

# La modélisation et la simulation du modèle du camelot à demande et rendement aléatoire

A.H.GUEZZEN, Z. SARI,

Laboratoire d'Automatique de Tlemcen (L. A. T), Université Aboubekr Belkaid,  
BP 230, Tlemcen 13000, Algérie  
Tel: (213) 043 28 56 89 /Fax: 043 28 56 85  
E-mail : {guezzen\_a, z\_sari}@mail.univ-tlemcen.dz

**Résumé** La présence des rendements aléatoires dans beaucoup de processus de fabrication peut compliquer considérablement la planification et la commande de la production. Dans cet article, nous avons étudié le modèle mono-période, également connu sous le nom (the newsvendor problem) ou le modèle de camelot, prenant en compte les rendements aléatoires. Nous avons appliqué ce modèle dans le but de la détermination d'une taille de lot de production, ou bien une quantité de commande optimale, qui minimise le coût total espéré durant une seule période dans le cadre d'une demande et un rendement aléatoires. L'approche de résolution proposée est basée sur la simulation et sur un algorithme de la recherche locale. L'utilisation de la simulation est fortement motivée par la difficulté de résoudre le problème analytiquement.

**Mots-Clé** Le modèle du camelot, le rendement aléatoire, taille de lots, modélisation, simulation, quantité optimale.

## 1. INTRODUCTION

Le modèle du camelot (MC) est très utilisé dans les systèmes de production pour déterminer la quantité optimale de produits à fabriquer face à une demande aléatoire. De plus, Dans le domaine de la production industrielle, beaucoup de processus et de services modernes sont considérablement affectés par les rendements aléatoires (random yields) donc, il y a toujours des produits défectueux. Le rendement en production est le nombre de bons produits par rapport à la quantité totale de produits. A priori, on ne sait pas combien de produits défectueux qu'un lot va contenir. De ce fait, le rendement est en général aléatoire.

Par exemple, les fabricants de semi-conducteurs, ont souvent des rendements en dessous de 50 pour cent et les producteurs de plastique ont souvent un rendement qui varie autour de 75 pour cent (Gilbert et Emmons [3], Bohn et Terwiesch [1], Grasman et autres [4]).

Pour faire face à cette incertitude, une extension du modèle du camelot classique vers un modèle du camelot à demande et rendement aléatoires s'avère indispensable.

Bien que l'un des principaux objectifs de l'étude des systèmes de production est la réduction des coûts, il reste toujours nécessaire de trouver une politique

optimale qui minimise la totalité des coûts attendus. Dans cet article, nous avons étudié le MC à demande et rendement aléatoires dans le but de la détermination d'une taille de lot de production optimale qui minimise le coût total espéré de chaque période.

La suite de l'article est organisée en quatre sections. La section 1 donne une description générale sur le modèle du camelot classique. La section 2 présente le modèle du camelot à demande et rendement aléatoires ainsi que l'algorithme utilisé pour trouver la solution optimale. la troisième section décrit le modèle de simulation développé ainsi que l'analyse des résultats obtenus. La conclusion et les perspectives d'extension du modèle sont présentées dans la section 4.

## 2. Le Modèle du Camelot Classique(MCC)

### 2.1. Notation

Dans tout ce qui suit, on adoptera la notation suivante :

- $Q$  : variable de décision indiquant la quantité qui devra être commandée en début de cycle.
- $Y$  : le rendement (une variable aléatoire)
- $X$  : la demande (une variable aléatoire)
- $p_a$  : prix d'achat unitaire (de fournisseur) ou de fabrication.
- $p_v$  : prix au détail ( $p_v > p_a$ ).
- $v_r$  : valeur de récupération ( $v_r < p_a$ ).
- $C_o$  : le coût de possession ( $C_o = p_a - v_r$ )
- $C_s$  : le coût de rupture ( $C_s = p_v - p_a$ )
- $f(x)$  : fonction de densité associée à la demande
- $F(x)$  : fonction de distribution associée à la demande
- $g_Q(y)$  : fonction de densité associée au rendement
- $G_Q(y)$  : fonction de distribution associée au rendement

### 2.2. Hypothèses

Afin de pouvoir étudier le problème, plusieurs simplifications et hypothèses ont été prises :

- l'horizon est fini et vaut T.
- On s'intéresse à un système de production comportant un seul stage de fabrication.

