

# VIBRATION LIBRE D'UN BRAS MANIPULATEUR

**Youcef A, Hamza cherif M, Rahou M**

*Laboratoire d'Automatique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur,  
Université Abou Bekr Belkaid, BP 230, Tlemcen 13000, Algeria.  
Tel/Fax : 043 28 56 85  
E-mail : [youcefali20042000@yahoo.fr](mailto:youcefali20042000@yahoo.fr)*

## Résumé

*Le travail présenté concerne le comportement dynamique d'un bras manipulateur. Une étude théorique permet l'établissement l'énergies cinétique et l'énergies déformation d'un bras manipulateur nécessaires à l'aboutissement des équations du mouvement. Ces dernières sont couplage par effets gyroscopiques.*

*La modélisation du système étudié est fait par la méthode des éléments finis hiérarchique trigonométrique (version -p).*

*La résolution des systèmes d'équation permette de déterminer les fréquences propres d'un bras manipulateur dans les cas linéaire.*

*Mots clés : robot, bras manipulateur; méthode des éléments finis hiérarchiques trigonométriques*

## 1 - Introduction

A la fin des années 60, (Kawasaki Heavy) réalise le premier robot japonais de production, conçu pour la soudure des automobiles. La production de robots prend sont ressort à partir de 1970 ; ils sont surtout destinés aux USA. Dans les années 1980, le Japon devient le "Géant du robot".

Les types de robots sont variés. A partir de 1960, on cherche à reproduire le mouvement des êtres vivants. Parmi ces types, il y a des robots souples

Les mouvements des robots souples (à structure déformable) peuvent entraîner l'excitation des modes propres de la structure qui rendent dans ce cas les commandes de déformation des structures des gros robots, donc indispensables pour les robots de grande dimension ou des robots légers.

Donc il est plus judicieux, lors des mouvements de ne pas engendrer les vibrations de la structure plutôt que de devoir les amortir. Une bonne conception de la commande est celle qui permet d'éviter les hautes fréquences tout en obtenant une vitesse de mouvements dans l'espace articulaire la

plus proche de robot rigide et de ne pas engendrer une trajectoire excitante.

## 2- Modélisation d'un robot souple plan

Dans une chaîne ouverte simple, est généralement composée de plusieurs éléments considérés comme étant des poutres avec des masses concentrées sur les extrémités

Ou :

-Les articulations considérées comme idéales (pas de jeu mécanique, rigide).

-Les longueurs des corps sont assez importantes par rapport aux autres dimensions.

-L'amortissement dans les bras est supposé négligeable.

Un bras manipulateur est ainsi modélisé par une poutre, une extrémité du bras est connectée à un moteur de masse  $M_i$  (appliquant un couple  $T$ , dont l'extrémité de la poutre est encastrée au moyeu du moteur). L'autre extrémité est liée à une deuxième articulation liée au moteur de masse  $M_j$ .

## 3 -Structure poutres

De manière générale, on peut considérer qu'une structure ou un élément de structure sera de type poutre si l'une de ses dimensions (longueur) est grande devant les deux autres. L'expérience montre que l'on peut faire une hypothèse simplificatrice connu sous le nom d'hypothèse de *Navier Bernoulli* [4] qui s'exprime comme suit :

« *Toute section plane normale à la fibre moyenne avant déformation reste plane et normale à cette fibre moyenne après déformation (effet de cisaillement nul)* ». On peut dire que cette hypothèse exprime le fait que les sections droites se suivent sans se déformer.

### 3-1-Champ de déplacement dans un élément poutre

Le déplacement du point P de la section droite, (voir figure n°1) est alors :

$$\begin{cases} U(x, y, z) = U_0(x) - y\theta \\ V(x, y, z) = V_0(x) \\ W(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec :

$U_0(x) = U(x, 0, 0)$  : Déplacement longitudinal.

$V_0(x) = V(x, 0, 0)$  : Déplacement transversal.

$-y\theta$  : Déplacement dû à la rotation de la section droite.

$y$  : Position d'un point M de la section droite.

