République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse

Pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques

Spécialité

Sur certaines classes d'équations elliptiques

Thème

Sur une approche spectrale des problèmes aux bords abstraits et applications

Présentée par

Mlle KHALDI Nassima

Sous la direction : Pr B. MESSIRDI

Devant le jury composé de :

Président :	Mr M. BOUCHEKIF	Professeur, Université de Tlemcen
Encadreur :	Mr B. MESSIRDI	Professeur, Université d'Oran 1
Examinateurs :	Mr M. BENCHOHRA	Professeur, Université de Bel-Abbes
	Mr S.M. BOUGUIMA	Professeur, Université de Tlemcen
	Mr M.T. TOUAOULA	Professeur, Université de Tlemcen

Année universitaire 2014-2015

Table des matières

Remerciements

Louanges A Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail. Prière et Salut soient sur Notre Cher Prophète "Mohammed" et sur sa famille et ses fidèles compagnons.

Je tiens à remercier le professeur B. Messirdi pour la bienveillance avec laquelle il a encadré cette thèse. Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude.

Je tiens à remercier le Docteur M. Benharrat co-dirigeant de ce travail, son soutien et ses conseils m'ont beaucoup aidés dans mes recherches.

Je tiens à remercier également le professeur M. Bouchekif qui m'a fait l'honneur de présider le jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.

Je remercie le professeur M. Benchohra, le professeur S.M. Bouguima, le professeur M.T. Touaoula d'avoir accepté d'examiner mon travail et d'être membres du jury.

Je désire aussi remercier Monsieur M. Mebkhout pour son aide durant toutes ces années.

Je voudrai exprimer ma reconnaissance et ma gratitude envers Madame Isabelle Chalendar pour son aide et son accueil tout au long du mon stage.

Enfin, je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés, je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de près ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail, plus précisément Medjadj Imene et sa famille et Elong Ouissam.

Liste des publications et de soumission

1. N.KHALDI, M. BENHARRAT et B. MESSIRDI, *On the spectral boundary value problems and approximate controllability of linear systems*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 63 (2014), 141-153.

2. N. KHALDI, M. BENHARRAT, B. MESSIRDI, *A spectral approach for solving boundary value matrix problems : existence, uniqueness and application to symplectic elasticity*. Advanced Research in Applied Mathematics, vol 6, Issue. 4, 2014, 68-80.

3. N.KHALDI, M. BENHARRAT et B. MESSIRDI, *Linear boundary value problems described by Drazin invertible operators*. Soumis.

Introduction

La théorie des problèmes aux bords abstraits traitée dans les travaux de Hilbert [20] et Poincaré [41], a avancé considérablement au début du $20^{\text{ème}}$ siècle grâce aux travaux de Noether [39] et Carleman[8], elle a connue un développement rapide au cours des dernières années.

En effet, les dernières années ont été marquées par un intérêt accru de la communauté mathématique pour les méthodes spectrales des opérateurs linéaires dans des applications à des problèmes aux bords abstraits différentiels scalaires et matriciels. L'approche abstraite est généralement basée sur la théorie de l'extension des opérateurs symétriques qui a été développée dans les travaux classiques de J. Von Neumann [38], H. Weyl [54], K. Friedrichs [14], M. Krien [31, 32], Staffans [49] et bien d'autres. D'autre part, les paramètres spectrales intervenant dans ces types de problèmes ont un sens physique important, les valeurs de ces paramètres peuvent être par exemple : l'énergie du système, l'élasticité, la vibration, ..., la résolution du problème abstrait passe par l'étude des propriétés des opérateurs linéaires associés au problème.

Notre travail présente une approche spectrale pour l'étude des problèmes aux bords abstraits dans des espaces de Banach. Notons que ce traitement donne certaines propriétés utiles, et amène de nouvelles techniques d'études de nombreux problèmes dans la littérature.

Dans [36], l'auteur a développé une étude d'une classe générale d'équations linéaires avec des opérateurs inversibles à droite et des opérateurs initiaux correspondants à des problèmes aux bords mixtes . En outre, il a également étudié la contrôlabilité des systèmes linéaires avec des opérateurs inversibles à droite. Récemment, Ryzhov [45, 46, 47] a considéré ce type de problèmes aux bords abstraits, dans les espaces de Hilbert. Il a utilisé des opérateurs inversibles à gauche et a appliqué ses résultats au problème de Poincaré, de Hilbert et de Riemman pour les fonctions harmoniques et analytiques dans un cadre abstrait.

Cette thèse se compose de trois parties réparties en 4 chapitres. Dans la première partie, on traite des problèmes aux bords généraux abstraits de la forme :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} (D - \lambda A)u = f \\ \Gamma u = \varphi \end{cases}$$

où le terme source D est inversible à droite ou à gauche et le paramètre spectral λ correspondant est dans le résolvant classique ou dans le résolvant de Browder. Γ est l'opérateur au bord. Il est à signaler que le problème $(\mathcal{P})$ devient particulièrement difficile lorsque les conditions aux bords dépendent du paramètre spectral de manière linéaire ou non linéaire, voir, par exemple [19]. On construit un opérateur au bord associé à $(\mathcal{P})$ et on montre que ce problème est bien posé lorsque des conditions nécessaires sont imposées. On développe ensuite un cadre théorique pour les différents concepts de contrôlabilité. Rappelons que, dans des espaces de dimension infinie, la contrôlabilité exacte n'est pas toujours réalisée. Pour surmonter ces restrictions, il a été défini dans Thi [52] (voir aussi [36]) la notion de F_1-contrôlabilité, dans le sens qu'un système est approximativement contrôlable si un état peut être transféré à un autre état par un contrôle recevable. On introduit un nouveau concept de contrôlabilité approchée appelé Γ_1-contrôlabilité. Cela permet de couvrir une large classe de systèmes contrôlables en particulier ceux assujettis à des conditions aux bords et de généraliser le travail de Thi [52].

La deuxième partie, est consacrée à l'étude des problèmes aux bords matriciels généraux triangulaires supérieurs (2×2) agissant dans des espaces de Banach avec un paramètre spectral $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(\mathcal{P}_M) \begin{cases} (D - \lambda M_C)w = F \\ \Gamma w = \Phi \end{cases}$$

où $M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec A, B et C sont des opérateurs linéaires et F et Φ sont des fonctions données.
Il existe une variété de travaux où les problèmes sont réduits à étudier les propriétés spectrales d'opérateurs matriciels triangulaires supérieurs pour résoudre des équations différentielles ordinaires ([44, 53, 2, 29]) et des équations aux dérivées partielles [10, 58]. Pour des applications physiques le lecteur intéressé pourra consulter les références [9, 55, 58, 59].

Dans notre cas, on définit d'abord le problème $(\mathcal{P}_M)$ par le couple ordonné (D, M_C) d'opérateurs matriciels triangulaires supérieurs lorsque D est inversible à droite et on construit l'opérateur au bord matriciel Γ correspondant à D. On montre l'existence et l'unicité de la solution de $(\mathcal{P}_M)$ et on donne l'expression explicite de cette solution. Nos résultats découlent d'une approche spectrale et du calcul matriciel opérateur, en s'appuyant en particulier sur la factorisation de Frobenius-Schur.

Notre situation est une généralisation de plusieurs travaux connus sur la question, voir par exemple [19], [46].

Dans la troisième partie, on introduit l'opérateur au bord correspondant à un opérateur D inversible au sens de Darzin (resp. inversible à droite ou à gauche au sens de Drazin) et on résout le problème $\mathcal{P}$ lorsque A est l'opérateur identité. En particulier, on construit une forme générale d'opérateurs résolvants de ces problèmes, ce qui nous permet de trouver des solutions unifiées. Nos résultats généralisent plusieurs travaux connus tels que [23, 24, 36, 43, 46, 47].

La théorie de l'inverse de Drazin s'applique aux problèmes de Cauchy abstraits, aux chaînes de Markov dénombrables, aux systèmes infinis d'équations linéaires différentielles et à la théorie du contrôle [7, 56]. En particulier, Campbell et Meyer [5, 6] ont donné des solutions pour les systèmes linéaires d'équations différentielles singulières à coefficients constants dans le cas où les conditions initiales sont cohérentes.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques propriétés des opérateurs linéaires fermés dans les espaces de Banach (propriétés algébriques classiques, adjoints, inverse, spectre, ...). On exprime quelques résultats sur la théorie spectrale nécessaires pour la suite de notre travail et d'autres sur l'inverse de Drazin et on termine par quelques rappels sur la théorie des C_0-semi-groupes d'opérateurs linéaires.

Dans le deuxième chapitre, on définit les opérateurs aux bords correspondants à un opérateur inversible à droite (resp. à gauche) et on montre que cette notion généralise la définition des opérateurs initiaux introduite par Przeworska-Rolewicz dans [43]. On illustre ensuite les solutions générales des problèmes aux bords définis par un couple ordonné (D, A) d'opérateurs linéaires agissant dans des espaces de Banach où D est un opérateur inversible à droite (resp. à gauche). Sur la base des résultats obtenus et le concept de la contrôlabilité, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système linéaire de contrôle abstrait soit contrôlable et approximativement contrôlable. Enfin, sur un exemple typique, on montre que le concept de Γ_1-approximativement accessible coïncide avec l'accessibilité approximative du systèmes de commande linéaire en dimension infinie.

Ensuite dans le troisième chapitre, on construit les opérateurs matriciels aux bords correspondants à un opérateur matriciel triangulaire supérieur (2×2) inversible à droite. On identifie explicitement les solutions des problèmes aux bords abstraits définis par un couple (D, M_C) où M_C est un opérateur matriciel triangulaire superieur et D est un opérateur matriciel triangulaire superieur inversible à droite dans des espaces de Banach. On illustre la théorie au moyen d'une application sur un problème d'élasticité symplectique où on utilise la factorisations Frobenius-Schur des opérateurs matriciels non bornés, et les propriétés d'opérateurs de Volterra et certains résultats de la théorie de mesure.

Enfin dans le dernier chapitre, on donne une décomposition du domaine d'un opérateur inversible au sens de Drazin à droite (resp. à gauche) et on définit les opérateurs aux bords correspondants à un opérateur inversible au sens de Drazin (resp. inversible à droite ou à gauche au sens de Drazin). Cette définition est nouvelle à nos connaissances, et est une extension intéressante aux problèmes aux bords abstraits. On exprime la solution explicite du problème $(\mathcal{P})$ où D est un opérateur inversible au sens de Drazin (resp. inversible à droite ou à gauche au sens de Drazin) dans les deux cas où A est l'opérateur identité et dans le cas où A est distinct de l'opérateur identité. On illustre nos approches sur un exemple typique d'un problème de Cauchy du second ordre pour une équation des ondes forcée.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions et résultats de la théorie des opérateurs linéaires dans des espaces de Banach et de la théorie spectrale dans le cas scalaire et matriciel. On présente aussi une brève introduction à la théorie des C_0-semi-groupes d'opérateurs linéaires.

1.1 Opérateurs linéaires fermés

Dans ce qui suit, X et Y désignent des espaces de Banach complexes et I_X (resp. I_Y) est l'opérateur identité sur X (resp. Y).
On commence par définir les opérateurs linéaires fermés et on rappelle quelques propriétés de ces opérateurs dans des espaces de Banach.

Un opérateur linéaire $A : X \to Y$ est appelé borné (ou continu) s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \quad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

On note $\mathcal{B}(X, Y)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés de X dans Y et $\mathcal{B}(X, X) = \mathcal{B}(X)$. La norme de l'opérateur $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ est définie par

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

où $\|\|$ désigne la norme dans l'espace approprié. Mais de nombreux opérateurs importants dans des espaces de Banach ne sont pas bornés. Par exemple, les opérateurs différentiels sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ ne sont pas bornés. Par conséquent, on analyse des opérateurs linéaires généraux $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$, où $\mathcal{D}(A)$ est supposé un sous-espace vectoriel de X, pas nécessairement égal à X. L'espace $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de A. On désigne par $Lin(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires de X dans Y et $Lin(X, X) = Lin(X)$. Si $A \in Lin(X, Y)$,

$\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ sont respectivement le noyau et l'image de A.

On s'intéresse particulièrement aux opérateurs linéaires de domaine dense (c'est à dire $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$). Lorsque A est borné et densément défini, il s'étend par continuité à un opérateur dans $\mathcal{B}(X, Y)$, mais dans le cas non borné il n'y a pas une telle extension. Pour cela on a une autre propriété d'être fermé.

Définition 1.1 *Un opérateur linéaire A de domaine $\mathcal{D}(A)$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathcal{D}(A)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$ alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$.*

Cette définition est équivalente à la fermeture dans $X \times Y$ du graphe $G(A) = \{(x, Ax);\ \ x \in D(A)\}$ de l'opérateur A.

Exemple 1.1 *Soit A un opérateur différentiel linéaire défini par*

$$A = \sum_{i=0}^{p} a_i \partial_x^i$$

où $p \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $a_i \in \mathbb{C}$.
A est défini dans $L^2(\mathbb{R})$ de domaine $\mathcal{D}(A) = H^p(\mathbb{R})$ (sous-espace dense dans $L^2(\mathbb{R})$). A est non borné lorsque $\mathcal{D}(A)$ est muni de la topologie induite sur $\mathcal{D}(A)$ par celle de $L^2(\mathbb{R})$. L'opérateur A est fermé dans $L^2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{C}(X, Y)$ ou $\mathcal{C}(X)$ si $X = Y$, l'espace des opérateurs linéaires fermés de X dans Y de domaine dense dans X.

Remarque 1.1
- *La continuité de l'opérateur A ne signifie pas nécessairement que A est fermé. Inversement, A est fermé ne signifie pas nécessairement que A est continu ;*
- *Si A est fermé, alors $\mathcal{N}(A)$ est fermé.*

Définition 1.2 *Si A n'est pas fermé et si $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur $\overline{A}$, on dit que A est fermable. $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A.*

Soit $A \in \mathcal{C}(X)$. On désigne par $\rho(A)$ et $\sigma(A)$ l'ensemble résolvant et le spectre de A définis respectivement par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I_X)} = X \ \text{ et } \ (A - \lambda I_X)^{-1} : \mathcal{R}(A - \lambda I_X) \to \mathcal{D}(A) \ \text{existe et est borné}\},$$

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Pour $\lambda \in \rho(A)$, $\mathbf{R}(\lambda, A) = (A - \lambda I_X)^{-1}$ est l'opérateur résolvant de A.
On recueille quelques résultats importants sur le spectre et l'opérateur résolvant dans le théorème suivant.

Théorème 1.1 *[22] Soit $A \in \mathcal{C}(X)$. Alors*

1. *Si $\lambda \in \rho(A)$ et $|\lambda - \mu| \leq \|\boldsymbol{R}(\lambda, A)\|^{-1}$ alors $\mu \in \rho(A)$. Ainsi $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$;*
2. *Pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$, l'opérateur résolvant vérifie l'équation de la résolvante :*

$$\boldsymbol{R}(\lambda, A) - \boldsymbol{R}(\mu, A) = (\lambda - \mu)\boldsymbol{R}(\lambda, A)\boldsymbol{R}(\mu, A)$$

en outre $\boldsymbol{R}(\lambda, A)$ commute avec A et $\boldsymbol{R}(\mu, A)$.

Notons que le spectre des opérateurs bornés n'est jamais vide ni égal à $\mathbb{C}$. L'exemple suivant montre qu'il existe des opérateurs non bornés fermés avec un spectre vide ou égal à $\mathbb{C}$.

Exemple 1.2 *On considère l'opérateur $A : f \mapsto if'$ sur $L^2[0, 1]$, avec les domaines suivants :*

$$D_0 = \{f \in AC^2[0, 1] : \ f(0) = 0\},$$

$$D_1 = \{f \in AC^2\}$$

où $AC^2[0, 1]$ désigne l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[0, 1]$ dont les dérivées au sens des distributions sont dans $L^2[0, 1]$. Les opérateurs $A_0 = (A, D_0)$ et $A_1 = (A, D_1)$ sont fermés où $\sigma(A_0) = \emptyset$ et $\sigma(A_1) = \mathbb{C}$.

Théorème 1.2 *Soit $A, B \in Lin(X)$ tels que $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(A)$. Alors $(I_X - \lambda AB)$ est inversible si et seulement si $(I_X - \lambda BA)$ est inversible pour tout $\lambda \neq 0$.*
Dans ce cas, on a

$$(I_X - \lambda BA)^{-1} = I_X + \lambda B(I_X - \lambda AB)^{-1}A \tag{1.1}$$

et

$$(I_X - \lambda AB)^{-1} = I_X + \lambda A(I_X - \lambda BA)^{-1}B.$$

Preuve. Soit $\lambda \neq 0$. Supposons que $(I_X - \lambda AB)$ est inversible d'inverse C, alors

$$(I_X - \lambda AB)C = C(I_X - \lambda AB) = I_X \iff C - \lambda ABC = C - \lambda CAB = I_X.$$

D'où

$$\lambda CAB = C - I_X.$$

Autrement,

$$\begin{aligned}(I_X + \lambda BCA)(I_X - \lambda BA) &= I_X - \lambda BA + \lambda BCA - \lambda^2 BCABA \\ &= I_X - \lambda BA + \lambda BCA - \lambda B(C - I_X)A \\ &= I_X.\end{aligned}$$

De la même manière puisque $\lambda ABC = C - I_X$, on obtient

$$(I_X - \lambda BA)(I_X + \lambda BCA) = I_X.$$

Par suite $(I_X - \lambda BA)$ est inversible et

$$(I_X - \lambda BA)^{-1} = (I_X + \lambda BCA) = I_X + \lambda B(I_X - \lambda AB)^{-1}A.$$

L'autre égalité se déduit en permutant A et B. ∎

Corollaire 1.1 *Soit $A, B \in Lin(X)$ tels que $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(A)$. Si $\lambda^{-1} \in \rho(AB)$ alors*

$$(I_X - \lambda AB)^{-1}A = A(I_X - \lambda BA)^{-1}.$$

Preuve. Si $\lambda^{-1} \in \rho(AB)$, en vertu du théorème 1.2 on a

$$\begin{aligned}
(I_X - \lambda AB)^{-1}A &= [I_X + \lambda A(I_X - \lambda BA)^{-1}B]A \\
&= A[I_X + \lambda (I_X - \lambda BA)^{-1}BA] \\
&= A[I_X + \lambda BA(I_X - \lambda BA)^{-1}] \\
&= A[(I_X - \lambda BA)(I_X - \lambda BA)^{-1} + \lambda BA(I_X - \lambda BA)^{-1}] \\
&= A(I_X - \lambda BA)^{-1}.
\end{aligned}$$

∎

Maintenant, on rappelle la définition et quelques résultats des C_0-semi-groupes d'opérateurs linéaires.

Définition 1.3 *Un semi-groupe de classe C_0 sur X est une famille à un paramètre $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) $T(0) = I_X$;

(ii) $T(t)T(s) = T(t+s)$, pour $t, s \geq 0$;

(iii) L'application $t \mapsto T(t)x$ est fortement continue, pour chaque $x \in X$, c'est à dire

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x, \quad \textit{pour tout} \;\; x \in X.$$

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue si

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - I_X\| = 0.$$

Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs bornés, alors il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tels que $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M\ e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$. En particulier, si $M = 1$ et $\omega = 0$, c'est à dire $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$, pour tout $t \geq 0$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est appelé un semi-groupe de contraction.

Définition 1.4 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un (C_0)-semi-groupe défini sur X. Le générateur infinitésimal A de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur linéaire A défini sur X par*

$$A(x) = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ pour } x \in D(A),$$

où

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\}.$$

Théorème 1.3 *[40] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A le générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Alors*

1. *Pour $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$ et*

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x;$$

2. *Pour $x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = A(T(t)(x)) = T(t)(A(x)).$$

Pour plus de détails sur la théorie des semi-groupes, voir les livres de Goldstein [16], Fattorini [13], Ahmad [1] et Pazy [40].