- Un stock initial nul.
- Le coût unitaire du produit étant constant sur tout l'horizon.
- Les quantités non vendues à la fin de la période sont perdues (des produits périssable).

### 2.3. Définition du modèle

Parmi les modèles de la gestion des stocks et de la quantité à commander dans un contexte de demande aléatoire, on trouve le modèle classique du camelot (également connu sous le nom de « *newsboy model* » ou bien « *news vendor model* » voir Nahmias, 2001[5]). Ce modèle permet de calculer la quantité optimale de commande qu'un client doit adresser à un fournisseur afin de maximiser son espérance mathématique de profit, notée ici  $C(Q)$ .

La séquence est la suivante : le client commande une quantité  $Q$  sur la base d'une estimation existante de la demande ou bien sur l'historique de la demande du marché, puis le fournisseur lui livre  $Q$  et la demande est révélée. La figure(1) présente l'évolution du niveau du stock pendant une période avec un rendement parfait.

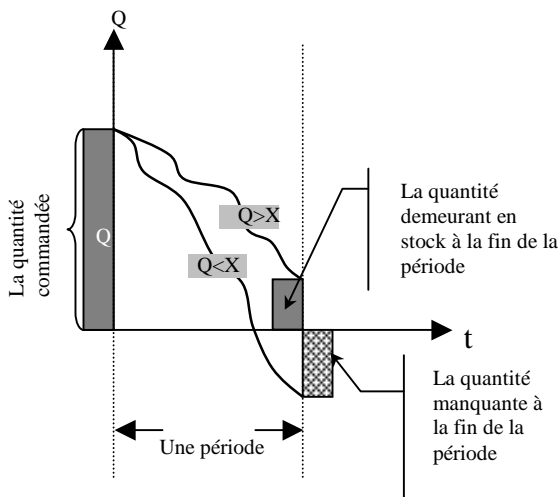


Figure 1 . Le niveau du stock pendant une période

### 2.4. Le coût total espéré

L'expression du coût total est donnée par l'équation suivante :

$$C(Q) = \int_{x=0}^Q c_o (Q-x) f(x) dx + \int_{x=Q}^{\infty} c_s (x-Q) f(x) dx$$

pour déterminer la valeur de  $Q$  qui minimise Le coût espéré  $C(Q)$ . Il faut étudier la dérivée première de  $C(Q)$ . Par application de la formule de Leibnitz, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{d[c(Q)]}{dQ} = 0$$

$$\frac{d[c(Q)]}{dQ} = c_o \int_0^Q f(x) dx - c_s \int_Q^{\infty} f(x) dx = 0$$

Puisque  $f(x)$  est la fonction de densité de probabilité, l'intégrale dans le premier terme est juste la fonction de probabilité cumulative, ce qui nous donne :

$$F(Q^*) = \frac{C_s}{C_s + C_o}$$

Nous nous référons au côté droit de la dernière équation comme rapport critique. Comme  $C_o$  et  $C_s$  sont des nombres positifs, ce rapport critique est strictement entre zéro et un, ceci implique que pour une distribution continue de la demande, cette équation est toujours solvable.

Sachant que  $F(Q^*)$  est défini comme la probabilité que la demande n'excède pas  $Q^*$ ; le rapport critique est la probabilité de satisfaire toute la demande pendant la période, si  $Q^*$  unités sont achetées ou produites au début de cette période.

