

# Etude de la Stabilité d'une E.D.O Non linéaire, Cas d'un Centre

T. Benouaz, A. Chikhaoui ,  
Laboratoire d'Automatique  
Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen  
B.p 119, Tlemcen R.P. 13000, Algérie  
E\_mail :t\_benouaz@mail.univ-tlemcen.dz

**Résumé**— Le but de cette communication est l'utilisation de la méthode de linéarisation optimale généralisée, [5], [13], en particulier, à l'étude du problème de la stabilité asymptotique d'une équation différentielle ordinaire non linéaire, dont la linéarisation classique obtenue par dérivation au sens de Fréchet au point d'équilibre, présente un centre, c'est à dire, des valeurs propres imaginaires; ceci représente un cas marginalement de la stabilité.

**Mots Clés** — Equation différentielle ordinaire – Approximation au sens des moindres carrés – Linéarisation optimale – Dérivée au sens de Fréchet – Stabilité

## I. INTRODUCTION

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ . est une tâche presque triviale si la fonction  $F$  qui définit l'équation est suffisamment régulière, et si sa linéarisation au point d'équilibre est hyperbolique (si aucune valeur propre ne rencontre l'axe imaginaire). Dans ce cas on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée. Par contre si la situation n'est pas hyperbolique, cas d'un centre, la détermination de la stabilité devient plus délicate, et le comportement réel du système est déterminé par le terme non linéaire de haut degré négligé. La question qui se pose est de savoir si les orbites nées dans un voisinage de suffisamment petit d'un point d'équilibre, resteront à proximité de ce point et si les courbes intégrales du champ de vecteurs d'un système non linéaire, ressemblent toujours à celles du système linéaire qui lui associer [1]. dans cette optique l'étude proposée a pour but l'application de la méthode de linéarisation optimale généralisée à une classe particulière d'exemple d'équation différentielle ordinaire de la forme [3], [2] :

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

où  $M$  est une matrice dont les valeurs propres sont égales à  $\pm i$ .  $F = (f_1, f_2)$  est une fonction définie sur un certain ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $(0,0)$ , avec les hypothèses suivantes:

H1)  $F(0) = 0$

H2) Le spectre de  $\sigma(DF(x))$  est contenu dans l'ensemble  $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$  pour tout  $x \neq 0$ , dans un voisinage de 0, où  $DF(x)$  existe.

H3)  $F$  est localement Lipchitzienne.

Cette application est destinée à montrer les possibilités que peut offrir cette méthode pour l'étude de la stabilité d'une équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme (2). En second lieu, nous développons une étude justifiant cette application. Une présentation des champs de vecteurs au voisinage du point d'équilibre du système non linéaire et du système linéaire qui lui associé, seront présentés.

## II. FORMALISME THEORIQUE DE LA METHODE DE LINEARISATION OPTIMALE GENERALISEE

Dans la généralisation de la méthode de linéarisation optimale développée dans la référence [5], Benouaz et al. ont cerné les inconvénients liés à l'utilisation de cette méthode en insistant en particulier :

1. Si  $DF(0)$  n'existe pas
2. Si  $DF(0) = 0$
3. Si  $DF(0)$  est stable, mais non pas asymptotiquement stable.

Ce qui a permis de mettre en valeur certains aspects théoriques de cette linéarisation en particulier le fait que celle-ci dépend de la condition initiale et par conséquent sa bonne utilisation. Dans ce qui suit, nous rappelons la procédure suivie pour obtenir la matrice définissant la linéarisation optimale.

### PROCEDURE DE CALCULE

La procédure de calcul se fait en deux étapes. La matrice initiale est la matrice Jacobienne de  $F$  en  $x_0$  qui, en principe est un point arbitraire pris dans un voisinage de 0 et tel que  $F$  soit différentiable en  $x_0$ .