1.1.1 Opérateur adjoint

L'espace dual X^* de X est l'ensemble des formes linéaires bornées x^* sur X. X^* est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{X^*} = \inf\{|x^*(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Si $A : X \to Y$ est de domaine dense, on peut définir l'opérateur adjoint
$A^* : Y^* \to X^*$ par : le domaine $\mathcal{D}(A^*)$ est l'ensemble des $y^* \in Y^*$ tels que l'application

$$\mathcal{D}(A) \ni x \longmapsto y^*(Ax) \tag{1.2}$$

est continue (de X dans $\mathbb{C}$).
Puisque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, l'application se prolonge par continuité sur X, et alors il existe un unique $x^* \in X^*$ tel que

$$y^*(Ax) = x^*(x), \text{ pour } x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.3}$$

Ainsi x^* est déterminé par y^*, on peut définir l'opérateur A^* de Y^* dans X^* par :

$$A^*y^* = x^*, \text{ pour } y^* \in \mathcal{D}(A^*). \tag{1.4}$$

Théorème 1.4 ([22]) *Soit $A \in \mathcal{C}(X,Y)$. Alors il existe un opérateur adjoint $A^* : Y^* \to X^*$, défini d'une manière unique par (1.2)-(1.4). De plus, A^* est fermé.*

On rappelle que si X et Y sont deux espaces de Hilbert munis du produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On peut définir l'adjoint de $A \in \mathcal{C}(X,Y)$ comme suit :

$$\mathcal{D}(A^*) = \{y \in Y : \exists z \in X, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle\},$$

$$A^* y = z.$$

De plus, si A est borné, on a

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \quad \text{pour tout} \quad x \in X, \ y \in Y.$$

Théorème 1.5 *[57] Soit Z un espces de Banach. Soient $A \in \mathcal{B}(X,Z)$ et $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Si Y est un espace de Hilbert séparable alors $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(B)$ si et seulement si pour un certain $c > 0$,*

$$\|A^* x\| \leq c\|B^* x\|, \quad x \in Z^*.$$

1.1.2 Quelques propriétés algébriques

Soit $A \in \mathcal{C}(X)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit
si $n \geq 1$

$$\mathcal{D}(A^n) = \{x \in \mathcal{D}(A) : \ A^k x \in \mathcal{D}(A), \ k = 1, .., n-1\},$$

$$\mathcal{N}(A^n) = \{x \in \mathcal{D}(A^n) : \ A^n x = 0\}$$

et

$$\mathcal{R}(A^n) = \{A^n x : \ x \in \mathcal{D}(A^n)\}.$$

Si $n = 0$

$$A^0 = I_X, \ \ \mathcal{D}(A^0) = X, \ \ \mathcal{N}(A^0) = \{0\}.$$

En général, on a $\mathcal{D}(A^n) \subseteq \mathcal{D}(A^{n-1})$.

Le noyau et l'image des itérations de l'opérateur A sont deux chaînes respectivement croissantes et décroissantes

$$\mathcal{N}(A^0) = \{0\} \subseteq \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^2) \subseteq \cdots$$

et

$$\mathcal{R}(A^0) = Y \supseteq \mathcal{R}(A) \supseteq \mathcal{R}(A^2) \supseteq \cdots$$

En général, toutes ces inclusions sont strictes.

Définition 1.5 *Soit $A \in Lin(X)$.*

- *L'ascent de A est le plus petit nombre entier positif $m = a(A)$ tel que*

$$\mathcal{N}(A^m) = \mathcal{N}(A^{m+1}),$$

si un tel entier n'existe pas, on pose $a(A) = \infty$;

- *La descente de A est le plus petit nombre entier positif $p = d(A)$ tel que*

$$\mathcal{R}(A^p) = \mathcal{R}(A^{p+1}),$$

si un tel entier n'existe pas, on pose $d(A) = \infty$.

Clairement, $a(A) = 0$ si et seulement si A est injectif et $d(A) = 0$ si et seulement si A est surjectif.

Lemme 1.1 *[17] Soient $A \in Lin(X)$ et $m \in \mathbb{N}$ on a*

1. *$a(A) \leq m < \infty$ si et seulement si $\mathcal{R}(A^m) \cap \mathcal{N}(A^n) = \{0\}$ pour tout entier $n \geq 1$;*
2. *$d(A) \leq m < \infty$ si et seulement si $\mathcal{R}(A^n) \oplus \mathcal{N}(A^m) = X$ pour tout entier $n \geq 1$;*
3. *Si $a(A)$ et $d(A)$ sont finis alors $a(A) = d(A)$.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = A|_{\mathcal{R}(A^n)}$ la restriction de A sur $\mathcal{R}(A^n)$. Alors

$$\mathcal{N}(A_{n+1}) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^{n+1}) \subseteq \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^n) = \mathcal{N}(A_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

et

$$\mathcal{R}(A_n^m) = \mathcal{R}(A^{m+n}) = \mathcal{R}(A_m^n) \ \text{ pour tout } m, n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Lemme 1.2 *Soit $A \in Lin(X)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *$a(A) < \infty$;*

(ii) *Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k est injectif;*

(iii) *Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a(A_k) < \infty$.*

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Si $p = a(A) < \infty$, à l'aide du lemme 1.1, on a

$$\mathcal{N}(A_p) = \mathcal{R}(A^p) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}.$$

Inversement, supposons que $\mathcal{N}(A_k) = \{0\}$, pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Si $x \in \mathcal{N}(A^{k+1})$ alors $A(A^k x) = 0$, donc

$$A^k x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^k) = \mathcal{N}(A_k) = \{0\}.$$

Ainsi $x \in \mathcal{N}(A^k)$. Ceci montre que $\mathcal{N}(A^{k+1}) \subseteq \mathcal{N}(A^k)$, d'où $\mathcal{N}(A^{k+1}) = \mathcal{N}(A^k)$. En conséquence $a(A) \leq k$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est évidente. On montre l'implication inverse, supposons que $m = a(A_k) < \infty$. D'après le lemme 1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \{0\} &= \mathcal{N}(A_k) \cap \mathcal{R}(A_k^m) = (\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^k)) \cap \mathcal{R}(A_k^m) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A_k^m) \\ &= \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^{m+k}) = \mathcal{N}(A_{m+k}). \end{aligned}$$

■

De la même façon on démontre le résultat suivant pour la descente.

Lemme 1.3 *Soit $A \in Lin(X)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $d(A) < \infty$;

(ii) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k est surjectif;

(iii) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $d(A_k) < \infty$.

1.2 Opérateurs linéaires inversibles à droite ou à gauche

Dans cette section, on définit les opérateurs inversibles à droite ou à gauche et on donne quelques propriétés nécessaires de ces opérateurs.

Définition 1.6 *Soit $A \in Lin(X)$. A est inversible s'il existe un opérateur $B \in \mathcal{B}(X)$, appelé inverse de A, tel que :*

$$\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(A) \quad \textit{et} \quad AB = BA = I_X.$$

Définition 1.7 *Un opérateur linéaire $A \in Lin(X)$, est dit inversible à droite s'il existe un opérateur linéaire R tel que*

$$\mathcal{R}(R) \subset \mathcal{D}(A) \quad \textit{et} \quad AR = I_X.$$

Dans ce cas R est appelé un inverse à droite de A. On note $\mathbf{R}_A$ la famille de tous les opérateurs inverses à droite de A. Soit $R \in \mathbf{R}_A$, la famille $\mathbf{R}_A$ est caractérisée par

$$\mathbf{R}_A = \{R + (I_X - RA)S, \quad S \in Lin(X)\}.$$

La théorie des opérateurs inversibles à droite a été développée dans les travaux de Przeworska-Rolewicz [42], puis a été reprise par de nombreux mathématiciens (voir [36, 52]).

Exemple 1.3 *Soient* $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ *et* $X = C(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions continues sur* Ω. *Soit* $Ax(t, s) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, s)$ *de domaine* $\mathcal{D}(A) = \{x \in X(\Omega) : \frac{\partial x}{\partial t}(t, s) \in X(\Omega)\}$. *L'opérateur* A *est inversible à droite d'inverse à droite* R *défini par*

$$(Rx)(t, s) = \int_a^t x(\tau, s)d\tau.$$

Définition 1.8 *Un opérateur linéaire* $A \in Lin(X)$ *est dit inversible à gauche s'il existe un opérateur linéaire* $L \in Lin(X)$ *tel que*

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(L) \quad et \quad LA = I_X.$$

Dans ce cas L est appelé un inverse à gauche de A. On note $\mathbf{L}_A$ la famille des opérateurs inverses à gauche de A. Si $L \in \mathbf{L}_A$, la famille $\mathbf{L}_A$ est caractérisée par

$$\mathbf{L}_A = \{L + T(I_X - AL), \;\; T \in Lin(X)\}.$$

Théorème 1.6 *[36] Soit* $A, B \in Lin(X)$ *tels que* $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ *et* $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(A)$. *Si* B *est inversible à gauche alors*

$$\mathcal{N}(I_X - BA) = B(\mathcal{N}(I_X - AB)).$$

1.3 Spectre discret et spectre essentiel de Browder

La notion du spectre discret est d'une très grande importance en mathématique. On voit que le spectre de certains opérateurs physiques s'interprète à l'aide des états stationnaires du système étudié.

Définition 1.9 *Soit* $A \in \mathcal{C}(X)$. λ *est dans le spectre discret de* A *si* λ *est une valeur propre isolée de multiplicité finie de* A. *On note* $\sigma_d(A)$ *le spectre discret de* A.
Le spectre essentiel de Browder de A *est le complémentaire dans le spectre* $\sigma(A)$ *de* $\sigma_d(A)$, *[3]. Il est noté* $\sigma_{eB}(A)$.

Remarque 1.2 *Soit* $\lambda_0 \in \sigma(A)$, *on dit que* λ_0 *est un point isolé de* $\sigma(A)$ *s'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \; |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\} = \{\lambda_0\}$.

On désigne par $\rho_B(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{eB}(A)$ l'ensemble résolvant de Browder de A, ceci est équivalent à écrire :

$$\rho_B(A) = \rho(A) \cup \sigma_d(A).$$

$\rho_B(A)$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel la résolvante est méromorphe de type fini.
Si $\lambda \in \sigma_{eB}(A)$, alors λ peut être caractérisé par l'une des conditions suivantes :

1. $\mathcal{R}(A - \lambda I_X)$ est non fermé ;
2. λ est la limite du spectre de A ;
3. $\bigcup\limits_{k>0} \mathcal{N}((A - \lambda I_X)^k)$ est de dimension finie.

Théorème 1.7 *Soient $A \in \mathcal{C}(X)$ et $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $\lambda_0 \in \sigma_d(A)$;

2. λ_0 est un pôle de rang fini de la résolvante $(A - \lambda_0 I_X)^{-1}$;

3. $\dim(\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_X)) = codim(\mathcal{R}(A - \lambda_0 I_X)) < \infty$ et $a(A - \lambda_0 I_X) < \infty$.

L'équivalence de (1) et (2) est montrée par F. E. Browder dans le lemme 17 de [3]. Depuis, Kaashoek [21], Taylor [51] et Lay [33] ont montré l'équivalence de (1), (2) et (3) sans exiger que l'opérateur A a un domaine dense.

Exemple 1.4 *Soient $X = L^2(\mathbb{R}^3)$ et $A = -\Delta + V(x)$ l'opérateur de Schrödinger sur X de domaine $H^2(\mathbb{R}^3)$. Lorsque le potentiel $V(x)$ est réel et $V(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sigma_{eB}(A) = [0, +\infty[$, ([30, 12]).*

1.4 Projection de Riesz

Soit $A \in \mathcal{C}(X)$. Si λ_0 est un point isolé dans $\sigma(A)$. Notons

$$\Gamma_{\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - \lambda_0| = \varepsilon\}$$

le cercle orienté dans le sens positif. On définit le projecteur de Riesz de A associé à λ_0 sur Γ_{λ_0} par

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_0}} (A - \lambda I_X)^{-1} d\lambda. \tag{1.7}$$

On a alors les propriétés immédiates suivantes :

Proposition 1.1 *[22] Soient $A \in \mathcal{C}(X)$, λ_0 et μ_0 des points isolés dans $\sigma(A)$. Alors*

(i) $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_X) \subset \mathcal{R}(P_{\lambda_0})$;

(ii) $X = \mathcal{R}(P_{\lambda_0}) \oplus \mathcal{N}(P_{\lambda_0})$;

(iii) $P_{\lambda_0} P_{\mu_0} = P_{\mu_0} P_{\lambda_0} = 0$, et $P_{\{\lambda_0, \mu_0\}} = P_{\lambda_0} + P_{\mu_0}$ si $\lambda_0 \neq \mu_0$;

(iv) Si X est un espace de Hilbert et A est un opérateur auto-adjoint, alors P_{λ_0} est une projection orthogonale sur $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_X)$.

1.5 Inverse de Drazin des opérateurs linéaires fermés

Donc cette section, on introduit l'inverse de Drazin A^D d'un opérateur fermé A sur un espace de Banach X lorsque 0 est un pôle d'ordre fini de la résolvante de A ([11], [37]). On exprime les conditions nécessaires pour que l'opérateur A admette un inverse de Drazin et on donne aussi quelques propriétés spectrales de A^D.

Théorème 1.8 *[27] Soit $A \in \mathcal{C}(X)$. Le point 0 est un pôle de $\rho(A)$ d'ordre m si et seulement si il existe une projection non nulle P dans X telle que :*
(i) $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{D}(A)$;
(ii) $PAx = APx$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$;
(iii) AP est nilpotent d'ordre m;
(iv) $A + \xi P$ est inversible pour tout $\xi \neq 0$.
L'opérateur P satisfaisant (i) à (iv) est dit une projection spectrale de A en 0.

Définition 1.10 *Un opérateur $A \in \mathcal{C}(X)$ est dit inversible au sens de Drazin ou bien Drazin inversible s'il existe un opérateur $D \in \mathcal{B}(X)$ tel que $\mathcal{R}(D) \subset \mathcal{D}(A)$, $\mathcal{R}(I_X - AD) \subset \mathcal{D}(A)$ et*
- *$AD = DA$;*
- *$DAD = D$;*
- *$A^{m+1}D = A^m$, pour un certain entier positif m.*

L'opérateur D est appelé l'inverse de Drazin de l'opérateur A et il est noté A^D. L'entier m dans la définition précédente est appelé l'indice de Drazin de A, $m = i(A)$.
En conséquence, d'après les lemmes 1.2 et 1.3, A^D existe si et seulement si $m = a(A) = d(A) < \infty$.

Proposition 1.2 *Soit $A \in \mathcal{C}(X)$ Drazin inversible alors*

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(A^D) \oplus \mathcal{N}(AA^D).$$

On donne maintenant certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que $A \in \mathcal{C}(X)$ possède un inverse de Drazin.

Théorème 1.9 *Soit $A \in \mathcal{C}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) A est inversible au sens de Drazin ;
(ii) 0 est un pôle d'ordre fini de la résolvante de A ;
(iii) $A = A_1 \oplus A_2$, où A_1 est un opérateur fermé inversible et A_2 est borné nilpotent.

Preuve. On suppose que 0 est un pôle de la résolvante de A d'ordre $m < \infty$. Alors la projection spectrale P de A en 0 satisfait les conditions (i) à (iv) du théorème 1.8 avec $\xi = 1$. Posons $B = (A+P)^{-1}(I_X - P)$. Alors $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(A)$, $AB = (A+P)(I_X - P)(A+P)^{-1} = I_X - PBA$ et $ABA = B$. De plus, $A^m(I_X - AB) = A^m P = 0$. En conséquence, les conditions de la définition 1.10 sont vérifiées.
Inversement, supposons que B est un inverse de Drazin de A et $P = I_X - AB$. Alors, en vertu de la définition 1.10 on a $P^2 = P$, $AP = PA$ et AP est nilpotent.
D'autre part, $(A+P)(B+P) = (B+P)(A+P) = I_X + AP$. D'où $(A+P)$ est inversible. Ainsi l'opérateur P satisfait les conditions de théorème 1.8 et alors 0 est un pôle de la résolvante de A. Ceci prouve l'équivalence de (i) et (ii).
Pour l'équivalence de (ii) et (iii) voir le théorème V.9.2 de [50]. ■
D'après la démonstration précédente, on obtient la formule explicite de l'inverse de Drazin A^D et son unicité

$$A^D = (A + \xi P)^{-1}(I_X - P), \quad \text{pour tout } \ \xi \neq 0. \tag{1.8}$$

Si $A = A_1 \oplus A_2$ est la décomposition de l'opérateur $A \in \mathcal{C}(X)$ Drazin inversible démontrée dans le théorème précédent, alors

$$A^D = A_1^{-1} \oplus 0.$$

En effet, en utilisant (1.8) avec $\xi = 1$, on a

$$A^D = (A+P)^{-1}(I_X - P) = (A_1^{-1} \oplus (A_2 + I_X)^{-1})(I_X \oplus 0) = A_1^{-1} \oplus 0.$$

On a aussi la décomposition de l'espace $X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$, où $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(A^m)$ et $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(A^m)$ avec $m = a(A) = d(A) < \infty$.

Exemple 1.5 *Soit $X = l^1 \oplus l^1$. S est l'opérateur shift à droite défini par $S(\xi_1, \xi_2, ...) = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$ dans l^1 est injectif. Soient T l'inverse algébrique de la restriction de S à son image $\mathcal{R}(S)$ et $A = T \oplus 0$. Alors A est un opérateur linéaire fermé dans X de domaine $\mathcal{D}(A) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^1 : \ \xi_1 = 0\} \oplus l^1$. On observe que*

$$\mathcal{N}(A) = \{0\} \oplus l^1, \quad \mathcal{R}(A) = l^1 \oplus \{0\}$$

et $X = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$.
Alors A admet un inverse de Drazin A^D. Pour calculer A^D, on définit la projection spectrale P par $P = 0 \oplus I$. Ainsi

$$A^D = (A+P)^{-1}(I_X - P)(I_{l^1} \oplus 0)(T \oplus I_{l^1})^{-1} = (I_{l^1} \oplus 0)(S \oplus I_{l^1}) = S \oplus 0 \in \mathcal{B}(X).$$

1.6 Inverse de Drazin à droite et inverse de Drazin à gauche d'opérateurs linéaires fermés

En s'appuyant sur les résultats du théorème 1.9, on peut affaiblir la définition d'un opérateur Drazin inversible, en remplaçant l'inversibilité par l'inversibilité à droite ou à gauche. On a ainsi la définition suivante.

Définition 1.11 *Soit $A \in \mathcal{C}(X)$, on dit que A est inversible au sens de Drazin à droite (resp. à gauche) ou admet un inverse de Drazin à droite (resp. à gauche) si*

$$A = A_1 \oplus A_2$$

tel que A_1 est fermé inversible à droite (resp. à gauche) et A_2 est borné nilpotent.

Comme conséquence de cette définition et en vertu des lemmes 1.2 et 1.3, on a les résultats suivants :

Proposition 1.3 *Soit $A \in \mathcal{C}(X)$.*
(i) Si $a(A) < \infty$ et $\mathcal{R}(A^{a(A)+1})$ est fermé alors l'opérateur A est Drazin inversible à gauche ;
(ii) Si $d(A) < \infty$ et $\mathcal{R}(A^{d(A)})$ est fermé alors l'opérateur A est Drazin inversible à droite.

Exemple 1.6 *Soit B l'opérateur shift à gauche défini sur l^2 par $Bx = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ avec $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$. B est surjectif, alors $d(B) = 0$. Soit T défini sur $l^2 \oplus l^2$ par*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $S = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & a_n & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

où $a_i > 0$ et $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$. On a $T^2 = 0$, alors l'opérateur T est nilpotent. D'où l'opérateur $A = B \oplus T$ est inversible au sens de Drazin à droite sur $l^2 \oplus l^2 \oplus l^2$.

Exemple 1.7 Soit $D = C \oplus T$ un opérateur sur $l^2 \oplus l^2 \oplus l^2$ avec T est défini dans l'exemple précédent et C est défini par $C(x) = y$, où $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ sont reliés par

$$y_n = \begin{cases} x_0 & \text{si} \quad n = 0, 1 \\ x_{n-1} & \text{si} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

C est injectif, alors $a(C) = 0$. Ainsi D est inversible au sens de Drazin à gauche sur $l^2 \oplus l^2 \oplus l^2$.

1.7 Opérateurs matriciels triangulaires supérieurs

Dans cette section, on introduit les opérateurs matriciels triangulaires supérieurs 2×2 et on donne quelques propriétés spectrales de ces opérateurs.
On considère l'opérateur M_C défini sur $X \oplus Y$ par :

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A \in Lin(X)$, $B \in Lin(Y)$ et $C \in Lin(Y, X)$.
En particulier, M_C est de domaine $\mathcal{D}(M_C) = \mathcal{D}(A) \times (\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(C))$.
Les résultats suivants donnent des conditions nécessaires pour l'inversibilité à droite (resp. à gauche) de M_C.

Théorème 1.10 *Si $A \in Lin(X)$ et $B \in Lin(Y)$ sont inversibles à droite (resp. à gauche), alors M_C est inversible à droite (resp. à gauche) pour tout $C \in Lin(Y, X)$.*

Preuve. Si D_A et D_B sont des inverses à droite de A et B respectivement, alors

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_A & -D_A C D_B \\ 0 & D_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix}.$$

Si G_A et G_B sont des inverses à gauche de A et B respectivement, alors

$$\begin{pmatrix} G_A & -GACG_B \\ 0 & G_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix}.$$

■

Maintenant, on introduit quelques résultats spectrales des opérateurs matriciels du type

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A, D, B et C sont des opérateurs linéaires sur X.