### 3. Le modèle du camelot à demande et rendement aléatoires

La section précédente présente le cas du modèle mono-période avec un rendement parfait. L'analyse est continuée dans cette section pour le cas du rendement aléatoire avec la prise en compte des mêmes notations et hypothèses, sauf que la quantité commandée ou produite est imparfaite et contient des articles défectueux. On peut schématiser l'évolution du niveau du stock dans la figure (2).

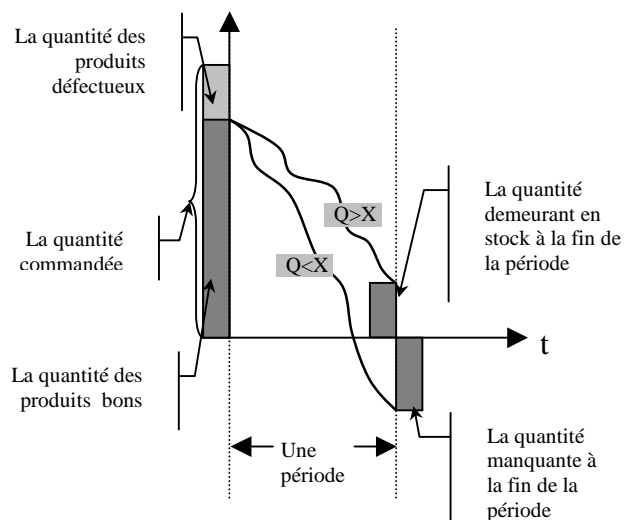


Figure 2 . Le niveau du stock

Ce problème a fait l'objet de plusieurs travaux. Différentes stratégies ont été proposées et discutées par plusieurs auteurs dans ces dernières années. On trouve par exemple : Shih[6], Shih a supposé que les unités

défectueuses sont invendables et sont retournées au fabricant à ses frais. Il a également supposé que le pourcentage défectueux ( $p$ ) est une variable aléatoire avec une distribution de probabilité connue ; Noori et Keller [7] ont obtenu des résultats analytiques pour la quantité optimale  $Q^*$  pour une demande distribuée uniformément et exponentiellement. Grasman et al [8]

présentent l'analyse du modèle du *camelot* avec une distribution générale du rendement aléatoire, y compris la dérivation de la quantité optimale de commande. Des résultats ont montré la convergence au modèle classique pour le cas du rendement parfait. Gerchak et al [9], Yano et Lee [10] ont également traité le rendement aléatoire.

