta}_n(s) - \overline{u}^{\Delta}_n(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_n(s))) - \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}^{\Delta}_n(t)))\right|.$$

Par conséquent la suite $\left(\overline{u}^{\Delta}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_T$, donc d'aprés le théorème d'Arzéla-Ascoli, il existe une sous suite $(\overline{u}_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$ de $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1\left(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T\right)$. Soit

$$u = \lim_{n_j \to +\infty} \overline{u}_{n_j}.$$

Alors

$$u^{\Delta} = \lim_{n_j \to +\infty} \overline{u}_{n_j}^{\Delta}.$$

Mais d'aprés l'**Etape 1,** la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée alors elle est convergente vers une fonction $u^\star$. Par unicité de la limite on a $u = u^\star$ et la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u^\star$ dans $C^1\left(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T\right)$.

Soit $t \in [a, \sigma(b)]_T$, on a

$$-\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(t)) = -\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(s)) + \int_t^s \left(f(\tau, \bar{u_n}(\tau), \delta(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(\tau)) + h(\overline{u}_n(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right) \Delta\tau,$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \left(f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(\tau)) + h(\overline{u}_n(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right) = f(\tau, u^\star(\tau), \delta(u^{\star\Delta}(\tau)).$$

Alors

$$\exists K_4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \tau \in [a, \sigma(b)]_T : \left|\left(f(\tau, \overline{u}_n(\tau), \delta(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(\tau)) + h(\overline{u}_n(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}(\tau))\right)\right| \leq K_4.$$

Par suite d'aprés le Théorème 1.5, on obtient:

$$-\varphi_p(u^{\star\Delta}(t)) = -\varphi_p(u^{\star\Delta}(s)) + \int_t^s \left(f(\tau, u^\star(\tau), \delta(u^{\star\Delta}(\tau)) + h(u^\star(\tau)) - h(u^{\star\Delta}(\tau))\right) \Delta\tau,$$

et par conséquent pour tout $t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, on obtient

$$-(\varphi_p(u^{\star\Delta}))^{\Delta}(t) = f(t, u^\star(t), \delta(u^{\star\Delta}(t)), \tag{3.25}$$

De même, on a

$$c_1 u^\star(a) - c_2 u^{\star\Delta}(a) = L_1(u^\star), \tag{3.26}$$

et

$$d_1 u^\star(\sigma^2(b)) + d_2 u^{\star\Delta}(\sigma(b)) = L_2(u^\star). \tag{3.27}$$

Maintenant en utilisant une preuve similaire à celle du Lemme 3.2, on montre que $\left\| u^{\star\Delta} \right\|_0 \leq K$, et par suite $\delta(u^{\star\Delta}(t)) = u^{\star\Delta}(t)$ c'est-à-dire que $u^\star$ est une solution de (3.6).

Maintenant, on montre que si u est une autre solution de (3.6) tel que: $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, alors: $u \leq u^\star$ sur $[a, b]_T$.

Puisque u est une sous solution de (3.6), alors d'aprés l'**Etape 1**, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; u \leq \overline{u}_n.$$

On fait tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$u \leq \lim_{n \to +\infty} \overline{u}_n = u^\star.$$

C'est à dire $u^\star$ est une solulion maximale pour le problème (3.6).

Etape 3: La suite $(\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution minimale $u_\star$ de (3.6).

Preuve: La preuve est similaire à celle de l'**Etape** 2. ■

3.4 Application

Dans cette section on donne un exemple d'application.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = \lambda_1 u^{k_1} - u^{k_2} - \lambda_2 u^{k_1} \left| u^\Delta \right|^{p-1} + g(t), \; t \in [0, 10]_T, \\ u(0) - a_0 u^\Delta(0) = 0, \; u(\sigma^2(10)) + a_1 u^\Delta(\sigma(10)) = \int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_2(s) u(s) \Delta s, \end{cases} \tag{3.28}$$

où $k_2 > k_1 > 0$, λ_1 et λ_2 sont des paramètres réels positifs et $g : [0, \sigma^2(10)]_T \to \mathbb{R}_+$ et $g_2 : [0, \sigma^2(10)]_T \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues avec $\int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_2(s) \Delta s \leq 1.$

Cas 1: Si $T = \mathbb{R}$, on a

$$
\begin{cases}
-(\varphi_p(u^{'}))^{'} = \lambda_1 u^{k_1} - u^{k_2} + \lambda_2 u^{k_1} \left| u^{'} \right|^{p-1} + g(t),\ t \in [0,10], \\
u(0) - a_0 u^{'}(0) = 0, \\
u(10) + a_1 u^{'}(10) = \int\limits_0^{10} g_2(s) u(s) ds,
\end{cases}
\tag{3.29}
$$

où g_2 est une fonction réelle positive.

Proposition 7 *Le problème (3.29) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$.*

Preuve: On pose $(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$, où L est une constante positive plus grande que 1.

Tout d'abord puisque $\int\limits_0^{10} g_1(s) ds \leq 1$ on a

$$
L \geq \int\limits_0^{10} g_1(s) L ds.
$$

Maintenant $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont des sous et sur solutions de (3.29), si on a

$$
\begin{cases}
0 \leq g(t),\ \forall t \in [0,10], \\
0 \geq \lambda_1 L^{k_1} - L^{k_2} + g(t).
\end{cases}
$$

C'est-à-dire

$$
\begin{cases}
g(t) \geq 0,\ \forall t \in [0,10], \\
L^{k_2} \geq \lambda_1 L^{k_1} + g(t).
\end{cases}
$$

Si on choisit L suffisament grand, on obtient que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont des sous et sur solutions de (3.29) et pour que la fonction $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(t,u,v) = \lambda_1 u^{k_1} - u^{k_2} - \lambda_2 u^{k_1} \left| u^{\Delta} \right|^{p-1} + g(t)$ satisfait la condition de Nagumo-Bernstein il faut choisir $\lambda_2 < \frac{1}{10 L^{k_1}}$.

Par suite d'aprés le Théorème 3.2, il résulte que le problème (3.29) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$. ■

Cas 2: Si $T=\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = \lambda_1 u^{k_1} - u^{k_2} - \lambda_2 u^{k_1}\left|u^\Delta\right|^{p-1} + g(t),\ t\in[0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)-a_0\Delta u(0)=0, \\ u(12)+a_1\Delta u(11)=\displaystyle\sum_{s=0}^{11} g_2(s)u(s), \end{cases} \tag{3.30}$$

où g_1 est une fonction réelle positive.

Théorème 3.3 *Le problème (3.30) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$.*

Preuve: On pose $(\underline{u},\overline{u})=(0,L)$, où L est une constante positive.

Tout d'abord, puisque $\displaystyle\sum_{s=0}^{11} g_2(s)\leq 1$, on a

$$L\geq\sum_{s=0}^{11} g_2(s)L.$$

Maintenant, $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont des sous et sur solutions de (3.30), si on a

$$\begin{cases} 0\leq g(t), \text{ pour tout } t\in[0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ 0\geq \lambda_1 L^{k_1}-L^{k_2}+g(t) \text{ pour tout } t\in[0,10]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} g(t)\geq 0, \text{ pour tout } t\in[0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ L^{k_2}\geq \lambda_1 L^{k_1}+g(t), \text{ pour tout } t\in[0,10]_{\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Si on choisit L suffisament grand, on obtient que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont des sous et sur solutions de (3.30) et pour que la fonction $\widetilde{f}$ satisfait la condition de Nagumo-Bernstein il faut choisir $\lambda_2<\frac{1}{11L^{k_1}}$.

Par suite d'aprés le Théorème 3.2, il résulte que le problème (3.30) admet une solution maximale $u^\star$ et une solution minimale $u_\star$. ∎

Chapitre 4

Existence de solutions pour certaines classes de systèmes d'équations différentielles quasilinéaires avec des conditions aux limites nonlocales dans les échelles de temps.

4.1 Introduction:

Dans ce chapitre, on s'intérèsse a l'existence des solutions pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta} = f(t, u^{\sigma}, v^{\sigma}), \ t \in [a, b]_T \,, \\ -(\varphi_q(v^{\Delta}))^{\Delta} = g(t, u^{\sigma}, v^{\sigma}), \ t \in [a, b]_T \,, \\ c_1 u(a) - c_2 u^{\Delta}(a) = L_1(u), \\ c_3 u(\sigma^2(b)) + c_4 u^{\Delta}(\sigma(b)) = L_2(u), \\ c_1' v(a) - c_2' v^{\Delta}(a) = L_3(v), \\ c_3' v(\sigma^2(b)) + c_4' v^{\Delta}(\sigma(b)) = L_4(v), \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\varphi_p(u) = |u|^{p-2}\, u$, $p > 1$, $q > 1$, $c_i, c_i' \in \mathbb{R}_+$, pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, $f : [a, b]_T \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, et $g : [a, b]_T \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et $L_i : C(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T) \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et croissantes pour tout $i = 1, 2, 3, 4$.

La définition de la sous solution et la sur solution et la construction des suites dépend de la monotonie des deux fonctions f et g, alors d'aprés C. V. Pao (voir [27]) on peut classer le système (4.1) suivant la monotonie des deux fonctions f et g en trois types:

Type 1: Système quasimonotone croissant: f est croissante par rapport à v et g est croissante par rapport à u.

Type 2: Système quasimonotone décroissant: f est décroissante par rapport à v et g est décroissante par rapport à u.

Type 3: Système quasimonotone mixte: f est croissante par rapport à v et g est décroissante par rapport à u or vise versa.

Dans ce chapitre, on montre l'existence des solutions minimales et maximales si le système (4.1) est de **Type 1.** Si le système (4.1) est de **Type 2**, on montre l'existence des solutions maximales-minimales et minimales-maximales. Par contre si le système (4.1) est de **Type 3,** on montre l'existence d'au moins une quasi-solution.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section on donne quelques résultats préliminaires. Dans la deuxième section on énonce et on montre les résultats principaux de ce chapitre et dans la dernière section on donne des exemples d'applications.

4.2 Résultats préliminaires:

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = -\widehat{h}(t, u^\sigma),\ t \in [a, b]_T\,, \\ \alpha_1 u(a) - \alpha_2 u^\Delta(a) = c, \\ \alpha_3 u(\sigma^2(b)) + \alpha_4 u^\Delta(\sigma(b)) = d, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\widehat{h} : [a, b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante par rapport à la seconde variable, α_1, α_2, α_3 et α_4 sont des nombres réels positifs et c et d sont des nombres réels.

Dans ce chapitre, on note par $D = \{g \in C^1(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T) : \left(\varphi_p(g^\Delta)\right)^\Delta$ est rd-continue sur $[a,b]_T\}$.

Lemme 4.1 *(Principe de conparaison faible).*

Soient u_1,u_2 deux fonctions tel que $u_i \in D$ pour $i = 1,2$, et

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1^\Delta))^\Delta + \widehat{h}(t, u_1^\sigma) \le -(\varphi_p(u_2^\Delta))^\Delta + \widehat{h}(t, u_2^\sigma),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \alpha_1 u_1(a) - \alpha_2 u_1^\Delta(a) \le \alpha_1 u_2(a) - \alpha_2 u_2^\Delta(a), \\ \alpha_3 u_1(\sigma^2(b)) + \alpha_4 u_1^\Delta(\sigma(b)) \le \alpha_3 u_2(\sigma^2(b)) + \alpha_4 u_2^\Delta(\sigma(b)), \end{cases} \tag{4.3}$$

alors $u_1(t) \le u_2(t)$, pour tout $t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$.

Preuve: La preuve est similaire à celle du Lemme 2.1 du Chapitre 2. ■

Définition 4.1 *: On dit que $\alpha \in D$ est une sous solution de (4.2) si*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(\alpha^\Delta)\right)^\Delta \le -\widehat{h}(t, \alpha^\sigma),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \alpha_1 \alpha(a) - \alpha_2 \alpha^\Delta(a) \le c, \\ \alpha_3 \alpha(\sigma^2(b)) + \alpha_4 \alpha^\Delta(\sigma(b)) \le d. \end{cases}$$

Définition 4.2 *: On dit que $\beta \in D$ est une sur solution de (4.2) si*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(\beta^\Delta)\right)^\Delta \ge -\widehat{h}(t, \beta^\sigma),\ t \in [a,b]_T, \\ \alpha_1 \beta(a) - \alpha_2 \beta^\Delta(a) \ge c, \\ \alpha_3 \beta(\sigma^2(b)) + \alpha_4 \beta^\Delta(\sigma(b)) \ge d. \end{cases}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 4.1 *: Supposons que α et β sont des sous et sur solutions du problème (4.2) tel que $\alpha(t) \le \beta(t)$, pour tout $t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$. Alors le problème (4.2) admet une solution unique $u \in D$ tel que*

$$\alpha(t) \le u(t) \le \beta(t),\ \text{pour tout}\ t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du Théorème 3.1 dans [1], on peut montrer que le problème (4.2) admet au moins une solution et d'aprés le Lemme 4.1 il résulte que le problème (4.2) admet une unique solution. ■

4.3 Résultats principaux

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites

(H_1) $\exists h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante tel que $u \longmapsto f(t,u,v) + h_1(u)$ et croissante pour tout $t \in [a,b]_T$ et $u \in \mathbb{R}$.

(H_2) $\exists h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante tel que $v \longmapsto g(t,u,v) + h_2(v)$ et croissante pour tout $t \in [a,b]_T$ et $v \in \mathbb{R}$.

4.3.1 Existence des solutions extrémales pour les systèmes quasimonotones croissants.

Dans cette section, on suppose que l'hpothèse suivante est satisfaite

(H_3) f est croissante par rapport à v et g est croissante par raport à u.

Définition 4.3 *On dit que (u,v) est une solution de (4.1) si:*

i) $(u,v) \in D^2$.

ii) (u,v) *satisfait (4.1).*

Définition 4.4 *On dit que $(\underline{u},\underline{v})$ est une sous solution de (4.1), si:*

i) $(\underline{u},\underline{v}) \in D^2$.

$$ii)\ \begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}^\Delta))^\Delta \leq f(t,\underline{u}^\sigma,\underline{v}^\sigma),\ t \in [a,b]_T\,, \\ -(\varphi_q(\underline{v}^\Delta))^\Delta \leq g(t,\underline{u}^\sigma,\underline{v}^\sigma),\ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1\underline{u}(a) - c_2^\Delta\underline{u}(a) \leq L_1(\underline{u}), \\ c_3\underline{u}(\sigma^2(b)) + c_4^\Delta\underline{u}(\sigma(b)) \leq L_2(\underline{u}), \\ c_1'\underline{v}(a) - c_2'\underline{v}^\Delta(a) \leq L_3(\underline{v}), \\ c_3'\underline{v}(\sigma^2(b)) + c_4'\underline{v}^\Delta(\sigma(b)) \leq L_4(\underline{v}). \end{cases}$$

Définition 4.5 *On dit que $(\bar{u},\bar{v})$ est une sur solution de (4.1), si:*

i) $(\bar{u},\bar{v}) \in D^2$.

$$
ii)\begin{cases}
-(\varphi_p(\bar{u}^{\Delta}))^{\Delta} \geq f(t,\bar{u}^{\sigma},\bar{v}^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T\,,\\
-(\varphi_q(\bar{v}^{\Delta}))^{\Delta} \geq g(t,\bar{u}^{\sigma},\bar{v}^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T\,,\\
c_1\bar{u}(a)-c_2\bar{u}^{\Delta}(a)\geq L_1(\bar{u}),\\
c_3\bar{u}(\sigma^2(b))+c_4\bar{u}^{\Delta}(\sigma(b))\geq L_2(\bar{u}),\\
c_1'\bar{v}(a)-c_2'\bar{v}^{\Delta}(a)\geq L_3(\bar{v}),\\
c_3'\bar{v}(\sigma^2(b))+c_4'\bar{v}^{\Delta}(\sigma(b))\geq L_4(\bar{v}).
\end{cases}
$$

Théorème 4.2 *:Supposons que les hypothèses $(H_i)_{i=1,2,3}$ sont satisfaites et soient $(\underline{u},\underline{v})$ et $(\bar{u},\bar{v})$ la sous et la sur solution respectivement de (4.1) tel que $\underline{u}\leq\bar{u}$ et $\underline{v}\leq\bar{v}$ sur $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$, alors le système (4.1) admet une solution maximale $(u^\star,v^\star)$ et une solution minimale $(u_\star,v_\star)$ tel que pour chaque solution (u,v) de (4.1) avec $\underline{u}\leq u\leq\bar{u}$ et $\underline{v}\leq v\leq\bar{v}$ on a*

$$
\underline{u}\leq u_\star\leq u\leq u^\star\leq\overline{u}\ \textit{et}\ \underline{v}\leq v_\star\leq v\leq v^\star\leq\overline{v}\ \textit{sur}\ \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.
$$

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.