Définition 1.12 *Les fonctions analytiques $S_1 : \rho(D) \to Lin(X)$ et $S_2 : \rho(A) \to Lin(X)$,*

$$S_1(\lambda) := A - \lambda I_X - B(D - \lambda I_X)^{-1} C, \quad \lambda \in \rho(D),$$

$$S_2(\lambda) := D - \lambda I_X - C(A - \lambda I_X)^{-1} B, \quad \lambda \in \rho(A)$$

sont appelées les compléments de Schur de M.

Théorème 1.11 *[53]*

1. *Si A est fermé, $\rho(A) \neq \emptyset$ et $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C)$. Alors pour $\lambda \in \rho(A)$,*

$$M - \lambda I_{X \oplus X} = \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ C(A - \lambda I_X)^{-1} & I_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda I_X & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_X & (A - \lambda I_X)^{-1} B \\ 0 & I_X \end{pmatrix};$$

2. *Si D est fermé, $\rho(D) \neq \emptyset$, et $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{D}(B)$. Alors pour $\lambda \in \rho(D)$,*

$$M - \lambda I_{X \oplus X} = \begin{pmatrix} I_X & B(D - \lambda I_X)^{-1} \\ 0 & I_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & D - \lambda I_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ (D - \lambda I_X)^{-1} C & I_X \end{pmatrix}$$

Ainsi $\sigma(M) \setminus \sigma(D) = \sigma(S_1)$ et $\sigma(M) \setminus \sigma(A) = \sigma(S_2)$.

Chapitre 2

Problèmes aux bords abstraits

Dans ce chapitre, on résout des problèmes aux bords généraux abstraits du type :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} Dx = \lambda Ax + f \\ \Gamma x = \varphi \end{cases}$$

où A est un opérateur non borné et D est un opérateur linéaire inversible à droite (resp. à gauche) dans un espace de Banach X, Γ est un opérateur au bord, f et φ sont données et $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre spectral. On montre l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P})$ et on exprime la formule explicite de la solution dans le cas où λ est régulier ou bien singulier. Les résultats obtenus sont utilisés pour résoudre des systèmes linéaires du contrôle.

2.1 Opérateur au bord correspondant à un opérateur inversible à droite (resp. à gauche)

E est un espace de Banach complexe et I_E est l'opérateur identité sur E. Dans cette section, on construit l'opérateur au bord associé à un opérateur inversible à droite (resp. à gauche).
Le résultat suivant, exprime la décomposition du domaine des opérateurs inversibles à droite (resp. à gauche) dans un espace de Banach.

Proposition 2.1 *(i) Si D est un opérateur inversible à droite alors pour tout $R \in \boldsymbol{R}_D$*

$$\mathcal{D}(D) = \mathcal{R}(R) \oplus \mathcal{N}(D);$$

(ii) Si D est un opérateur inversible à gauche alors pour tout $L \in \boldsymbol{L}_D$

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{R}(D) \oplus \mathcal{N}(L).$$

Preuve. (i) Soit D un opérateur inversible à droite et R un inverse à droite de D. On a par définition $\mathcal{N}(D) \subset \mathcal{D}(D)$ et $\mathcal{R}(R) \subset \mathcal{D}(D)$.

D'autre part, soit $x \in \mathcal{R}(R) \cap \mathcal{N}(D)$ alors

$$\begin{cases} Dx = 0, & \text{et} \\ \exists y \in X & \text{tel que} \quad x = Ry. \end{cases}$$

D'où $DRy = 0$ et $x = 0$.
Inversement, soit $x \in \mathcal{D}(D)$. On pose $y = x - RDx$ et $z = RDx$. Alors $z \in \mathcal{R}(R)$ et

$$Dy = Dx - DRDx = 0.$$

D'où $y \in \mathcal{N}(D)$ et $x = y + z$.
De la même manière on montre la deuxième propriété (ii). ■

Définition 2.1 *[23]* $\Gamma : X \longrightarrow E$ *est dit un opérateur au bord correspondant à un opérateur inversible à droite* $D \in Lin(X)$ *d'inverse à droite* R *si*

- $\mathcal{N}(\Gamma) = \mathcal{R}(R)$ *;*
- *Il existe* $\Pi : E \longrightarrow X$ *linéaire tel que* $\mathcal{R}(\Pi) = \mathcal{N}(D)$ *et* $\Gamma\Pi = I_E$.

E est appelé l'espace des traces ou des valeurs au bord. L'ensemble des opérateurs aux bords de D sera désigné par $\mathcal{I}_D$. Si $\Gamma \in \mathcal{I}_D$, et en vertu de la proposition 2.1, on a

$$\mathcal{D}(D) = \mathcal{R}(R) \oplus \mathcal{R}(\Pi). \tag{2.1}$$

Le théorème suivant assure l'unicité de l'opérateur Π pour un inverse à droite de l'opérateur D.

Théorème 2.1 *Soit* $D \in Lin(X)$ *un opérateur inversible à droite.* $\Gamma : X \to E$ *est un opérateur au bord de* D *correspondant à* $R \in \boldsymbol{R}_D$ *si et seulement si il existe un unique opérateur* $\Pi : E \to X$ *tel que :*

$$\Pi\Gamma x = x - RDx, \quad x \in \mathcal{D}(D). \tag{2.2}$$

Preuve. Soit $\Gamma : X \longrightarrow E$ un opérateur au bord de l'opérateur D correspondant à $R \in \mathbf{R}_D$, alors il existe un opérateur $\Pi : E \longrightarrow X$ vérifiant les conditions de la définition 2.1. Soit $x \in \mathcal{D}(D)$, il est facile de voir que $x - RDx \in \mathcal{N}(D)$, donc $x - RDx \in \mathcal{R}(\Pi)$, alors il existe $\varphi \in E$ tel que $x - RDx = \Pi\varphi$. De plus on a $\Gamma R = 0$ et $\Gamma\Pi = I_E$, alors $\Gamma(x - RDx) = \Gamma\Pi\varphi$ et $\varphi = \Gamma x$, ce qui implique (2.2).
Maintenant, on montre l'unicité de Π. Soient Π_1 et Π_2 deux opérateurs vérifiant les conditions de Γ. D'après (2.2) on a :

$$\Pi_1\Gamma x = \Pi_2\Gamma x, \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(D).$$

D'où

$$\Pi_1\varphi = \Pi_2\varphi \quad \text{pour tout } \varphi = \Gamma x \in E.$$

Ceci implique que $\Pi_1 = \Pi_2$.

Inversement, on suppose que les opérateurs Γ et Π vérifient l'identité (2.2). Alors $D\Pi\Gamma x = 0$, pour tout $x \in \mathcal{D}(D)$, donc $D\Pi = 0$ dans E. De plus,

$$\Pi\Gamma\Pi\Gamma x = \Pi\Gamma x - RD\Pi\Gamma x = \Pi\Gamma x.$$

Ainsi $\Gamma\Pi\Gamma\Pi\Gamma x = \Gamma\Pi\Gamma x$, donc $\Gamma\Pi\varphi = \varphi$, avec $\varphi = \Gamma\Pi\Gamma x$ pour tout $\varphi \in E$. On obtient $\Gamma RDx = \Gamma x - \Gamma\Pi\Gamma x = 0$. D'où $\Gamma R = 0$ car D est surjectif. Ceci prouve que Γ est un opérateur au bord de D correspondant à R dans le sens de la définition 2.1. ■

Dans [43] Przeworska-Rolewicz introduit la classe des opérateurs initiaux. Rappelons que $F : X \to X$ est dit un opérateur initial de D correspondant à $R \in \mathbf{R}_D$ si $F^2 = F$, $FX = \mathcal{N}(D)$ et $FR = 0$ sur $\mathcal{D}(R)$. Notons que si Γ et Π sont les opérateurs de définition 2.1 et si on pose $F = \Pi\Gamma$, alors F est un opérateur initial de D. Ce qui montre que notre définition d'opérateur au bord généralise la notion d'opérateur initial.

De la même façon on définit l'ensemble des opérateurs aux bords pour un opérateur inversible à gauche comme suit :

Définition 2.2 $\Lambda : X \longrightarrow E$ *est dit un opérateur au bord de l'opérateur inversible à gauche* $D \in Lin(X)$ *correspondant à un inverse à gauche* L *de* D*, si*

- $\mathcal{N}(\Lambda) = \mathcal{R}(D)$ *;*
- *Il existe un opérateur* $\Theta : E \longrightarrow X$ *tel que* $\mathcal{R}(\Theta) = \mathcal{N}(L)$ *et* $\Lambda\Theta = I_E$.

L'ensemble des opérateurs aux bords de D sera désigné par $\mathcal{K}_D$. Si $\Lambda \in \mathcal{K}_D$, on a

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{R}(D) \oplus \mathcal{R}(\Theta). \tag{2.3}$$

Théorème 2.2 *Soit* $D \in Lin(X)$ *un opérateur inversible à gauche.*
$\Lambda : X \to E$ *est un opérateur au bord de* D *correspondant à* $L \in \boldsymbol{L}_D$ *si et seulement si il existe un unique opérateur* $\Theta : E \to X$ *tel que :*

$$\Theta\Lambda x = x - DLx, \quad x \in \mathcal{D}(D).$$

La preuve du théorème 2.2 est similaire à celle du théorème 2.1.

Notons que toutes les définitions et les résultats de cette section sont également valables dans le cadre algébrique, en supposant que X et E sont des espaces vectoriels.

2.2 Problèmes aux bords abstraits réguliers

On suppose ici que l'opérateur D est inversible à droite d'inverse à droite R et $\mathcal{N}(D) \neq \{0\}$. Soient Γ un opérateur au bord de D correspondant à R et A un autre opérateur linéaire sur X tel que $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{D}(A)$.
On considère le problème spectral au bord pour la paire ordonnée (D, A) et l'inconnue $x \in \mathcal{D}(D)$ suivant :

$$\begin{cases} Dx = \lambda Ax + f \\ \Gamma x = \varphi \end{cases} \tag{2.4}$$

où $f \in X$, $\varphi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre spectral.

On suppose que $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(R)$, alors d'après le théorème 1.2, on obtient le résultat suivant :

Lemme 2.1 *Soit $R \in \boldsymbol{R}_D$. Si $\lambda^{-1} \in \rho(RA)$ alors*

$$\mathcal{N}(D - \lambda A) = \mathcal{R}((I_X - \lambda RA)^{-1}\Pi). \tag{2.5}$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(D)$ alors, d'après la décomposition (2.1) il existe $f \in X$ et $\varphi \in E$ tels que $x = Rf + \Pi\varphi$. D'où

$$\begin{aligned} (D - \lambda A)x &= (D - \lambda A)(Rf + \Pi\varphi) \\ &= f - \lambda ARf - \lambda A\Pi\varphi \\ &= (I_X - \lambda AR)f - \lambda A\Pi\varphi. \end{aligned}$$

Donc pour $\lambda^{-1} \in \rho(RA)$ et $x \in \mathcal{N}(D-\lambda A)$, on obtient $f = \lambda(I_X-\lambda AR)^{-1}A\Pi\varphi$. Ainsi

$$\begin{aligned} x &= \lambda R(I_X - \lambda AR)^{-1}A\Pi\varphi + \Pi\varphi \\ &= [\lambda R(I_X - \lambda AR)^{-1}A + I_X]\Pi\varphi \\ &= (I_X - \lambda RA)^{-1}\Pi\varphi. \end{aligned}$$

Ceci implique que $x \in \mathcal{R}((I_X - \lambda RA)^{-1}\Pi)$.
Inversement. On pose $z = (I_X - \lambda RA)^{-1}\Pi\varphi$, pour un certain $\varphi \in E$. En

utilisant l'équation (1.1) et le théorème 1.2, on a

$$\begin{aligned}(D-\lambda A)z &= (D-\lambda A)(I_X-\lambda RA)^{-1}\Pi\varphi\\ &= (D-\lambda A)[I_X+\lambda R(I_X-\lambda AR)^{-1}A]\Pi\varphi\\ &= [D-\lambda A+\lambda(I_X-\lambda AR)(I_X-\lambda AR)^{-1}A]\Pi\varphi\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc, (2.5) est vérifié. ■

Le résultat suivant, exprime l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.4) et fournit la formule explicite de la solution.

Théorème 2.3 *Soit* $R \in \boldsymbol{R}_D$. *Si* $\lambda^{-1} \in \rho(RA)$, *alors le problème* (2.4) *admet une solution unique pour tout* $f \in X$ *et* $\varphi \in E$, *la solution est donnée par*

$$x_\lambda^{f,\varphi} = (I_X-\lambda RA)^{-1}Rf + (I_X-\lambda RA)^{-1}\Pi\varphi. \tag{2.6}$$

Preuve. Soient $\lambda^{-1} \in \rho(RA)$, $f \in X$ et $\varphi \in E$. D'après le lemme 2.1 on a

$$\begin{aligned}(D-\lambda A)x_\lambda^{f,\varphi} &= (D-\lambda A)(I_X-\lambda RA)^{-1}Rf\\ &= (D-\lambda A)[I_X+\lambda R(I_X-\lambda AR)^{-1}A]Rf\\ &= f\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma x_\lambda^{f,\varphi} &= \Gamma(I_X-\lambda RA)^{-1}(Rf+\Pi\varphi)\\ &= \Gamma[I_X+\lambda R(I_X-\lambda AR)^{-1}A](Rf+\Pi\varphi)\\ &= \Gamma\Pi\varphi=\varphi.\end{aligned}$$

Pour établir l'unicité de la solution, on suppose que $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(D)$ sont deux solutions du problème (2.4), alors $x_0 = x_1 - x_2 = Rf_0 + \Pi\varphi_0$ où $f_0 \in X$, $\varphi_0 \in E$, $(D-\lambda A)x_0 = 0$ et $\Gamma x_0 = 0$, c'est à dire $\Gamma_0(Rf_0+\Pi\varphi_0) = 0$. Comme $\mathcal{N}(\Gamma) = \mathcal{R}(R)$ et $\Gamma\Pi = I_E$, on déduit que $\varphi_0 = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned}0 &= (D-\lambda A)x_0\\ &= (D-\lambda A)Rf_0\\ &= (I_X-\lambda AR)f_0.\end{aligned}$$

Puisque $\lambda^{-1} \in \rho(RA) = \rho(AR)$, alors $f_0 = 0$. ■

La version du lemme 2.1 et du théorème 2.3 dans le cas des opérateurs inversibles à gauche est exprimée comme suit :

Théorème 2.4 *Soit* L *un opérateur linéaire invesible à gauche dans* X *d'inverse à* D *et* $\lambda^{-1} \in \rho(LA)$, *alors*

$$\mathcal{N}(D-\lambda A) = \mathcal{R}((I_X-\lambda LA)^{-1}\Pi).$$

De plus, le problème (2.4) admet une solution unique pour tout $f \in X$ et $\varphi \in E$, la solution est donnée par

$$x_\lambda^{f,\varphi} = (I_X - \lambda LA)^{-1}Lf + (I_X - \lambda LA)^{-1}\Pi\varphi.$$

Remarque 2.1 *Le théorème 2.4 généralise le lemme 1.1 et le théorème 1.2 de [46] en prenant $A = I_X$.*

Exemple 2.1 *(Problème de Cauchy abstrait)*
Soit $\mathcal{X} = C([0,a], X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,a]$ à valeurs dans un espace de Banach X.
On considère le problème de Cauchy abstrait suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad 0 < t \leq a, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

où $A : D(A) \longrightarrow \mathcal{X}$ est le générateur du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{X}$ et $x_0 \in X$. On note $Dx(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ tel que $x \in \mathcal{D}(D) = \{x \in \mathcal{X} : \frac{dx}{dt}(t) \in \mathcal{X}\}$. $Rx(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ est bien un inverse à droite de D dans $\mathcal{X}$.
D'autre part, si on désigne par

$$Cx(t) = \int_0^t T(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

alors d'après le théorème 1.3, on a

$$(I_\mathcal{X} + CA)(I_\mathcal{X} - RA)x(t) = (I_\mathcal{X} - RA)(I_\mathcal{X} + CA)x(t) = x(t), \ \forall t \in [0,a].$$

D'où l'opérateur $(I_\mathcal{X} - RA)$ est inversible et son inverse est donné par

$$(I_\mathcal{X} - RA)^{-1}x(t) = x(t) + A\int_0^t T(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Soit $E = X$. On définit l'opérateur au bord Γ par $\Gamma x = x(0)$, pour $x \in \mathcal{X}$ et l'application Π par $(\Pi x_0)(t) = x_0$. Alors $\Gamma\Pi = I_X$, $\Gamma R = 0$ et
$\mathcal{R}(\Pi) = \mathcal{N}(A)$. Maintenant, on peut écrire le problème de Cauchy abstrait sous la forme suivante :

$$\begin{cases} Dx = Ax(t) + f(t) \\ \Gamma x = x_0 \end{cases}$$

Comme l'opérateur $(I_\mathcal{X} - RA)$ est inversible, ce problème admet une solution unique donnée par :

$$x(t) = (I_\mathcal{X} - RA)^{-1}(Rf + \Pi x_0)(t) = \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau + T(t)x_0, \quad \text{pour tout } t \in [0,a].$$

Ce qui correspond exactement à la solution donnée par la théorie de Cauchy classique, voir [40].

Exemple 2.2 *(Problème de Darboux pour l'équation hyperbolique)*
On considère l'équation différentielle hyperbolique suivante :

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t \partial s} = a(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + b(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} + c(t,s)x(t,s) + y(t,s) \tag{2.8}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} x(t,s_1) = \varphi(t), & \text{pour tout } t \in I_t = [t_1,t_2], \\ x(t_1,s) = \psi(s), & \text{pour tout } s \in I_s = [s_1,s_2]. \end{cases} \tag{2.9}$$

où $a,b,c,y \in C(I_t \times I_s)$, $\varphi \in C(I_t)$ *et* $\psi \in C(I_s)$ *avec la condition de compatibilité homogène* $\varphi(t_1) = \psi(s_1) = 0$.
On pose

- $X = C^2(I_t \times I_s)$;
- $E = \{(f,g) \in C(I_t) \times C(I_s) : \ f(t_1) = g(s_1) = 0\}$;
- $Dx(t,s) = \frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t \partial s}$;
- $Rx(t,s) = \int_{t_1}^{t}\int_{s_1}^{s} x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$;
- $Ax(t,s) = a(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + b(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} + c(t,s)x(t,s)$;
- $\Gamma : X \longrightarrow E$, $\Gamma x(t,s) = (x(t,s_1), x(t_1,s))$;
- $\Pi : E \longrightarrow X$, $\Pi(f(t),g(s)) = f(t) + g(s)$.

Avec ces notations, le problème (2.8)-(2.9) *s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} Dx = Ax + y, \\ \Gamma x(t,s) = (\varphi(t), \psi(s)). \end{cases}$$

Comme l'opérateur $(I_X - RA)$ *est inversible, alors le problème* (2.8)-(2.9) *admet une solution unique :*

$$x(t,s) = (I_X - RA)^{-1}(Ry + \Pi(\varphi,\psi))(t,s) = (I_X - RA)^{-1}(Ry(t,s) + \varphi(t) + \psi(s)).$$

Pour les exemples sur les opérateurs inversibles à gauche voir [46, 47, 45, 48].

2.3 Problèmes aux bords abstraits singuliers

Soient $T \in \mathcal{C}(X)$ et $\lambda \in \rho_B(T)$ l'ensemble résolvant de Browder de T. La projection de Riesz P_λ correspondante à T est de rang fini. Le fait que $D(T)$

est $P_\lambda-$invariant, on peut définir l'opérateur

$$T_\lambda = (\lambda I_X - T)(I_X - P_\lambda) + P_\lambda$$

de domaine $D(T)$. Puisque $X = \mathcal{N}(P_\lambda) \oplus \mathcal{R}(P_\lambda)$, on pose alors

$$T_\lambda = (\lambda I_X - T) \mid_{\mathcal{N}(P_\lambda)} \oplus I_{\mathcal{R}(P_\lambda)}.$$

Ainsi $\sigma(T_\lambda) = \sigma((\lambda I_X - T)(I_X - P_\lambda)) = \sigma(\lambda I_X - T) \setminus \{0\}$. T_λ admet donc un inverse borné qu'on note par $R_B(\lambda, T)$, il est appelé l'opérateur résolvant de Browder de T en λ,

$$R_B(\lambda, T) = ((\lambda I_X - T) \mid_{\mathcal{N}(P_\lambda)})^{-1}(I_X - P_\lambda) + P_\lambda.$$

Il est clair que $R_B(\lambda, T) = (\lambda I_X - T)^{-1}$, pour $\lambda \in \rho(T)$ et $R_B(\lambda, T)$ peut être considéré comme une extension de la résolvante habituelle de $\rho(T)$ à $\rho_B(T)$. $R_B(\lambda, T)$ conserve de nombreuses propriétés importantes. Par exemple, comme $P_\lambda T_\lambda = P_\lambda$ dans $D(T)$ et $T_\lambda P_\lambda = P_\lambda$ dans X, il en résulte que $P_\lambda R_B(\lambda, T) = P_\lambda = R_B(\lambda, T)P_\lambda$.