### 3.1. Présentation du modèle

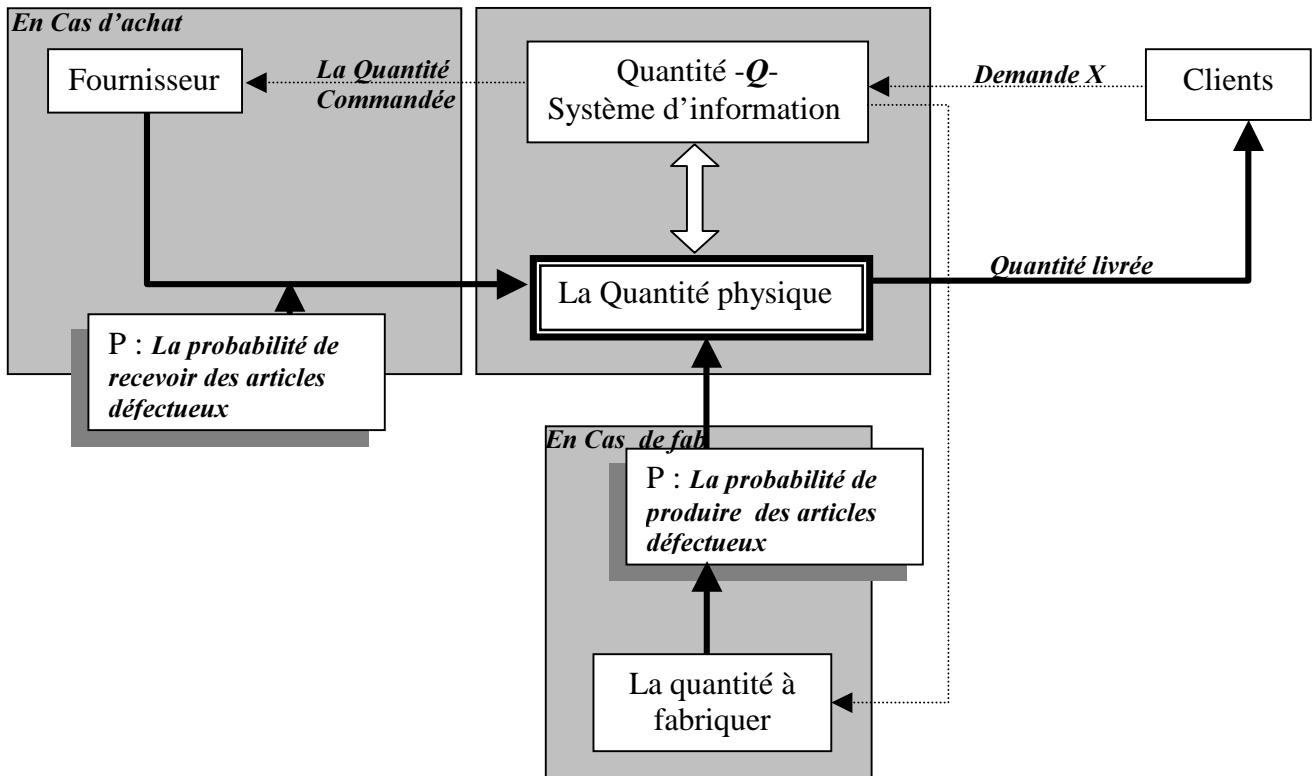


Figure 3. Description du Système

Afin de satisfaire la demande, une quantité  $Q$  est soit commandée au fournisseur ou bien fabriquée dans un système de production. La quantité reçue dans le stock n'est pas égale à la quantité commandée : Nous supposons qu'il y a une différence entre la quantité commandée au fournisseur et la quantité reçue, i.e. le fournisseur n'est pas fiable, donc il y a toujours des articles défectueux .

### 3.2. Fonction Coût

L'expression du coût total du système est obtenue en considérant la somme des différents coûts décrits avec la prise en compte de la variation du rendement entre le zéro et la quantité commandée, ce qui donne l'expression suivante: Grasman et al [8]

$$C(Q) = \int_{y=0}^Q g_Q(y) \left[ C_0 \int_{x=0}^y (y-x)f(x) dx + C_S \int_{x=y}^{\infty} (x-y)f(x) dx \right] dy$$

Dans cet article, on s'intéresse au cas où la demande suit une loi normale et le rendement suit une loi binomiale. La loi binomiale est une loi discrète, de ce fait, l'expression précédente peut s'écrire de la façon suivante :

$$C(Q) = \sum_{y=0}^Q g_Q(y) \left[ C_0 \int_{x=0}^y (y-x)f(x) dx + C_S \int_{x=y}^{\infty} (x-y)f(x) dx \right] dy$$

### 3.3. Détermination de la quantité de commande optimale

L'optimisation du modèle consiste à déterminer la quantité à commander qui minimise les coûts d'immobilisation et les coûts de rupture. Par conséquent, elle minimise la fonction  $C(Q)$ . A cet effet, nous avons utilisé l'algorithme suivant.

### 3.3.1. Algorithme pour déterminer la valeur optimale

Cet algorithme consiste à passer d'une solution à une solution voisine par déplacements successifs. L'ensemble des solutions que l'on peut atteindre à partir d'une solution  $Q$  est appelé *voisinage*  $N(Q)$  de cette solution.