Considérons le système (1)

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

Première étape

Calcul de  $A_0 = DF(x_0)$

Deuxième étape

Pour calculer  $A^*$  à partir de  $A_0$ , on doit d'abord résoudre

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), y(0) = x_0 \quad (3)$$

On notera la solution  $y_0(t)$  du système (3) s'écrit

$$y_0(t) = e^{A_0 t} x_0 \quad (4)$$

La minimisation de la fonctionnelle au sens des moindres carrés

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_0(t)) - A y_0(t)\|^2 dt \quad (5)$$

Nous conduit à  $A^*$

$$A^* = \left[ \int_0^{+\infty} \left[ F(e^{A_0 t} x_0) \right] \left[ e^{A_0 t} x_0 \right]^T dt \right] \left[ \int_0^{+\infty} \left[ e^{A_0 t} x_0 \right] \left[ e^{A_0 t} x_0 \right]^T dt \right]^{-1} \quad (6)$$

en introduisant la fonction  $\Gamma$  définie par

$$\Gamma(x) = \left[ \int_0^{+\infty} \left[ e^{A_0 t} x_0 \right] \left[ e^{A_0 t} x_0 \right]^T dt \right]^{-1} \quad (7)$$

La matrice linéaire optimale  $A^*$  s'écrit

$$A^* = \left[ \int_0^{+\infty} \left[ F(e^{A_0 t} x_0) \right] \left[ e^{A_0 t} x_0 \right]^T dt \right] \left[ \Gamma(x) \right]^{-1} \quad (8)$$

Où  $A^*$  défini est unique à condition que  $\Gamma$  soit inversible.  $A^*$  est par définition la linéarisation optimale de l'application non linéaire  $F$  en  $x_0$ .

### III. IDEE DU PROBLEME

Dans les deux exemple que nous allons voir, il y a lieu de noter que le système non linéaire s'écrit après application de la linéarisation optimale généralisée comme suit

$$\begin{cases} A^* = M + r(X_0) \\ X_0 = X(0) \end{cases} \quad (9)$$

ou encore

$$A^* = DF(0) + r(X_0), \quad (10)$$

avec

$$r(X_0) = \left[ \int_0^{+\infty} \left[ G(e^{tA} X_0) \right] \left[ e^{tA} X_0 \right]^T dt \right] \left[ \int_0^{+\infty} \left[ e^{tA} X_0 \right] \left[ e^{tA} X_0 \right]^T dt \right]^{-1} \quad (11)$$

Le premier terme étant linéaire, le deuxième terme qui est en fait la linéarisation optimale de la fonction non linéaire  $G(X)$ , devient dépendant de la donnée initiale  $X_0$ . Tout se passe comme si on avait perturbé  $DF(0)$ , en écrivant la matrice optimale de la forme

$$A^* = DF(0) + o(\|X_0\|) \quad (12)$$

Dans ce qui suit, nous donnerons la signification de  $o(\|X_0\|)$  et son influence sur l'étude de la stabilité du système (2).

### IV. ETUDE DE LA TRACE DE LA MATRICE $A^*$

On fixe  $X_0 \neq 0$  et on définit dans  $M_n(\mathbb{R})$

l'application  $\varphi : A \rightarrow \varphi(A)$  telle que

$$\varphi(A) = \left[ \int_0^{+\infty} \left[ F(e^{tA} X_0) \right] \left[ e^{tA} X_0 \right]^T dt \right] \left[ \Gamma(A) \right]^{-1} \quad (13)$$

et

$$\varphi(A) = M + r(A)$$

avec

$$\Gamma(A) = \left[ \int_0^{+\infty} \left[ e^{tA} X_0 \right] \left[ e^{tA} X_0 \right]^T dt \right] \quad (14)$$

et

$$r(A) = \left[ \int_0^{+\infty} \left[ G(e^{tA} X_0) \right] \left[ e^{tA} X_0 \right]^T dt \right] \left[ \Gamma(A) \right]$$

Maintenant, on construit  $A^* = \varphi(A_0)$ , avec

$$A^* = \varphi(A_0) = M + r(A_0), \quad (15)$$

La matrice initiale  $A_0$  étant  $A_0 = DF(X_0)$ , on suppose que  $G$  a été choisi telle que le spectre de  $A_0$ ,  $\sigma(A_0)$  soit très proche de celui de  $M$ . On choisit  $x_0$  voisin de 0 pour que  $r(A_0)$  soit très petit dans un voisinage de  $x_0$ .  $e^{tA_0} X_0$  tend exponentiellement vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ , et  $\Gamma(A_0)$  est définie positive. Le calcul de la trace de la matrice de  $A^*$  donne

$$\begin{aligned} tr(A^*) &= tr \left( M + \left[ \int_0^{+\infty} \left[ G(e^{tA_0} X_0) \right] \left[ e^{tA_0} X_0 \right]^T dt \right] \left[ \Gamma(A_0) \right]^{-1} \right) \\ &= tr(M) + tr \left( \left[ \int_0^{+\infty} \left[ G(e^{tA_0} X_0) \right] \left[ e^{tA_0} X_0 \right]^T dt \right] \left[ \Gamma(A_0) \right]^{-1} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