Lemme 2.2 *Soit $T \in \mathcal{C}(X)$. Pour $\lambda, \mu \in \rho_B(T)$,*

$$R_B(\lambda, T) - R_B(\mu, T) = (\mu - \lambda)R_B(\lambda, T)R_B(\mu, T) + M_T(\lambda, \mu)$$

où $M_T(\lambda, \mu) = R_B(\lambda, T)[(\lambda I_X - I_X - T)P_\lambda - (\mu I_X - I_X - T)P_\mu]R_B(\mu, T)$ est un opérateur de rang fini avec $rang(M_T(\lambda, \mu)) = rang(P_\lambda) + rang(P_\mu)$. De plus, si $\lambda \neq \mu$, les résolvantes de Browder commutent et la fonction $M_T(\lambda, \mu)$ est antisymétrique, $M_T(\lambda, \mu) = -M_T(\mu, \lambda)$.

Preuve. On a $R_B(\lambda, T) - R_B(\mu, T) = R_B(\lambda, T)[T_\mu - T_\lambda]R_B(\mu, T)$. De plus,

$$T_\mu - T_\lambda = (\mu I_X - T)(I_X - P_\mu) + P_\mu - (\lambda I_X - T)(I_X - P_\lambda) - P_\lambda$$

$$= (\lambda I_X - I_X - T)P_\lambda - (\mu I_X - I_X - T)P_\mu + (\mu - \lambda)I_X.$$

Donc

$$R_B(\lambda, T) - R_B(\mu, T) = (\mu - \lambda)R_B(\lambda, T)R_B(\mu, T)$$

$$+R_B(\lambda, T)[(\lambda I_X - I_X - T)P_\lambda - (\mu I_X - I_X - T)P_\mu]R_B(\mu, T).$$

Maintenant, on montre que $rangM_T(\lambda, \mu) = rangP_\lambda + rangP_\mu$.
On commence d'abord par montrer $\mathcal{R}(P_\lambda + P_\mu) = \mathcal{R}(P_\lambda) + \mathcal{R}(P_\mu)$.
Soit $y \in \mathcal{R}(P_\lambda + P_\mu)$, alors il existe $x \in X$ tel que $y = (P_\lambda + P_\mu)x = P_\lambda x + P_\mu x = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \mathcal{R}(P_\lambda)$ et $y_2 \in \mathcal{R}(P_\mu)$.
Inversement, soit $y \in \mathcal{R}(P_\lambda) + \mathcal{R}(P_\mu)$ donc il existe $y_1 \in X$ et $y_2 \in X$ tels que $y = P_\lambda y_1 + P_\mu y_2$. Posons $h = y_1 + y_2 - (P_\mu y_1 + P_\lambda y_2)$ alors $(P_\lambda + P_\mu)h = y$.

D'où $y \in \mathcal{R}(P_\lambda + P_\mu)$.
On pose $S_T = (\lambda I_X - I_X - T)P_\lambda - (\mu I_X - I_X - T)P_\mu$. On remarque que $S_T(P_\lambda + P_\mu) = S_T$ pour $\lambda \neq \mu$ et on a $\mathcal{R}(P_\lambda + P_\mu) \subset \mathcal{D}(T) = \mathcal{R}(R_B(\mu, T))$ donc $\mathcal{R}(S_T(P_\lambda + P_\mu)) \subset \mathcal{R}(S_T R_B(\mu, T))$, alors S_T et $M_T(\lambda, \mu)$ sont de même rang. Puisque P_λ et P_μ sont de rangs finis et $\mathcal{R}(S_T) \subset \mathcal{R}(P_\lambda + P_\mu)$, alors S est de rang fini, ainsi que $M_T(\lambda, \mu)$.
Maintenant, il suffit de montrer que $\mathcal{R}(S_T) = \mathcal{R}(P_\lambda) + \mathcal{R}(P_\mu)$.
On a $S_T|_{\mathcal{R}(P_\lambda)+\mathcal{R}(P_\mu)} = S_T \subset (\mathcal{R}(P_\lambda) + \mathcal{R}(P_\mu))$. Comme $\mathcal{R}(P_\lambda) + \mathcal{R}(P_\mu) = \mathcal{R}(P_\lambda + P_\mu)$, alors $\mathcal{R}(S_T) = \mathcal{R}(P_\lambda) + \mathcal{R}(P_\mu)$. ■
On suppose que dans le problème (2.4), $A = I_X - P_{\lambda^{-1}}$ où $P_{\lambda^{-1}}$ est le projecteur de Riesz associé à R et $\lambda^{-1} \in \rho_B(R)$ avec $R \in \mathbf{R}_D$. Alors le problème (2.4) devient

$$\begin{cases} (D - \lambda I_X + \lambda P_{\lambda^{-1}})x = f \\ \Gamma x = \varphi \end{cases} \tag{2.10}$$

où $f \in X$, $\varphi \in E$. Le même raisonnement utilisé dans la preuve du lemme 2.1 et du théorème 2.3, donne le résultat suivant :

Théorème 2.5 *Soit $R \in \boldsymbol{R}_D$. Si $\lambda^{-1} \in \rho_B(R)$, alors*

$$\mathcal{N}(D - \lambda I_X + \lambda P_{\lambda^{-1}}) = \mathcal{R}(R_B(\lambda^{-1}, R)\Pi)$$

et pour tout $f \in X$, et $\varphi \in E$

$$x_\lambda^{f,\varphi} = R_B(\lambda^{-1}, R)(Rf + \Pi\varphi).$$

est l'unique solution du problème (2.10).

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(D)$, alors $x = Rf + \Pi\varphi$, $f \in X$ et $\varphi \in E$.

$$\begin{aligned} (D - \lambda I_X + \lambda P_{\lambda^{-1}})(Rf + \Pi\varphi) &= (I_X - \lambda R + \lambda P_{\lambda^{-1}}R) - \lambda(I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi\varphi \\ &= (I_X - P_{\lambda^{-1}})f + P_{\lambda^{-1}}f - \lambda R(I_X - P_{\lambda^{-1}})f \\ &- \lambda R P_{\lambda^{-1}}f + \lambda P_{\lambda^{-1}}Rf - (I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi\varphi \\ &= [(I_X - \lambda R)(I_X - P_{\lambda^{-1}}) + P_{\lambda^{-1}}]f \\ &- \lambda(I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi\varphi. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathcal{N}(D - \lambda I_X + \lambda P_{\lambda^{-1}})$ et $\lambda^{-1} \in \rho_B(R)$, alors

$$f = \lambda(I_X - \lambda R)^{-1}(I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi\varphi.$$

Ainsi

$$x = \lambda R(I_X - \lambda R)^{-1}(I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi\varphi + \Pi\varphi = R_B(\lambda^{-1}, R)\Pi\varphi.$$

Inversement.

$$\begin{array}{rcl}(D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})R_B(\lambda^{-1},R)\Pi\varphi & = & (D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})[(I_X-\lambda R)^{-1}(I_X-P_{\lambda^{-1}})\\ & + & P_{\lambda^{-1}}]\Pi\varphi\\ & = & (D-\lambda I_X)(I_X-P_{\lambda^{-1}})\Pi\varphi+DP_{\lambda^{-1}}\Pi\varphi\\ & + & \lambda(D-\lambda I_X)R(I_X-\lambda R)^{-1}(I_X-P_{\lambda^{-1}})\Pi\varphi\\ & = & 0.\end{array}$$

D'où, $\mathcal{N}(D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})=\mathcal{R}(R_B(\lambda^{-1},R)\Pi)$.

On a d'une part,

$$\begin{array}{rcl}(D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})x_\lambda^{f,\varphi} & = & (D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})R_B(\lambda^{-1},R)Rf\\ & + & (D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})R_B(\lambda^{-1},R)\Pi\varphi\\ & = & (I_X-\lambda R+\lambda P_{\lambda^{-1}}R)[(I_X-\lambda R)^{-1}(I_X-P_{\lambda^{-1}})\\ & + & P_{\lambda^{-1}}]f=f\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\Gamma x_\lambda^{f,\varphi} & = & \Gamma R_B(\lambda^{-1},R)(Rf+\Pi\varphi)\\ & = & \Gamma RR_B(\lambda^{-1},R)f+\Gamma[[I_X+\lambda R(I_X-\lambda R)^{-1}](I_X-P_{\lambda^{-1}})+P_{\lambda^{-1}}]\Pi\varphi\\ & = & \Gamma(I_X-P_{\lambda^{-1}})\Pi\varphi+\Gamma P_{\lambda^{-1}}\\ & = & \varphi.\end{array}$$

D'autre part, si $x_1,x_2\in\mathcal{D}(D)$ sont deux solutions du problème (2.10), posons $x_0=x_1-x_2=Rf_0+\Pi\varphi_0$ pour $f_0\in X$ et $\varphi_0\in E$. D'où, $(D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})x_0=0$ et $\Gamma x_0=0$, c'est à dire $\Gamma(Rf_0+\Pi\varphi_0)=0$. Comme $\mathcal{N}(\Gamma)=\mathcal{R}(R)$ et $\Gamma\Pi=I_E$, on en déduit que $\varphi_0=0$. Or,

$$\begin{array}{rcl}0 & = & (D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})x_0\\ & = & (D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})Rf_0\\ & = & (I_X-\lambda R)(I_X-P_{\lambda^{-1}})f_0+(I_X-\lambda R)P_{\lambda^{-1}}f_0+\lambda P_{\lambda^{-1}}Rf_0\\ & = & [(I_X-\lambda R)(I_X-P_{\lambda^{-1}})+P_{\lambda^{-1}}]f_0.\end{array}$$

Puisque $\lambda^{-1}\in\rho_B(R)$, alors $f_0=0$. ■

Dans le cas où l'opérateur est inversible à gauche, on obtient un résultat similaire :

Théorème 2.6 *Si* $D\in\boldsymbol{L}_L$ *et* $\lambda^{-1}\in\rho_B(L)$, *alors*

$$\mathcal{N}(D-\lambda I_X+\lambda P_{\lambda^{-1}})=\mathcal{R}(R_B(\lambda^{-1},L)\Pi).$$

Pour tout $f \in X$ et $\varphi \in E$

$$x_\lambda^{f,\varphi} = R_B(\lambda^{-1}, L)(Lf + \Pi\varphi).$$

est l'unique solution du problème (2.10).

2.3.1 Conditions aux bords généralisées

Dans cette section, on désigne par Γ_0 l'opérateur au bord de l'opérateur D inversible à droite d'inverse $R \in \mathbf{R}_D$.
Soit Ξ un opérateur linéaire dans E. On introduit une application linéaire $\Gamma_1 : X \to E$ de domaine $\mathcal{D}(\Gamma_1) = \mathcal{R}(R) \oplus \Pi\mathcal{D}(\Xi) \subset \mathcal{D}(D)$, et d'image $\mathcal{R}(\Gamma_1) \subset E$, définie par

$$\Gamma_1 : Rf + \Pi\varphi \mapsto \Pi^* f + \Xi\varphi, \quad f \in X, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Xi).$$

Ainsi,

$$\Gamma_1 R = \Pi^*, \quad \Gamma_1 \Pi = \Xi.$$

Γ_1 est réalisé comme étant un second opérateur au bord complémentaire de Γ_0.
Soient β_0 et β_1 deux opérateurs linéaires dans l'espace E tels que $\mathcal{D}(\Xi) \subset \mathcal{D}(\beta_0)$ et $\beta_1 : E \to E$. On Considère le problème au bord abstrait pour l'inconnue $x \in \mathcal{D}(\Gamma_1) \subset \mathcal{D}(D)$ suivant

$$\begin{cases} (D - \lambda I_X + \lambda P_{\lambda^{-1}})x = f \\ (\beta_0\Gamma_0 + \beta_1\Gamma_1)x = \varphi \end{cases} \tag{2.11}$$

où $f \in X$, $\varphi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre spectral.

Théorème 2.7 *Soit $R \in \boldsymbol{R}_D$. Si $\lambda^{-1} \in \rho_B(R)$ est tel que l'équation*

$$[\beta_0 + \beta_1[\Xi + \lambda\Pi^*(I_X - \lambda R)^{-1}(I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi]]\Psi_\lambda^{f,\varphi} = \varphi - \beta_1\Pi^* R_B(\lambda^{-1}, R)f \tag{2.12}$$

admet une solution unique $\Psi_\lambda^{f,\varphi} = \Gamma_0 x_\lambda^{f,\varphi} \in E$, alors

$$x_\lambda^{f,\varphi} = R_B(\lambda^{-1}, R)[Rf + \Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi}] \in \mathcal{D}(D)$$

est la solution unique du problème spectral au bord (2.11).

Preuve. Soient $\Psi_\lambda^{f,\varphi} \in E$ la solution de l'équation (2.12) pour $\lambda^{-1} \in \rho_B(R)$, $f \in X$ et $\varphi \in E$. D'après le théorème 2.5 on a

$$\begin{aligned} (D - \lambda I_X + \lambda P_{\lambda^{-1}})x_\lambda^{f,\varphi} &= (D - \lambda I_X)RR_B(\lambda^{-1}, R)f + \lambda P_{\lambda^{-1}}RR_B(\lambda^{-1}, R)f \\ &+ (D - \lambda I_X + \lambda P_{\lambda^{-1}})R_B(\lambda^{-1}, R)\Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi} \\ &= (I_X - P_{\lambda^{-1}})f + (I_X - \lambda R)P_{\lambda^{-1}}f + P_{\lambda^{-1}}Rf \\ &= f. \end{aligned}$$

On a $\Psi_\lambda^{f,\varphi} \in \mathcal{D}(\Xi)$ donc $x_\lambda^{f,\varphi} \in \mathcal{D}(\Gamma_1)$, et d'après les propriétés de Γ_0 et Γ_1 on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 x_\lambda^{f,\varphi} &= \Gamma_0 R_B(\lambda^{-1}, R)Rf + \Gamma_0 R_B(\lambda^{-1}, R)\Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi} \\
&= \Gamma_0\Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi} + \lambda R(I_X - \lambda R)^{-1}(I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi} \\
&= \Psi_\lambda^{f,\varphi}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 x_\lambda^{f,\varphi} &= \Gamma_1 R R_B(\lambda^{-1}, R)f + \Gamma_1 R_B(\lambda^{-1}, R)\Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi} \\
&= \Pi^* R_B(\lambda^{-1}, R)f + \Gamma_1\Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi} + \lambda\Gamma_1 R(I_X - \lambda R)^{-1}(I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi} \\
&= \Pi^* R_B(\lambda^{-1}, R)f + \Xi\Psi_\lambda^{f,\varphi} + \lambda\Pi^*(I_X - \lambda R)^{-1}(I_X - P_{\lambda^{-1}})\Pi\Psi_\lambda^{f,\varphi}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
(\beta_0\Gamma_0 + \beta_1\Gamma_1)x_\lambda^{f,\varphi} &= [\beta_0 + \beta_1[\Xi + \lambda\Pi^*(I - \lambda R)^{-1}(I - P_{\lambda^{-1}})\Pi]]\Psi_\lambda^{f,\varphi} \\
&+ \beta_1\Pi^* R_B(\lambda^{-1}, R)f \\
&= \varphi - \beta_1\Pi^* R_B(\lambda^{-1}, R)f + \beta_1\Pi^* R_B(\lambda^{-1}, R)f \\
&= \varphi.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2 *Si D est un opérateur aux dérivées partielles linéaire, le problème* (2.11) *peut être interprété comme un problème au bord mixte faisant à la fois intervenir une condition de Dirichlet et une condition de Neumann par* Γ_0 *et* Γ_1.

2.4 Contrôlabilité approchée des systèmes linéaires aux bords

Soient D, A et Γ les opérateurs donnés dans le problème (2.4) et R un inverse à droite de D. Soit U un autre espace de Banach et B un opérateur borné de U dans X. On considère le système linéaire de contrôle abstrait suivant :

$$\begin{cases} Dx = Ax + Bu, \\ \Gamma x = \varphi_0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Les espaces X et U sont appelés respectivement l'espace des états et l'espace des contrôles. L'élément $\varphi_0 \in E$ est l'état initial au bord.
D'après le théorème 2.3, si l'opérateur $(I_X - RA)$ est inversible, alors quelque

soit la paire fixée $(\varphi_0, u) \in E \times U$, le système linéaire (2.13) admet une solution unique donnée par

$$x(\varphi_0, u) = \mathcal{E}_A^D(RBu + \Pi\varphi_0), \quad \text{où } \mathcal{E}_A^D = (I - RA)^{-1}. \tag{2.14}$$

$x(\varphi_0, u)$ est appelé en théorie de contrôle le signal de sortie correspondant à l'entrée u. On note pour φ_0 fixé dans E,

$$\Re(\varphi_0) = \bigcup_{u \in U} x(\varphi_0, u) \tag{2.15}$$

l'ensemble des solutions de (2.13) pour un état initial au bord φ_0. $\Re(\varphi_0)$ est appelé l'ensemble accessible à partir de l'état initial au bord φ_0 par des moyens de contrôle $u \in U$.

Définitions 2.1 *[36]*

1. *L'état $x \in X$ est appelé approximativement accessible à partir de l'état initial au bord $\varphi_0 \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un contrôle $u \in U$ tel que*

$$\|x - x(\varphi_0, u)\|_X < \epsilon;$$

2. *Le système linéaire* (2.13) *est dit approximativement accessible à partir de l'état initial au bord $\varphi_0 \in E$ si $\Re(\varphi_0)$ est dense dans X.*

Définitions 2.2 *Soit Γ_1 un opérateur linéaire borné de X dans E.*

(i) L'état $x_1 \in X$, tel que $\Gamma_1 x_1 = \varphi_1$, pour un certain $\varphi_1 \in E$, est dit Γ_1-accessible (resp. Γ_1-approximativement accessible) par l'état initial au bord $\varphi_0 \in E$, s'il existe un contrôle $u \in U$ tel que

$$\Gamma_1 x(\varphi_0, u) = \varphi_1, \quad (\textit{ resp. } \|\Gamma_1 x(\varphi_0, u) - \varphi_1\|_E < \epsilon \textit{ pour } \epsilon > 0).$$

L'état x_1 est dit l'état final du système ;

(ii) Le système linéaire (2.13) *est dit Γ_1-contrôlable (resp. Γ_1- approximativement contrôlable) si pour tout état initial au bord $\varphi_0 \in E$,*

$$\Gamma_1(\Re(\varphi_0)) = E, \quad (\textit{ resp. } \overline{\Gamma_1(\Re(\varphi_0))} = E);$$

(iii) Le système linéaire (2.13) *est dit Γ_1-contrôlable (resp. Γ_1- approximativement contrôlable) en zéro si*

$$0 \in \Gamma_1(\Re(\varphi_0)), \quad (\textit{ resp. } 0 \in \overline{\Gamma_1(\Re(\varphi_0))}),$$

pour tout état initial au bord $\varphi_0 \in E$.