Cette algorithme s'articule autour d'un principe simple. A partir d'une solution initiale  $Q_0$ , on choisit une solution  $Q$  dans le voisinage  $N(Q)$  de  $Q_0$ . Si cette solution est meilleure que  $Q$ , ( $C(Q) < C(Q_0)$ ) alors on l'accepte comme nouvelle solution  $Q$  et on recommence le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune solution améliorante dans le voisinage de  $Q$ .

Voici le squelette qui présente cette méthode :

- 1- Initialiser :  $Q = Q_0$
- 2- chercher dans le voisinage :
  - tant que  $C(Q+1) < C(Q)$
  - $Q=Q+1$
- 3- affecter  $Q^* \leftarrow Q$
- 4- terminer
- 5- afficher  $Q^*$

L'implémentation de cet algorithme dans un programme Matlab qui calcule le coût total, nous donne la courbe présentée dans la figure(4).

Pour tester le modèle, on considère la situation suivante :

- La distribution des rendements obéit à une loi Binomiale avec un paramètre  $p=0.7$  tel que  $p$  est la probabilité d'obtenir  $y$  produits bons parmi  $Q$  produits commandés.
- La distribution des rendements obéit à une loi normale avec une moyenne de 50 et un écart type de 5.

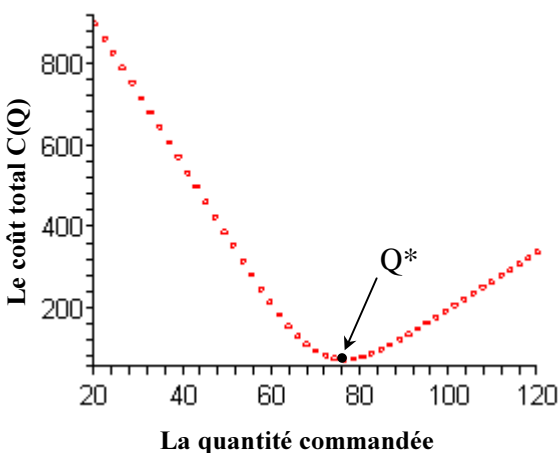


Figure 4 : Courbe du coût total en fonction de Q

On voit clairement que la fonction  $C(Q)$  est une fonction convexe avec un minimum qui correspond à la quantité optimale  $Q^*=76$  qu'on doit commander dans une telle situation.

### 4. Démarche générale de la simulation

Dans cette section, on va définir une démarche générale de simulation *figure(5)*. Cette démarche permet d'obtenir une image approchée de la structure et du comportement du système réel.

La simulation repose sur l'expérimentation à partir d'un modèle exécutable et débouche sur une observation du comportement du système dans le temps. Cette structure nous a permis de faire une étude plus réaliste en termes de modélisation et d'analyse comportementales du modèle du camelot à demande et rendement aléatoires.

#### 4.1. Le modèle de simulation

La structure de la simulation présentée dans cette figure a été conçue et programmée à l'aide du logiciel Arena8.1