or  $tr(M) = 0$ , il s'ensuit que

$$tr(A^*) = tr \left( \left[ \int_0^{+\infty} \left[ G(e^{tA_0} X_0) \right] \left[ e^{tA_0} X_0 \right]^T dt \right] \left[ \Gamma(A_0) \right]^{-1} \right) \quad (17)$$

en vertu de la propriété

$$tr(AB) = tr(BA)$$

sachant que

$$\left[ \Gamma(A_0) \right]^{-1} G(e^{tA_0} X_0) = C$$

est un vecteur colonne et

$$\left( e^{tA_0} X_0 \right)^T = L$$

est un vecteur ligne, et en tenant compte de

$$tr(CL) = tr(LC) = LC$$

nous pouvons écrire

$$tr(A^*) = \int_0^{+\infty} \left[ \left( e^{tA_0} X_0 \right)^T \right] \left[ \Gamma(A_0) \right]^{-1} G(e^{tA_0} X_0) dt \quad (18)$$

Considérons le cas où

$$\begin{cases} G(X) = a\Phi(\|X\|)X, \quad X = (x, y) \\ \Phi(\|X\|) = o(\|X\|^2) \\ a = \pm 1 \end{cases} \quad (19)$$

la fonction non linéaire est définie par :

$$F(X) = M \cdot X + a\Phi(\|X\|^2)X \quad (20)$$

alors  $tr(A^*)$  s'écrit

$$tr(A^*) = a \int_0^{+\infty} \Phi(e^{tA_0} X_0) \left( e^{tA_0} X_0 \right)^T \left[ \Gamma(A_0) \right]^{-1} G(e^{tA_0} X_0) dt. \quad (21)$$

les termes à l'intérieur de l'intégrale étant positifs,  $tr(A^*)$  dépend alors, du signe de  $a$ , et par conséquent on a

$$\text{sgn}(\text{trace}(A^*)) = \text{sgn}(a). \quad (22)$$

Donc, le signe de la trace est celui de la perturbation  $G(X)$ . De plus par un calcul déjà fait par Benouaz et Arino [4], on a

$$\text{trace}(r(A^*)) \leq aC[\mathcal{O}(\|X_0\|)] \leq a[\mathcal{O}(\|X_0\|)] \quad (23)$$

C étant une constante positive.

Ce qui montre l'influence des conditions initiales sur l'étude de la stabilité de l'équilibre envisagé.

Plus généralement, on montre que la linéarisation optimale dépend directement de la condition initiale en faisant le changement de variable  $x(t)$  en  $z$  dans la relation (6)

$$A^* = \int_0^{+\infty} [F(e^{A_0 t} x_0) e^{A_0 t} x_0]^T dt [\Gamma(x)]^{-1}.$$

Il vient alors que

$$A^* \left( \int_0^{x_0} z dz^T \right) = \left( \int_0^{x_0} F(z) dz^T \right), \quad (24)$$

où  $\int_0^{x_0}$  est l'intégrale curviligne le long de l'orbite

$$\gamma(x_0) = \{e^{Bt}; t \geq 0\} \text{ de } x_0.$$

Nous obtenons

$$A^* = \left( \int_0^{x_0} F(z) dz^T \right) \left( \int_0^{x_0} z dz^T \right)^{-1} \quad (25)$$

Il est clair que cette relation dépend de la condition initiale. Le résultat donné par la relation (23) est important dans le sens où il suggère qu'il est possible de retrouver un résultat de stabilité (cas d'un centre) en étudiant la trace de la matrice optimale qui dépend clairement de la condition initiale.

## V. APPLICATION

Pour illustrer l'étude développée dans la section précédente nous considérons le cas où

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), \quad x(0) = x_0$$

avec

$$\begin{cases} G(X) = a\Phi(\|X\|)X, & X = (x, y) \\ \Phi(\|X\|) = a(\|X\|^2) \\ a = \pm 1 \end{cases} \quad (26)$$

La fonction non linéaire est définie par :

$$F(X) = M \cdot X + a\Phi(\|X\|^2)X$$

et le système obtenu s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + a \cdot x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + a \cdot y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (27)$$

Dans ce cas, l'étude de la stabilité du point d'équilibre pose un problème ; en effet la linéarisation classique ne

permet pas de conclure ; car le système possède des valeurs propres purement imaginaires.