On pose $\underline{u}_0=\underline{u}$, $\underline{v}_0=\underline{v}$ et on définit les suites $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\underline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$
\begin{cases}
-(\varphi_p(\underline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta}+h_1(\underline{u}_{n+1}^{\sigma})=f(t,\underline{u}_n^{\sigma},\underline{v}_n^{\sigma})+h_1(\underline{u}_n^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T\,,\\
c_1\underline{u}_{n+1}(a)-c_2\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(a)=L_1(\underline{u}_n),\\
c_3\underline{u}_{n+1}(\sigma^2(b))+c_4\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b))=L_2(\underline{u}_n),
\end{cases}
$$

et

$$
\begin{cases}
-(\varphi_q(\underline{v}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta}+h_2(\underline{v}_{n+1}^{\sigma})=g(t,\underline{u}_n^{\sigma},\underline{v}_n^{\sigma})+h_2(\underline{v}_n^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T\,,\\
c_1'\underline{v}_{n+1}(a)-c_2'\underline{v}_{n+1}^{\Delta}(a)=L_3(\underline{v}_n),\\
c_3'\underline{v}_{n+1}(\sigma^2(b))+c_4'\underline{v}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b))=L_4(\underline{v}_n).
\end{cases}
$$

De même, on pose $\overline{u}_0=\overline{u}$, $\overline{v}_0=\overline{v}$ et on définit les suites $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$
\begin{cases}
-(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta}+h_1(\overline{u}_{n+1})=f(t,\overline{u}_n^{\sigma},\overline{v}_n^{\sigma})+h_1(\overline{u}_n),\ t\in[a,b]_T\,,\\
c_1\overline{u}_{n+1}(a)-c_2\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(a)=L_1(\overline{u}_n),\\
c_3\overline{u}_{n+1}(\sigma^2(b))+c_4\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b))=L_2(\overline{u}_n),
\end{cases}
$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_q(\overline{v}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h_2(\overline{v}_{n+1}^{\sigma}) = g(t, \overline{u}_n^{\sigma}, \overline{v}_n^{\sigma}) + h_2(\overline{v}_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1'\overline{v}_{n+1}(a) - c_2'\overline{v}_{n+1}^{\Delta}(a) = L_3(\overline{v}_n), \\ c_3'\overline{v}_{n+1}(\sigma^2(b)) + c_4'\overline{v}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = L_4(\overline{v}_n), \end{cases}$$

Etape 1: Raisonnns par recurrence et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \overline{u} \text{ et } \underline{v} \leq \underline{v}_n \leq \overline{v} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Preuve:

1) Pour $n = 0$, on a: $\underline{u} = \underline{u}_0$, alors $\underline{u} \leq \underline{u}_0 \leq \overline{u}$ et $\underline{v} = \underline{v}_0$, alors $\underline{v} \leq \underline{v}_0 \leq \overline{v}$.

2) Supposons pour $n > 1$ fixé on a $\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq \underline{v}_n \leq \overline{v}$ et montrons que $\underline{u} \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq \underline{v}_{n+1} \leq \overline{v}$.

On a

$$\begin{aligned} & -(\varphi_p(\underline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h_1(\underline{u}_{n+1}^{\sigma}) + (\varphi_p(\underline{u}^{\Delta}))^{\Delta} - h_1(\underline{u}^{\sigma}) \\ \geq \quad & f(t, \underline{u}_n^{\sigma}, \underline{v}_n^{\sigma}) + h_1(\underline{u}_n^{\sigma}) - f(t, \underline{u}^{\sigma}, \underline{v}^{\sigma}) - h_1(\underline{u}^{\sigma}) \\ \geq \quad & f(t, \underline{u}_n^{\sigma}, \underline{v}^{\sigma}) + h_1(\underline{u}_n^{\sigma}) - f(t, \underline{u}^{\sigma}, \underline{v}^{\sigma}) - h_1(\underline{u}^{\sigma}) \geq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$-(\varphi_p(\underline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h_1(\underline{u}_{n+1}^{\sigma}) \geq -(\varphi_p(\underline{u}^{\Delta}))^{\Delta} + h_1(\underline{u}^{\sigma}). \tag{4.4}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} & (c_1\underline{u}_{n+1}(a) - c_2\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(a)) - (c_1\underline{u}(a) - c_2\underline{u}^{\Delta}(a)) \\ & = L_1(\underline{u}_n) - L_1(\underline{u}) \geq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$c_1\underline{u}_{n+1}(a) - c_2\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(a) \geq c_1\underline{u}(a) - c_2\underline{u}^{\Delta}(a). \tag{4.5}$$

De même on a

$$c_3\underline{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + c_4\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) \geq c_3\underline{u}(\sigma^2(b)) + c_4\underline{u}^{\Delta}(\sigma(b)). \tag{4.6}$$

En conclusion d'aprés (4.4), (4.5), (4.6) et en utilisant le Lemme 4.1, on obtient

$$\underline{u} \leq \underline{u}_{n+1} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T .$$

D'une façon similaire, on montre que

$$\underline{u}_{n+1} \leq \overline{u} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T ,$$

et

$$\underline{v} \leq \underline{v}_{n+1} \leq \overline{v} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T .$$

En conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} : \underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \overline{u} \text{ et } \underline{v} \leq \underline{v}_n \leq \overline{v} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T .$$

Etape 2: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \text{ et } \underline{v}_n \leq \underline{v}_{n+1} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T .$$

Preuve: La preuve est similaire à celle de l'**Etape 1**.

Etape 3: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{u} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u} \text{ et } \underline{v} \leq \overline{v}_{n+1} \leq \overline{v}_n \leq \overline{v} \text{ sur } \left[a, \sigma^2(b)\right]_T .$$

Preuve: La preuve est similaire à celle de l'**Etape 1**.

Etape 4: Il existe deux constantes C_1' et C_2' indépendantes de n tels que

$$\left\|\overline{u}_n^{\Delta}\right\|_0 \leq C_1' \text{ et } \left\|\overline{v}_n^{\Delta}\right\|_0 \leq C_2', \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a, \sigma(b)]_T$.

Puisque $\overline{u}_n$ est continue sur $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$ et $\overline{u}_n^{\Delta}$ est continue sur $\left[a, \sigma^2(b)\right)_T$, alors d'aprés le Théorème 1.3, il existe ξ_n, $\tau_n \in \left[a, \sigma^2(b)\right)_T$ tel que

$$\overline{u}_n^{\Delta}(\tau_n) \leq \frac{\overline{u}_n\left(\sigma^2(b)\right) - \overline{u}_n(a)}{\sigma^2(b) - a} \leq \overline{u}_n^{\Delta}(\xi_n) .$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) &= -\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{t} (f(s, \overline{u}_n^{\sigma}(s), \overline{v}_n^{\sigma}(s)) + h_1(\overline{u}_n^{\sigma}(s)) - h_1(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(s)))\Delta s \\
&\leq \begin{array}{l} \varphi_p\left(\dfrac{\overline{u}_{n+1}\left(\sigma^2(b)\right) - \overline{u}_{n+1}\left(a\right)}{\sigma^2(b) - a}\right) \\ + \displaystyle\int_{\tau_n}^{t} (f(s, \overline{u}_n^{\sigma}(s), \overline{v}_n^{\sigma}(s)) + h_1(\overline{u}_n^{\sigma}(s)) - h_1(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(s)))\Delta s \end{array} \\
&\leq \frac{1}{(\sigma^2(b) - a)^{p-1}} \varphi_p\left(\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \underline{u}\left(a\right)\right) + K',
\end{aligned}$$

où

$$K' = \left(M_1'(f) + 2M_2'(h)\right)\left(\sigma(b) - a\right),$$

avec

$$M_1'(f) := \max\left\{f(t, u, v) : t \in [a, b]_T\,,\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ et } \underline{v} \leq v \leq \overline{v}\right\},$$

et

$$M_2'(h) := \max\left\{|h(u)| : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\}.$$

Alors si on pose

$$\widetilde{C_1}' := \frac{1}{(\sigma^2(b) - a)^{p-1}} \varphi_p\left(\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \underline{u}\left(a\right)\right) + \left(M_1'(f) + 2M_2'(h)\right)\left(\sigma\left(b\right) - a\right),$$

on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma\left(b\right)]_T\,,\ \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) \leq \widetilde{C_1}'.$$

Ce qui entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma\left(b\right)]_T\,,\ \overline{u}_{n+1}^{\Delta}(t) \leq \widetilde{C}_1'^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.7}$$

D'une manière similaire on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma\left(b\right)]_T\,,\ \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) \geq \widetilde{C_2}', \tag{4.8}$$

où

$$\widetilde{C_2}' := \frac{1}{(\sigma^2(b)-a)^{p-1}}\varphi_p\left(\underline{u}\left(\sigma^2(b)\right)-\overline{u}\left(a\right)\right)+\left(m_1'(f)+2m_2'(h)\right)\left(\sigma(b)-a\right),$$

avec

$$m_1'(f) := \min\left\{|f(t,u,v)| : t\in[a,b]_T\,,\ \underline{u}\leq u\leq\overline{u} \text{ et } \underline{v}\leq v\leq\overline{v}\right\},$$

et

$$m_2'(h) := \min\left\{|h(u)| : \underline{u}\leq u\leq\overline{u}\right\}.$$

Alors d'aprés (4.8), on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[a,\sigma(b)]_T\,,\ \overline{u}_{n+1}^{\Delta}(t)\geq\left|\widetilde{C_2}'\right|^{\frac{2-p}{p-1}}\widetilde{C_2}'. \tag{4.9}$$

Maintenant si on pose

$$C_1' := \max\left(\widetilde{C}_1'^{\frac{1}{p-1}},\left|\widetilde{C_2}'\right|^{\frac{1}{p-1}},\max_{t\in[a,\sigma(b)]_T}\left|\overline{u}^{\Delta}(t)\right|\right),$$

alors d'aprés (4.7) et (4.9), on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[a,\sigma(b)]_T\,,\ \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T}\left|\overline{u}_n^{\Delta}(t)\right|\leq C_1'.$$

D'une façon similaire on montre que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[a,\sigma(b)]_T\,,\ \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T}\left|\overline{v}_n^{\Delta}(t)\right|\leq C_2'.$$

Etape 5: Il existe deux constantes positives C_3' et C_4' indépendantes de $n\in\mathbb{N}$, tels que

$$\left\|\underline{u}_n^{\Delta}\right\|_0\leq C_3' \text{ et } \left\|\underline{v}_n^{\Delta}\right\|_0\leq C_4' \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Preuve: La preuve est similaire à celle de l'**Etape 4**.

Etape 6: Les suites de fonctions $(\overline{u}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{v}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équicontinues sur $[a,\sigma(b)]_T$.

Soient $\varepsilon>0$ et t, $s\in[a,\sigma(b)]_T$ tel que $t<s$, alors pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s)-\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right|\leq\left(M_1'(f)+2M_2'(h)\right)|s-t|\,.$$

Si on pose par définition:

$$K_1' := M_1'(f) + 2M_2'(h),$$

on a

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| \leq K_1' \left|s-t\right|.$$

Par suite, si on choisit:

$$|s-t| < \frac{\varepsilon}{K_1'+1},$$

on obtient:

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| < \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}))_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{T}$.

Or comme l'application φ_p^{-1} est un homeomorphisme croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on déduit de l'égalité

$$\left|\overline{u}_n^{\Delta}(s) - \overline{u}_n^{\Delta}(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s)) - \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t))\right|,$$

que la suite $(\overline{u}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{T}$.

D'une façon similaire on montre que $(\overline{v}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{T}$.

Etape 7: les suites $\left(\underline{u}_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\underline{v}_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équicontinues sur $[a,\sigma(b)]_{T}$.

Preuve: La preuve est similaire à celle de l'**Etape 6**, alors on omettre la preuve.

Etape 8: La suite $(\overline{u}_n, \overline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution maximale de (4.1).

D'aprés les **Etapes 1, 2** et **6,** on a $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées sur $C^1(\left[a,\sigma^2(b)\right]_{T})$ et $(\overline{u}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{v}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équicontinues sur $[a,\sigma(b)]_{T}$, alors d'aprés le Théorème d'Ascoli-Arzéla, il existe deux sous-suites $(\overline{u}_{n_j})$ de $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{v}_{n_j})$ de $(\overline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent dans $C_{rd}^1(\left[a,\sigma^2(b)\right]_{T})$.

Soient

$$u := \lim_{n_j\to+\infty} = \overline{u}_{n_j} \text{ et } v := \lim_{n_j\to+\infty} = \overline{v}_{n_j}.$$

Alors

$$u^{\Delta} := \lim_{n_j\to+\infty} = \overline{u}_{n_j}^{\Delta} \text{ et } v^{\Delta} := \lim_{n_j\to+\infty} = \overline{v}_{n_j}^{\Delta}.$$

Mais, d'aprés l'**Etape 1,** les suites $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et majorées, donc les limites de ces suites existent et on les notes par $u^{\star}$ et $v^{\star}$ respectivement.

Par unicité de la limite on a $u = u^\star$ et $v = v^\star$ et de plus les suites $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $C^1_{rd}(\big[a,\sigma^2(b)\big]_T)$ vers $u^\star$ et $v^\star$ respectivement.