### 3-2-Tenseur de déformation

Connaissant le déplacement des points d'une même section, soient :

$$\vec{f}(P) := \begin{cases} U = U_0(x) - y\theta \\ V = V_0(x) \\ W = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Les composantes  $\varepsilon_{ij}$  linéaire du tenseur de déformation sont :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

On obtient pour  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_0}{\partial x} - \theta \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_0}{\partial x} - \theta \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dans l'expression du tenseur, on note que :

✓  $\varepsilon_0$  : est la déformation relative généralisée de la ligne moyenne.

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad (5)$$

✓  $\gamma$  : est la déformation de cisaillement.

$$\gamma = \frac{\partial V_0}{\partial x} - \theta \quad (6)$$

✓  $\chi$  : est la courbure de la ligne moyenne, avec  $\rho$  le rayon de courbure.

$$\chi = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \quad (7)$$

### 3-3-Hypothèse sur le cisaillement

Dans la majorité des cas, les déformations longitudinales, correspondant à  $\varepsilon_{xx}$  due à la traction-compression et/ou à la flexion, sont nettement plus importantes que les déformations dues au cisaillement. On peut donc très souvent négliger les déformations dues au cisaillement  $\gamma$  dans le cas des poutres longues ( $L/h > 20$ ).

Donc, en supposant systématiquement  $\gamma=0$ , la relation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} - \theta = 0 \implies \frac{\partial V_0}{\partial x} = \theta \quad (8)$$

Conduisent :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3-4- Relations contraintes déformations

La relation qui lie, les contraintes et les déformations est obtenue à partir de la généralisation de la loi de Hooke :

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (10)$$

### 3-5-Energie de déformation

L'énergie de déformation du système est la somme des énergies de déformation de chaque élément.

$$U_{\Sigma} = \sum_{e=1}^n U_e \quad (11)$$

La forme générale de l'énergie de déformation sera donnée par :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dv \quad (12)$$

### 3-6-Energie cinétique

L'énergie cinétique du système c'est la somme d'énergie cinétique de chaque élément :

$$E_{\Sigma} = \sum_{e=1}^n E_{c_e} \quad (13)$$

L'énergie cinétique d'un élément en mouvement étant la somme de l'énergie de la poutre et l'énergie de la masse du moteur  $M_j$  :

$$Ec_e = Ec_p + Ec_{M_j} \quad (14)$$

$Ec_p$  : Énergie cinétique de la poutre.

$Ec_{M_j}$  : Énergie cinétique de la masse concentrée.

$$\begin{aligned} Ec_p = & \frac{1}{2} \rho \int_v \dot{h}^T \dot{h} dv + \frac{1}{2} \rho \int_v 2 \dot{h}^T \Omega \cdot h dv \\ & + \frac{1}{2} \rho \int_v h^T \cdot \Omega^2 \cdot h dv \\ & + \frac{1}{2} \rho \int_v 2 \dot{h}^T (A^T \dot{r}_i + \Omega x) dv \quad (15) \\ & + \frac{1}{2} \rho \int_v 2 h^T \Omega^T (A^T \dot{r}_i + \Omega x) dv \\ & + \frac{1}{2} \rho \int_v (\dot{r}_i^T \dot{r}_i + 2 \dot{r}_i^T A \Omega x + x^T \Omega^T \Omega x) dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ec_{M_j} = & \frac{1}{2} M_j [\dot{h}^T \dot{h} + 2 \dot{h}^T \Omega \cdot h \\ & + h^T \cdot \Omega^2 \cdot h + 2 h^T \Omega^T (A^T \dot{r}_i + \Omega x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2 \dot{h}^T (A^T \dot{r}_i + \Omega x) + (\dot{r}_i^T \dot{r}_i \\ & + 2 \dot{r}_i^T A \Omega x + x^T \Omega^T \Omega x) \Big|_{x=l} \quad (16) \end{aligned}$$

### 3-7- équations de mouvement

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement d'un élément de la structure (élément poutre avec masse concentrée à l'extrémité) à partir de l'expression de l'énergie cinétique et potentielle élémentaire. Soit le Lagrangien  $L$  tel que :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = Ec - U \quad (17)$$

### 4-Formulation par la méthode des éléments finis hiérarchiques

La caractéristique particulière de la méthode des éléments finis est que le domaine, dans lequel une solution approximative est recherchée est divisé en sous domaine appelés éléments finis. La quantité inconnue, tel que le déplacement est représentée dans chaque élément par des fonctions polynomiales simple. Ses fonctions sont appelées fonctions de formes élémentaires.