Considérons le cas où :  $a = -1$ , le système (27) s'écrit,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0.1) \quad (28)$$

la jacobienne de la fonction non linéaire  $F$  au point d'équilibre  $(0,0)$  donne :

$$DF(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

dont les valeurs propres sont  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

Appliquons maintenant la linéarisation optimale : le calcul donne :

$$A^* = \begin{bmatrix} -5.0822 \cdot 10^{-3} & 1 \\ -1 & -5.0942 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (30)$$

ou encore

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5.0822 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & -5.0942 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$A^* = M + r(X_0),$$

dont les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1^* = -5.0882 \cdot 10^{-3} + i \\ \lambda_2^* = -5.0882 \cdot 10^{-3} - i \end{cases} \quad (31)$$

On a  $\text{Re}(\lambda_1^*) < 0$  et  $\text{Re}(\lambda_2^*) < 0$ .

Le Linéarisée optimale est asymptotiquement stable et fait apparaître l'origine comme un foyer. Alors, l'origine est asymptotiquement stable. Pour le vérifier sur l'équation non linéaire, prenons comme fonction de Liapunov

$$V(X) = x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{définie positive}) \quad (32)$$

Calculer la dérivée de cette fonction le long de la trajectoire, équivaut à prendre la dérivée  $\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt}$ , soit :

$$\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2. \quad (33)$$

En remplaçant  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$  par les équations du système de départ (28), on obtient

$$V(X) = -2(x_1^2 + x_2^2) < 0 \quad (34)$$

$\dot{V}(X)$  est donc définie négative; d'autre part,  $V(X)$  est décroissante ; ( $\|X\| \rightarrow \infty, V(X) \rightarrow \infty$ ), l'équilibre est donc asymptotiquement stable globalement.

Les figures (1), (2) montrent respectivement les champs de vecteurs du système linéaire optimal (30) et du système non linéaire (28). On voit que le champ de vecteur du système non linéaire et celui du linéaire optimal sont similaires et conduisent à la même conclusion c'est à dire que les courbes intégrales sont des spirales convergeant vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ , en faisant

apparaître l'origine comme un foyer, l'origine étant donc asymptotiquement stable.

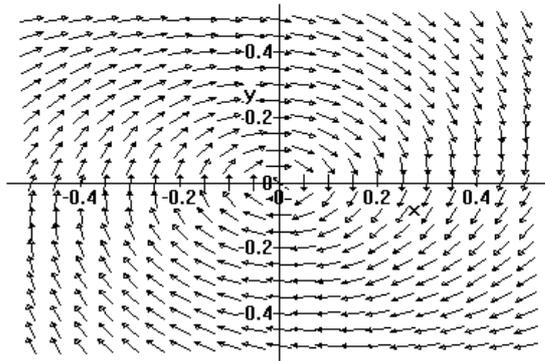


Figure (1) : le champ de vecteur système linéaire optimal.

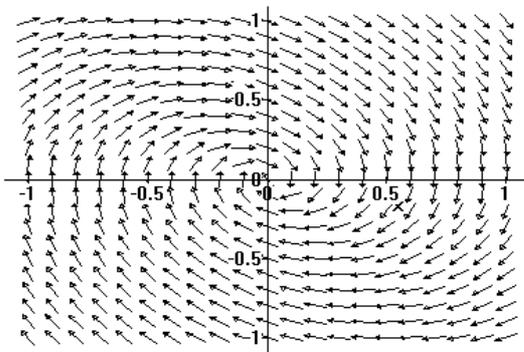


Figure (2) : le champ de vecteur du système non linéaire

Dans le cas où  $a = +1$  en remplaçant dans le système (27)

La procédure de linéarisation optimale utilisée entre 0 et  $-\infty$ , donne

$$A^* = \begin{bmatrix} 5.0822 \cdot 10^{-3} & 1 \\ -1 & 5.0942 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (35)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1^* = 5.0882 \cdot 10^{-3} + i \\ \lambda_2^* = 5.0882 \cdot 10^{-3} - i \end{cases} \quad (36)$$

On a  $\text{Re}(\lambda_1^*) > 0$  et  $\text{Re}(\lambda_2^*) > 0$ .

La linéarisation optimale est asymptotiquement instable en faisant apparaître l'origine comme un foyer. L'origine est alors asymptotiquement instable. Les figures (3) et (4) représentent les champs de vecteurs du système linéaire optimal du système non linéaire. Ils sont similaires et montrent que les courbes intégrales sont des spirales divergentes vers  $+\infty$ .