Soit $t \in [a,b]_T$, on a:

$$-\varphi_p(\overline{u}^\Delta_{n+1})(t) = \varphi_p(\overline{u}^\Delta_{n+1})(a) + \int_a^t (f(\tau,\overline{u}^\sigma_n(\tau),\overline{v}^\sigma_n(\tau)) + h_1(\overline{u}^\sigma_n(\tau)) - h_1(\overline{u}^\sigma_{n+1}(\tau)))\Delta\tau,$$

et

$$-\varphi_q(\overline{v}^\Delta_{n+1})(t) = \varphi_q(\overline{v}^\Delta_{n+1})(a) + \int_a^t (g(\tau,\overline{u}^\sigma_n(\tau),\overline{v}^\sigma_n(\tau)) + h_2(\overline{v}^\sigma_n(\tau)) - h_2(\overline{v}^\sigma_{n+1}(\tau)))\Delta\tau.$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(f(\tau,\overline{u}^\sigma_n(\tau),\overline{v}^\sigma_n(\tau)) + h(\overline{u}^\sigma_n(\tau)) - h(\overline{u}^\sigma_{n+1}(\tau))) = (f(\tau,u^{\star\sigma}(\tau),\overline{v}^{\star\sigma}(\tau)),$$

$$\lim_{n\to+\infty}(g(\tau,\overline{u}^\sigma_n(\tau),\overline{v}^\sigma_n(\tau)) + h(\overline{v}^\sigma_n(\tau)) - h(\overline{v}^\sigma_{n+1}(\tau))) = (g(\tau,u^{\star\sigma}(\tau),\overline{v}^{\star\sigma}(\tau)),$$

$$\exists K''_2 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \tau \in [a,b]_T\,,\ \big|(f(\tau,\overline{u}^\sigma_n(\tau),\overline{v}^\sigma_n(\tau)) + h(\overline{u}^\sigma_n(\tau)) - h(\overline{u}^\sigma_{n+1}(\tau)))\big| \leq K''_2,$$

et

$$\exists K''_3 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \tau \in [a,b]_T\,,\ \big|(g(\tau,\overline{u}^\sigma_n(\tau),\overline{v}^\sigma_n(\tau)) + h(\overline{v}^\sigma_n(\tau)) - h(\overline{v}^\sigma_{n+1}(\tau)))\big| \leq K''_3,$$

Par conséquent, d'aprés le Théorème 1.5, on a

$$-\varphi_p(u^{\star\Delta})(t) = \varphi_p(u^{\star\Delta})(a) + \int_a^t f(\tau,u^{\star\sigma}(\tau),\overline{v}^{\star\sigma}(\tau))\Delta\tau,$$

et

$$-\varphi_q(v^{\star\Delta})(t) = \varphi_p(v^{\star\Delta})(a) + \int_a^t g(\tau,u^{\star\sigma}(\tau),\overline{v}^{\star\sigma}(\tau))\Delta\tau,$$

Ainsi, on obtient

$$\forall t \in [a,b]_T\,, - (\varphi_p(u^{\star\Delta}))^\Delta = f(t,u^{\star\sigma},\overline{v}^{\star\sigma}), \tag{4.10}$$

et

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\ - (\varphi_q(v^{\star\Delta}))^\Delta = g(t,u^{\star\sigma},\overline{v}^{\star\sigma}). \tag{4.11}$$

De même on a

$$c_1u^\star(a) - c_2u^{\star\Delta}(a) = L_1(u^\star), \tag{4.12}$$

$$c_3u^\star(\sigma^2(b)) + c_4u^{\star\Delta}(\sigma(b)) = L_2(u^\star), \tag{4.13}$$

$$c_1'v^\star(a) - c_2'v^{\star\Delta}(a) = L_3(v^\star), \tag{4.14}$$

et

$$c_3'v^\star(\sigma^2(b)) + c_4'v^{\star\Delta}(\sigma(b)) = L_4(v^\star). \tag{4.15}$$

Par suite d'aprés (4.10)(4.11),(4.12),(4.14),(4.13) et (4.15), il résulte que $(u^\star,v^\star)$ est une solution du problème (4.1)

Maintenant on montre que si (u,v) est une autre solution de (4.1) tels que $\underline{u} \le u \le \overline{u}$ et $\underline{v} \le v \le \overline{v}$ sur $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$, alors $u \le u^\star$ et $v \le v^\star$ sur $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$.

Comme (u,v) est une sous solution de (4.1), alors d'aprés l'**Etape 1**, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u \le \overline{u}_n \text{ et } v \le \overline{v}_n$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$u \le \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n = u^\star \text{ et } v \le \lim_{n\to+\infty} \overline{v}_n = v^\star.$$

C'est-à-dire que $(u^\star,v^\star)$ est une solution maximale du problème (4.1).

Etape 9: La suite $(\underline{u}_n,\underline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution minimale $(u_\star,v_\star)$ du problème (4.1).

Preuve: La preuve est similaire à celle de l'**Etape 8** d'ou le résultat. ■

4.3.2 Exixtence des solutions minimales-maximales et maximales-minimales pour les systèmes quasimonotones décroissants.

Dans cette section on suppose que la condition suivante est satisfaite

(H_4) f est décroissante par rapport à v et g est décroissante par raport u.

Définition 4.6 *: On dit que $(\underline{u},\bar{u})$ et $(\underline{v},\bar{v})$ sont des sous et sur solutions de (4.1) si:*

i) $(\underline{u},\bar{u}),(\underline{v},\bar{v}) \in D^2$.

$$ii)\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}^{\Delta}))^{\Delta} \leq f(t, \underline{u}^{\sigma}, \bar{v}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ -(\varphi_p(\bar{u}^{\Delta}))^{\Delta} \geq f(t, \bar{u}^{\sigma}, \underline{v}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ -(\varphi_q(\underline{v}^{\Delta}))^{\Delta} \leq g(t, \bar{u}^{\sigma}, \underline{v}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ -(\varphi_q(\bar{v}^{\Delta}))^{\Delta} \geq g(t, \underline{u}^{\sigma}, \bar{v}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \underline{u}(a) - a_1\underline{u}^{\Delta}(a) \leq L_1(\underline{u}),\ \underline{u}(\sigma^2(b)) + a_2\underline{u}^{\Delta}(\sigma(b)) \leq L_2(\underline{u}), \\ \underline{v}(a) - a_3\underline{v}^{\Delta}(a) \leq L_3(\underline{v}),\ \underline{v}(\sigma^2(b)) + a_4\underline{v}^{\Delta}(\sigma(b)) \leq L_4(\underline{v}), \\ \bar{u}(a) - a_1\bar{u}^{\Delta}(a) \geq L_1(\bar{u}),\ \bar{u}(\sigma^2(b)) + a_2\bar{u}^{\Delta}(\sigma(b)) \geq L_2(\bar{u}), \\ \bar{v}(a) - a_3\bar{v}^{\Delta}(a) \geq L_3(\bar{v}),\ \bar{v}(\sigma^2(b)) + a_4\bar{v}^{\Delta}(\sigma(b)) \geq L_4(\bar{v}). \end{cases}$$

Théorème 4.3 *: Supposons que les hypothèses* (H_1),(H_2) *et* (H_4) *sont satisfaites et soient* $(\underline{u}, \bar{u})$ *et* $(\underline{v}, \bar{v})$ *sont des sous et sur solutions de (4.1) tel que,* $\underline{u} \leq \bar{u}$ *et* $\underline{v} \leq \bar{v}$ *sur* $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, *alors le système, admet une maximale-minimale solution* $(u^{\star}, v_{\star})$ *et une minimale-maximale solution* $(u_{\star}, v^{\star})$ *tel que pour chaque* (u,v) *solution de (4.1) avec* $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u,v) \leq (\bar{u}, \bar{v})$ *on a*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u_{\star}, v_{\star}) \leq (u,v) \leq (u^{\star}, v^{\star}) \leq (\bar{u}, \bar{v}).$$

Preuve: On pose $\overline{u}_0 = \bar{u}$, $\underline{v}_0 = \underline{v}$ et définissons les suites $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\underline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h_1(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}) = f(t, \overline{u}_n^{\sigma}, \underline{v}_n^{\sigma}) + h_1(\overline{u}_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \overline{u}_{n+1}(a) - a_1\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(a) = L_1(\overline{u}_n), \\ \overline{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_2\overline{u}_{n+1}(\sigma(b)) = L_2(\overline{u}_n). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_q(\underline{v}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h_2(\underline{v}_{n+1}^{\sigma}) = g(t, \overline{u}_n^{\sigma}, \underline{v}_n^{\sigma}) + h_2(\underline{v}_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \underline{v}_{n+1}(a) - a_3\underline{v}_{n+1}^{\Delta}(a) = L_3(\underline{v}_n), \\ \underline{v}_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_4\underline{v}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = L_4(\underline{v}_n). \end{cases}$$

D'une manière analogue, on prend $\underline{u}_0 = \underline{u}$, $\overline{v}_0 = \overline{v}$ et définissons les suites $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h_1(\underline{u}_{n+1}^{\sigma}) = f(t, \underline{u}_n^{\sigma}, \overline{v}_n^{\sigma}) + h_1(\underline{u}_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \underline{u}_{n+1}(a) - a_1\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(a) = L_1(\underline{u}_n), \\ \underline{u}_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_2\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b) = L_2(\underline{u}_n) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_q(\overline{v}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta} + h_1(\overline{v}_{n+1}^{\sigma}) = g(t, \underline{u}_n^{\sigma}, \overline{v}_n^{\sigma}) + h_1(\overline{v}_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \overline{v}_{n+1}(a) - a_3\overline{v}_{n+1}^{\Delta}(a) = L_3(\overline{v}_n), \\ \overline{v}_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_4\overline{v}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = L_4(\overline{v}_n). \end{cases}$$

Le reste de la preuve est similaire à celle du Théorème 4.2. ■

4.3.3 Existence des solutions pour les systèmes quasimonotones mixtes.

Dans cette section, on suppose que l'hypothèse suivante est verifiée:

(H_5) f est croissante en v et g est décroissante en u.

Définition 4.7 *:On dit que $(\underline{u}, \overline{u})$ et $(\underline{v}, \overline{v})$ est une paire des sous et sur solution si:*

i) $\underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v} \in D$

ii) $$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}^{\Delta}))^{\Delta} \le f(t, \underline{u}^{\sigma}, \underline{v}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ -(\varphi_p(\overline{u}^{\Delta}))^{\Delta} \ge f(t, \overline{u}^{\sigma}, \overline{v}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ -(\varphi_q(\underline{v}^{\Delta}))^{\Delta} \le g(t, \overline{u}^{\sigma}, \underline{v}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ -(\varphi_q(\overline{v}^{\Delta}))^{\Delta} \ge g(t, \underline{u}^{\sigma}, \overline{v}^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \end{cases}$$

iii) $$\begin{cases} \underline{u}(a) - a_1\underline{u}^{\Delta}(a) \le L_1(\underline{u}),\ \underline{u}(\sigma^2(b)) + a_2\underline{u}^{\Delta}(\sigma(b)) \le L_2(\underline{u}), \\ \bar{u}(a) - a_1\bar{u}^{\Delta}(a) \ge L_1(\bar{u}),\ \bar{u}(\sigma^2(b)) + a_2\bar{u}^{\Delta}(\sigma(b)) \ge L_2(\bar{u}), \\ \underline{v}(a) - a_3\underline{v}^{\Delta}(a) \le L_3(\underline{v}),\ \underline{v}(\sigma^2(b)) + a_4\underline{v}^{\Delta}(\sigma(b)) \le L_4(\underline{v}), \\ \bar{v}(a) - a_3\bar{v}^{\Delta}(a) \ge L_3(\bar{v}),\ \bar{v}(\sigma^2(b)) + a_4\bar{v}^{\Delta}(\sigma(b)) \ge L_4(\bar{v}). \end{cases}$$

On prend $u_0 = \bar{u}$, $u_1 = \underline{u}$ et $v_0 = \bar{v}$, $v_1 = \underline{v}$ et définissons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_{n+2}^{\Delta}))^{\Delta} + h_1(u_{n+2}^{\sigma}) = f(t, u_n^{\sigma}, v_n^{\sigma}) + h_1(u_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ u_{n+2}(a) - a_1u_{n+2}^{\Delta}(a) = L_1(u_n), \\ u_{n+2}(\sigma^2(b)) + a_2u_{n+2}^{\Delta}(\sigma(b)) = L_2(u_n). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -(\varphi_q(v_{n+2})^{\Delta})^{\Delta} + h_2(v_{n+2}^{\sigma}) = g(t, u_{n+1}^{\sigma}, v_n^{\sigma}) + h_2(v_n^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ u_{n+2}(a) - a_3v_{n+2}^{\Delta}(a) = L_3(v_n), \\ v_{n+2}(\sigma^2(b)) + a_4v_{n+2}^{\Delta}(\sigma(b)) = L_4(v_n), \end{cases}$$

et on a le résultat suivant:

Théorème 4.4 *:Supposons que les hypothèses (H_1),(H_2) et (H_5) sont satisfaites et soient* $(\underline{u}, \overline{u})$ *et* $(\underline{v}, \overline{v})$ *une paire de sous-sur solutions de (4.1) au sens de la définition 4.7 tel que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *et* $\underline{v} \leq \overline{v}$ *sur* $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, *alors les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont monotones et vérifier les propriétés suivantes:*

$$\begin{aligned} \underline{u} &= u_1 \leq u_3 \leq \ ... \ \leq u_{2n+1} \leq u_{2n} \leq \ ... \ \leq u_2 \leq u_0 = \overline{u}, \ sur \ \left[a, \sigma^2(b)\right]_T, \\ \underline{v} &= v_1 \leq v_3 \leq \ ... \ \leq v_{2n+1} \leq v_{2n} \leq \ ... \ \leq v_2 \leq v_0 = \overline{v}, \ sur \ \left[a, \sigma^2(b)\right]_T. \end{aligned}$$

Preuve: La preuve est similaire à celle de la preuve de l'**Etape 1** du Théorème 4.2. ■

D'aprés le Théorème précédent les suites $(u_{2n}, v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}, v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées. Par conséquent on pose par définition

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{2n}, v_{2n}) = (u_{\star\star}, v_{\star\star}),$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{2n+1}, v_{2n+1}) = (u^{\star\star}, v^{\star\star}),$$

et on a

$$\underline{u} \leq u_{\star\star} \leq u^{\star\star} \leq \overline{u},$$

et

$$\underline{v} \leq v_{\star\star} \leq v^{\star\star} \leq \overline{v}.$$

En utilisant un raisonnement similaire à celle du Théorème 4.2, on montre le résultat suivant

Théorème 4.5 *Supposons que les hypothèses (H_1),(H_2) et (H_5) sont satisfaites et soient* $(\underline{u}, \overline{u})$ *et* $(\underline{v}, \overline{v})$ *sont une paire de sous-sur solutions de (4.1) au sens de la Définition 4.7 tels que,* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *et* $\underline{v} \leq \overline{v}$ *sur* $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$, *alors les suites* $(u_{2n}, v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1}, v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers* $(u_{\star\star}, v_{\star\star})$ *et* $(u^{\star\star}, v^{\star\star})$ *qui sont quasi-solutions pour le problème (4.1).*

Preuve: La preuve est similaire à celle du Théorème 4.2. ■

4.4 Applications

Dans cette section on donne quelques exemples d'applications.

Exemple 4.1 *On considère le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta}(t) = u^{\alpha_1}(\sigma(t)) - u^{\beta_1}(\sigma(t)) + u^{\alpha_2}(\sigma(t))\, v^{\beta_2}(\sigma(t)) + \widetilde{h_1}(t), \ t \in [0,10]_T, \\ -(\varphi_q(v^{\Delta}))^{\Delta}(t) = v^{\alpha_3}(\sigma(t)) - v^{\beta_3}(\sigma(t)) + v^{\alpha_4}(\sigma(t))\, u^{\beta_4}(\sigma(t)) + \widetilde{h_2}(t), \ t \in [0,10]_T, \\ u(0) - u^{\Delta}(0) = \int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_1(s)u(s)\Delta s, \\ u(\sigma^2(10)) + u^{\Delta}(\sigma(10)) = \int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_2(s)u(s)\Delta s, \\ v(0) - v^{\Delta}(0) = \int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_3(s)v(s)\Delta s, \\ v(\sigma^2(10)) + v^{\Delta}(\sigma(10)) = \int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_4(s)v(s)\Delta s, \end{cases} \tag{4.16}$$

où $\alpha_i > 0$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$, $\beta_i > 0$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$ *avec* $\beta_1 > \max(\alpha_1, \alpha_2 + \beta_2)$ *et* $\beta_3 > \max(\alpha_3, \alpha_4 + \beta_4)$, $\widetilde{h_i} : [0,10]_T \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue pour* $i = 1, 2$ *et* $g_i : [0, \sigma^2(10)]_T \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue avec* $\int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_i(s)\Delta s < 1$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$.

Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que ce système est quasimonotone croissant et que les hypothèses (H_1*), (*H_2*) et (*H_3*) sont satisfaites.*

On va étudier deux cas.