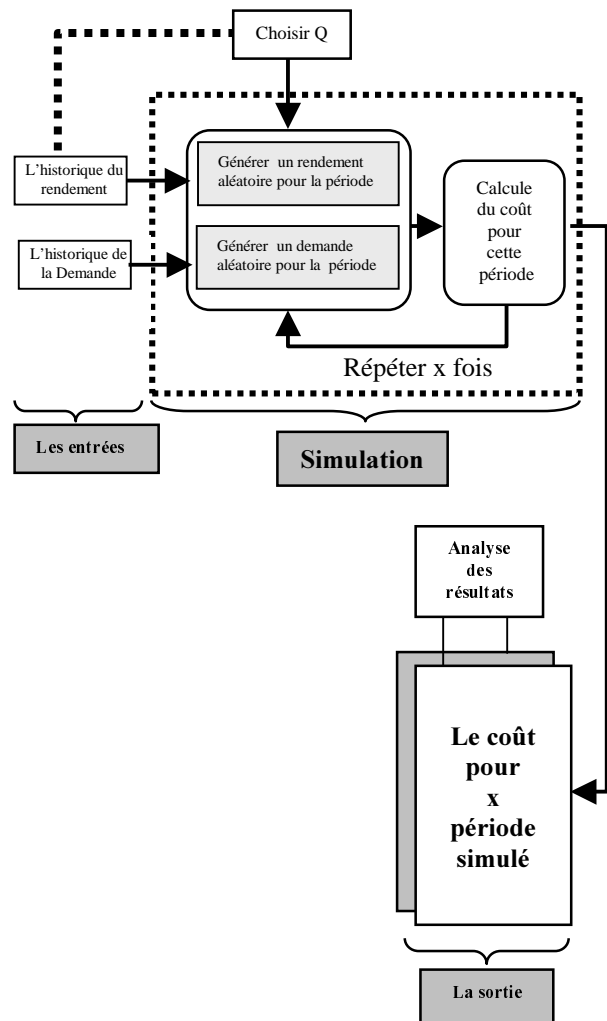


Figure 5 : structure de la simulation

## 4.2. Résultats de simulation

Si on considère la même situation utilisée dans la section 3.3.1 (binom(0.7), Norm(50.5)), les résultats obtenus par la simulation sont présentés dans les graphes suivants :

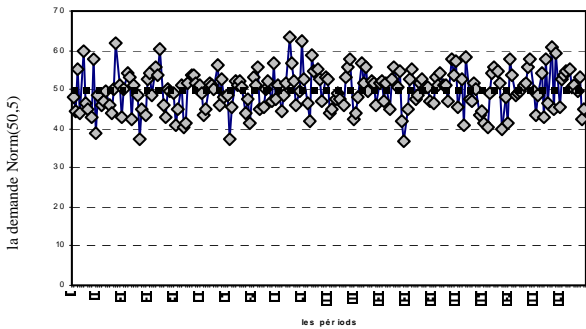


Figure 6 : la variation de la demande au tour de la moyenne 50 pendant 200 périodes

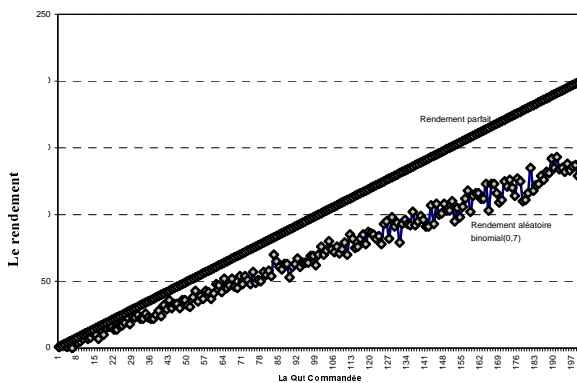


Figure 7 : le rendement du système pendant 200 périodes

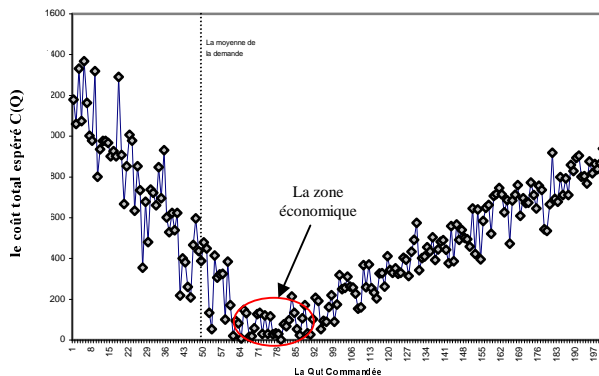


Figure 8 : la variation du coût total espéré pendant 200 périodes

Le fait que nous ayons incrémenté la quantité commandée d'une entité pendant 200 périodes successives, on remarque que l'allure du coût total passe par une zone économique entre les deux valeurs 70 et 80 puisque le coût est minimum.