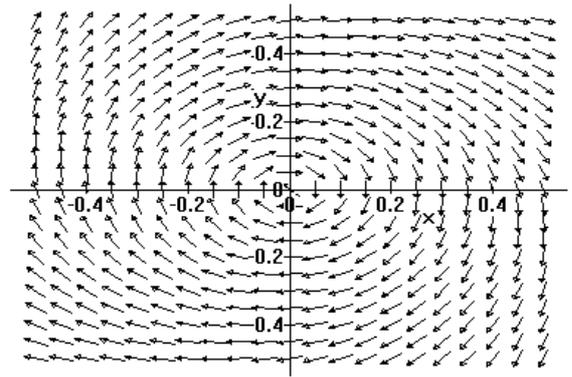


Figure (3) : le champ de vecteur du système linéaire optimal.

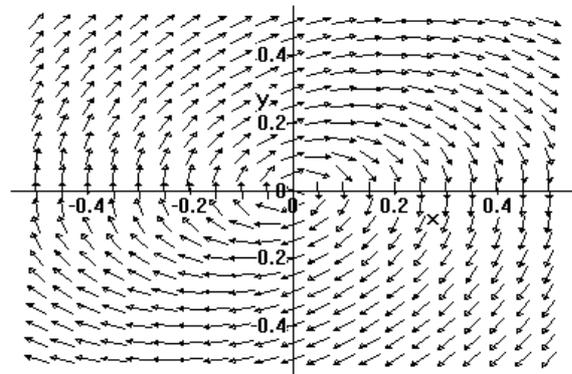


Figure (4) : le champ de vecteur du système non linéaire

## VI. CONCLUSION

A la lumière de cette étude, nous avons voulu montrer la possibilité offerte par cette méthode pour l'étude de la stabilité d'une équation différentielle ordinaire non linéaire présentant un centre, lorsqu'on utilise la linéarisation classique.

Les résultats relatifs au problème particulier de la forme (2) ont été concluants comme l'illustrent les figures (1), (2), (3), (4) conformément à l'étude développée dans les sections III et IV.

Il est donc clairement établi que numériquement la méthode de linéarisation optimale généralisée peut être une alternative à l'étude du problème de la stabilité asymptotique là où la linéarisation classique tombe en défaut.

## REFERENCES

- [1] V. Arnold, (1974), Equations Différentielles Ordinaires}, Editions Mir. Moscou.
- [2] T. Benouaz et O. Arino, (1994), Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non - linéaire}, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [3] T. Benouaz and O. Arino, (1995), Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential

Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure, Appl. Math. and Comp Sci., N° 1, Vol. 5, pp 33-48.

- [4] T. Benouaz et O. Arino, (1995) Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N° 95/10.
- [5] T. Benouaz, F. Bendahmane, A. Chikhaoui, (2002), Generalisation of the Optimal Linearization of Nonlinear Ordinary Differential Equation, Submitted in Journal of control.
- [6] H. Reinhart, *Equations Différentielles, Fondements et Applications*, Gauthier-Villars, 1982.
- [7] J. P. Demailly, *Analyse Numérique et Equations Différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1991.
- [8] M. Siboni, J. Cl. Mardon, *Approximations et Equations Différentielles. Analyse Numérique II*, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, 1988.
- [9] T. Benouaz, *Lyapounov Function Generated by Least Square Approximation*, Deuxième conférence Maghrébine sur l'Automatique, Tlemcen (Algeria) 3-5 December, Vol.1 pp.73-75, 1996.
- [10] T. Benouaz, O. Arino, *Least Square Approximation of a Non-Linear Ordinary Differential Equation*, Computers Math. Applic., Vol.31, N°8, pp.69-84, 1996.
- [11] T. Benouaz, O. Arino, *Optimal Approximation of the Initial Value Problem*, Computers Math. Applic., Vol.36, N°1, pp.21-32, 1998.
- [12] T. Benouaz, *Optimal Derivative of a Non-Linear Ordinary Differential Equation*, Equadiff 99, International Conference on Differential equations, Berlin (Germany) 1-7 August, Vol.2, pp.1404-1407, World scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2000.
- [13] A. chikhaoui, *Contribution à l'Etude de la Stabilité des Systèmes Non Linéaire*, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen (2000).