Théorème 2.8 *Soient $R \in \boldsymbol{R}_D$ et Γ_1 un opérateur borné de X dans E. Le système linéaire* (2.13) *est Γ_1-contrôlable si et seulement si l'opérateur $\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D RB$ est surjectif.*

Preuve. Supposons que (2.13) est Γ_1-contrôlable, alors

$$\Gamma_1(\Re(\varphi_0)) = \Gamma_1\mathcal{E}_A^D(RBU + \Pi\varphi_0) = E, \text{ pour tout } \varphi_0 \in E.$$

Soit $\varphi_1 \in E$, il existe un contrôle $u \in U$ tel que

$$\Gamma_1\mathcal{E}_A^D(RBu + \Pi\varphi_0) = \varphi_1$$

et

$$\Gamma_1\mathcal{E}_A^D RBu = \varphi_1 - \Gamma_1\mathcal{E}_A^D\Pi\varphi_0.$$

Ce qui implique que $\Gamma_1\mathcal{E}_A^D RB$ est surjectif.
Inversement, pour tout $\varphi_1 \in E$ il existe un contrôle $u \in U$ tel que

$$\Gamma_1\mathcal{E}_A^D RBu = \varphi_1.$$

Cela signifie que le système (2.13) est Γ_1-accessible par l'état initial au bord $\varphi_0 \in E$, d'où $\Gamma_1(\Re(0)) = E$, par linéarité de l'ensemble, on obtient la Γ_1-contrôlabilité de (2.13). ■

Théorème 2.9 *Soient $R \in \boldsymbol{R}_D$ et Γ_1 un opérateur linéaire borné de X dans E. Alors le système linéaire* (2.13) *est Γ_1-approximativement accessible en zéro si et seulement si l'opérateur $B^*R^*(\mathcal{E}_A^D)^*\Gamma_1^*$ est injectif.*

Preuve. Supposons que le système (2.13) est Γ_1-approximativement accessible à l'état initial au bord zéro, on a

$$\overline{\Gamma_1(\Re(0))} = \overline{\Gamma_1\mathcal{E}_A^D RBU} = E.$$

Ceci est équivalent à l'injectivité de $B^*R^*(\mathcal{E}_A^D)^*\Gamma_1^*$. ■

Lemme 2.3 *Soient $R \in \boldsymbol{R}_D$ et Γ_1 un opérateur linéaire borné de X dans E. Si le système linéaire* (2.13) *est Γ_1-approximativement contrôlable en zéro et $\Gamma_1\mathcal{E}_A^D\Pi$ est surjectif, alors tout état final x_1 est Γ_1-approximativement accessible par l'état initial au bord zéro.*

Preuve. Soit $x_1 \in X$ tel que $x_1 = \Gamma_1\varphi_1$ pour $\varphi_1 \in E$. On a, $0 \in \overline{\Gamma_1(\Re(\varphi_0))}$, pour un état initial au bord $\varphi_0 \in E$. Donc, $\forall\epsilon > 0$, il existe un contrôle $u_0 \in U$ tel que

$$\left\|\Gamma_1\mathcal{E}_A^D(RBu_0 + \Pi\varphi_0)\right\|_E < \epsilon. \tag{2.16}$$

Comme $\Gamma_1\mathcal{E}_A^D\Pi$ est surjectif, ceci implique que, pour tout $\varphi_1 \in E$, il existe $\varphi_2 \in E$ tel que $\Gamma_1\mathcal{E}_A^D\Pi\varphi_2 = -\varphi_1$. Cette égalité et (2.16) impliquent que pour chaque $\varphi_1 \in E$ et $\epsilon > 0$, il existe un contrôle $u_1 \in U$ tel que

$$\left\|\Gamma_1\mathcal{E}_A^D RBu_1 - \varphi_1\right\|_E < \epsilon.$$

Ceci montre que chaque état final x_1 est Γ_1-approximativement accessible par l'état initial au bord en zéro. ■

Théorème 2.10 *Sous les mêmes hypothèses du lemme 2.3, le système linéaire* (2.13) *est* Γ_1*-approximativement contrôlable.*

Preuve. Selon les hypothèses du lemme 2.3, pour tout état initial au bord $\varphi_0 \in E$ et $\epsilon > 0$, il existe un contrôle $u_0 \in U$ tel que

$$\left\|\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D (RBu_0 + \Pi\varphi_0)\right\|_E < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.17}$$

Le lemme 2.3 assure aussi que pour tout $\varphi_1 \in E$ et $\epsilon > 0$, il existe un contrôle $u_1 \in U$ tel que

$$\left\|\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D RBu_1 - \varphi_1\right\|_E < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.18}$$

A partir de (2.17) et (2.18), il s'ensuit que pour tout $\varphi_0, \varphi_1 \in E$ et $\epsilon > 0$, il existe un contrôle $u = u_0 + u_1 \in U$ tel que

$$\begin{aligned}\left\|\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D (RBu + \Pi\varphi_0) - \varphi_1\right\|_E &\leq \left\|\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D (RBu_0 + \Pi\varphi_0)\right\|_E - \left\|\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D RBu_1 - \varphi_1\right\|_E \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\overline{\Gamma_1(\Re(\varphi_0))} = E$ puisque $\varphi_0, \varphi_1 \in E$ et $\epsilon > 0$ sont arbitraires. ■

Théorème 2.11 *Soit* U *un espace de Hilbert séparable. Soient* $R \in \boldsymbol{R}_D$ *et* Γ_1 *un opérateur linéaire borné défini de* X *dans* E*. Alors le système linéaire* (2.13) *est* Γ_1*-contrôlable en zéro si et seulement si il existe un nombre réel* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\left\|B^* R^* (\mathcal{E}_A^D)^* \Gamma_1^* \psi\right\| \geq \alpha \left\|(\Pi^* (\mathcal{E}_A^D)^* \Gamma_1^*)\psi\right\|, \quad \textit{pour tout } \psi \in E^*. \tag{2.19}$$

Preuve. Supposons que le système linéaire (2.13) est Γ_1-contrôlable, on a

$$0 \in \Gamma_1(\Re(\varphi_0)), \quad \forall \varphi_0 \in E.$$

Donc, il existe $u \in U$ tel que $\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D RBu = -\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D \Pi\varphi_0$. Cela implique que

$$\mathcal{R}(\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D \Pi) \subset \mathcal{R}(\Gamma_1 \mathcal{E}_A^D RB).$$

En vertu du théorème 1.5, on obtient (2.19). La réciproque est évidente. ■

Exemple 2.3 *Soient* $X = C(\Omega)$ *où* $\Omega = [0,a] \times [0,a]$, $a > 0$, $E = C([0,a])$ *et* $U = C(\mathbb{R})$*. On considère le système du contrôle suivant :*

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,s) = \lambda x(t,s) + u(t), \tag{2.20}$$

avec la condition initiale

$$x(0,s) = \varphi(s). \tag{2.21}$$

On pose $D = \frac{\partial}{\partial t}x(t,s)$ *et* $Rx(t,s) = \int_0^t x(\tau,s)d\tau$ *l'inverse à droite de* D.
$\mathcal{D}(D) = \{x \in X:\ x(.,s) \in C^1([0,a])$ *pour tout* s *fixé dans* $[0,a]\}$ *et* $\mathcal{D}(R) = X$.
L'opérateur au bord Γ *de* D *correspondant à* R *est défini par*

$$\Gamma x(t,s) = x(0,s) - \varphi(s), \quad \textit{pour tout } t,s \in [0,a]\,.$$

On peut définir l'opérateur Π *par* $\Pi f(s) = f(s) + \varphi(s)$, *pour tout* $f \in E$. *De plus, en notant* $A = \lambda I_X$, $B = I_X$ *et* $\varphi_0 = 0$, *alors le problème* (2.20)-(2.21) *peut être écrit sous la forme* (2.13).

Maintenant, si on désigne par

$$Cx(t,s) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}x(\tau,s)d\tau,$$

alors pour tout $t,s \in [0,a]$, *on a :*

$$(I_X + \lambda C)(I_X - \lambda R)x(t,s) = (I_X - \lambda R)(I_X + \lambda C)x(t,s) = x(t,s).$$

Cela signifie que l'opérateur $(I_X - \lambda R)$ *est inversible et son inverse est donné par*

$$\mathcal{E}_A^D x(t,s) = x(t,s) + \lambda\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}x(\tau,s)d\tau.$$

D'où, en utilisant la formule (2.14), *pour tout* $u \in U$, *la solution de* (2.20)-(2.21) *est donnée par*

$$x(t,s) = \mathcal{E}_A^D(RBu + \Pi\varphi_0)(t,s) = e^{\lambda t}\varphi(s) + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(\tau)d\tau.$$

Si Γ_1 *est un opérateur linéaire borné de* X *dans* E, *alors d'après les théorèmes 2.8 et 2.9, le système linéaire* (2.20)-(2.21) *est*

- Γ_1*-contrôlable si et seulement si l'opérateur* $\Gamma_1\mathcal{E}_A^D RB$ *est surjectif;*
- Γ_1*-approximativement accessible en zéro si et seulement si l'opérateur* $B^*R^*(\mathcal{E}_A^D)^*\Gamma_1^*$ *est injectif.*

Par exemple, soit Γ_1 *défini par* $\Gamma_1 x(t,s) = x(t_1,s) = \varphi_1(s)$, *pour* $t_1 \in]0,a]$ *fixé. Il est facile de vérifier que* $\Gamma_1\mathcal{E}_A^D\Pi\varphi_0 = e^{\lambda t_1}\varphi = T(t_1)\varphi$ *pour tout* $\varphi \in E$, *où* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés généré par* A. *L'injectivité de* $B^*R^*(\mathcal{E}_A^D)^*\Gamma_1^*$ *est équivalente à*

$$B^*T(t_1)^*\psi = 0 \Longrightarrow \psi = 0.$$

Notons que cette condition est nécessaire et suffisante pour le système linéaire en dimension infinie soit approximativement accessible à partir de zéro. Cet exemple montre que dans le cas où D *est un opérateur différentiel, le concept de* Γ_1*-approximativement accessible coïncide avec l'accessibilité approximative du système de commande linéaire en dimension infinie (voir [57]).*

Chapitre 3

Une approche spectrale pour résoudre des problèmes aux bords matriciels

Dans ce chapitre, on généralise les résultats du chapitre 2 au cas matriciel. On étudie des problèmes aux bords abstraits généraux pour des opérateurs linéaires matriciels (2×2) triangulaires supérieurs inversibles à droite agissant dans des espaces de Banach.
Il existe dans la littérature mathématique une variété des travaux sur les problèmes aux bords abstraits matriciels du type $H = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$ pour résoudre des équations différentielles ordinaires [44, 53] ou des équations aux dérivées partielles [10, 58].

On considère le problème au bord matriciel abstrait suivant :

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}) \begin{cases} D_L x = \lambda M_C x + f \\ \Gamma x = \varphi \end{cases}$$

avec D_L et M_C sont des opérateurs matriciels triangulaires supérieurs dans l'espace de Banach $X \oplus Y$ où D_L est inversible à droite. Pour traiter ce type de problèmes, on construit d'abord les opérateurs aux bords matriciels correspondants.

3.1 Construction d'opérateurs aux bords matriciels

E et K désignent des espaces de Banach complexes et I_E (resp. I_K) est l'opérateur identité sur E (resp. sur K).

On note par D_L l'opérateur matriciel défini dans $X \oplus Y$ par

$$D_L = \begin{pmatrix} D_1 & L \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

où $D_1 \in Lin(X)$, $D_2 \in Lin(Y)$ et $L \in Lin(Y, X)$.
On suppose que D_1 et D_2 sont inversibles à droite dans X et Y respectivement, d'inverses à droite respectifs G_1 et G_2. Alors D_L est inversible à droite, d'inverse à droite

$$G_L = \begin{pmatrix} G_1 & -G_1 L G_2 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Soient Γ_1 et Γ_2 deux opérateurs aux bords de D_1 et D_2 respectivement dans E et K (voir définition 2.1).
Dans la proposition suivante, on construit un opérateur au bord pour l'opérateur matriciel triangulaire supérieur D_L inversible à droite en s'appuyant sur la définition 2.1.

Proposition 3.1 *[24] Si* $D_L = \begin{pmatrix} D_1 & L \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ *est inversible à droite et* $\mathcal{N}(D_2) \subset \mathcal{N}(L)$*, alors l'opérateur*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

défini de $X \oplus Y$ *dans* $E \oplus K$ *est un opérateur au bord de* D_L *correspondant à* G_L.

Preuve. On observe que $\mathcal{N}(\Gamma_1) = \mathcal{R}(G_1)$, $\mathcal{N}(\Gamma_2) = \mathcal{R}(G_2)$ et il existe $\Pi_1 : E \to X$ et $\Pi_2 : K \longrightarrow Y$ tels que $\Gamma_1 \Pi_1 = I_E$, $\mathcal{R}(\Pi_1) = \mathcal{N}(D_1)$, $\Gamma_2 \Pi_2 = I_K$ et $\mathcal{R}(\Pi_2) = \mathcal{N}(D_2)$.
On note par $\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} : E \oplus K \longrightarrow X \oplus Y$. Ainsi $\Gamma\Pi = I_{E \oplus K}$, $\mathcal{N}(\Gamma) = \mathcal{R}(G_L)$ et puisque $\mathcal{N}(D_2) \subset \mathcal{N}(L)$ on a $\mathcal{R}(\Pi) = \mathcal{N}(D_L)$. ■

De la même manière on peut construire l'opérateur au bord d'un opérateur matriciel inversible à gauche.
On suppose que D_1 et D_2 sont inversibles à gauche respectivement dans X et Y d'inverses à gauche respectifs R_1 et R_2. Soient Λ_1 et Λ_2 deux opérateurs aux bords de D_1 et D_2 correspondants à R_1 et R_2 respectivement (voir définition 2.2). On a alors :

Proposition 3.2 *Si* D_L *est un opérateur inversible à gauche d'inverse à gauche* $R_L = \begin{pmatrix} R_1 & -R_1 L R_2 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$ *et* $\mathcal{R}(L) \subset \mathcal{N}(\Lambda_1)$*, alors l'opérateur* $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$ *défini de* $X \oplus Y$ *sur* $E \oplus K$ *est un opérateur au bord de* D_L *correspondant à* R_L.

On considère un autre opérateur matriciel M_C défini dans $X \oplus Y$ par

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A \in Lin(X)$, $B \in Lin(Y)$ et $C \in Lin(Y, X)$ tel que $\mathcal{D}(D_L) \subset \mathcal{D}(M_C)$.

D'après la proposition 3.1, on considère le problème matriciel spectral au bord d'inconnue $w \in \mathcal{D}(D_L)$ suivant

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}) \left\{ \begin{array}{l} (D_L - \lambda M_C)w = F \\ \\ \Gamma w = \Phi \end{array} \right.$$

où $F \in X \times Y$, $\Phi \in E \times K$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre spectral.

3.2 Existence et unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}})$

Soient $G_1 \in \mathbf{R}_{D_1}$, $G_2 \in \mathbf{R}_{D_2}$ et Γ un opérateur au bord de D_L donné dans la proposition 3.1. Dans cette section, on désigne par

$$\mathbf{R}_\lambda[G_1 A] = (I_X - \lambda G_1 A)^{-1}$$

et

$$\mathbf{R}_\lambda[G_2 B] = (I_Y - \lambda G_2 B)^{-1}$$

pour $\lambda^{-1} \in \rho(G_1 A) \cap \rho(G_2 B)$.
Notre principal objectif consiste à appliquer les deux résultats suivants pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème au bord $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}})$.

Lemme 3.1 *Si $\lambda^{-1} \in \rho(G_1 A) \cap \rho(G_2 B)$ alors*

$$\mathcal{N}(D_L - \lambda M_C) = \mathcal{R}(N_{L,C}\Pi)$$

où

$$N_{L,C} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\lambda[G_1 A] & -\mathbf{R}_\lambda[G_1 A] G_1 (L - \lambda C) \mathbf{R}_\lambda[G_2 B] \\ \\ 0 & \mathbf{R}_\lambda[G_2 B] \end{pmatrix}$$

pour tout opérateur linéaire L de Y dans X.

Preuve. Soit $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(D_L)$, alors il existe $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in X \times Y$ et $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in E \times K$ tels que $w = \begin{pmatrix} G_1 f_1 + \Pi_1 \varphi_1 \\ G_2 f_2 + \Pi_2 \varphi_2 \end{pmatrix}$.

On a

$$
\begin{aligned}
(D_L - \lambda M_C)w &= \begin{pmatrix} D_1 - \lambda A & L - \lambda C \\ & \\ 0 & D_2 - \lambda B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 f_1 + \Pi_1 \varphi_1 \\ \\ G_2 f_2 + \Pi_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (I_X - \lambda A G_1) f_1 - \lambda A \Pi_1 \varphi_1 + (L - \lambda C)(G_2 f_2 + \Pi_2 \varphi_2) \\ \\ (I_Y - \lambda B G_2) f_2 - \lambda B \Pi_2 \varphi_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Pour $w \in \mathcal{N}(D_L - \lambda M_C)$ et $\lambda^{-1} \in \rho(G_1 A) \cap \rho(G_2 B)$, on obtient

$$
\begin{cases} f_1 = \lambda \mathbf{R}_\lambda[AG_1] A \Pi_1 \varphi_1 - \mathbf{R}_\lambda[AG_1](L - \lambda C)(G_2 f_2 + \Pi_2 \varphi_2), \\ \\ f_2 = \lambda \mathbf{R}_\lambda[BG_2] \Pi_2 \varphi_2. \end{cases}
$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
w &= \begin{pmatrix} \lambda G_1 \mathbf{R}_\lambda[AG_1] A \Pi_1 \varphi_1 + \Pi_1 \varphi_1 - G_1 \mathbf{R}_\lambda[AG_1](L - \lambda C)(G_2 f_2 + \Pi_2 \varphi_2) \\ \\ \lambda G_2 \mathbf{R}_\lambda[BG_2] \Pi_2 \varphi_2 + \Pi_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\lambda[G_1 A] \Pi_1 \varphi_1 - G_1 \mathbf{R}_\lambda[AG_1](L - \lambda C)(G_2 f_2 + \Pi_2 \varphi_2) \\ \\ \mathbf{R}_\lambda[G_2 B] \Pi_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\lambda[G_1 A] \Pi_1 \varphi_1 - G_1 \mathbf{R}_\lambda[AG_1](L - \lambda C) \mathbf{R}_\lambda[G_2 B] \Pi_2 \varphi_2 \\ \\ \mathbf{R}_\lambda[G_2 B] \Pi_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\lambda[G_1 A] & -\mathbf{R}_\lambda[G_1 A] G_1 (L - \lambda C) \mathbf{R}_\lambda[G_2 B] \\ & \\ 0 & \mathbf{R}_\lambda[G_2 B] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ & \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Alors $w = N_{L,C}\Pi\Phi$.
Inversement, posons $v = N_{L,C}\Pi\Phi$ avec $\Phi \in E \times K$. On constate que

$$
\begin{aligned}
(D_L - \lambda M_C)v &= (D_L - \lambda M_C)N_{L,C}\Pi\Phi \\
&= \begin{pmatrix} D_1 - \lambda A & L - \lambda C \\ 0 & D_2 - \lambda B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1](L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2 \\ +\mathbf{R}_\lambda[G_1A]\Pi_1\varphi_1 \\ \mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (D_1 - \lambda A)[\mathbf{R}_\lambda[G_1A]\Pi_1\varphi_1 - G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1](L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2] \\ +(L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2 \\ (D_2 - \lambda B)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (D_1 - \lambda A)\mathbf{R}_\lambda[G_1A]\Pi_1\varphi_1 \\ (D_2 - \lambda B)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (D_1 - \lambda A)[I_X + \lambda G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1]A]\Pi_1\varphi_1 \\ (D_2 - \lambda B)[I_Y + \lambda G_2\mathbf{R}_\lambda[BG_2]B]\Pi_2\varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (D_1 - \lambda A)\Pi_1\varphi_1 + \lambda A\Pi_1\varphi_1 \\ (D_2 - \lambda B)\Pi_2\varphi_2 + \lambda B\Pi_2\varphi_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Comme $\mathcal{N}(D_1) = \mathcal{R}(\Pi_1)$ et $\mathcal{N}(D_2) = \mathcal{R}(\Pi_2)$, alors $(D_L - \lambda M_C)v = 0$. ■

Dans la preuve du théorème suivant, on donne l'expression explicite de la solution du problème $(\mathcal{P}_\mathcal{M})$.

Théorème 3.1 *Pour $\lambda^{-1} \in \rho(G_1A) \cap \rho(G_2B)$, le problème au bord $(\mathcal{P}_\mathcal{M})$ admet pour tout $F \in X \times Y$ et $\Phi \in E \times K$ une solution unique donnée, pour tout opérateur linéaire L de Y dans X, par*

$$w_\lambda^{F,\Phi} = N_{L,C}(GF + \Pi\Phi)$$

où $G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$.