Cas 1*: Si* $T = \mathbb{R}$*.*

Pour ce cas le système (4.16) devient

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{'}))^{'}(t) = u^{\alpha_1}(t) - u^{\beta_1}(t) + u^{\alpha_1}(t)\, v^{\beta_2}(t) + \widetilde{h_1}(t), \ t \in [0,10], \\ -(\varphi_q(v^{'}))^{'}(t) = v^{\alpha_2}(t) - v^{\beta_3}(t) + v^{\alpha_2}(t)\, u^{\beta_4}(t) + \widetilde{h_2}(t), \ t \in [0,10], \\ u(0) - u^{'}(0) = \int\limits_0^{10} g_1(s)u(s)ds, \\ u(10) + u^{'}(10) = \int\limits_0^{10} g_2(s)u(s)ds, \\ v(0) - v^{'}(0) = \int\limits_0^{10} g_3(s)v(s)ds, \\ v(10) + v^{'}(10) = \int\limits_0^{10} g_4(s)v(s)ds. \end{cases} \tag{4.17}$$

On a le résultat suivant

Proposition 8 *Le système (4.17) admet une solution maximale $(u^{\star}, v^{\star})$ et une solution minimale $(u_{\star}, v_{\star})$.*

Preuve: *On pose $(\underline{u}, \underline{v}) = (0,0)$ et $(\overline{u}, \overline{v}) = (L, L)$, où L est une constante strictement positive.*

Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que $(\underline{u}, \underline{v})$ est un couple de sous solutions pour le système (4.17).

Maintenant $(\overline{u}, \overline{v})$ *est un couple de sur solutions pour le système (4.17) si on a*

$$\begin{cases} 0 \geq L^{\alpha_1} - L^{\beta_1} + L^{\alpha_1+\beta_2} + \widetilde{h_1}(t),\ t \in [0,10]\,, \\ 0 \geq L^{\alpha_2} - L^{\beta_3} + L^{\alpha_2+\beta_4} + \widetilde{h_2}(t),\ t \in [0,10]\,, \\ L \geq \int\limits_0^{10} g_1(s) L ds, \\ L \geq \int\limits_0^{10} g_2(s) L ds, \\ L \geq \int\limits_0^{10} g_3(s) L ds, \\ L \geq \int\limits_0^{10} g_4(s) L ds. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} L^{\beta_1} \geq L^{\alpha_1} + L^{\alpha_1+\beta_2} + \widetilde{h_1}(t),\ t \in [0,10]\,, \\ L^{\beta_1} \geq L^{\alpha_2} + L^{\alpha_2+\beta_4} + \widetilde{h_2}(t),\ t \in [0,10]\,, \\ L \geq \int\limits_0^{10} g_1(s) L ds, \\ L \geq \int\limits_0^{10} g_2(s) L ds, \\ L \geq \int\limits_0^{10} g_3(s) L ds, \\ L \geq \int\limits_0^{10} g_4(s) L ds. \end{cases}$$

Comme $\beta_1 > \max(\alpha_1, \alpha_2 + \beta_2)$ *et* $\beta_3 > \max(\alpha_3, \alpha_4 + \beta_4)$ *et* $\int\limits_0^{10} g_i(s) ds \leq 1$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$, *alors si on prend* L *suffisament grand, on obtient que* $(\overline{u}, \overline{v})$ *est un couple de sur solutions pour le système (4.17) et par suite d'aprés le Théorème 4.2, le problème (4.17) admet une solution maximale* $(u^\star, v^\star)$ *et une solution minimale* $(u_\star, v_\star)$. ■

Cas 2: *Si* $T = \mathbb{Z}$.

Pour ce cas le système (4.16) devient

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta}(t) = u^{\alpha_1}(t+1) - u^{\beta_1}(t+1) + u^{\alpha_2}(t+1)\, v^{\beta_2}(t+1) + \widetilde{h_1}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ -(\varphi_q(v^{\Delta}))^{\Delta}(t) = v^{\alpha_3}(t+1) - v^{\beta_3}(t+1) + v^{\alpha_4}(t+1)\, u^{\beta_4}(t+1) + \widetilde{h_2}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) - \Delta u(0) = \sum_{s=0}^{11} g_1(s)u(s), \\ u(12) + \Delta u(11) = \sum_{s=0}^{11} g_2(s)u(s), \\ v(0) - \Delta v(0) = \sum_{s=0}^{11} g_3(s)u(s), \\ v(12) + \Delta v(11) = \sum_{s=0}^{11} g_4(s)u(s), \end{cases} \tag{4.18}$$

où $(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta} = \varphi_p(u(t+2) - u(t+1)) - \varphi_p(u(t+1) - u(t))$ *et* $(\varphi_q(u^{\Delta}))^{\Delta} = \varphi_q(u(t+2) - u(t+1)) - \varphi_q(u(t+1) - u(t))$.

On a le résultat suivant

Proposition 9 *Le système (4.18)admet une solution maximale* $(u^{\star}, v^{\star})$ *et une solution minimale* $(u_{\star}, v_{\star})$

Preuve: *On pose* $(\underline{u}, \underline{v}) = (0,0)$ *et* $(\overline{u}, \overline{v}) = (L, L)$*, où* L *est une constante strictement positive.*

Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que $(\underline{u}, \underline{v})$ *est un couple de sous solutions pour le système (4.18).*

Maintenant $(\overline{u}, \overline{v})$ *est un couple de sur solutions pour le système (4.18) si on a*

$$\begin{cases} 0 \geq L^{\alpha_1} - L^{\beta_1} + L^{\alpha_1+\beta_2} + \widetilde{h_1}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ 0 \geq L^{\alpha_2} - L^{\beta_3} + L^{\alpha_2+\beta_4} + \widetilde{h_2}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ L \geq \sum_{s=0}^{11} g_1(s)L, \\ L \geq \sum_{s=0}^{11} g_2(s)L, \\ L \geq \sum_{s=0}^{11} g_3(s)L, \\ L \geq \sum_{s=0}^{11} g_4(s)L. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} L^{\beta_1} \geq L^{\alpha_1} + L^{\alpha_1+\beta_2} + \widetilde{h_1}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}\,, \\ L^{\beta_1} \geq L^{\alpha_2} + L^{\alpha_2+\beta_4} + \widetilde{h_2}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}\,, \\ 1 \geq \sum\limits_{s=0}^{11} g_1(s), \\ 1 \geq \int\limits_{0}^{11} g_2(s), \\ 1 \geq \int\limits_{0}^{11} g_3(s), \\ 1 \geq \int\limits_{0}^{11} g_4(s). \end{cases}$$

Comme $\beta_1 > \max(\alpha_1, \alpha_2 + \beta_2)$ *et* $\beta_3 > \max(\alpha_3, \alpha_4 + \beta_4)$ *et* $\sum\limits_{s=0}^{11} g_i(s) \leq 1$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$, *alors si on prend L suffisament grand, on obtient que* $(\overline{u}, \overline{v})$ *est un couple de sur solutions pour le système (4.18) et par suite d'aprés le Théorème 4.2, le problème (4.18) admet une solution maximale* $(u^\star, v^\star)$ *et une solution minimale* $(u_\star, v_\star)$ ■

Exemple 4.2 *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta(t) = u^{\alpha_1}(\sigma(t)) - u^{\beta_1}(\sigma(t)) - u^{\alpha_2}(\sigma(t))\,v^{\beta_2}(\sigma(t)) + \widetilde{h_1}(t),\ t \in [0,10]_T\,, \\ -(\varphi_q(v^\Delta))^\Delta(t) = v^{\alpha_3}(\sigma(t)) - v^{\beta_3}(\sigma(t)) - v^{\alpha_4}(\sigma(t))\,u^{\beta_4}(\sigma(t)) + \widetilde{h_2}(t),\ t \in [0,10]_T\,, \\ u(0) - u^\Delta(0) = \int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_1(s)u(s)\Delta s, \\ u(\sigma^2(10)) + u^\Delta(\sigma(10)) = \int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_2(s)u(s)\Delta s, \\ v(0) - v^\Delta(0) = \int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_3(s)v(s)\Delta s, \\ v(\sigma^2(10)) + v^\Delta(\sigma(10)) = \int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_4(s)v(s)\Delta s, \end{cases} \tag{4.19}$$

où $\alpha_i > 0$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$, $\beta_i > 0$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$ *avec* $\beta_1 > \alpha_1$ *et* $\beta_3 > \alpha_3$, $\widetilde{h_i} : [0, 10]_T \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue pour* $i = 1, 2$ *et* $g_i : \left[0, \sigma^2(10)\right]_T \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue avec* $\int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_i(s)\Delta s < 1$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$.

Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que ce système est quasimonotone décroissant et que les hypothèses (H1), (H2) et (H4) sont satisfaites.

On va étudier deux cas.

***Cas 1**: Si* $T = \mathbb{R}$.

Pour ce cas le système (4.19) devient

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))'(t) = u^{\alpha_1}(t) - u^{\beta_1}(t) - u^{\alpha_1}(t)\, v^{\beta_2}(t) + \widetilde{h_1}(t), \ t \in [0, 10], \\ -(\varphi_q(v'))' = v^{\alpha_2}(t) - v^{\beta_3}(t) - v^{\alpha_2}(t)\, u^{\beta_4}(t) + \widetilde{h_2}(t), \ t \in [0, 10], \\ u(0) - u'(0) = \int\limits_0^{10} g_1(s)u(s)ds, \\ u(10) + u'(10) = \int\limits_0^{10} g_2(s)u(s)ds, \\ v(0) - v'(0) = \int\limits_0^{10} g_3(s)v(s)ds, \\ v(10) + v'(10) = \int\limits_0^{10} g_4(s)v(s)ds. \end{cases} \tag{4.20}$$

On a le résultat suivant

***Proposition 10** Le système (4.20) admet une solution maximale-minimale* $(u^\star, v_\star)$ *et une solution minimale-maximale* $(u_\star, v^\star)$.

Preuve: *On pose* $(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$ *et* $(\underline{v}, \overline{v}) = (0, L)$, *où* L *est une constante strictement positive.*

$(\underline{u},\overline{u})=(0,L)$, $(\underline{v},\overline{v})=(0,L)$ est une paire de sous et sur solutions si on a

$$\begin{cases} 0\geq L^{\alpha_1}-L^{\beta_1}+\widetilde{h_1}(t),\ \ t\in[0,10]\,, \\ 0\geq L^{\alpha_2}-L^{\beta_3}+\widetilde{h_2}(t),\ \ t\in[0,10]\,, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_1(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_2(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_3(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_4(s)Lds. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} L^{\beta_1}\geq L^{\alpha_1}+\widetilde{h_1}(t),\ \ t\in[0,10]\,, \\ L^{\beta_3}\geq L^{\alpha_2}+\widetilde{h_2}(t),\ \ t\in[0,10]\,, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_1(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_2(s)Lds \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_3(s)Lds \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_4(s)Lds. \end{cases}$$

Comme $\beta_1>\alpha_1$ et $\beta_3>\alpha_3$ et $\int\limits_0^{10} g_i(s)ds\leq 1$ pour tout $i=1,...,4$, alors si on prend L suffisament grand, on obtient que $(\underline{u},\overline{u})=(0,L)$, $(\underline{v},\overline{v})=(0,L)$ est une paire de sous et sur solutions (4.20) et par suite d'aprés le Théorème 4.3, le problème (4.20) admet une solution maximale-minimale $(u^{\star},v_{\star})$ et une solution minimale-maximale $(u_{\star},v^{\star})$.

Cas 2: *Si $T=\mathbb{Z}$.* $\blacksquare$

Pour ce cas le système (4.19) devient

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta}\,(t) = u^{\alpha_1}\,(t+1) - u^{\beta_1}\,(t+1) - u^{\alpha_2}\,(t+1)\,v^{\beta_2}\,(t+1) + \widetilde{h_1}(t),\ \ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}\,, \\ -(\varphi_q(v^{\Delta}))^{\Delta}\,(t) = v^{\alpha_3}\,(t+1) - v^{\beta_3}\,(t+1) - v^{\alpha_4}\,(t+1)\,u^{\beta_4}\,(t+1) + \widetilde{h_2}(t),\ \ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}\,, \\ u(0) - \Delta u(0) = \sum\limits_{0}^{11} g_1(s)u(s), \\ u(12) + \Delta u(11) = \sum\limits_{0}^{11} g_2(s)u(s), \\ v(0) - \Delta v(0) = \sum\limits_{0}^{11} g_3(s)v(s), \\ v(12) + \Delta v(11) = \sum\limits_{0}^{11} g_4(s)v(s), \end{cases} \tag{4.21}$$

où $(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta} = \varphi_p(u\,(t+2) - u\,(t+1)) - \varphi_p(u\,(t+1) - u\,(t))$ *et* $(\varphi_q(u^{\Delta}))^{\Delta} = \varphi_q(u\,(t+2) - u\,(t+1)) - \varphi_q(u\,(t+1) - u\,(t))$.

On a le résultat suivant

Proposition 11 *Le système (4.21) admet une solution maximale-minimale* $(u^{\star}, v_{\star})$ *et une solution minimale-maximale* $(u_{\star}, v^{\star})$.

Preuve: *On pose* $(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$ *et* $(\underline{v}, \overline{v}) = (0, L)$*, où* L *est une constante strictement positive.*

$(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$*,* $(\underline{v}, \overline{v}) = (0, L)$ *est une paire de sous et sur solutions si on a*

$$\begin{cases} 0 \geq L^{\alpha_1} - L^{\beta_1} + \widetilde{h_1}(t),\ \ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}\,, \\ 0 \geq L^{\alpha_2} - L^{\beta_3} + \widetilde{h_2}(t),\ \ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}\,, \\ L \geq \sum\limits_{0}^{11} g_1(s)L, \\ L \geq \sum\limits_{0}^{11} g_2(s)L, \\ L \geq \sum\limits_{0}^{11} g_3(s)L, \\ L \geq \sum\limits_{0}^{11} g_4(s)L. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} L^{\beta_1} \geq L^{\alpha_1} + \widetilde{h_1}(t), \ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ L^{\beta_3} \geq L^{\alpha_2} + \widetilde{h_2}(t), \ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ 1 \geq \sum\limits_{0}^{11} g_1(s), \\ 1 \geq \sum\limits_{0}^{11} g_2(s), \\ 1 \geq \sum\limits_{0}^{11} g_3(s), \\ 1 \geq \sum\limits_{0}^{11} g_4(s). \end{cases}$$

Comme $\beta_1 > \alpha_1$ *et* $\beta_3 > \alpha_3$ *et* $\sum\limits_{0}^{11} g_i(s) \leq 1$ *pour tout* $i = 1, ..., 4,$ *alors si on prend* L *suffisament grand, on obtient que* $(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$, $(\underline{v}, \overline{v}) = (0, L)$ *est une paire de sous et sur solutions (4.21) et par suite d'aprés le Théorème 4.3, le problème (4.21) admet une solution maximale-minimale* $(u^\star, v_\star)$ *et une solution minimale-maximale* $(u_\star, v^\star)$. ■

Exemple 4.3 *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta(t) = u^{\alpha_1}(\sigma(t)) - u^{\beta_1}(\sigma(t)) + u^{\alpha_2}(\sigma(t))\, v^{\beta_2}(\sigma(t)) + \widetilde{h_1}(t), \ t \in [0,10]_T, \\ -(\varphi_q(v^\Delta))^\Delta(t) = v^{\alpha_3}(\sigma(t)) - v^{\beta_3}(\sigma(t)) - v^{\alpha_4}(\sigma(t))\, u^{\beta_4}(\sigma(t)) + \widetilde{h_2}(t), \ t \in [0,10]_T, \\ u(0) - u^\Delta(0) = \int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_1(s) u(s) \Delta s, \\ u(\sigma^2(10)) + u^\Delta(\sigma(10)) = \int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_2(s) u(s) \Delta s, \\ v(0) - v^\Delta(0) = \int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_3(s) v(s) \Delta s, \\ v(\sigma^2(10)) + v^\Delta(\sigma(10)) = \int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_4(s) v(s) \Delta s, \end{cases} \tag{4.22}$$

où $\alpha_i > 0$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$, $\beta_i > 0$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$ *avec* $\beta_1 > \max(\alpha_1, \alpha_2 + \beta_2)$ *et* $\beta_3 > \alpha_3$, $\widetilde{h_i} : [0,10]_T \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue pour* $i = 1, 2$ *et* $g_i : \left[0, \sigma^2(10)\right]_T \to \mathbb{R}_+$

est une fonction continue avec $\int\limits_{0}^{\sigma^2(10)} g_i(s)\Delta s < 1$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$.