Afin de pouvoir comparer les résultats de simulation avec ceux obtenus par l'algorithme précédent, nous avons utilisé la solution optimale trouvée précédemment  $Q^*=76$  dans notre simulation, ce qui donne les résultats suivantes :

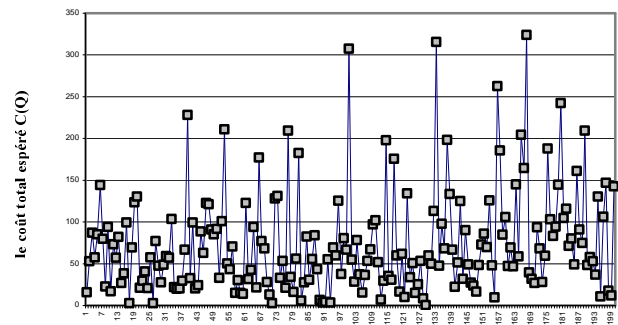


Figure 9 : la variation du coût total espéré pendant 200 périodes ( $Q=76$ )

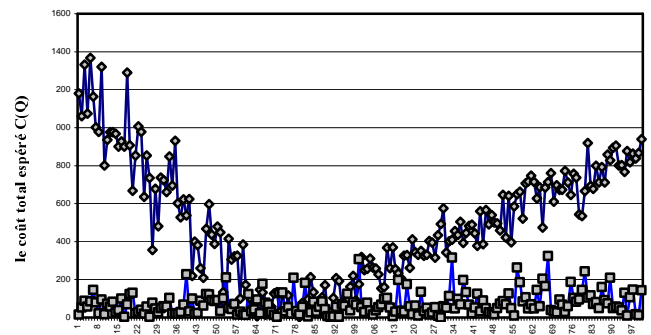


Figure 10 : comparaison entre les deux cas ( $Q=76$ ) et  $Q$  varie de 1 à 200

La figure 10 fait bien apparaître, que pour le cas précis ( $Q=76$ ), le coût varie toujours autour du minimum.

## 5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans cette article, nous avons présenté un modèle mathématique qui décrit la fonction du coût total espéré d'un système mono-période. La détermination de la taille optimale nécessite une résolution analytique de ce modèle. Puisque la solution est difficile à obtenir analytiquement, nous avons opté pour la simulation. Une procédure numérique comportant un algorithme de recherche locale a été

développée pour générer la stratégie optimale  $Q^*$  qui minimise le coût total attendu .

Comme perspective, nous souhaitons prolonger notre travail, en nous focalisant plus particulièrement sur le coté analytique, i.e trouver un résultat analytique général qui donne directement la quantité optimale de commande.

## RÉFÉRENCES

[1] Bohn RE, Terwiesch C. The Economics of Yield Driven Processes. *Journal of Operations Management* 1999;19(1):41-59.

[3] Gilbert S, Emmons H. Managing a Deteriorating Process in a Batch-Production Environment. *IIE Transactions* 1995;27(2):233-243.

[4] Grasman SE, Olsen TL, Birge JR. Setting Basestock Levels in Multiproduct Systems with Setups and Random Yield, Working Paper.

[5] Steven Nahmias : *Production and Operations Analysis*, 4ième édition, McGraw-Hill Irwin 2001.

[6] Shih W. Optimal inventory policies when stockouts result from defective products. *Int J Prod Res* 1980;18:677±86.

[7] Noori AH, Keller G. One-period order quantity strategy with uncertain match between the amount received and quantity requisitioned. *INFOR* 1986;24:1±11

[8] Scott E. Grasman , Zaki Sari and Tewfik Sari, News vendor Solutions with General Random Yield Distributions , soumis à international journal of production recherche

[9] Gerchak Y, Vickson RG, Parlar M. Periodic review production models with variable yield and uncertain demand. *IIE Trans* 1988;20:144±50.

[10] Yano CA, Lee HL. Lot Sizing with Random Yields: A Review. *Operations Research* 1995;43(2):311-334.