Preuve. D'après le lemme 3.1, $N_{L,C}\Pi\Phi \in \mathcal{N}(D_L - \lambda M_C)$, alors

$$
\begin{aligned}
&(D_L-\lambda M_C)w_\lambda^{F,\Phi}=(D_L-\lambda M_C)N_{L,C}GF\\
=\;&(D_L-\lambda M_C)\begin{pmatrix}\mathbf{R}_\lambda[G_1A] & -\mathbf{R}_\lambda[G_1A]G_1(L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\\ 0 & \mathbf{R}_\lambda[G_2B]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_1f_1\\ G_2f_2\end{pmatrix}\\
=\;&(D_L-\lambda M_C)\begin{pmatrix}\mathbf{R}_\lambda[G_1A]G_1f_1-\mathbf{R}_\lambda[G_1A]G_1(L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]G_2f_2\\ \mathbf{R}_\lambda[G_1A]G_2f_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\;&\begin{pmatrix}D_1-\lambda A & L-\lambda C\\ 0 & D_2-\lambda B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1](L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]G_2f_2\\ +G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1]f_1\\ G_2\mathbf{R}_\lambda[BG_2]f_2\end{pmatrix}\\
=\;&\begin{pmatrix}(I_X-\lambda AG_1)\mathbf{R}_\lambda[AG_1]f_1\\ (I_Y-\lambda BG_2)\mathbf{R}_\lambda[BG_2]f_2\end{pmatrix}\\
=\;&F.
\end{aligned}
$$

On a $\mathcal{N}(\Gamma_1)=\mathcal{R}(G_1)$ et $\mathcal{N}(\Gamma_2)=\mathcal{R}(G_2)$, alors on obtient

$$
\begin{aligned}
&\Gamma w_\lambda^{F,\Phi}=\Gamma N_{L,C}(GF+\Pi\Phi)\\
=\;&\begin{pmatrix}\Gamma_1 & 0\\ 0 & \Gamma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1]f_1-G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1](L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]G_2f_2\\ G_2\mathbf{R}_\lambda[BG_2]f_2\end{pmatrix}\\
+\;&\begin{pmatrix}\Gamma_1 & 0\\ 0 & \Gamma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_\lambda[G_1A]\Pi_1\varphi_1-G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1](L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2\\ \mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2\end{pmatrix}\\
=\;&\begin{pmatrix}\Gamma_1\mathbf{R}_\lambda[G_1A]\Pi_1\varphi_1-\Gamma_1G_1\mathbf{R}_\lambda[G_1A](L-\lambda C)\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2\\ \Gamma_2\mathbf{R}_\lambda[G_2B]\Pi_2\varphi_2\end{pmatrix}\\
=\;&\begin{pmatrix}\Gamma_1[I_X+\lambda G_1\mathbf{R}_\lambda[AG_1]A]\Pi_1\varphi_1\\ \Gamma_2[I_Y+\lambda G_2\mathbf{R}_\lambda[BG_2]B]\Pi_2\varphi_2\end{pmatrix}\\
=\;&\begin{pmatrix}\Gamma_1\Pi_1\varphi_1\\ \Gamma_2\Pi_2\varphi_2\end{pmatrix}\\
=\;&\Phi.
\end{aligned}
$$

L'unicité de la solution de $(\mathcal{P}_\mathcal{M})$ résulte par des arguments standards.
Si $w_1, w_2 \in \mathcal{D}(D_L)$ sont deux solutions du système $(\mathcal{P}_\mathcal{M})$, on pose $w_0 = w_1 - w_2 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 f_0 + \Pi_1 \varphi_0 \\ G_2 g_0 + \Pi_2 \psi_0 \end{pmatrix}$ pour $f_0 \in X,\ g_0 \in Y$, $\varphi_0 \in E$ et $\psi_0 \in K$. D'où,

$$\begin{cases} (D_L - \lambda M_C) w_0 = 0, \\ \Gamma w_0 = 0. \end{cases}$$

La seconde identité donne $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $u_0 = G_1 f_0,\ v_0 = G_2 g_0$.

En utilisant la première identité, on a aussi

$$\begin{aligned} 0 = (D_L - \lambda M_C) w_0 &= \begin{pmatrix} D_1 - \lambda A & L - \lambda C \\ 0 & D_2 - \lambda B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 f_0 \\ G_2 g_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (I_X - \lambda A G_1) f_0 + (L - \lambda C) G_2 g_0 \\ (I_Y - \lambda B G_2) g_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f_0 = g_0 = 0$ et $w_1 = w_2$. ∎

Le résultat suivant exprime l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_\mathcal{M})$ dans le cas inversible à gauche.

Théorème 3.2 *Si l'opérateur D_L est un inverse à gauche de R_L et $\lambda^{-1} \in \rho(R_1 A) \cap \rho(R_2 B)$ alors,*

$$\mathcal{N}(D_L - \lambda M_C) = \mathcal{R}(N_{L,C} \Theta)$$

où

$$N_{L,C} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\lambda[R_1 A] & -\mathbf{R}_\lambda[R_1 A] R_1 (L - \lambda C) \mathbf{R}_\lambda[R_2 B] \\ \\ 0 & \mathbf{R}_\lambda[R_2 B] \end{pmatrix}.$$

D'autre part, le problème au bord $(\mathcal{P}_\mathcal{M})$ admet une solution unique pour tout $F \in X \times Y$ et $\Phi \in E \times K$, la solution est donnée, pour tout opérateur linéaire L de Y dans X, par

$$w_\lambda^{F,\Phi} = N_{L,C}(RF + \Pi \Phi)$$

où $R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$ et D_i est l'inverse à gauche de R_i, $i = 1, 2$.

3.3 Applications

3.3.1 Equation harmonique

L'équation harmonique est définie par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \ 0 \le y \le 1, \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \ u(x,1) = \varphi_2(x), \ 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

On pose $v = -i\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$. Alors le système Hamiltonien devient

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & -i\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u(0,y) = u(1,y) = 0 \text{ et } v(0,y) = v(1,y) = 0, \ \text{pour } y \in [0,b], \\ u(x,0) = u(x,1) = \varphi_1(x) \text{ et } v(x,0) = v(x,1) = \varphi_2(x), \ \text{pour } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Soient $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, $X = Y = L^2(\Omega)$ et $E = K = L^2([0,1])$. On définit l'opérateur matriciel D dans $(L^2(\Omega))^2$ par

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{D}(D) = \{(u,v)^t \in (H^1(\Omega))^2 : \ u(0,y) = u(1,y) = 0, \text{ et } v(0,y) = v(1,y) = 0, \ 0 \le y \le 1\}$.

L'opérateur D est inversible à droite dans $(L^2(\Omega))^2$, son inverse à droite est donné par

$$G\begin{pmatrix} \alpha(x,y) \\ \beta(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1\alpha(x,y) \\ G_2\beta(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^y \alpha(x,\tau)d\tau \\ \int_0^y \beta(x,\tau)d\tau \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in L^2(\Omega)$.

Maintenant, on note

$$A = i\frac{d}{dx}; \ C = I_{L^2(\omega)}; \ B = -i\frac{d}{dx} = -A^*$$

où $\mathcal{D}(A) = H^1(\Omega)$.

L'opérateur au bord Γ est défini par $\Gamma : \mathcal{D}(D) \to (L^2([0,1]))^2$

$$\Gamma\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,\xi) - \varphi_1(x) \\ v(x,\xi) - \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

pour $\xi = 0$ ou $\xi = 1$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2([0,1])$.
Avec ces notations, le problème au bord (3.1), s'écrit

$$\begin{cases} Dw = Hw + F \\ \Gamma w = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

où $H = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in (L^2(\Omega))^2$.
D'autre part, on définit l'opérateur $\Pi : (L^2([0,1]))^2 \to (L^2(\Omega))^2$ par

$$\Pi \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) + \varphi_1(x) \\ \psi_2(x) + \varphi_2(x) \end{pmatrix}.$$

Alors, $\Gamma\Pi = I_{(L^2([0,1]))^2}$ et $D\Pi = 0$. D'après le théorème 3.1, le système (3.3) admet une solution unique si les opérateurs $I_{L^2(\Omega)} - G_1 A$ et $I_{L^2(\Omega)} - G_2 B$ sont inversibles.
Pour prouver l'inversibilité de ces opérateurs on doit utiliser quelques résultats de la théorie de mesure et les propriétés de l'opérateur de Volterra :

Lemme 3.2 *[18] Soit I un ouvert borné de $\mathbb{R}$.*

1. *Soit $f(x,y)$ une fonction Lebesgue mesurable par rapport à y pour tout $x \in I$, et ses dérivées partielles sont mesurables dans I.*
   Si $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq g(x) \in L^1(I)$, alors
   $$\frac{\partial}{\partial y}\int_I f(x,y)dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx;$$
2. *On note par $C_b^{m-1}(I)$ l'ensemble des fonctions dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à $(m-1)$ sont continues et bornées dans I. Si $C_b^{m-1}(I)$ est équipé de la norme*
   $$\|f\|_{C_b^{m-1}} = \sum_{k=0}^{m-1} \|f^{(k)}\|_\infty,$$
   alors $H^m(I)$ s'injecte continuement dans $C_b^{m-1}(I)$.

Ce lemme conduit au résultat suivant.

Proposition 3.3 *Soit $Vu(x,y) = \int_0^x u(t,y)dt$ défini sur $L^2(\Omega)$ de domaine $H^p(\Omega)$, $p \in \mathbb{N}^*$. Alors V est quasi-nilpotent.*

Preuve. V est un opérateur de Volterra, $V^k u(x,y) = \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}u(t,y)dt$, pour tout $k \geq 1$, et V^k est quasi-nilpotent sur $L^2(\Omega)$ ([15]).
De plus, pour $i = \{1,..,p\}$ on a

$$\frac{\partial^i V^k u}{\partial x^i}(x,y) = \int_0^x \frac{(x-t)^{k-i-1}}{(k-1-i)!}u(t,y)dt$$

alors $\frac{\partial^i Vu}{\partial x^i}$ est quasi-nilpotent sur $L^2(\Omega)$.
D'après le lemme 3.2, on obtient pour $j = \{1, .., p\}$

$$\frac{\partial^j V^k u}{\partial y^j}(x,y) = \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^j u}{\partial y^j}(t,y)dt$$

$$\|\frac{\partial^j V^k u}{\partial y^j}(x,y)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{(k-1)!}\|\frac{\partial^j u}{\partial y^j}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors, $\|V^k\|_{H^p(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ ■

Lemme 3.3 *Soient $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur quasi-nilpotent et $S : Y \longrightarrow Z$ un opérateur borné. Si Z est un espace de Banach tel que $Z \subseteq X$ et $ST = TS$, alors TS est quasi-nilpotent.*

D'après la proposition 3.3 et le lemme 3.3, $\int_0^y \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau$ est quasi-nilpotent. Alors les opérateurs $I_X - G_1A$ et $I_X - G_2B$ sont inversibles. Ainsi le problème au bord (3.1) admet une solution unique.

3.3.2 Problème d'élasticité symplectique

Considérons une plaque rectangulaire mince. L'équation de déplacement des points de la plaque est (voir [55]) :

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})^2 w = p; \quad \text{pour } 0 < x < h \ \text{ et } 0 < y < 1 \tag{3.4}$$

avec les conditions aux bords

$$w = 0 \ ; \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ ; \ \text{pour } y = 0 \text{ ou } y = 1 \tag{3.5}$$

et

$$w \text{ et} \frac{\partial w}{\partial y} \text{ sont des fonctions données pour } x = 0 \ \text{ ou } \ x = h. \tag{3.6}$$

Pour obtenir la solution analytique de ce problème, on introduit la rotation θ, la fonction paramétrique de Lagrange q et le moment m de la façon suivante [60] :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \ ; \ q = (\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}) \ ; \ m = -(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}).$$

Alors le problème au bord (3.4)-(3.6) devient(voir [60])

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} w \\ \theta \\ q \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ \theta \\ q \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

et les conditions aux bords sont

$$w = 0 \ ; \ \theta = 0 \ ; \ q = 0 \ ; \ m = 0 \ ; \text{ si } y = 0 \text{ ou } y = 1 \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} w(0,y) = w(h,y) = \varphi_1(y), & \text{si } y \in [0,1]; \\ \theta(0,y) = \theta(h,y) = \varphi_2(y), & \text{si } y \in [0,1]; \\ q(0,y) = q(h,y) = \varphi_3(y), & \text{si } y \in [0,1]; \\ m(0,y) = m(h,y) = \varphi_4(y), & \text{si } y \in [0,1], \end{cases} \tag{3.9}$$

où $\varphi_i \in L^2([0,1])$, $i = 1, \dots 4$, sont des fonctions données.
On note $\Omega =]0,h[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$, $X = Y = (L^2(\Omega))^2$, $E = K = (L^2([0,1]))^2$ et on considère l'opérateur matriciel défini sur $(L^2(\Omega))^4$ par

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

où

$$D_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \ ; \ j = 1,2$$

est défini dans $(L^2(\Omega))^2$ tel que $\mathcal{D}(D_1) = (H^4(\Omega))^2$ et $\mathcal{D}(D_2) = (H^2(\Omega))^2$. L'opérateur D est inversible à droite, son inverse à droite est l'opérateur de Volterra :

$$Gv(x,y) = \int_0^x v(\tau,y)d\tau \ ; \ v(x,y) \in (L^2(\Omega))^4,$$

$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$, où

$$G_j \begin{pmatrix} a_j(x,y) \\ b_j(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^x a_j(\tau,y)d\tau \\ \int_0^x b_j(\tau,y)d\tau \end{pmatrix}$$

et $(a_j, b_j) \in (L^2(\Omega))^2$, $j = 1,2$.

Maintenant, si on désigne par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{L^2(\Omega)} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

l'opérateur défini sur $(L^2(\Omega))^2$ de domaine

$$\mathcal{D}(A) = \{(w,\theta)^t \in \mathcal{D}(D_1); \ w(x,0) = w(x,1) = 0; \ \theta(x,0) = \theta(x,1) = 0\},$$

alors

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ I_{L^2(\Omega)} & 0 \end{pmatrix}$$

est de domaine

$$\mathcal{D}(A^*) = \{(q,m)^t \in \mathcal{D}(D_2);\ q(x,0) = q(x,1) = 0;\ m(x,0) = m(x,1) = 0\}.$$

Posons $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{L^2(\Omega)} \end{pmatrix}$.

L'opérateur au bord est donné par

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

où $\Gamma_1 : \mathcal{D}(D_1) \to (L^2([0,1]))^2$ est

$$\Gamma_1 v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(\varrho,y) - \varphi_1(y) \\ v_2(\varrho,y) - \varphi_2(y) \end{pmatrix}$$

et $\Gamma_2 : \mathcal{D}(D_2) \to (L^2([0,1]))^2$ est

$$\Gamma_2 \omega(x,y) = \begin{pmatrix} \omega_1(\varrho,y) - \varphi_3(y) \\ \omega_2(\varrho,y) - \varphi_4(y) \end{pmatrix}$$

où $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ et $\varrho = 0$ ou h.

Avec ces notations, le problème au bord (3.4)-(3.5)-(3.6) devient

$$\begin{cases} Du = Hu + F \\ \Gamma u = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

où $H = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} w \\ \theta \\ q \\ m \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \in (L^2(\Omega))^4$.

Maintenant, on définit l'opérateur $\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} : (L^2([0,1]))^4 \to (H^4(\Omega))^2 \oplus (H^2(\Omega))^2$ par :

$$\Pi_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(y) + \varphi_1(y) \\ \psi_2(y) + \varphi_2(y) \end{pmatrix} \text{ et } \Pi_2 \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3(y) + \varphi_3(y) \\ \psi_4(y) + \varphi_4(y) \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\Gamma\Pi = I_{(L^2([0,1]))^4} \quad \text{et} \quad D\Pi = 0.$$

Par la technique de factorisation de Frobenius-Schur de l'opérateur matriciel [9], les opérateurs $(I_{(L^2(\Omega))^2} - G_1 A)$ et $(I_{(L^2(\Omega))^2} + G_2 A^*)$ sont inversibles si et

seulement si $u(x,y)+\int_0^x\int_0^s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\tau,y)d\tau ds$ et $v(x,y)+\int_0^x \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^s v(\tau,y)d\tau ds$ sont inversibles respectivement sur $H^4(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$.
Pour prouver l'inversibilité de ces derniers opérateurs, on utilise la proposition 3.3 et le résultat connu suivant [18] :

Proposition 3.4 *Soit* $u \in H^4(\Omega)$. *Alors*

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\int_0^x u(t,y)dt = \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(t,y)dt.$$

Preuve. Soit $u \in H^4(\Omega)$. D'après le lemme 3.2, on a $u(x,y) \in C_b^3(]0,h[)$ pour tout $y \in]0,1[$ et $u(x,y) \in C_b^3(]0,1[)$ pour tout $x \in]0,h[$. Ainsi $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$ est bornée uniformément sur $]0,1[$ pour tout $x \in]0,h[$.
On pose $g(x) = \sup\limits_{y\in]0,1[} |\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)|$, donc $\int_0^h g(x)dx \leq h \sup\limits_{x\in]0,h[} g(x)$. Alors $g \in L^1(]0,h[)$. Alors on obtient le résultat en réappliquant le lemme 3.2. ∎

D'après la proposition 3.3 et le lemme 3.3, $u(x,y) + \int_0^x\int_0^s \frac{\partial^2 u(\tau,y)}{\partial y^2}d\tau ds$ est inversible. Alors les opérateurs $(I_X - G_1 A)$ et $(I_X + G_2 A^*)$ sont inversibles. Ainsi d'après le théorème 3.1, le problème au bord (3.10) et par conséquent le problème (3.4)-(3.6) admet une solution unique.

Chapitre 4

Problèmes aux bords abstraits avec terme source Drazin inversible

Campbell et Meyer [5, 6] ont exprimé explicitement les solutions des systèmes linéaires d'équations différentielles singulières à coefficients constants du type

$$Ex'(t) + Fx(t) = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

par :

$$x(t) = e^{-\hat{E}^D\hat{F}(t-t_0)}\hat{E}^D\hat{E}q$$

où $\hat{E} = (\lambda E + F)^{-1}E$ et $\hat{F} = (\lambda E + F)^{-1}F$ et q est un vecteur donné.

Dans ce dernier chapitre, on généralise le travail de Campbell et Meyer pour résoudre deux types de problèmes aux bords abstraits, le premier type est :

$$(\mathcal{P_D})\begin{cases} (A - \lambda I_X)u = f \\ \Gamma u = \varphi \end{cases}$$

avec un terme source A inversible au sens de Drazin ou inversible au sens de Drazin à droite (resp. à gauche). On construit l'opérateur au bord correspondant puis on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P_D})$.
Le deuxième type

$$(\mathcal{GP})\begin{cases} (A - \lambda B)u = f \\ \Gamma u = \varphi \end{cases}$$

généralise le problème $(\mathcal{P_D})$ où A est inversible au sens de Drazin et l'opérateur linéaire B vérifie certaines conditions nécessaires. Les résultats obtenus sont appliqués à l'équation de Schrödinger et à l'équation des ondes forcée.

4.1 Opérateur au bord correspondant à un opérateur inversible au sens de Drazin

Rappelons que si $A \in \mathcal{C}(X)$, $a(A)$ et $d(A)$ désignent respectivement l'ascente et la descente de l'opérateur A.

Définition 4.1 *[25] $\Gamma : X \to E$ est un opérateur au bord d'un opérateur A inversible au sens de Drazin et d'inverse de Drazin A^D si*
(i) $\Gamma A^D = 0$ sur $\mathcal{D}(A^D)$;
(ii) Il existe $\Pi : E \to X$ linéaire tel que $\Gamma\Pi = I_E$ et $\mathcal{R}(\Pi) = \mathcal{N}(A^m)$, avec $m = a(A) = d(A)$.

D'après cette définition et la proposition 1.2, on obtient

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(A^D) \oplus \mathcal{R}(\Pi).$$

Dans le résultat suivant, on exprime la décomposition du domaine d'un opérateur inversible au sens de Drazin à droite (ou à gauche).

Proposition 4.1 *Soit $T \in \mathcal{C}(X)$.*

- *Si A est l'inverse de Drazin à gauche de l'opérateur T, alors*

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(T^{m+1}) \oplus (\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(T^m)), \qquad \text{avec} \;\; a(T) = m < \infty; \quad (4.1)$$

- *Si A est l'inverse de Drazin à droite de l'opérateur T, alors*

$$\mathcal{R}(T^m) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(T^{m+1}), \qquad \text{avec} \;\; d(T) = m < \infty. \qquad (4.2)$$

Preuve.

- Soit A un inverse de Drazin à gauche de l'opérateur T. Soit $x \in \mathcal{R}(T^{m+1}) \cap (\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(T^m))$, donc

$$\begin{cases} Ax = 0, \\ T^{m+1}y = x, \; y \in X \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} Ax = 0, \\ AT^{m+1}y = Ax, \end{cases}$$

alors $AT^{m+1}y = 0$, $T^m y = 0$ et $x = 0$.
D'autre part, $\mathcal{R}(T^{m+1}) \subset \mathcal{D}(A)$ alors $\mathcal{R}(T^{m+1}) \oplus (\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(T^m)) \subset \mathcal{D}(A)$.
Inversement. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, on pose

$$x = x - TAx + TAx.$$

On note $y = x - TAx$ avec $x \in \mathcal{R}(T^m)$, donc $y \in \mathcal{R}(T^m)$ et $z = TAx$. On voit que $z \in \mathcal{R}(T^{m+1})$.
Puisque $Ax \in \mathcal{R}(T^m)$ alors $Ax = T^m f$ tel que $f \in X$. D'où

$$\begin{aligned} Ay &= Ax - ATAx = T^m f - AT^{m+1} f \\ &= T^m f - T^m f = 0. \end{aligned}$$

- Soit A un inverse de Drazin à droite de l'opérateur T. Soit $x \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(T^{m+1})$. On sait que $\mathcal{N}(T^{m+1}) = \mathcal{R}(T^m) \cap \mathcal{N}(T)$. Alors

$$\begin{cases} x = Ay, \ \text{ pour } \ y \in \mathcal{D}(A) \\ Tx = 0 \ \text{ et } \ x = T^m z, \ \text{ pour } \ z \in X \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = Ay, \ \text{ pour } \ y \in \mathcal{D}(A) \\ \\ TAy = 0 \ \text{ et } \ TAy = T^{m+1} z \ \text{ pour } \ z \in X \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = Ay, \ \text{pour } y \in \mathcal{D}(A), \\ \\ TAy = 0 \ \text{ et } \ 0 = T^{m+1} z \ \text{ pour } \ z \in X. \end{cases}$$

Comme T^{m+1} est surjectif, alors $z = 0$. Ainsi $x = 0$.
D'autre part, $\mathcal{N}(T^{m+1}) \subset \mathcal{R}(T^m)$ et $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(T^m)$.
Inversement. Soit $y \in \mathcal{R}(T^m)$. On note $u = T^m x - ATx$ et $v = ATx$ alors $v \in \mathcal{R}(A)$ et $T^{m+1} u = 0$. Par suite $y = u + v$, d'où le résultat.