Tout d'abord il n'est pas difficile de vérifier que ce système est quasimonotone mixte et que les hypothèses (H_1), (H_2) *et* (H_5) *sont satisfaites.*

On va étudier deux cas.

Cas 1*: Si* $T = \mathbb{R}$.

Pour ce cas le système (4.22) devient

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))'(t) = u^{\alpha_1}(t) - u^{\beta_1}(t) + u^{\alpha_1}(t)\, v^{\beta_2}(t) + \widetilde{h_1}(t), \; t \in [0, 10], \\ -(\varphi_q(v'))' = v^{\alpha_2}(t) - v^{\beta_3}(t) - v^{\alpha_2}(t)\, u^{\beta_4}(t) + \widetilde{h_2}(t), \; t \in [0, 10], \\ u(0) - u'(0) = \int\limits_0^{10} g_1(s)u(s)ds, \\ u(10) + u'(10) = \int\limits_0^{10} g_2(s)u(s)ds, \\ v(0) - v'(0) = \int\limits_0^{10} g_3(s)v(s)ds, \\ v(10) + v'(10) = \int\limits_0^{10} g_4(s)v(s)ds. \end{cases} \tag{4.23}$$

On a le résultat suivant

Proposition 12 *Le système (4.23) admet au moins une quasi-solution.*

Preuve: *On pose* $(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$ *et* $(\underline{v}, \overline{v}) = (0, L)$, *où* L *est une constante strictement positive.*

$(\underline{u},\overline{u})=(0,L)$, $(\underline{v},\overline{v})=(0,L)$ est une paire de sous et sur solutions si on a

$$\begin{cases} 0\geq L^{\alpha_1}-L^{\beta_1}+L^{\alpha_2+\beta_2}+\widetilde{h_1}(t),\ t\in[0,10]\,, \\ 0\geq L^{\alpha_2}-L^{\beta_3}+\widetilde{h_2}(t),\ t\in[0,10]\,, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_1(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_2(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_3(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_4(s)Lds. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} L^{\beta_1}\geq L^{\alpha_1}+L^{\alpha_2+\beta_2}+\widetilde{h_1}(t),\ t\in[0,10]\,, \\ L^{\beta_3}\geq L^{\alpha_2}+\widetilde{h_2}(t),\ t\in[0,10]\,, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_1(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_2(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_3(s)Lds, \\ L\geq \int\limits_0^{10} g_4(s)Lds. \end{cases}$$

Comme $\beta_1>\max(\alpha_1,\alpha_2+\beta_2)$ et $\beta_3>\alpha_3$ et $\int\limits_0^{10} g_i(s)ds\leq 1$ pour tout $i=1,...,4$, alors si on prend L suffisament grand, on obtient que $(\underline{u},\overline{u})=(0,L)$, $(\underline{v},\overline{v})=(0,L)$ est une paire de sous et sur solutions (4.23) et par suite d'aprés le Théorème 4.4, le problème (4.23) admet au moins une quasi-solution. ■

Cas 2: *Si $T=\mathbb{Z}$.*

Pour ce cas, le système (4.22) devient:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta}(t) = u^{\alpha_1}(t+1) - u^{\beta_1}(t+1) + u^{\alpha_2}(t+1)\, v^{\beta_2}(t+1) + \widetilde{h_1}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ -(\varphi_q(v^{\Delta}))^{\Delta}(t) = v^{\alpha_3}(t+1) - v^{\beta_3}(t+1) - v^{\alpha_4}(t+1)\, u^{\beta_4}(t+1) + \widetilde{h_2}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) - \Delta u(0) = \sum_{s=0}^{11} g_1(s)u(s), \\ u(12) + \Delta u(11) = \sum_{s=0}^{11} g_2(s)u(s), \\ v(0) - \Delta v(0) = \sum_{s=0}^{11} g_3(s)v(s), \\ v(12) + \Delta v(11) = \sum_{s=0}^{11} g_4(s)v(s), \end{cases} \tag{4.24}$$

où $(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta} = \varphi_p(u(t+2) - u(t+1)) - \varphi_p(u(t+1) - u(t))$ *et* $(\varphi_q(u^{\Delta}))^{\Delta} = \varphi_q(u(t+2) - u(t+1)) - \varphi_q(u(t+1) - u(t))$.

On a le résultat suivant:

Proposition 13 *Le système (4.24) admet au moins une quasi-solution.*

Preuve: *On pose* $(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$ *et* $(\underline{v}, \overline{v}) = (0, L)$*, où* L *est une constante strictement positive.*

$(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$, $(\underline{v}, \overline{v}) = (0, L)$ *est une paire de sous et sur solutions si on a*

$$\begin{cases} 0 \geq L^{\alpha_1} - L^{\beta_1} + L^{\alpha_2+\beta_2} + \widetilde{h_1}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ 0 \geq L^{\alpha_2} - L^{\beta_3} + \widetilde{h_2}(t),\ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}, \\ L \geq \sum_{s=0}^{11} g_1(s)L, \\ L \geq \sum_{s=0}^{11} g_2(s)L, \\ L \geq \sum_{s=0}^{11} g_3(s)L, \\ L \geq \sum_{s=0}^{11} g_4(s)L. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$
\begin{cases}
L^{\beta_1} \geq L^{\alpha_1} + L^{\alpha_2+\beta_2} + \widetilde{h_1}(t), \ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}\,, \\
L^{\beta_3} \geq L^{\alpha_2} + \widetilde{h_2}(t), \ t \in [0,10]_{\mathbb{Z}}\,, \\
1 \geq \displaystyle\sum_{s=0}^{11} g_1(s), \\
1 \geq \displaystyle\sum_{s=0}^{11} g_2(s), \\
1 \geq \displaystyle\sum_{s=0}^{11} g_3(s), \\
1 \geq \displaystyle\sum_{s=0}^{11} g_4(s).
\end{cases}
$$

Comme $\beta_1 > \max(\alpha_1, \alpha_2 + \beta_2)$ *et* $\beta_3 > \alpha_3$ *et* $\displaystyle\sum_{s=0}^{11} g_1(s) \leq 1$ *pour tout* $i = 1, ..., 4$, *alors si on prend* L *suffisament grand, on obtient que* $(\underline{u}, \overline{u}) = (0, L)$, $(\underline{v}, \overline{v}) = (0, L)$ *est une paire de sous et sur solutions (4.23) et par suite d'aprés le Théorème 4.4, le problème (4.23) admet au moins une quasi-solution.* ■

Bibliographie

[1] R. Agarwal and E. Akin-Bohner, A generalized upper and lower method for singular boundary value problems for quasilinear dynamic equations, Adv. Stud. Contemp. Math. 15 (2007), 213-228.

[2] E. Akin-Bohner, Boundary value problems for a differential equation on a measure chain, Panam. Math. J., 10 (2000), 17-30.

[3] D. Anderson; R. Avery and J. Henderson, Existence of solutions for a one dimensional p-Laplacian on time-scales, J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), 889–896.

[4] F. M. Atici, A. Cabada, C. J. Chyan and B. Kaymakçalan, Nagumo type existence results for second order nonlinear dynamic BVPS, Nolinear Anal. 60 (2005), 209-220.

[5] F. V. Atkinson, Discrete and Continuous Boundary Problems, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 8, Academic Press, New York, 1964.

[6] M. Bohner and A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, Birkhāuser, Boston, 2001.

[7] M. Bohner and A. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhāuser, Boston, 2003.

[8] A. Cabada, Existence results for ϕ-Laplacian boundary value problems on time scales, Adv. Difference Equ. 2006, Article ID 21819, Pages 1-11.

[9] E. Cetin and F. Serap Topal, Existence results for solutions of integral boundary value problems on time scales, Abstr. Appl. Anal. 2013, Article ID 708734.

[10] M. Delgado and A. Suárez, Existence of solutions for elliptic systems with Hölder continuous nonlinearities. Differential Integral Equations **13,** No 4-6 (2000), 453–477.

[11] M. Derhab, A quasilinear elliptic system with integral boundary conditions. Proc. Jangjeon Math. Soc. 12 (2009), 165–187.

[12] M. Derhab, Existence of minimal and maximal solutions for a quasilinear elliptic equation with integral boundary value conditions, Electronic J. Qual. Theory Differ. Equ. 6 (2011), 1-18.

[13] M. Derhab and M. Nehari, Existence of minimal and maximal solutions for a second order quasilinear dynamic equation with integral boundary conditions, Panam, J. 25 (2015), 17-35.

[14] M. Frigon and H. Gilbert, Boundary value problems for systems of second-order dynamic equations on time scales with Δ-Carathéodory functions, Abstr. Appl. Anal. 2010, Article ID 234015.

[15] F. Geng and D. Zhu, Multiple results of p-Laplacian dynamic equations on time scales, Appl. Math. Comput. 193 (2007), 311-320.

[16] H. Gilbert, Théorèmes d'existence pour des systèmes d'équations differentielles et d'équations aux échelles de temps, Thése de doctorat Univ de Montréal, 15 oct 2009.

[17] J. Henderson and C. C. Tisdell, Dynamic boundary value problems of the second-order: Bernstein–Nagumo conditions and solvability, Nonlinear Ana. 67 (2007), 1374-1386.

[18] S. Gulsan Topal, Second-order periodic boundary value problems on time scales, Comput. Appl. Math. 48 (2004), 637-648.

[19] Z. He, Double positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Comput. Appl. Math. 182 (2005), 304-315.

[20] S. Hilger, Analysis on measure chains–a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math. 18 (1990), 18-56.

[21] N. I. Ionkin, Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differ. Equ. 13 (1977), 294-304.

[22] B. Kayamkçalan, Monotone iterative method for dynamic systems on time scales, Dynam. Systems Appl. 2 (1993), 213-220.

[23] B. Kayamkçalan, V. Lakshmikantham and S. Sivasundaram, Dynamic Systems on Measure Chains, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[24] V. Lakshmikantham, Monotone flows and fixed points for dynamic systems on time scales in a Banach space, Appl. Anal. 56 (1995), 175-184.

[25] Y. Li and J. Shu, Solvability of boundary value problems with Riemann-Stieltjes Δ-integral conditions for second-order dynamic equations on time scales at resonance, Adv. Difference Equ. 1 (2011).

[26] E. J. Mapes and M. F. Schumaker, Framework models of ion permeation through membrane channels and the generalized King-Altman method. Bull. Math. Biol. 68 (2006), 1429-1460.

[27] C. V. Pao, Nonlinear parabolic and elliptic equations, Plenum Press, New York (1992).

[28] Y. Sang and H. Su, Several existence theorems of nonlinear m-point boundary value problem for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 1012-1026.

[29] P. Stehlík, On monotone iterative method for BVP on time scales, Adv. Difference Equ. 1 (2005), 81-92.

[30] C. C. Tisdell, P. Drábek and J. Henderson, Multiple solutions to dynamic equations on time scales, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 11 (2004), 25-42.

ملخص:

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود الحلول لبعض أصناف المعادلات التفاضلية الشبه خطية والجمل التفاضلية الشبه خطية مع قيم حدية غير محلية في سلالم الزمن باستعمال طريقة الحلول الفوقية والتحتية مرتبطة بتقنية التراجع.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات الديناميكية' سلالم الزمن' غير محلية' الحلول التحتية والفوقية' تقنية التراجع.

Résumé :

L’objet de cette thèse est l’étude de l’existence des solutions pour certaines classes d’équations différentielles quasilinéaires et systèmes d’équations différentielles quasilinéaires avec des conditions aux limites non locales dans les échelles de temps en utilisant la méthode de sous et sur solutions couplée avec la technique itérative.

Mots clés :

Equations dynamiques, échelles de temps, non locales, sous et sur solutions, technique itérative.

Abstract :

The object of this thesis is to study the existence of solutions for certain classes of quasilinear differential equations and systems of quasilinear differential equations with nonlocal boundary conditions on time scales by busing the upper and lower solutions method coupled with monotone iterative technique.

Key words :

Dynamic equations, time scales, nonlocal, lower and upper solutions, iterative technique.

1 Résumé de Thèse

1.1 Titre: *Sur l'existence des Solutions pour des classes de problème aux limites quasilinéaires dans les échelles de temps.*

La thèse de doctorat est présenté par: M^r Nehari Mohamed.
Directeur de thèse: M^r Derhab Mohammed Professeur, UABB Tlemcen.

1.2

1.2.1 Résumé:

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles avec des conditions aux limites nonlocales dans les échelles de temps. L'aproche utilisée est basée sur la méthode de sous et sur solution avec une téchnique itérative monotone pour construire des solutions minimales et maximales cette méthode est liée au principe de comparaison faible.

La thèse est composée d'une introduction, trois chapitre et d'une bibliographie.

Dans le premier chapitre on introduit quelques définitions et notations concernant la théorie des échelles de temps.

Le deuxième chapitre est consacré a l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(u^{\Delta})\right)^{\Delta} = f(t,u^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T, \\ u(a)-a_0u^{\Delta}(a)=\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)u\left(s\right)\Delta s, \\ u(\sigma^2(b))+a_1u^{\Delta}(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)u\left(s\right)\Delta s, \end{cases} \tag{1}$$

où $\varphi_p(u)=|u|^{p-2}u$, $u\in\mathbb{R}$, $p>1$, $[a,b]_T$ est un intervalle d'une échelle de temps T, $f:[a,b]_T\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une function continue, $g_i:\left[a,\sigma^2(b)\right]_T\to\mathbb{R}_+$ sont deux fonctions continues pour $i=1,2$ et a_0 et a_1 sont deux nombres réels.

Dans le troisième chapitre on étudie l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta}=f(t,u,u^{\Delta}),\ t\in[a,b]_T\,, \\ c_1u(a)-c_2u^{\Delta}(a)=L_1(u), \\ d_1u(\sigma^2(b))+d_2u^{\Delta}(\sigma(b))=L_2(u), \end{cases} \tag{2}$$

où $\varphi_p(u)=|u|^{p-2}u$, avec $p>1$, $f:[a,b]_T\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue, $L_i:C\left(\left[a,\sigma^2(b)\right]_T\right)\to\mathbb{R}$ sont continues et croissantes pour $i=1,2$, $a\in T_k$, $b\in T^k$ et $c_i,d_i\in\mathbb{R}_+$ tels que: $c_1+c_2\neq 0$ et $d_1+d_2\neq 0$.

Enfin dans le dernier chapitre on étudie l'existence des solutions pour le système d'équations différentielles quasilinéaires avec des conditions aux limites nonlocales dans les échelles de temps suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = f(t, u^\sigma, v^\sigma),\ t \in [a,b]_T\,, \\ -(\varphi_q(v^\Delta))^\Delta = g(t, u^\sigma, v^\sigma),\ t \in [a,b]_T\,, \\ c_1 u(a) - c_2 u^\Delta(a) = L_1(u), \\ c_3 u(\sigma^2(b)) + c_4 u^\Delta(\sigma(b)) = L_2(u), \\ c'_1 v(a) - c'_2 v^\Delta(a) = L_3(v), \\ c'_3 v(\sigma^2(b)) + c'_4 v^\Delta(\sigma(b)) = L_4(v), \end{cases} \tag{3}$$

où $\varphi_p(u) = |u|^{p-2}\, u$, $p > 1$, $q > 1$, $c_i, c'_i \in \mathbb{R}_+$, pour $i = 1, ..., 4$, $f : [a,b]_T \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, et $g : [a,b]_T \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et L_i : $C(\left[a, \sigma^2(b)\right]_T) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues et croissantes.pour $i = 1, ..., 4$.