Pour une formulation donnée le choix de la subdivision (maillage) et des fonctions de formes déterminent la précision de l'approximation.

Le bras est modélisée par un seul élément, appelé élément finis hiérarchique, le champ de déplacement décrivent l'élément est donné par :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [N]^e \{q\}^e \quad (18)$$

Avec :

$$\{q\}^T = \{X_1 \dots X_p, Y_1 \dots Y_p\}^T \quad n=1, \dots, P \quad (19)$$

$P$  : Nombre de fonctions de forme.

Et

$$[N]^e = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 \\ 0 & [N_v] \end{bmatrix} \quad (20)$$

Tel que :

$$\begin{aligned} [N_u] &= [f_1(\xi), f_2(\xi) \dots f_P(\xi)] \\ [N_v] &= [g_1(\xi), g_2(\xi) \dots g_P(\xi)] \quad (21) \end{aligned}$$

Les composantes du vecteur  $\{e\}$  nécessaires à la détermination de rigidité sont données dans le système de coordonne cartésien.

$$\{e\} = [A]^e \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Avec :

$$[A]^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} & -\frac{y}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Le vecteur de déformation  $\{e\}$  est donné en fonction de  $\{q\}$  sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \{e\} &= [A]^e [N]^e \{q\} \\ \{e\} &= [B]^e \{q\} \quad (24) \end{aligned}$$

Avec :

$$[B]^e = [A]^e [N]^e \quad (25)$$

#### 4-1- L'énergie sous la forme matricielle

L'énergie cinétique et de déformation élémentaire sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 Ec_p = & \frac{1}{2} \rho S L \int_0^1 \left\{ \dot{q} \right\}^T [N]^T [N] \left\{ \dot{q} \right\} d\xi \\
 & + \frac{1}{2} \rho S L 2 \int_0^1 \left\{ \dot{q} \right\}^T [N]^T \Omega [N] \{q\} d\xi \\
 & + \frac{1}{2} \rho S L \Omega^2 \int_0^1 \{q\}^T [N]^T [N] \{q\} d\xi + \\
 & \frac{1}{2} \rho S L 2 \int_0^1 \{q\}^T [N]^T \Omega^T (A^T \dot{r}_i + \Omega x) d\xi \\
 & + \frac{1}{2} \rho S L 2 \int_0^1 \left\{ \dot{q} \right\}^T [N]^T (A^T \dot{r}_i + \Omega x) d\xi + \\
 & \frac{1}{2} \rho S L \int_0^1 \left( \dot{r}_i^T \dot{r}_i + 2 \dot{r}_i^T A \Omega x + x^T \Omega^T \Omega x \right) d\xi
 \end{aligned} \quad (26)$$

L'énergie cinétique de la masse sous la forme matricielle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 Ec_{M_j} = & \frac{1}{2} M_j \left( \left\{ \dot{q} \right\}^T [N]^T [N] \left\{ \dot{q} \right\} \right. \\
 & + 2 \left\{ \dot{q} \right\}^T [N]^T \Omega [N] \{q\} \\
 & + \{q\}^T [N]^T \Omega^T \Omega [N] \{q\} \\
 & + 2 \left\{ \dot{q} \right\}^T [N]^T \Omega l + 2 \left\{ \dot{q} \right\}^T [N]^T A^T \dot{r}_i \\
 & + 2 \{q\}^T [N]^T \Omega^T \Omega l \\
 & \left. + \dot{r}_i^T \dot{r}_i + 2 \{q\}^T [N]^T \Omega^T A^T \dot{r}_i \right)
 \end{aligned} \quad (27)$$

L'énergie de déformation sous la forme matricielle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 U_e = & \frac{1}{2} \frac{E S}{L} \int_0^1 \{q\}^T [N_{u,\xi}]^T [N_{u,\xi}] \{q\} d\xi + \\
 & \frac{1}{2} \frac{E I}{L^3} \int_0^1 \{q\}^T [N_{v,\xi\xi}]^T [N_{v,\xi\xi}] \{q\} d\xi
 \end{aligned} \quad (28)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent sous la forme matricielle.

$$\begin{aligned}
 [M]^e \left\{ \dot{q} \right\} + [G]^e \left\{ \dot{q} \right\} \\
 + \left( [K]^e + [R]^e + [P]^e \right) \{q\} = \{r\} + \{F_{ext}\}
 \end{aligned} \quad (29)$$