■

Définition 4.2 *[25] $\Gamma : X \to E$ est un opérateur au bord d'un opérateur $T \in \mathcal{C}(X)$ inversible au sens de Drazin à droite et d'inverse de Drazin à droite $S \in \mathcal{B}(X)$ si*

(i) $\Gamma S = 0$ sur X ;

(ii) Il existe $\Pi : E \to X$ linéaire tel que $\Gamma\Pi = I_E$ et $\mathcal{R}(\Pi) = \mathcal{N}(T^{m+1})$ avec $m = d(T) < \infty$.

Dans le théorème suivant, on montre que pour tout un inverse de Drazin à droite S fixé de T, l'opérateur Π dans la définition 4.2 est unique.

Théorème 4.1 *Soit $T \in \mathcal{C}(X)$ inversible au sens de Drazin à droite avec $d(T) = m < \infty$ et S est un inverse de Drazin à droite de T. $\Gamma : X \longrightarrow E$ est un opérateur au bord de T correspondant à S si et seulement si il existe un unique opérateur linéaire $\Pi : E \longrightarrow X$ vérifiant (ii) de la définition 4.2 tel que*

$$\Pi\Gamma x = x - ST^m x, \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(T^m). \tag{4.3}$$

Preuve. Soit $\Gamma : X \longrightarrow E$ un opérateur au bord de l'opérateur T correspondant à S, alors il existe un opérateur $\Pi : E \longrightarrow X$ vérifiant les conditions de la définition 4.2. Soit $x \in \mathcal{D}(T^m)$, il est facile de prouver que $(x - ST^m x) \in \mathcal{N}(T^m)$, donc $(ST^m x - x) \in \mathcal{R}(\Pi)$. Ainsi il existe $\varphi \in E$ tel que $x - ST^m x = \Pi\varphi$. On a $\Gamma S = 0$ sur X et $\Gamma\Pi = I_E$, alors $\Gamma(x - ST^m x) = \Gamma\Pi\varphi$ et $\varphi = \Gamma x$. D'où (4.3).
Pour l'unicité de Π, soient Π_1 et Π_2 deux opérateurs vérifiant les conditions de la définition 4.2. D'après (4.3), on a

$$\Pi_1\Gamma x = \Pi_2\Gamma x \quad \forall x \in \mathcal{D}(T^m)$$

et

$$\Pi_1\varphi = \Pi_2\varphi \quad \forall \varphi = \Gamma x \in E.$$

Ceci implique que $\Pi_1 = \Pi_2$.

Inversement, on suppose que les deux opérateurs Γ et Π vérifient (4.3). Alors $T^m\Pi\Gamma x = 0$, pour tout $x \in \mathcal{D}(T^m)$, donc $T^m\Pi = 0$ dans E. De plus,

$$\Pi\Gamma\Pi\Gamma x = \Pi\Gamma x - ST^m\Pi\Gamma x = \Pi\Gamma x.$$

Ainsi $\Gamma\Pi\Gamma\Pi\Gamma x = \Gamma\Pi\Gamma x$, donc $\Gamma\Pi\varphi = \varphi$ avec $\varphi = \Gamma\Pi\Gamma x$ pour tout $\varphi \in E$. On obtient $\Gamma ST^m x = \Gamma x - \Gamma\Pi\Gamma x = 0$. Ainsi $\Gamma S = 0$ dans X car T^m est surjectif. Ceci prouve que Γ est un opérateur au bord de T correspondant à S dans le sens de la définition 4.2. ∎

Remarque 4.1 *Le théorème précédent est très important dans le sens suivant : Si Γ est un opérateur au bord de l'opérateur T Drazin inversible à droite correspondant à son Drazin inverse à droite S, alors pour S fixé l'opérateur Π donné dans la définition 4.2 est unique et*

$$\mathcal{R}(T^m) = \mathcal{R}(S) \oplus \mathcal{R}(\Pi). \tag{4.4}$$

De la même manière, on définit l'ensemble des opérateurs aux bords d'opérateurs inversibles au sens de Drazin à gauche.

Définition 4.3 *[25] $\Gamma : X \to E$ est un opérateur au bord pour un opérateur $T \in \mathcal{C}(X)$ Drazin inversible à gauche correspondant à son Drazin inverse à gauche $S \in \mathcal{B}(X)$ si*

(i) $\Gamma T = 0$ sur $\mathcal{D}(T)$;

(ii) Il existe $\Theta : E \to X$ linéaire tel que $\Gamma\Theta = I_E$ et $\mathcal{R}(\Theta) = \mathcal{N}(S) \cap \mathcal{R}(T^m)$, avec $m = a(T)$.

Pour cette classe on a un résultat similaire à celui du théorème 4.1 :

Théorème 4.2 *Soit $T \in \mathcal{C}(X)$ Drazin inversible à gauche avec $a(T) = m$ finie et S un Drazin inverse à gauche de T. $\Gamma : X \longrightarrow E$ est un opérateur au bord de l'opérateur T correspondant à S si et seulement si il existe un unique opérateur linéaire $\Theta : E \longrightarrow X$ vérifiant (ii) de la définition 4.3 tel que*

$$\Theta\Gamma x = x - T^{m+1}Sx, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}(S). \tag{4.5}$$

4.2 Résolution du problème linéaire au bord $(\mathcal{P}_{\mathcal{D}})$

On considère le problème linéaire au bord décrit par un opérateur $A \in \mathcal{C}(X)$ Drazin inversible pour l'inconnue $u \in \mathcal{D}(A)$ suivant

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{D}}) \begin{cases} (A - \lambda I_X)u = f \\ \Gamma u = \varphi \end{cases}$$

où $f \in X$, $\varphi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les résultats suivants expriment l'existence et l'unicité de la solution du problème au bord $(\mathcal{P}_{\mathcal{D}})$.

Théorème 4.3 *Si $A \in \mathcal{C}(X)$ est Drazin inversible d'inverse de Drazin $A^D \in \mathcal{B}(X)$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(I_X - \lambda A^D)$ est inversible pour $|\lambda^{-1}| < \varepsilon$ et le problème au bord $(\mathcal{P}_{\mathcal{D}})$ admet une solution unique donnée par*

$$u_\lambda^{f,\varphi} = A^D(I_X - \lambda A^D)^{-1}f + (I_X - \lambda A^D)^{-1}\Pi\varphi$$

pour tout $f \in \mathcal{R}(A^m)$, avec $a(A) = d(A) = m$ et $\varphi \in E$.

Preuve. On pose $\varepsilon = \|(A+P)^{-1}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda^{-1}| < \varepsilon$, alors $\|\lambda(A+P)^{-1}\| < 1$. Par conséquent, $(I_X - \lambda A^D)$ est inversible pour $|\lambda^{-1}| < \varepsilon$. Soit $f \in \mathcal{R}(A^m)$, alors il existe $g \in X$ tel que $f = A^m g$ et soit $\varphi \in E$. Comme $(I_X - \lambda A^D)$ est inversible pour $|\lambda^{-1}| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ alors d'après la définition 4.1, on obtient

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I_X)u_\lambda^{f,\varphi} &= (A - \lambda I_X)A^D(I_X - \lambda A^D)^{-1}f + (A - \lambda I_X)(I_X - \lambda A^D)^{-1}\Pi\varphi \\
&= (AA^D - \lambda A^D)(I_X - \lambda A^D)^{-1}A^D g \\
&+ (A - \lambda I_X)[I_X + \lambda A^D(I_X - \lambda A^D)^{-1}]\Pi\varphi \\
&= AA^D(I_X - \lambda A^D)(I_X - \lambda A^D)^{-1}A^m g + (A - \lambda I_X)\Pi\varphi \\
&+ \lambda AA^D(I_X - \lambda A^D)(I_X - \lambda A^D)^{-1}\Pi\varphi \\
&= AA^D A^m g - \lambda\Pi\varphi + \lambda AA^D\Pi\varphi \\
&= f - \lambda P\Pi\varphi - \lambda(I_X - P)\Pi\varphi + \lambda(I_X - P)\Pi\varphi \\
&= f
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma u_\lambda^{f,\varphi} &= \Gamma A^D(I_X-\lambda A^D)^{-1}f+\Gamma(I_X-\lambda A^D)^{-1}\Pi\varphi\\ &= \Gamma[I_X+\lambda A^D(I_X-\lambda A^D)^{-1}]\Pi\varphi\\ &= \Gamma\Pi\varphi=\varphi.\end{aligned}$$

Si $u_1,u_2\in\mathcal{D}(A)$ sont deux solutions de $(\mathcal{P}_\mathcal{D})$, alors $u_0=u_1-u_2=A^Df_0+\Pi\varphi_0$ où $f_0\in\mathcal{R}(A^D)$ et $\varphi_0\in E$.
D'où,

$$(A-\lambda I_X)u_0=0,\ \text{et } \Gamma u_0=0.$$

Puisque $\mathcal{N}(\Gamma)=\mathcal{R}(A^D)$ et $\Gamma\Pi=I_E$, on en déduit que $\varphi_0=0$.
D'autre part, $0=(A-\lambda I_X)u_0=(A-\lambda I_X)A^Df_0=(I_X-\lambda A^D)A^{m+1}A^Dg_0$, pour $g_0\in X$ tel que $f_0=A^mg_0$. Alors $f_0=0$ car $(I_X-\lambda A^D)$ est inversible. D'où l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_\mathcal{D})$. ■

La version du théorème 4.3 dans le cas des opérateurs inversibles au sens de Drazin à gauche (ou à droite) est exprimée comme suit :

Théorème 4.4 *Si A est l'inverse de Drazin à gauche de l'opérateur $T\in\mathcal{C}(X)$ avec $a(T)=m<\infty$ et $(I_X-\lambda T)$ est inversible pour $\lambda\neq 0$, alors le problème au bord $(\mathcal{P}_\mathcal{D})$ admet une solution unique donnée par :*

$$u_\lambda^{f,\varphi}=T(I_X-\lambda T)^{-1}f+(I_X-\lambda T)^{-1}\Pi\varphi$$

pour $f\in\mathcal{R}(T^m)$ et $\varphi\in E$.

Preuve. Soit $f\in\mathcal{R}(T^m)$ alors il existe $g\in X$ tel que $f=T^mg$ et soit $\varphi\in E$. Supposons que $(I_X-\lambda T)$ est inversible pour $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, alors

$$\begin{aligned}(A-\lambda I_X)u_\lambda^{f,\varphi} &= (A-\lambda I_X)T(I_X-\lambda T)^{-1}T^mg+(A-\lambda I_X)(I_X-\lambda T)^{-1}\Pi\varphi\\ &= (A-\lambda I_X)T^{m+1}(I_X-\lambda T)^{-1}g\\ &+ (A-\lambda I_X)[I_X+\lambda T(I_X-\lambda T)^{-1}]\Pi\varphi\\ &= T^mg+(A-\lambda I_X)\Pi\varphi+\lambda(A-\lambda I_X)T(I_X-\lambda T)^{-1}\Pi\varphi.\end{aligned}$$

D'après la définition 4.3, il existe $w\in X$ tel que $\Pi\varphi=T^mw$, ainsi
$(A-\lambda I)u_\lambda^{f,\varphi}=f$ et

$$\begin{aligned}\Gamma u_\lambda^{f,\varphi} &= \Gamma T(I_X-\lambda T)^{-1}f+\Gamma(I_X-\lambda T)^{-1}\Pi\varphi\\ &= \Gamma\Pi\varphi+\lambda\Gamma T(I_X-\lambda T)^{-1}\Pi\varphi\\ &= \varphi.\end{aligned}$$

Par le même argument, on montre aussi l'unicité de la solution de $(\mathcal{P}_\mathcal{D})$. ■

Comme conséquence des théorèmes 4.3 et 4.4, on a le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.5 *Si $A \in \mathcal{C}(X)$ est inversible au sens de Drazin à droite, d'inverse de Drazin à droite R tel que $d(A) = m < \infty$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(I_X - \lambda R)$ est inversible à droite pour tout $|\lambda^{-1}| < \varepsilon$ et le problème au bord $(\mathcal{P}_{\mathcal{D}})$ admet une solution unique donnée par :*

$$u_\lambda^{f,\varphi} = R\boldsymbol{R}_d(R,\lambda)f + \boldsymbol{R}_d(R,\lambda)\Pi\varphi,$$

pour $f \in \mathcal{R}(A^m)$ et $\varphi \in E$, où $\boldsymbol{R}_d(R,\lambda)$ est l'inverse à droite de $(I_X - \lambda R)$.

4.3 Application à l'équation de Schrödinger

On considère le problème de Cauchy du second ordre suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2u(x)}{dx^2} - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.6}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$.
On désigne par X l'ensemble des fonctions bornées et uniformément continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. X^k est l'ensemble des fonctions différentiables k fois dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées appartiennent à X.
X est équipé de la norme $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. On considère l'opérateur $A = \frac{d^2}{dx^2}$ dans X de domaine

$$\mathcal{D}(A) = X^2.$$

Le noyau $\mathcal{N}(A)$ de l'opérateur A est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. L'opérateur $A = \frac{d^2}{dx^2}$, en vertu du théorème 5.1 de [4] est Drazin inversible d'indice $i(A) = 1$.
Pour donner la formule explicite de l'inverse de Drazin A^D de A sur X, on définit d'abord l'opérateur de projection P associé.
Pour tout $\xi > 0$, soit P_ξ qui associe à chaque $f \in X$ la fonction constante

$$P_\xi f = \frac{1}{2\xi}\int_{-\xi}^{\xi} f(t)dt.$$

Alors P_ξ est linéaire sur X, $\|P_\xi\| \leq 1$, $P_\xi f = f$ si et seulement si $f \in \mathcal{N}(A)$ et $P_\xi^2 = P_\xi$.
Soit $f \in \mathcal{R}(A)$. Alors il existe $g \in X^2$ tel que $f = g'' = Ag$.

$$\|P_\xi f\| = \|P_\xi g''\| \leq \frac{1}{\xi}\|g'\|.$$

Par conséquent, $\|P_\xi f\| \to 0$ lorsque $\xi \to \infty$.

Supposons que $f \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A)$, alors $P_\xi f = f$, $\lim_{\xi \to \infty} \|P_\xi f\| = 0 = \lim_{\xi \to \infty} \|f\|$, $\forall \xi > 0$ et $f = 0$. Ainsi $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$. Soit $f \in X$, on note $h = Af$ et $g = f - Af$, alors $h \in \mathcal{R}(A)$ et $Ag = Af - A^2 f = 0$ car $\mathcal{R}(A^2) = \mathcal{R}(A)$. D'où $X = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$. Ainsi $P_\xi f$ converge pour tout $f \in X$, donc on peut définir l'opérateur P dans X par :

$$Pf = \lim_{\xi \to \infty} P_\xi f, \ f \in X.$$

Alors $P \in \mathcal{B}(X)$ et $\|P\| \leq 1$.
On voit clairement que

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(A) \text{ et } \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(A).$$

Maintenant, on cherche la formule explicite de A^D. On suppose que $f \in X$, donc $f = g'' + Pf$ où $g \in X^2$. Soit $w = g - Pg + Pf$, alors $Aw = Ag = g''$ et $Pw = Pg - Pg + Pf = Pf$. Ainsi

$$(A + P)w = g'' + Pf = f$$

et

$$A^D f = (A + P)^{-1}(I - P)f = w - Pw = g - Pg. \tag{4.7}$$

On définit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$h(x) = \int_0^x \int_0^s (f(t) - Pf(t))dtds. \tag{4.8}$$

Alors h satisfait $h''(x) = f(x) - Pf(x)$ et $h(x) = g(x) + c_1 x + c_2$ pour $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Ainsi $g \in X^2$, $\lim_{|x| \to \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ et $\lim_{|x| \to \infty} \frac{h(x)}{x} = c_1$. On note

$$Qh = \lim_{|x| \to \infty} \frac{h(x)}{x} \tag{4.9}$$

dès lors que la limite existe (finie) pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On écrit
$w(x) = h(x) - (Qh)x = g(x) + c_2 \in (\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{D}(A)) \oplus \mathcal{N}(A)$. D'après (4.7), on a

$$(I_X - P)w = (I_X - P)(g + c_2) = g + c_2 - Pg - Pc_2 = g - Pg = A^D f.$$

Donc on obtient la formule explicite de $A^D f$:

$$A^D f(x) = h(x) - (Qh)x,$$

où h et Qh sont définis dans (4.8) et (4.9). Soit $E = \mathbb{R}$, on définit l'opérateur au bord Γ par $\Gamma u(x) = u_0$ et l'application Π par $(\Pi u_0)(x) = u_0$. Alors $\Gamma\Pi = 1$,

$\Gamma A^D = 0$ et $\mathcal{R}(\Pi) = \mathcal{N}(A)$.
Maintenant, on calcule l'expression de $(I_X - \lambda A^D)^{-1}$. Soit $g \in X$ la solution de l'équation $(I_X - \lambda A^D)g = f$. On a $g = f'' + Pg$ où $f \in X^2$ et

$$\begin{aligned}(I_X - \lambda A^D)g(x) &= g(x) - \lambda(I_X - P)(h(x) - (Qh)x) \\ &= g(x) - \lambda(I_X - P)\left(\int_0^x \int_0^s (g(t) - Pg(t))dtds - (Qh)x\right) \\ &= g(x) - \lambda(I_X - P)(f(x)(Qh)x) = f(x).\end{aligned}$$

Ceci implique que $g(x) = (I_X - \lambda A^D)^{-1} f(x) = f(x) + \lambda(I_X - P)(f(x) - (Qh)x)$.
Alors en vertu du théorème 4.3, on a

Théorème 4.6 *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(I_X - \lambda A^D)$ est inversible pour $\left|\lambda^{-1}\right| < \varepsilon$ et le problème au bord (4.6) admet une solution unique donnée par :*

$$u(x) = (I_X - \lambda A^D)^{-1}(A^D f + \Pi u_0)(x).$$

4.4 Porblèmes aux bords abstraits conjoints

Dans cette section, on étudie les problèmes aux bords généraux avec des opérateurs linéaires Drazin inversibles.
Soient $A \in \mathcal{C}(X)$ un opérateur Drazin inversible d'inverse de Drazin A^D et de projection spectrale P et $B \in \mathcal{C}(X)$ où $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$.
Le problème au bord conjoint pour l'inconnue $u \in \mathcal{D}(A)$ est donné par :

$$(\mathcal{GP}) \begin{cases} (A - \lambda B)u = f \\ \Gamma u = \varphi \end{cases} \tag{4.10}$$

où $f \in X$, $\varphi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Théorème 4.7 *Si $\mathcal{R}(A^D) \subset \mathcal{D}(B)$, $BA^D = A^D B$, $PB = BP$ et $(I_X - \lambda A^D B)$ est inversible pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors le problème au bord $(\mathcal{GP})$ admet une solution unique donnée par :*

$$u_\lambda^{f,\varphi} = A^D(I_X - \lambda A^D B)^{-1} f + (I_X - \lambda A^D B)^{-1} \Pi\varphi,$$

pour $f \in \mathcal{R}(A^D)$ et $\varphi \in E$.