1.3 Mots clés:

Problème aux limites, les échelles de temps, p-laplacien, La méthode de sous et sur solution, Principe de comparaison, La condition de Nagumo-Bernestein.

1.4 Publication:

M. Derhab and M. Nehari, Existence of minimal and maximal solutions for a second order quasilinear dynamic equation with integral boundary conditions, Panam, J. 25 (2015), 17-35.

INTERNATIONAL PUBLICATIONS (USA)

PanAmerican Mathematical Journal
Volume 25(2015), Number 3, 17 - 35

Existence of Minimal and Maximal Solutions for a Second Order Quasilinear Dynamic Equation with Integral Boundary Conditions

Mohammed Derhab
University Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Dynamic Systems and Applications Laboratory
Department of Mathematics
Faculty of Sciences
B.P.119, Tlemcen
13000, Algeria
derhab@yahoo.fr

Mohamed Nehari
Dynamic Systems and Applications Laboratory
Preparatory School of Economy
B.P.119, Tlemcen
13000, Algeria
nehari_72@yahoo.fr

Communicated by John Graef
(Received March 5, 2015; Revised Version Accepted May 11, 2015)

Abstract

This work is concerned with the construction of the minimal and maximal solutions for a second order quasilinear dynamic equation with integral boundary conditions, where the nonlinearity is a continuous function. We also give an example to illustrate our results.

AMS Subject Classification: 34B15, 39A10

Key words: Integral boundary conditions, upper and lower solutions, monotone iterative technique, time scale, $p-$Laplacian

1 Introduction

This work is concerned with the construction of the minimal and the maximal solutions of the following quasilinear dynamic equation with integral boundary condition

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(u^{\Delta})\right)^{\Delta} = f(t,u^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)u\,(s)\,\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) - a_1 u^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)u\,(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{1}$$

where $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\,y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $[a,b]_T$ is an interval of a time scale T, $f : [a,b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function, $g_i : \left[a, \sigma^2(b)\right]_T \to \mathbb{R}_+$ are continuous functions ($i = 0$,1) and a_0 and a_1 are two positive real numbers.

Dynamic equations on time scales with nonlocal boundary conditions have been studied by several authors using the Leray-Schauder fixed point theorem, the upper and lower solutions method, the coincidence degree theory of Mawhin and fixed point theorems in cones (see [3], [7], [8], [11], [13], [19] and [21]).

It is well know that the method of upper and lower solutions coupled with monotone iterative technique on time scales has been used to prove existence of solutions of nonlinear boundary value problems by various authors (see [6, Chapter 6], [12], [16], [17, Chapter 4], [18] and [22]).

The purpose of this work is to show that it can be applied successfully to problems with integral boundary conditions of type (1).

The plan of this paper is as follows: In section 2, we give some definitions and notations. In section 3, we prove some preliminaries results that will be used throughout the paper. In section 4, we state and prove our main result. Finally in section 5, we give an example to illustrate our results.

2 Definitions, Notations and Some Results on Time Scales

In this section, we give some definitions, notations and some results on time scales.

Definition 1. *A time scale T is an arbitrary nonempty closed subset of the real numbers $\mathbb{R}$.*

Definition 2. *We define the interval $[a,b]_T$ in T by*

$$[a,b]_T := \{t \in T\colon\ a \le t \le b\}\,,$$

where a, $b \in T$.

Open intervals and half open intervals are defined similarly.

Definition 3. *Let T be a time scale. For $t \in T$, we define the forward jump operator $\sigma : T \to T$ by*

$$\sigma(t) := \inf\{s > t : s \in T\}\,,$$

and the backward jump $\rho : T \to T$ *by*

$$\rho(t) := \sup \{s > t : s \in T\}.$$

In this definition, we put $\inf \emptyset = \sup T$ *and* $\inf \emptyset = \inf T$*, where* $\emptyset$ *denotes the empty set. If* $\sigma(t) > t$*, we say* t *is right-scattered, while if* $\rho(t) < t$*, we say* t *is left-scattered. If* $\sigma(t) = t$*, we say* t *is right-dense, while if* $\rho(t) = t$*, we say* t *is left-dense.*

Notation 1. *For all* $t \in T$*, we put*

$$T^{\kappa} = \begin{cases} T \backslash (\rho(\sup T), \sup T], \text{ if } \sup T < \infty, \\ T, \text{ if } \sup T = \infty. \end{cases}$$

Definition 4. *The graininess function* $\mu : T \longmapsto [0, \infty)$ *is defined by*

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

Definition 5. *Let* T *be a time scale and* $g : T \longmapsto \mathbb{R}$ *is a function with* $t \in T^{\kappa}$*, then we define* $g^{\Delta}(t)$ *to be the number (provided it exists) with the property that given any* $\varepsilon > 0$*, there is neighborhood* U *of* t *such that*

$$\left|(g(\sigma(t)) - g(s)) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon(\sigma(t) - s),$$

for all $s \in U$*.*

We call $g^{\Delta}(t)$ *the delta derivative of* $g(t)$ *at* t *and we say that* g *is delta-differentiable at* t*.*

The following result is due to [14] and can be found in [5] and [6].

Theorem 2. *Let* T *be a time scale and* $g : T \longmapsto \mathbb{R}$ *is a function with* $t \in T^{\kappa}$*. Then, we have the following properties:*

(i) If g *is continuous at* t*, then* g *is delta-differentiable at* t*.*

(ii) If g *is continuous at* t *and* t *is right-scattered, then* g *is delta-differentiable at* t *with*

$$g^{\Delta}(t) = \frac{g^{\sigma}(t) - g(t)}{\mu(t)},$$

where $g^{\sigma} = g \circ \sigma$*.*

(iii) If g *is delta-differentiable at* t *and right-dense, then*

$$g^{\Delta}(t) = \lim_{t \to s} \frac{g(t) - g(s)}{t - s}.$$

(iv) If g *is delta-differentiable at* t*, then*

$$g^{\sigma}(t) = g(t) + \mu(t) g^{\Delta}(t).$$

The following result can be found in [6].

Theorem 3. *(Mean Value Theorem) Let g be a continuous function on $[a,b]_T$ and differentiable on $[a,b)_T$. Then there exists ξ, $\tau \in [a,b)_T$ such that*

$$g^{\Delta}(\tau) \leq \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq g^{\Delta}(\xi).$$

Definition 6. *Let T be a time scale and $g : T \longmapsto \mathbb{R}$ is a function. The function $G : T^{\kappa} \longmapsto \mathbb{R}$ is called antiderivative of g if $G^{\Delta}(t) = g(t)$ for all $t \in T^{\kappa}$.*

In this case we define the integral of g by

$$\int_{t_1}^{t_2} g(s)\Delta s = G(t_2) - G(t_1), \text{ for } t_1,\ t_2 \in T.$$

Definition 7. *Let T be time scale. We say that the function $g : T \longmapsto \mathbb{R}$ is rd-continuous provided that g is continuous at each right-dense point $t \in T$ and whenever $t \in T$ is left-dense $\lim\limits_{s \to t^-} g(s)$ exists and finite number.*

Remark 4. *We note that if g is continuous, then it is rd-continuous.*

The following result is due to [14] and can be found in [5] and [6].

Proposition 1. *Let T be a time scale and g, h are a mapping from T to $\mathbb{R}$ such that $g^{\Delta}(t) = h(t)$, then we have the following properties*

(i) If g is rd-continuous, then g has the antiderivative $h : t \to \int_s^t g(s)\Delta s$, $s,t \in T$.

(ii) If g is rd-continuous, then $\left| \int_s^t g(s)\Delta s \right| \leq \int_s^t |g(s)|\,\Delta s$.

The following theorem is an immediate consequence of Theorem 2.8 in [10].

Theorem 5. *Let T be a time scale and assume that:*

(i) For each $n \in \mathbb{N}$, the function $\widetilde{g}_n : [s,t]_T \to \mathbb{R}$ is rd-continuous;

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \widetilde{g_n} = g$ on $[s,t]_T$ and g is rd-continuous on $[s,t]_T$;

(iii) There exists an rd-continuous function $\widetilde{g}$ such that $|\widetilde{g_n}| \leq |\widetilde{g}|$ on $[s,t]_T$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Then,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_s^t \widetilde{g_n}(\tau)\Delta\tau = \int_s^t g(\tau)\Delta\tau.$$

Remark 6. *In this paper, we define*

$$C^1\left(\left[a,\sigma^2(b)\right]_T\right) = \left\{ \begin{array}{l} g : T \to \mathbb{R} : \ g \text{ is continuous on } \left[a,\sigma^2(b)\right]_T \\ \text{and } g^{\Delta} \text{ is continuous on } [a,\sigma(b)]_T \end{array} \right\},$$

and

$$D = \left\{ g \in C^1\left(\left[a,\sigma^2(b)\right]_T\right) : (\varphi_p(g^{\Delta}))^{\Delta} \text{ is rd-continuous on } [a,b]_T \right\}.$$

3 Preliminary Results

In this section, we give some preliminary results that will be used in the remainder of this paper.

We consider the following problem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta} = -\widehat{h}(t, u^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ u(a) - a_2 u^{\Delta}(a) = c, \\ u(\sigma^2(b)) + a_3 u^{\Delta}(\sigma(b)) = d, \end{cases} \tag{2}$$

where $\widehat{h} : [a,b]_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function and strictly increasing in its second variable, a_2 and a_3 are a positive real numbers, c and d are real numbers.

Lemma 3.1. *(Weak comparison principle). Let u_1,u_2 are such that $u_i \in D$ for i = 1,2, and*

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta} + \widehat{h}(t, u_1^{\sigma}) \le -(\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta} + \widehat{h}(t, u_2^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ u_1(a) - a_2 u_1^{\Delta}(a) \le u_2(a) - a_2 u_2^{\Delta}(a), \\ u_1(\sigma^2(b)) + a_3 u_1^{\Delta}(\sigma(b)) \le u_2(\sigma^2(b)) + a_3 u_2^{\Delta}(\sigma(b)). \end{cases} \tag{3}$$

Then $u_1(t) \le u_2(t)$, for all $t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$.

Proof. Assume that there exists $t_0 \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$ such that

$$w(t_0) := u_2(t_0) - u_1(t_0) = \min\left\{w(t) : a \le t \le \sigma^2\,(b)\right\} < 0,$$

and

$$w(t) > w(t_0), \text{ for all } t \in (t_0, \sigma^2(b)]_T. \tag{4}$$

We distinguish the following cases

Case 1.

(i) If $t_0 = a$ and $a = \sigma(a)$, we obtain the contradiction

$$0 > u_2(a) - u_1(a) \ge a_2(u_2^{\Delta}(a) - u_1^{\Delta}(a)) = 0.$$

(ii) If $t_0 = a$ and $a < \sigma(a)$, we distinguish two subcases:

– If $w^{\Delta}(t_0) > 0$, then by (3) we have $w(a) > 0$, which contradicts the definition of t_0.

– If $w^{\Delta}(t_0) \le 0$, then $w(a) \ge w(\sigma(a))$, but this contradicts the definition of t_0.

Case 2.

(i) If $t_0 = \sigma^2(b)$ and $\sigma^2(b) = \sigma(b)$, we obtain the contradiction

$$0 > u_2(\sigma^2(b)) - u_1(\sigma^2(b)) \ge -a_3(u_2^{\Delta}(\sigma(b)) - u_1^{\Delta}(\sigma(b))) = 0.$$

(ii) If $t_0 = \sigma^2(b)$ and $\sigma^2(b) > \sigma(b)$, we distinguish two subcases:

- If $w^{\Delta}(\sigma(b)) > 0$, then we have $w(\sigma^2(b)) > w(\sigma(b))$, but this contradicts the definition of t_0.
- If $w^{\Delta}(\sigma(b)) \leq 0$, then by (3) we have $w(\sigma^2(b)) > 0$, which contradicts the definition of t_0.

Case 3.
If $t_0 \in \left(a, \sigma^2(b)\right)_T$, we distinguish four subcases.
Subcase 1: $\rho(t_0) = t_0 = \sigma(t_0)$.

(i) If $w^{\Delta}(t_0) > 0$, then $\lim\limits_{t \to t_0} w^{\Delta}(t) = w^{\Delta}(t_0)$. This implies that there exists $\delta > 0$ such that $w^{\Delta}(t) > 0$ on $(t_0 - \delta, t_0]$, then w is increasing on $(t_0 - \delta, t_0]$. But this contradicts the definition of t_0.

(ii) If $w^{\Delta}(t_0) < 0$, then $\lim\limits_{t \to t_0} w^{\Delta}(t) = w^{\Delta}(t_0) < 0$. This implies that there exists $\delta > 0$ such that $w^{\Delta}(t) < 0$ on $[t_0, t_0 + \delta)$, which means that, w is decreasing on $[t_0, t_0 + \delta)$. But this contradicts the definition of t_0.

(iii) If $w^{\Delta}(t_0) = 0$, then $u_1^{\Delta}(t_0) = u_2^{\Delta}(t_0)$ and so $\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) = (\varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0))$. Since φ_p is strictly increasing, we obtain

$$-\varphi_p(u_2^{\Delta})^{\Delta}(t_0) + \varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{-\varphi_p(u_2^{\Delta}(t)) + \varphi_p(u_1^{\Delta}(t))}{t - t_0} \leq 0.$$

But on this point, we have

$$-\varphi_p(u_2^{\Delta})^{\Delta}(t_0) + \widehat{h}(t_0, u_2^{\sigma}) + \varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(t_0) - \widehat{h}(t_0, u_1^{\sigma}) \geq 0.$$

This means

$$-\varphi_p(u_2^{\Delta})^{\Delta}(t_0) + \varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(t_0) \geq \widehat{h}(t_0, u_1^{\sigma}) - \widehat{h}(t_0, u_2^{\sigma}).$$

Since $u_2(t_0) < u_1(t_0)$ and the function $\widehat{h}$ is strictly increasing in its second variable, we obtain

$$-\varphi_p(u_2^{\Delta})^{\Delta}(t_0) + \varphi_p(u_1^{\Delta})^{\Delta}(t_0) > 0,$$

which is a contradiction.

Subcase 2: $\rho(t_0) = t_0 < \sigma(t_0)$.

(i) If $w^{\Delta}(t_0) > 0$, then $\lim\limits_{t \to t_0^-} w^{\Delta}(t) = w^{\Delta}(t_0)$. This implies that there exists $\delta > 0$ such that $w^{\Delta}(t) > 0$ on $(t_0 - \delta, t_0]$, which means that w is strictly increasing on $(t_0 - \delta, t_0]$. But this contradicts the definition of t_0.

(ii) If $w^{\Delta}(t_0) \leq 0$, then we have $w^{\sigma}(t_0) \leq w(t_0)$. But this contradicts the definition of t_0.

Subcase 3: $\rho(t_0) < t_0 = \sigma(t_0)$.

(i) If $w^{\Delta}(t_0) < 0$, then $\lim\limits_{t \to t_0^+} w^{\Delta}(t) = w^{\Delta}(t_0)$. This implies that there exists $\delta > 0$ such that $w^{\Delta}(t) < 0$ on $[t_0, t_0 + \delta)$, which means that w is strictly decreasing on $[t_0, t_0 + \delta)$. But this contradicts the definition of t_0.

(ii) If $w^{\Delta}(t_0) \geq 0$, then we have
$$u_1^{\Delta}(t_0) \leq u_2^{\Delta}(t_0),$$
which implies that
$$\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) \leq \varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)).$$
On the other hand, we have
$$w^{\Delta}(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0,$$
which means that
$$u_2^{\Delta}(\rho(t_0)) < u_1^{\Delta}(\rho(t_0)).$$
This implies that
$$\varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))).$$
Then, we have
$$\begin{aligned}(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) &= \frac{\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\ &< \frac{\varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\ &= (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).\end{aligned}$$
This means that
$$(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) < (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).$$
Since the function $\widehat{h}$ is strictly increasing in its second variable we obtain
$$-(\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_2(t_0)) < -(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_1(t_0)),$$
which contradicts (3).