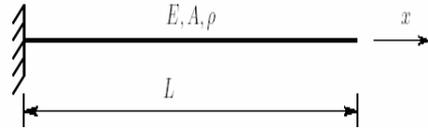


FIG1 : Propreté de la poutre E-L

La matrice de rigidité est donnée par :

$$[K]^e = E \int_V [Be]^T [Be] dV \quad (30)$$

La matrice de rigidification centrifuge est donnée par.

$$[R]_p = \rho \omega_3^2 S L \int_0^1 [N]^T [N] d\xi \quad (31)$$

$$[R]_{M_j} = M_j \omega_3^2 [N(1)]^T [N(1)] \quad (32)$$

La matrice de rigidification d'accélération angulaire [P] est donnée par :

$$[P]^e = [P]_p + [P]_{M_j} \quad (33)$$

$$[P]_p = \rho S L \int_0^1 [N]^T \dot{\Omega} [N] d\xi \quad (34)$$

$$[P]_{M_j} = M_j [N(1)]^T \dot{\Omega} [N(1)] \quad (35)$$

D'après l'énergie cinétique, la matrice masse est donnée par :

$$[M] = [M]_p + [M]_{M_j} \quad (36)$$

Par identification

$$[M]_p = \rho S L \int_0^1 [N]^T [N] d\xi \quad (37)$$

$$[M]_{M_j} = M_j [N(1)]^T [N(1)] \quad (38)$$

D'après l'énergie cinétique, la matrice gyroscopique est donnée par :

$$[G] = [G]_p + [G]_{M_j} \quad (39)$$

$$[G]_p = 2 \rho S L \int_0^1 [N]^T \Omega [N] d\xi \quad (40)$$

$$[G]_{M_j} = 2 M_j [N(1)]^T \Omega [N(1)] \quad (41)$$

#### 4-2 -Exemple Numérique

Le programme en Fortran 77 permettant de déterminer les caractéristiques dynamiques de la structure poutre (Bras manipulateur)

Les quatre premières pulsations sont données dans les tableaux suivants pour différents cas de conditions aux limites.

Les résultats calculés sont comparés avec ceux donnés par la référence [1] et qui sont illustrés dans les tableaux suivants le cas d'une poutre dans un état stationnaire ou en mouvement.

Le paramètre de fréquence et d'autres paramètres utilisés pour la validation du modèle sont donnés par :

$$\omega^* = \sqrt{\frac{\rho A L^4}{E I_z}} \omega, \quad \alpha = \sqrt{\frac{A L^2}{I_z}} \quad \text{et}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A L^4}{E I_z}} \omega_3$$

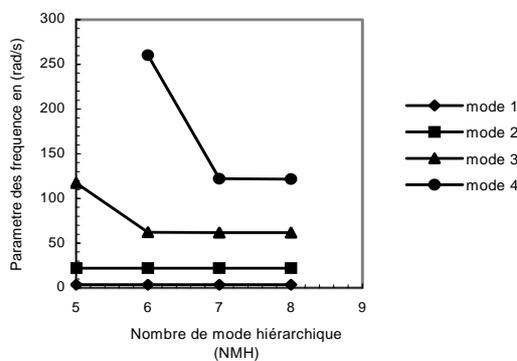
ou  $\omega^*$ ,  $\alpha$  et  $\Omega$  sont respectivement le paramètre de fréquence, paramètre de vitesse et le paramètre définissant le type de poutre utilisée (de type Bernoulli ou Timoshenko).

- Poutre Encastre-Libre : (E-L)

Tableau 1 : Comparaison des valeurs de pulsations pour une poutre (E-L) :

Modes	Solution de la MEFH	Solution exacte [7]	%
1	3.5160	3.1560	0.011
2	22.0348	22.0344	0.005
3	61.7036	61.6972	0.004
4	120.9762	120.9019	0.162

$$\% = \frac{MEFH - S.EXACT}{S.EXACT}$$



Graphique 1 : convergence des valeurs de pulsation  $\omega^*$  en fonction de NMH dans le cas de poutre (E-L).