Preuve. On suppose que $(I_X - \lambda D^D A)$ est inversible pour $\lambda \neq 0$, $BA^D = A^D B$ et $PB = BP$. Si $f \in \mathcal{R}(A^D)$ alors il existe $g \in X$ tel que $f = A^D g$, soit $\varphi \in E$.

$$\begin{aligned}
(A-\lambda B)u_\lambda^{f,\varphi} &= (A-\lambda B)A^D(I_X-\lambda A^D B)^{-1}f + (A-\lambda B)(I_X-\lambda A^D B)^{-1}\Pi\varphi \\
&= (AA^D-\lambda BA^D)(I_X-\lambda A^D B)^{-1}f \\
&+ (A-\lambda B)[I_X+\lambda A^D(I_X-\lambda A^D B)^{-1}B]\Pi\varphi \\
&= AA^D(I_X-\lambda A^D B)(I_X-\lambda A^D B)^{-1}A^D g + (A-\lambda B)\Pi\varphi \\
&+ \lambda(AA^D-\lambda BA^D)(I_X-\lambda BA^D)^{-1}\Pi\varphi \\
&= AA^D A^D g - \lambda B\Pi\varphi + \lambda AA^D B\Pi\varphi \\
&= f - \lambda B\Pi\varphi + \lambda(I_X-P)B\Pi\varphi \\
&= f.
\end{aligned}$$

D'après la définition 4.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma u_\lambda^{f,\varphi} &= \Gamma A^D(I_X-\lambda A^D B)^{-1}f + \Gamma(I_X-\lambda A^D B)^{-1}\Pi\varphi \\
&= \Gamma[I_X+\lambda A^D(I_X-\lambda BA^D)^{-1}]\Pi\varphi \\
&= \Gamma\Pi\varphi = \varphi.
\end{aligned}$$

L'unicité de la solution est obtenue de la même façon que dans la démonstration du théorème 4.3. ∎

Exemple 4.1 *(Equation des ondes forcée)*
Soit $X = L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions à carré sommable sur $\mathbb{R}^2$ et 2π-périodiques muni de la norme :

$$\|f\| = \|f\|_{L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation des ondes forcée dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ est :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) + f(x,t), \\ w(0,t) = \varphi(t). \end{cases} \tag{4.11}$$

On note pour $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$

$$\hat{f}(k,l) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(kx+lt)}f(x,t)dxdt; \quad k,l \in \mathbb{Z}.$$

On pose $A = \frac{d^2}{dx^2}$ de domaine

$$\mathcal{D}(A) = \{w \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2) : \ w, \ \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) \in AC_{2\pi}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \ et \ \frac{\partial w}{\partial t}(x,t)|_{t=0} = 0\}$$

et $B = \frac{d^2}{dt^2}$ *de domaine*

$$\mathcal{D}(B) = \{w \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2) : \ w, \ \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \in AC_{2\pi} \ et \ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)\}$$

où $AC_{2\pi} = AC_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ *est l'ensemble des fonctions absolument continues* 2π*-périodiques de* $\mathbb{R}^2$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$.
Le noyau $\mathcal{N}(A)$ *de* A *est l'ensemble des fonctions constantes complexes sur* $\mathbb{R}^2$. *Butzer et Koliha [4] sont montrés que l'opérateur* A *est inversible au sens de Drazin d'indice* $i(A) = 1$.
Soit P *la projection de chaque fonction* $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ *sur la fonction constante*

$$Pf(x,t) = \hat{f}(0,0) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,t)dxdt.$$

Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, $A^D f(x,t) = (A+P)^{-1}(I_X - P)f(x,t) = (I_X - P)g$ *où* g *est la solution de l'équation* $(A+P)g = f$.
Pour résoudre cette équation on écrit f *et* g *en séries de Fourier. On obtient*

$$(A+P)g(x,t) = -\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\hat{g}(k,l)e^{i(kx+lt)} + \hat{g}(0,0) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k,l)e^{i(kx+lt)}.$$

Comme les coefficients de la série de Fourier sont uniques alors, on a

$$g(x,t) = -\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}\hat{f}(k,l)e^{i(kx+lt)} + \hat{g}(0,0)$$

et

$$A^D f(x,t) = (I_X - P)g(x,t) = -\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}\hat{f}(k,l)e^{i(kx+lt)}.$$

On observe que $BP = PB$ *et* $A^D B = BA^D$.
Soit $g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. *On résout l'équation* $(I_X - A^D B)g(x,t) = f(x,t)$.

$$\begin{aligned}(I_X - A^D B)g(x,t) &= g(x,t) - A^D Bg(x,t)\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k,l)e^{i(kx+lt)} - \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}\frac{1}{l^2}\hat{g}(k,l)e^{i(kx+lt)}\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (1 - \frac{1}{k^2}\frac{1}{l^2})\hat{g}(k,l)e^{i(kx+lt)}.\end{aligned}$$

Alors pour $(lk)^2 \neq 1$,

$$g(x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{l^2k^2}{l^2k^2-1} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+lt)}.$$

D'où, $(I_X - A^D B)$ *est inversible d'inverse*

$$(I_X - A^D B)^{-1} f(x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{l^2k^2}{l^2k^2-1} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+lt)}, \ (lk)^2 \neq 1.$$

Soit $E = L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. *On définit l'opérateur au bord* $\Gamma : \mathcal{D}(A) \to E$ *par :*

$$\Gamma w(x,t) = w(0,t) - \varphi(t)$$

où $\varphi \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.
D'après ces notations, le problème (4.11) *devient*

$$\begin{cases} Aw(x,t) = Bw(x,t) + f(x,t), \\ \Gamma w(x,t) = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Maintenant, on définit l'opérateur $\Pi : L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \to X$ *par* $\Pi\psi(t) = \psi(t) + \varphi(t)$. *Alors* $\Gamma\Pi = I_{L^2_{2\pi}(\mathbb{R})}$ *et* $A\Pi = 0$.

En vertu du théorème 4.7, le problème au bord (4.11) *admet une solution unique.*

Exemple 4.2 *Soient* $X = C([0,1])$, $D = \frac{d}{dt}$ *de domaine* $\mathcal{D}(D) = C^1([0,1])$ *et* $Rx(t) = \int_0^t x(s)ds$. *On définit* $(Px)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$, $x \in X$.
On considère le problème :

$$\begin{cases} PDx(t) + \lambda Px(t) = f(x,t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.13}$$

On note $A = PD$ *alors* $RPARP = RP$, $RPA = ARP$ *et* $APRA = A$. *D'où* A *est inversible au sens de Drazin, tel que* $a(A) = d(A) = 1$ *et d'inverse de Drazin* $A^D = RP$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} PRx(t) &= \frac{1}{2}[\int_0^t x(s)ds - \int_0^{-t} x(s)ds] \\ &= \frac{1}{2}[\int_0^t x(s)ds - \int_0^t x(-s)ds] \\ &= R(I_X - P). \end{aligned}$$

D'où

$$(I_X + \lambda RP)(I_X - \lambda RP) = I_X - \lambda^2 R^2 (I_X - P)P = I_X.$$

Ainsi $(I_X + \lambda A^D)$ *est inversible d'inverse* $(I_X - \lambda RP)$.
Soit $E = [0, 1]$. *On définit l'opérateur au bord* $\Gamma : \mathcal{D}(A) \to E$ *par :*

$$\Gamma x(t) = x(0) = x_0$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ *et l'opérateur* $\Pi : [0, 1] \to X$ *par* $(\Pi x_0)(t) = x_0$. *Alors* $\Gamma\Pi = 1$, $\Gamma A^D f(x) = 0$ *et* $\mathcal{R}(\Pi) = \mathcal{N}(A)$.
D'après le théorème 4.7, le problème (4.13) *admet une solution unique donnée par :*

$$\begin{aligned} x_\lambda^f(t) &= RP(I_X + \lambda RP)f(t) + (I_X + \lambda RP)x_0 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t [f(s) + f(-s)]ds + x_0. \end{aligned}$$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse on a résolu des problèmes aux bords abstraits dans des espaces de Banach dans le cas scalaire et dans le cas matriciel. On a réalisé cette étude sur des opérateurs inversibles à droite (resp. à gauche) et des opérateurs inversibles au sens de Drazin ou inversibles au sens de Drazin à droite (resp. à gauche) et on a cosntruit des opérateurs aux bords associés à ces types de problèmes.
Beaucoup de résultats originaux et des généralisations intéressantes ont été obtenus, d'autre questions pertinentes autour du sujet restent néamoins posées et sont inscrites comme perspectives de notre travail :

1. Résoudre le problème au bord $(\mathcal{GP})$ avec un terme source inversible au sens de Drazin généralisé ;

2. Résoudre le problème au bord $(\mathcal{GP})$ si le terme source est un opérateur matriciel 2×2 inversible au sens de Drazin généralisé ;

3. Résoudre le problème au bord

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} (DA - \lambda B)x = f \\ \Gamma x = \varphi \end{cases}$$

lorsque D est inversible au sens de Drazin généralisé et A est inversible à droite.

Liste des notations

- X, Y, E et K : espaces de Banach.
- $\|.\|$: norme de l'espace approprié.
- $\mathcal{B}(X,Y)$: ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y et $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$.
- $Lin(X,Y)$: ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y et $Lin(X,X) = Lin(X)$.
- $\mathcal{C}(X,Y)$: ensemble des opérateurs linéaires fermés de X sur Y de domaine dense et $\mathcal{C}(X,X) = \mathcal{C}(X)$.
- $\mathcal{D}(A)$: domaine de l'opérateur A.
- $\mathcal{N}(A)$: noyau de l'opérateur A.
- $\mathcal{R}(A)$: image de l'opérateur A.
- I_X : opérateur identité sur l'espace X.
- A^* : adjoint de l'opérateur A.
- $\mathbf{R}_A$: ensemble des opérateurs inversibles à droite.
- $\mathbf{L}_A$: ensemble des opérateurs inversibles à gauche.
- $\rho(A)$: ensemble résolvant de l'opérateur A.
- $\sigma(A)$: spectre de l'opérateur A.
- $R(\lambda, A)$: opérateur résolvant ou résolvante de A.

- $\sigma_d(A)$: spectre discret de l'opérateur A.

- $\sigma_{eB}(A)$: spectre essentiel de Browder de l'opérateur A.

- $\rho_B(A)$: résolvant de Browder de l'opérateur A.

- $a(A)$: ascente de l'opérateur A.

- $d(A)$: descente de l'opérateur A.

- Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$.
- $C(\Omega)$: espace des fonctions continues sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- $C^k(\Omega)$: espace des fonctions continues de classe C^k sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

- $AC^2[0,1]$: espace des fonctions absolument continues de classe C^2 sur $[0,1]$ dont les dérivées sont dans $L^2[0,1]$.
- $AC_{2\pi}$: ensemble des fonctions absolument continues et 2π-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- $C(\Omega, X)$: espace des fonctions continues sur Ω à valeurs dans X.

- $L^2(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions à carré sommable sur $\mathbb{R}^n$.

- $H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k\}; \quad k \in \mathbb{N}$: espace de Sobolev standard sur Ω.

- $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$: espace des fonctions à carré sommable sur $(\mathbb{R}^2)$ et 2π-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- $l^p = \{(x_1, x_2, x_3, \dots), \quad (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{avec} \quad 1 \leq p < \infty\}$.

- Δ : opérateur de Laplace.

- $\overline{M}$: fermeture d'un sous-espace M de X.

Bibliographie

[1] N.U. Ahmad, *Dynamic Systems and Control with Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

[2] F.V. Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, Academic Press, New-York, 1964.

[3] F. E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators I*, Math. Ann., 142 (1961), 22-130.

[4] P.L. Butzer, J.J. Koliha, *The a-Drazin inverse and ergodic behaviour of semigroups and cosine operator functions,* J. Operator theory. 62 2 (2009), 297-326.

[5] S.L. Campbell, *Singular systems of differential equations II,* Pitman Advanced Publishing program. San Francisco. Londan. Melbourne, 1982.

[6] S.L. Campbell, C.D. Meyer, JR, N.J. Rosef, *Application of the Drazin inverse to linear systems of differential aquations with singular constant coefficients,* SIAM J. Appl. Math., Vol. 31, No. 3 (1976), 411-425.

[7] S.L. Campbell, C.D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Pitman, London, 1979.

[8] T. Carleman, *Sur la theorie des équations integrals et ses applications,* Verhandl. des Internat. Math. Kong., I, Zürich, 1932, 138-151.

[9] A. Chen, G. Jin, D. Wu, *On symplectic self-adjointness of operator matrices*, Inner Mongolia University, Hohhot, 010021, China, 2013.

[10] P.R. Chernoff, J. E. Marsden, *Properties of infinite dimentional Hamiltonian systems*, Lecture Notes in mathematics 425, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[11] M.P. Drazin, *Pseudo-inverse in associative rings and semigroups,* Amer, Math., Monthly 65 (1958), 506-514.

[12] P. Exner, T. Weidl, *Lieb-Thirring inequalities on trapped modes in quantum wires,* XIIIth International Congress an Mathematical Physics (London, 2000), 437-443, Int. Press, Boston, MA, 2001.

[13] H.O. Fattorini, *Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces*, North- Holland Mathematics Studies, Vol. 108, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[14] K.O. Friedrrichs, *Symetrics positive linear differential equations,* Comm. Pure Appl. Math., 11 (1958), 333-418.

[15] I.C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*, Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 24, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1970.

[16] J.A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford Univ. Press, New-York, 1985.

[17] S. Grabiner, J. Zemánek, *Ascent, descent and ergodic properties of linear operators,* J. Operator Theory, 48 (2002), 69-81.

[18] A. Guichardet, *Integration - analyse Hilpertienne*, Ellipses, 1997.

[19] S. Hassi, H. de Snoo, F. Szafraniec, *Operator Methods for Boundary Value Problems*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 404 (2012).

[20] D. Hilbert, *Grundzüge der Intergralgleichungen,* 2. Aufl., Dritter Abschnitt. Leipzig-Berlin (1924).

[21] M.A. Kaashoek, *Ascent, descent, nullity and defect*, A note on a paper by A. E. Taylor, Math. Ann., 172 (1967), 105-115-MR 36, 5719.

[22] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* Springer-Verlag, New-York, 1995.

[23] N. Khaldi, M. Benharrat, B. Messirdi, *On the Spectral Boundary Value Problems and Boundary Approximate Controllability of Linear Systems*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 63 (2014), 141-153.

[24] N. Khaldi, M. Benharrat, B. Messirdi, *A spectral approach for solving boundary value matrix problems : existence, uniqueness and application to symplectic elasticity*. J. Adv. Res. Appl. Math., vol 6, Issue. 4, (2014), 68-80.

[25] N. Khaldi, M. Benharrat, B. Messirdi, *Linear boundary value problems described by Drazin invertible operators*, soumis.

[26] J.J. Koliha, T.D. Tran, *The Drazin inverse for closed linear operators,* preprint, 1998.

[27] J.J. Koliha, T.D. Tran, *Closed semistable operators and singular differential equations,* Mathematical Analysis and Applications. 231 (1999), 446-458.

[28] J.J. Koliha, Trung Dinh Tran, *The Drazin inverse for closed linear operators and the asymptotic convergence of C_0-semigroups*, J. Operator theory, 46 (2001), 323-336.

[29] A.M. Krall, *Hilbert spaces, Boundary value problems and orthogonal polynomials*, Springer. Birkhäuser, 2002.

[30] H. Kovarik, S. Vugalter, T. Weidl, *Spectral estimates for two dimentional Schrodinger operators with application to quantum layers,* Comm. Math. Phys., 275 (2007), 827-838.

[31] M.G. Krèin, *The theory of selfadjoint extensions of semibounded Hermitian transformations and its applications*, I, Mat. Sbornik 20, No. 3 (1947), 431-495 (Russian).

[32] [32] M.G. Krèin, *The theory of selfadjoint extensions of semibounded Hermitian transformations and its applications,* II, Mat. Sbornik 21, No. 3 (1947), 365-404 (Russian).

[33] D.C. Lay, *Studies in spectral theory using ascent, descent, nullity and defect,* Doctoral dissertation, University of California, Los Angeles, 1966.

[34] D.C. Lay, *Characterizations of the essential spectrum of F.E. Browder,* Communicated by Felix Browder. University of California, Los Angeles, August 16, 1967.

[35] J. Lutgen, *On essential spectra of operator-matrices and their Feshbach maps,* J. Math. Anal. Appl., 289 (2004), 419-430.

[36] N.V. Mau, *Boundary value problems and controllability of linear systems with right invertible operators*, Dissertationes Math, Warszawa 1992.

[37] M.Z. Nashed, Y. Zhao, *The Drazin inverse for singular evolution equations and paratial differential operators,* World Sci. Ser. Appl. Anal., 1 (1992), 441-456.

[38] J. Von Neumann, *Allgemeine eigenwerttheorie Hermitescher funktionaloperatoren,* Math. Ann. 102 (1929), 49-131.

[39] F. Noether, *Über eine klass singulärer Integralgleichungen,* Mathem. Ann., 92 (1921), 42-63

[40] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New-York, 1983.

[41] H. Poincaré, *Leçon de Mécanique Céleste,* Dover, New-York, Vol. III, Ch.X. 1910.

[42] D. Przeworska-Rolewicz, *Algebraic Analysis*, PWN and Reidel, Warszawa, Dordrecht 1988.

[43] D. Przeworska-Rolewicz, *Algebraic theory of right invertible operators*, Studia Math., XLVIII (1973), 129-144.

[44] J. Qi, S. Chen, *Essential spectra of singular matrix differential operators of mixed order*, J. Differential Equations. 250 (12) (2011), 4219-4235.

[45] V.A. Ryzhov, *Weyl-Titchmarsh function of an abstract boundary value problem, operator colligations, and linear systems with boundary control*, Complex Anal. Oper. Theory, 3 (2009), 289-322.

[46] V.A. Ryzhov, *A general boundary value problem and its Weyl function*, Opuscula Mathematica, 27 (2) (2007), 305-331.

[47] V.A. Ryzhov, *A Note on Operator-Theoretic Approach to Classic Boundary Value Problems for Harmonic and Analytic Functions in the Complex Plan Domain*, Integr. Equ. Oper. Theory, 67 (2010), 327-339.

[48] V.A. Ryzhov, *Spectral Boundary Value Problems and their Linear Operators*, 38 p. Preprint (2009), arXiv :0904.0276v1 [math-ph].

[49] O. J. Staffans, *Well-Posed Linear Systems,* Cambridge Univ. Press (2005).

[50] A.E. Taylor, D.C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, 2nd ed. Wiley, New-York 1980.

[51] A.E. Taylor, *Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators*, Math. Ann., 163 (1966), 18-49.

[52] H.V. Thi, *Approximate controllability for systems described by invertible operators*, Control an Cybernetics, 37 (1) (2008), 39-51.

[53] C. Tretter, *Spectral theory of block operator matrices and applications*, Imperial College Press, London, 2008.

[54] H. Weyl, *The method of orthogonel projection in potential theory,* Duke Math. J., 7(1940), 411-418.

[55] W. Yao, W. Zhong, C. W. Lim, *Symplectic elasticity*, World Scientific, New Jersey. 2009.

[56] H. Yang, X. Liu, *The Drazin inverse of the sum of two matrices and its applications*, J. Comput. Appl. Math., Vol 235, (2011), 1412-1417.

[57] J. Zabczyk, *Mathematical control theory : An introduction*, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 1992.

[58] H. Zhang, C. Alatancang, W. Zhong, *The Hamiltonian system and completness of symplectic orthogonal system*, Appl. Math. Mech. (English Ed.), 18 (3) (1997), 237-242.

[59] W. Zhong, *A new systematic method in elasticity theory (in chinese)*, Dalian University of Technology Press, Dalian. 1995.

[60] W. Zhong, X. Zhong, *Method of separation of variables and Hamiltonian system*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 9 (1) (1993), 63-75.

Résumé

Dans notre travail on étudie les problèmes aux bords abstraits par les outils de la théorie des opérateurs linéaires inversibles à droite (resp. à gauche ou au sens de Drazin) et la théorie spectrale dans les espaces de Banach. On montre l'existence et l'unicité de la solution de ces problèmes dans le cas scalaire et le cas matriciel. Les résultats obtenus sont utilisés pour résoudre des systèmes linéaires du contrôle, des problèmes d'élasticité symplectique, l'équation de Schrödinger et l'équation des ondes forcée.

Mots clés : Problèmes aux bords abstraits. Opérateurs inversibles à droite (resp. à gauche). Opérateurs aux bords. Systèmes linéaires du contrôle. Contrôlabilité approchée. Opérateurs inversibles au sens de Drazin.

Abstract

In our work we study the general spectral boundary value problems with tools of the left (resp. right or Drazin) invertible linear operators theory and the spectral theory in the Banach spaces. We show the existence and the uniqueness of the solution of the spectral boundary value problems in the scaler case and in the matrix case . The obtained results are used for solve the approximate boundary controllability of the linear systems, sympletic elasticity problems, the Schrödinger equation and the forced wave equation.

Keywords : Spectral boundary value problems. Right (resp. left) invertible operators. Boundary operators. Control linear systems. Approximate controllability. Drazin invertible operators.

الملخص

الهدف من هذه الأطروحة دراسة المشاكل الحدية الطّيفية من خلال نظرية المؤثرات الخطية و النظرية الطيفية في فضاء Banach. في عملنا هذا، ننشئ مؤثرات حدية خطية متعلقة بمؤثرات خطية عكسية على جهة اليمين أو عكسية على جهة اليسار. نبرهن وجود حل وحيد لهذه المشاكل الحدية في الحالة السلمية و في الحالة المصفوفة. النتائج المتحصل عليها، استعملت لحل جمل خطية مراقبة و حل مشاكل المرونة. كذلك، تطرقنا لحل مشاكل حدية طيفية مطروحة بمؤثرات عكسية على طريقة Drazin مع تطبيقات على معادلة Schrödinger و معادلة الموجات المضغوطة.

الكلمات المفتاحية:

مشاكل حدية طيفية. مؤثرات عكسية على جهة اليمين أو عكسية على جهة اليسار. مؤثرات حدية. جمل خطية مراقبة. مراقبة مقربة. مؤثرات عكسية على طريقة Drazin.