Subcase 4: $\rho(t_0) < t_0 < \sigma(t_0)$.

(i) If $w^{\Delta}(t_0) \leq 0$, then $w^{\sigma}(t_0) \leq w(t_0)$. Which contradicts the definition of t_0.

(ii) If $w^{\Delta}(t_0) > 0$, then we have
$$u_1^{\Delta}(t_0) < u_2^{\Delta}(t_0),$$
which implies that
$$\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) < \varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)).$$

On the other hand, we have

$$w^{\Delta}(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0,$$

which means that

$$u_2^{\Delta}(\rho(t_0)) < u_1^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

This implies that

$$\varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))).$$

Then, we have

$$\begin{aligned}
(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) &= \frac{\varphi_p(u_1^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
&< \frac{\varphi_p(u_2^{\Delta}(t_0)) - \varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0)))}{t_0 - \rho(t_0)} \\
&= (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).
\end{aligned}$$

which means that

$$(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) < (\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)).$$

Since the function $\widehat{h}$ is strictly increasing in its second variable we obtain

$$-(\varphi_p(u_1^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_1(t_0)) > -(\varphi_p(u_2^{\Delta}))^{\Delta}(\rho(t_0)) + \widehat{h}(\rho(t_0), u_2(t_0)).$$

This contradicts (3).

□

Remark 7. *The proof of Lemma 3.1 is a generalization to that of Lemma 3.4 in [1].*

Definition 8. *: We say that $\alpha \in D$ is a lower solution of (2) if*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(\alpha^{\Delta})\right)^{\Delta} \leq -\widehat{h}(t, \alpha^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ \alpha(a) - a_2\alpha^{\Delta}(a) \leq c, \\ \alpha(\sigma^2(b)) - d_2\alpha^{\Delta}(\sigma(b)) \leq d. \end{cases}$$

Definition 9. *: We say that $\beta \in D$ is an upper solution of (2) if*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(\beta^{\Delta})\right)^{\Delta} \geq -\widehat{h}(t, \beta^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T, \\ \beta(a) - a_2\beta^{\Delta}(a) \geq c, \\ \beta(\sigma^2(b)) - b_2\beta^{\Delta}(\sigma(b)) \geq d. \end{cases}$$

We have the following result.

Theorem 8. *Suppose that α and β are lower and upper solutions of problem (2) such that $\alpha(t) \leq \beta(t)$, for all $t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T$. Then the problem (2) has a unique solution $u \in D$ such that*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t),\ \textit{for all}\ t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_T.$$

Proof. Using a proof similar to that of Theorem 3.1 in [1], we can prove that this problem (2) admits at least one solution and by Lemma 1, it follows that this problem admits a unique solution. □

4 Main Result

In this section, we give some definitions, we state and we prove our result.

We consider the following problem

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(u^{\Delta})\right)^{\Delta} = f(t,u^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(\rho(a)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)u\,(s)\,\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) - a_1 u^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)u\,(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{5}$$

where $f:[a,b]_T\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a continuous function, $g_i:\left[a,\sigma^2(b)\right]_T\to\mathbb{R}_+$ are continuous functions ($i=0$,1) and a_0 and a_1 are two positive real numbers.

Definition 10. *We say that $u\in D$ is a solution of (5) if it satisfies (5).*

Definition 11. *We say that $\underline{u}\in D$ is a lower solution of (5) if*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(\underline{u}^{\Delta})\right)^{\Delta} \le f(t,\underline{u}^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T, \\ \underline{u}(a) - a_0\underline{u}^{\Delta}(a) \le \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}(s)\Delta s, \\ \underline{u}(\sigma^2(b)) - a_1\underline{u}^{\Delta}(\sigma(b)) \le \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{u}(s)\Delta s. \end{cases}$$

Definition 12. *We say that $\overline{u}\in D$ is an upper solution of (5) if*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(\overline{u}^{\Delta})\right)^{\Delta} \ge f(t,\overline{u}^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T, \\ \overline{u}(a) - a_0\overline{u}^{\Delta}(a) \ge \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}(s)\Delta s, \\ \overline{u}(\sigma^2(b)) - a_1\overline{u}^{\Delta}(\sigma(b)) \ge \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}(s)\Delta s. \end{cases}$$

On the nonlinearity f, we shall impose the following condition:

(H) There exists a continuous function $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strictly increasing such that: $s\longmapsto f(t,s)+h(s)$ is increasing for all $t\in[a,b]_T$.

The main result of this work is the following Theorem.

Theorem 9. *Assume that the hypothesis (H) is satisfied and let $\underline{u}$ and $\overline{u}$ be a lower and upper solution respectively for problem (5) and such that $\underline{u}\le\overline{u}$ in $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$. Then the problem (5) has a minimal solution u^* and a maximal solution u_* such that for every solution u of (5) with $\underline{u}\le u\le\overline{u}$ in $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$, we have*

$$\underline{u}\le u^*\le u\le u_*\le\overline{u}\ \textit{in}\ \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

For the proof of this theorem, we need a preliminary lemma. Let $\underline{w}$, $\overline{w}\in D$ such that $\underline{u}\le\underline{w}\le\overline{w}\le\overline{u}$ in $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$ and we consider the following problems:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta} + h(u^{\sigma}) = f(t,\overline{w}^{\sigma}) + h(\overline{w}^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T, \\ u(a) - a_0u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{w}(s)\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1u^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{w}(s)\Delta s, \end{cases} \tag{6}$$

and

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta} + h(u^{\sigma}) = f(t,\underline{w}^{\sigma}) + h(\underline{w}^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T, \\ u(a) - a_0u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{w}(s)\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1u^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{w}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{7}$$

Lemma 4.1. *Let $\underline{w}$ and $\overline{w}$ be a lower and upper solution respectively for problem (5) and assume that (H) is satisfied. Then there exists a unique solution $\widetilde{u}$ and $\widehat{u}$ of (6) and (7) such that $\underline{u} \leq \underline{w} \leq \widetilde{u} \leq \widehat{u} \leq \overline{w} \leq \overline{u}$ in $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$.*

Proof. The proof will be given in several steps.

Step 1: $\underline{w}$ is lower solution of (6).

Let $t \in [a,b]_T$, we have

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(\underline{w}^\Delta))^\Delta + h(\underline{w}^\sigma) &\leq f(t, \underline{w}^\sigma) + h(\underline{w}^\sigma), \\ &\leq f(t, \overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma). \end{aligned}$$

This means that

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\; -(\varphi_p(\underline{w}^\Delta))^\Delta + h(\underline{w}^\sigma) \leq f(t, \overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma). \tag{8}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \underline{w}(a) - a_0 \underline{w}^\Delta(a) &\leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) \underline{w}(s) \Delta s, \\ &\leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) \overline{w}(s) \Delta s, \end{aligned}$$

That is

$$\underline{w}(a) - a_0 \underline{w}^\Delta(a) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) \overline{w}(s) \Delta s. \tag{9}$$

Similarly, we have

$$\underline{w}(\sigma^2(b)) + a_1 \underline{w}^\Delta(\sigma(b)) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) \overline{w}(s) \Delta s. \tag{10}$$

Then by (8), (9) and (10), it follows that $\underline{w}$ is a lower solution of (6).

Step 2: $\overline{w}$ is upper solution of (6).

Let $t \in [a,b]_T$, we have

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(\overline{w}^\Delta))^\Delta + h(\overline{w}^\sigma) &\geq f(t, \overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma) \\ &\geq f(t, \overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma). \end{aligned}$$

This means that

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\; -(\varphi_p(\overline{w}^\Delta))^\Delta + h(\overline{w}^\sigma) \geq f(t, \overline{w}^\sigma) + h(\overline{w}^\sigma). \tag{11}$$

Also, we have

$$\overline{w}(a) - a_0 \overline{w}^\Delta(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) \overline{w}(s) \Delta s. \tag{12}$$

Similarly, we have

$$\underline{w}(\sigma^2(b)) + a_1 \underline{w}^\Delta(\sigma(b)) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) \overline{w}(s) \Delta s. \tag{13}$$

Then by (11), (12) and (13), it follows that $\overline{w}$ is a upper solution of (6).

By **Steps 1** and **2** and since the function $(t,u) \to f(t,u)+h(u)$ is continuous and strictly increasing, by Theorem 8 it follows the existence of unique solution $\widetilde{u}$ of (6) such that $\underline{w} \le \widetilde{u} \le \overline{w}$ in $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$.

Similarly, we can prove that the problem (7) admits a unique solution such that $\underline{w} \le \widehat{u} \le \overline{w}$ in $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$ and by using a proof similar to that of Lemma 3.1, we have $\widetilde{u} \le \widehat{u}$ in $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$.

Proof. of Theorem 9 □

The proof will be given in several steps.

We take $\underline{u}_0=\underline{u}, \overline{u}_0=\overline{u}$ and define the sequences $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ by

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta}+h(\underline{u}_{n+1}^{\sigma})=f(t,\underline{u}_n^{\sigma})+h(\underline{u}_n^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T\,, \\ \underline{u}_{n+1}(a)-a_0\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(a)=\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}_n(s)\Delta s, \\ \underline{u}_{n+1}(\sigma^2(b))+a_1\underline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{u}_{n+1}(s)\Delta s, \end{cases} \tag{14}$$

and

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}))^{\Delta}+h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma})=f(t,\overline{u}_n^{\sigma})+h(\overline{u}_n^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T\,, \\ \overline{u}_{n+1}(a)-a_0\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(a)=\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(x)\overline{u}_n(s)\Delta s, \\ \overline{u}_{n+1}(\sigma^2(b))+a_1\overline{u}_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_n(s)\Delta s. \end{cases} \tag{15}$$

Step 1: For all $n\in\mathbb{N}$, we have

$$\underline{u} \le \underline{u}_n \le \underline{u}_{n+1} \le \overline{u}_{n+1} \le \overline{u}_n \le \overline{u},\text{ in } \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

i) For $n=0$, we have

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\underline{u}_1^{\Delta}))^{\Delta}+h(\underline{u}_1^{\sigma})=f(t,\underline{u}^{\sigma})+h(\underline{u}^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T\,, \\ \underline{u}_1(a)-a_0\underline{u}_1^{\Delta}(a)=\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}(s)\Delta s, \\ \underline{u}_1(\sigma^2(b))+a_1\underline{u}_1^{\Delta}(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(x)\underline{u}(s)\Delta s, \end{cases} \tag{16}$$

and

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\overline{u}_1^{\Delta}))^{\Delta}+h(\overline{u}_1^{\sigma})=f(t,\overline{u}^{\sigma})+h(\overline{u}^{\sigma}),\ t\in[a,b]_T\,, \\ \overline{u}_1(a)-a_0\overline{u}_1^{\Delta}(a)=\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}(s)\Delta s, \\ \overline{u}_1(\sigma^2(b))+a_1\overline{u}_1^{\Delta}(\sigma(b))=\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{17}$$

Since $\underline{u}$ and $\overline{u}$ are a lower and upper solutions of problem (6), then by Lemma 4.1, it follows that

$$\underline{u}=\underline{u}_0 \le \underline{u}_1 \le \overline{u}_1 \le \overline{u}_0=\overline{u},\text{ in } \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

ii) Assume for fixed $n>1$, we have

$$\underline{u} \le \underline{u}_{n-1} \le \underline{u}_n \le \overline{u}_n \le \overline{u}_{n-1} \le \overline{u},\text{ in } \left[a,\sigma^2(b)\right]_T,$$

and we show that

$$\underline{u} \le \underline{u}_n \le \underline{u}_{n+1} \le \overline{u}_{n+1} \le \overline{u}_n \le \overline{u},\text{ in } \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

Let $t \in [a,b]_T$, we have

$$-(\varphi_p(\overline{u}_n^{\Delta}))^{\Delta} + h(\overline{u}_n^{\sigma}) = f(t,\overline{u}_{n-1}^{\sigma}) + h(\overline{u}_{n-1}^{\sigma}). \tag{18}$$

Since $\overline{u}_{n-1} \leq \overline{u}_n$ and using the hypothesis (H), we obtain

$$f(t,\overline{u}_{n-1}^{\sigma}) + h(\overline{u}_{n-1}^{\sigma}) \geq f(t,\overline{u}_n^{\sigma}) + h(\overline{u}_n^{\sigma}). \tag{19}$$

Then by (18) and (19), it follows that

$$\forall t \in [a,b]_T\,,\ -(\varphi_p(\overline{u}_n^{\Delta}))^{\Delta} \geq f(t,\overline{u}_n^{\sigma}). \tag{20}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \overline{u}_n(a) - a_0\overline{u}_n^{\Delta}(a) &= \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_{n-1}(s)\Delta s \\ &\geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_n(s)\Delta s. \end{aligned}$$

That is

$$\overline{u}_n(a) - a_0\overline{u}_n^{\Delta}(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}_n(s)\Delta s, \tag{21}$$

and

$$\begin{aligned} \overline{u}_n(\sigma^2(b)) + a_1\overline{u}_n^{\Delta}(\sigma(b)) &= \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_{n-1}(s)\Delta s \\ &\geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_n(s)\Delta s. \end{aligned}$$

That is

$$\overline{u}_n(\sigma^2(b)) + a_1\overline{u}_n^{\Delta}(\sigma(b)) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}_n(s)\Delta s. \tag{22}$$

Then by (20),(21) and (22), it follows that $\overline{u}_n$ is a upper solution of (5).

Similarly, we can prove that $\underline{u}_n$ is a lower solution of (5). Then by Lemma 4.1, there exists a unique solution $\underline{u}_{n+1}$ and $\overline{u}_{n+1}$ (14) and (15) such that

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}, \text{ in } \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

Hence, we have

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}, \text{ in } \left[a,\sigma^2(b)\right]_T.$$

Step 2: There exists a positive constant C_1, independent of $n \in \mathbb{N}$, such that

$$\left|\overline{u}_n^{\Delta}\right|_0 := \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T} \left|\overline{u}_n^{\Delta}(t)\right| \leq C_1, \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

Let $n \in \mathbb{N}$ and $t \in [a, \sigma(b)]_T$.

Since $\overline{u}_n$ is continuous on $\left[a, \sigma^2(b)\right]_T$ and $\overline{u}_n^{\Delta}$ is continuous on $\left[a, \sigma^2(b)\right)$, then by Theorem 3, there exist ξ_n, $\tau_n \in \left[a, \sigma^2(b)\right)$ such that

$$\overline{u}_n^{\Delta}(\tau_n) \leq \frac{\overline{u}_n\left(\sigma^2(b)\right) - \overline{u}_n(a)}{\sigma^2(b) - a} \leq \overline{u}_n^{\Delta}(\xi_n).$$

Then, we have

$$\begin{aligned}
\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) &= \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{t} (f(\tau, \overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)))\Delta\tau \\
&\leq \begin{array}{l} \varphi_p\left(\dfrac{\overline{u}_n\left(\sigma^2(b)\right) - \overline{u}_n(a)}{\sigma^2(b) - a}\right) \\ + \displaystyle\int_{\tau_n}^{t} (f(\tau, \overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)))\Delta\tau \end{array} \\
&\leq \frac{1}{(\sigma^2(b) - a)^{p-1}} \varphi_p\left(\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \underline{u}(a)\right) + K,
\end{aligned}$$

where

$$K = (M_1(f) + 2M_2(h))(\sigma(b) - a),$$

with

$$M_1(f) := \max\left\{f(t, u) : t \in [a, b]_T, \ \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\},$$

and

$$M_2(h) := \max\left\{|h(u)| : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\}.$$

Then if we put

$$\widetilde{C_1} := \frac{1}{(\sigma^2(b) - a)^{p-1}} \varphi_p\left(\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \underline{u}(a)\right) + (M_1(f) + 2M_2(h))(\sigma(b) - a),$$

we obtain

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T, \ \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) \leq \widetilde{C_1}.$$

This implies

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T, \ \overline{u}_{n+1}^{\Delta}(t) \leq \widetilde{C}_1^{\frac{1}{p-1}}. \tag{23}$$

Similarly, we have

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T, \ \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) \geq \widetilde{C_2}, \tag{24}$$

where

$$\widetilde{C_2} := \frac{1}{(\sigma^2(b) - a)^{p-1}} \varphi_p\left(\underline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \overline{u}(a)\right) + (m_1(f) + 2m_2(h))(\sigma(b) - a),$$

with

$$m_1(f) := \min\left\{f(t, u) : t \in [a, b]_T, \ \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\},$$

and

$$m_2(h) := \min\{|h(u)| : \underline{u} \le u \le \overline{u}\}.$$

Then, by (24)· we obtain

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T, \ \overline{u}_{n+1}^{\Delta}(t) \ge \left|\widetilde{C_2}\right|^{\frac{2-p}{p-1}} \widetilde{C_2}. \tag{25}$$

Now if we put

$$C_1 := \max\left(\widetilde{C}_1^{\frac{1}{p-1}}, \left|\widetilde{C_2}\right|^{\frac{1}{p-1}}, \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T} \left|\overline{u}^{\Delta}(t)\right|\right),$$

then by (23) and (25), we have

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_T, \ \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T} \left|\overline{u}_n^{\Delta}(t)\right| \le C_1.$$

Step 3: There exists a positive constant C_3, independent of $n \in \mathbb{N}$, such that

$$\left|\underline{u}_n^{\Delta}\right|_0 := \max_{t\in[a,\sigma(b)]_T} \left|\underline{u}_n^{\Delta}(t)\right| \le C_3, \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

The proof is similar to that of **Step 2**. So it is omitted.

Step 4: The sequence $(\overline{u}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ is equicontinuous on $[a, \sigma(b)]_T$.

Let $\varepsilon > 0$ and t,$s \in [a, \sigma(b)]_T$ such that $t < s$, then for each $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| \le (M_1(f) + 2M_2(h))\,|s-t|.$$

If we put $K_1 := M_1(f) + 2M_2(h)$, one has

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| \le K_1\,|s-t|.$$

Then if we choose $|s-t| < \dfrac{\varepsilon}{K_1+1}$, we obtain

$$\left|\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s) - \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t)\right| < \varepsilon.$$

Therefore the sequence $(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta}))_{n\in\mathbb{N}}$ is equicontinuous on $[a, \sigma(b)]_T$.

Now since the mapping φ_p^{-1} is an increasing homeomorphism from $\mathbb{R}$ onto $\mathbb{R}$, we deduce from

$$\left|\overline{u}_n^{\Delta}(s) - \overline{u}_n^{\Delta}(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(s)) - \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t))\right|,$$

that the sequence $(\overline{u}_n^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ is equicontinuous on $[a, \sigma(b)]_T$. The proof of **Step 4** is complete.

Step 5: The sequence $\left(\underline{u}_n^{\Delta}\right)$ is equicontinuous on $[a, \sigma(b)]_T$.

The proof is similar to that of **Step 4**. So it is omitted.

Step 6: The sequence $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge to a maximal solution of (5).

By **Steps 1, 2** and **4,** we have $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded on $C^1([a, \sigma^2(b)]_T)$ and $\left(\underline{u}_n^{\Delta}\right)$ is equicontinuous on $[a, \sigma(b)]_T$. Then by the Arzéla-Ascoli theorem, there exists a subsequence $(\overline{u}_{n_j})$ of $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ which converges in $C^1([a, \sigma^2(b)]_T)$.

Let
$$u := \lim_{n_j \to +\infty} = \overline{u}_{n_j}.$$
Then
$$u^{\Delta} = \lim_{n_j \to +\infty} = \overline{u}_{n_j}^{\Delta}.$$
But by **Step 1** the sequence $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is decreasing and bounded from below, then the pointwise limit of this sequence exists and it is denoted by u_*. Hence we have $u = u_*$ and moreover, the whole sequence converges in $C^1([a,\sigma(b)]_T)$ to u_*.

Let $t \in [a,b]_T$, we have
$$-\varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(t) = \varphi_p(\overline{u}_{n+1}^{\Delta})(a) + \int_a^t (f(\tau, \overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(\tau)))\Delta\tau.$$
Now, as n tends to $+\infty$, we obtain
$$(f(\tau, \overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(\tau))) \to (f(\tau, u_*^{\sigma}(\tau)),$$
Also, we have
$$\exists K_2 > 0,\, \forall n \in \mathbb{N},\, \forall \tau \in [a,b]_T\,,\ \left|(f(\tau, \overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) + h(\overline{u}_n^{\sigma}(\tau)) - h(\overline{u}_{n+1}^{\sigma}(\tau)))\right| \le K_2.$$
Hence by theorem 5, one has
$$-\varphi_p(u_*^{\Delta})(t) = \varphi_p(u_*^{\Delta})(a) + \int_a^t f(\tau, u_*^{\sigma}(\tau))\Delta\tau.$$
Thus, we obtain
$$\forall t \in [a,b]_T\,,\ -(\varphi_p(u_*^{\Delta}))^{\Delta} = f(t, u_*^{\sigma}). \tag{26}$$
Also, by theorem 5, we have
$$u_*(a) - a_0 u_*^{\Delta}(a) = \int_a^b g_1(s) u_*(s)\Delta s, \tag{27}$$
and
$$u_*(\sigma^2(b)) + a_1 u_*^{\Delta}(\sigma^2(b)) \le \int_a^b g_2(s) u_*(s)\Delta s. \tag{28}$$
Then by (26),(27) and (28), it follows that $u^{\star}$ is a solution of the following problem
$$\begin{cases} -(\varphi_p(u_*^{\Delta}))^{\Delta} = f(t, u_*^{\sigma}),\ t \in [a,b]_T\,, \\ u_*(a) - a_0 u_*^{\Delta}(a) = \int_a^b g_1(s) u_*(s)\Delta s, \\ u_*(\sigma^2(b)) + a_1 u_*^{\Delta}(\sigma^2(b)) \le \int_a^b g_2(s) u_*(s)\Delta s. \end{cases} \tag{29}$$

Now, we prove that if u is another solution of (5) such that $\underline{u} \le u \le \overline{u}$ in $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$, then $u \le u_*$ in $\left[a,\sigma^2(b)\right]_T$. Since u is a lower solution of (5), then by **Step 1**, we have
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u \le \overline{u}_n.$$

Letting $n \to +\infty$, we obtain

$$u \leq \lim_{n \to +\infty} \overline{u}_n = u_*.$$

Which mean that u_* is a maximal solution of problem (5).

Step 7: The sequence $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to a minimal solution $u_\star$ of problem (5).

The proof is similar to that of **Step 6**, so is omitted.

The proof of our result is complete. □

5 Application

In this section, we apply the previous result to the following problem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^\Delta))^\Delta = \lambda_1 (u^\sigma)^{k_1} - (u^\sigma)^{k_2} + M \text{ in } [0,10]_T, \\ u(0) = 0,\ u(\sigma^2(10)) = \int\limits_0^{\sigma^2(10)} g_1(s)u(s)\Delta s, \end{cases} \tag{30}$$

where $k_1 > 0$, $k_2 > k_1$, λ_1 and M, are a positive real parameters, $g_1(s) = ks$, where k is a positive real parameter.

Case 1:If $T = \mathbb{R}$, we have

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{'}))^{'} = \lambda_1 u^{k_1} - u^{k_2} + M \text{ in } [0,10], \\ u(0) = 0,\ u(10) = \int\limits_0^{10} g_1(s)u(s)ds. \end{cases} \tag{31}$$

Theorem 10. *Assume that $0 < k \leq \dfrac{1}{50}$, then the problem (31) admits a maximal solution u_* and minimal solution u^*.*

Proof. We put $(\underline{u}, \overline{u}) = (\Phi_1, \Phi_2)$, where $\Phi_1(t) = 0$ for all $t \in$ [0,10] and $\Phi_2(t) = L$, for all $t \in$ [0,10] .

First it is easy to check that Φ_1 is a lower solution of (31).

Now Φ_2 is an upper solution of (31), if we have

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_2^{'}))^{'}(t) \geq \lambda_1 \Phi_2^{k_1}(t) - \Phi_2^{k_2}(t) + M \text{ in } [0,10], \\ \Phi_2(0) = L \geq 0,\ \Phi_2(10) = L \geq \int\limits_0^{10} g_1(s)\Phi_2(s)\, ds. \end{cases}$$

That is

$$\begin{cases} 0 \geq \lambda_1 L^{k_1} - L^{k_2} + M \text{ in } [0,10], \\ \Phi_2(0) = L \geq 0,\ \Phi_2(10) = L \geq 50kL. \end{cases}$$

Since $k_2 > k_1$, then if we choose L sufficiently large and $k \leq \frac{1}{50}$, we obtain $\Phi_2$is an upper solution of (31) and consequently by Theorem 9, it follows that the problem (31) admits a maximal solution u_* and minimal solution u^*. □

Case 2: If $T=\mathbb{N}$, we have

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u^{\Delta}))^{\Delta}(t)=\lambda_1 u^{k_1}(t+1)-u^{k_2}(t+1)+M \text{ in } [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ u(0)=0,\ u(12)=\int\limits_0^{12} g_1(s)u(s)\Delta s. \end{cases} \tag{32}$$

Theorem 11. *Assume that* $M>3$ *and* $\frac{12e^{-12}}{\sum\limits_{i=0}^{11} i^2e^{-i}}\leq k\leq \frac{1}{66}$, *then the problem (32) admits a maximal solution* u_* *and minimal solution* u^*.

Proof. We put $(\underline{u},\overline{u})=(\Phi_3,\Phi_2)$ where $\Phi_3(t)=te^{-t}$, for all $t\in[0,12]_{\mathbb{N}}$ and $\Phi_2(t)=L$, for all $t\in[0,12]_{\mathbb{N}}$.

First Φ_3 is a lower solution of problem (32), if we have

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t)\leq\lambda_1 \Phi_3^{k_1}(t+1)-\Phi_3^{k_2}(t+1)+M \text{ in } [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_3(0)\leq 0,\ \Phi_3(12)\leq\int\limits_0^{12} g_1(s)\Phi_3(s)\Delta s. \end{cases}$$

That is

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t)\leq\lambda_1 (t+1)^{k_1}e^{-k_1t}-(t+1)^{k_2}e^{-k_2t}+M \text{ in } [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_3(0)=0\leq 0, \\ \Phi_3(12)=12e^{-12}\leq k\sum\limits_{i=0}^{11} i^2e^{-i}, \end{cases}$$

where

$$(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t)=\varphi_p(\Phi_3(t+2)-\Phi_3(t+1))-\varphi_p(\Phi_3(t+1)-\Phi_3(t)).$$

Since

$$-(\varphi_p(\Phi_3^{\Delta}))^{\Delta}(t)-\lambda_1(t+1)^{k_1}e^{-k_1t}+(t+1)^{k_2}e^{-k_2t}<3, \text{ for all } t\in[0,10]_{\mathbb{N}}.$$

Then if we choose $M>3$ and $k\geq\frac{12e^{-12}}{\sum\limits_{i=0}^{11} i^2e^{-i}}$, we obtain Φ_3 is a lower solution of problem (32).

Similarly Φ_2 is an upper solution of (32), if we have

$$\begin{cases} -(\varphi_p(\Phi_2^{\Delta}))^{\Delta}(t)\geq\lambda_1 \Phi_2^{k_1}(t+1)-\Phi_2^{k_2}(t+1)+M \text{ in } [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_2(0)\leq 0,\ \Phi_3(12)\geq\int\limits_0^{12} g_1(s)\Phi_3(s)\Delta s. \end{cases}$$

That is

$$\begin{cases} 0\geq\lambda_1 L^{k_1}-L^{k_2}+M \text{ in } [0,10]_{\mathbb{N}}, \\ \Phi_2(0)=L\geq 0,\ \Phi_2(12)=L\geq\int\limits_0^{12} g_1(s)L\Delta s=kL\sum\limits_{i=0}^{11} i=66kL. \end{cases}$$

Since $k_2 > k_1$, then if we choose L sufficiently large and $k \leq \frac{1}{66}$, we obtain Φ_2 is an upper solution of (32) and consequently by Theorem 9, it follows that the problem (32) admits a maximal solution u_* and minimal solution u^*. □

Acknowledgements
1) The authors thanks the anonymous referee for several comments and suggestions which contributed to improve this paper.
2) Research partially supported by a MESRS-DRS grant B02020140103.

References

[1] R. Agarwal and E. Akin-Bohner, A generalized upper and lower method for singular boundary value problems for quasilinear dynamic equations, Adv. Stud. Contemp. Math. 15 (2007), 213-228.

[2] E. Akin-Bohner, Boundary value problems for a differential equation on a measure chain, Panam. Math. J., 10 (2000), 17-30.

[3] D. Anderson; R. Avery and J. Henderson, Existence of solutions for a one dimensional p-Laplacian on time-scales, J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), 889–896.

[4] F. V. Atkinson, Discrete and Continuous Boundary Problems, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 8, Academic Press, New York, 1964.

[5] M. Bohner and A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, Birkhāuser, Boston, 2001.

[6] M. Bohner and A. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhāuser, Boston, 2003.

[7] A. Cabada, Existence results for ϕ-Laplacian boundary value problems on time scales, Adv. Difference Equ. 2006, Article ID 21819, Pages 1-11.

[8] E. Cetin and F. Serap Topal, Existence results for solutions of integral boundary value problems on time scales, Abstr. Appl. Anal. 2013, Article ID 708734, 7 pages.

[9] M. Derhab, Existence of minimal and maximal solutions for a quasilinear elliptic equation with integral boundary value conditions, Electronic J. Qual. Theory Differ. Equ. 6 (2011), 1-18.

[10] M. Frigon and H. Gilbert, Boundary value problems for systems of second-order dynamic equations on time scales with Δ-Carathéodory functions, Abstr. Appl. Anal. 2010, Article ID 234015, 26 pages.

[11] F. Geng and D. Zhu, Multiple results of p-Laplacian dynamic equations on time scales, Appl. Math. Comput. 193 (2007), 311-320.

[12] S. Gulsan Topal, Second-order periodic boundary value problems on time scales, Comput. Appl. Math. 48 (2004), 637-648.

[13] Z. He, Double positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Comput. Appl. Math. 182 (2005), 304-315.

[14] S. Hilger, Analysis on measure chains–a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math. 18 (1990), 18-56.

[15] N. I. Ionkin, Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differ. Equ. 13 (1977), 294-304.

[16] B. Kayamkçalan, Monotone iterative method for dynamic systems on time scales, Dynam. Systems Appl. 2 (1993), 213-220.

[17] B. Kayamkçalan, V. Lakshmikantham and S. Sivasundaram, Dynamic Systems on Measure Chains, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[18] V. Lakshmikantham, Monotone flows and fixed points for dynamic systems on time scales in a Banach space, Appl. Anal. 56 (1995), 175-184.

[19] Y. Li and J. Shu, Solvability of boundary value problems with Riemann-Stieltjes Δ-integral conditions for second-order dynamic equations on time scales at resonance, Adv. Difference Equ. 1 (2011), 18 pages.

[20] E. J. Mapes and M. F. Schumaker, Framework models of ion permeation through membrane channels and the generalized King-Altman method. Bull. Math. Biol. 68 (2006), 1429-1460.

[21] Y. Sang and H. Su, Several existence theorems of nonlinear m-point boundary value problem for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 1012-1026.

[22] P. Stehlík, On monotone iterative method for BVP on time scales, Adv. Difference Equ. 1 (2005), 81-92.

[23] C. C. Tisdell, P. Drábek and J. Henderson, Multiple solutions to dynamic equations on time scales, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 11 (2004), 25-42.