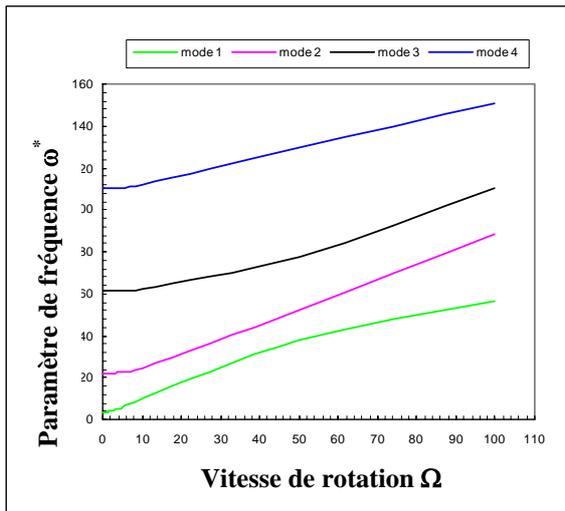
Dans le graphe 1 on donne la variation des trois premiers paramètres de fréquence en fonction du nombre de modes hiérarchiques NMH dans le cas d'une poutre encastree-libre (E-L), on voit que la convergence est assurée à partir d'un nombre de modes égal à 8.

#### 4-3-Influence de la vitesse $\Omega$ sur les valeurs des pulsations $\omega^*$ :

La variation des paramètres de pulsation des quatre premiers modes pour des variations des vitesses de rotation dans le cas d'un bras flexible.

Tableau 2 : La variation des valeurs de pulsations  $\omega^*$  en fonction de vitesse de rotation  $\Omega$ .

$\Omega$	$\omega_1^*$	$\omega_2^*$	$\omega_3^*$	$\omega_4^*$
0	3,51601	22,0348	61,7036	109,958
0,1	3,51743	22,0350	61,7037	109,958
0,2	3,52167	22,0357	61,7039	109,959
0,3	3,52874	22,0368	61,7043	109,960
0,4	3,53860	22,0383	61,7048	109,962
1	3,65489	22,0568	61,7112	109,981
1,1	3,68338	22,0615	61,7128	109,986
1,2	3,71433	22,0665	61,7145	109,991
1,3	3,74767	22,0721	61,7164	109,996
1,4	3,78335	22,0780	61,7185	110,003
2	4,04256	22,1229	61,7339	110,049
2,1	4,09263	22,1319	61,7370	110,058
2,2	4,14445	22,1414	61,7402	110,068
2,3	4,19806	22,1512	61,7436	110,078
3	4,61556	22,2325	61,7717	110,162
3,1	4,68056	22,2458	61,7763	110,176
3,2	4,74673	22,2596	61,7811	110,190
3,3	4,81402	22,2738	61,7860	110,205
4	5,31259	22,3850	61,8246	110,320
5	6,08914	22,5793	61,8925	110,523
10	10,44095	24,1317	62,4549	112,208



**Graphe2** : Influence de la vitesse  $\Omega$  sur le paramètre de fréquences  $\omega^*$  dans la bande [0-110]

Le graphe 2 présente la variation du paramètre de fréquence en fonction de la vitesse de rotation pour une variation de 0 à 110, on remarque que le deuxième, troisième et le quatrième mode varient linéairement pour les valeurs de  $\Omega$  supérieur à 20, alors que le premier mode varie presque exponentiellement.

## 5-Conclusion

La méthode des éléments finis hiérarchiques est développée et utilisée pour trouver les fréquences propres d'un bras manipulateur.

Les résultats trouvés montrent que la convergence est assurée dans le cas stationnaire et en mouvement et l'erreur comparée aux références est acceptable dans la plage des vitesses de rotation (0-10).

Dans tous les cas, les fréquences propres augmentent en augmentant la vitesse de rotation et varie presque linéairement dans le domaine (0-10). Les fréquences propres d'un bras manipulateur déterminent dans les cas linéaire, qui utilise pour une bonne conception système de commande.

## 6-Référence

[1] : Bouclikha B. «bras manipulateur» PFE ing : GM université de Tlemcen 1997

[2] : Bouzegauoi N. Bousmaha R. PFE ing : électronique université de Tlemcen 1997  
«Commande d'un bras souple par l'approche QFT»

[3] : J-P.Lallemand S.Zeghloul  
«Robotique aspects fondamentaux» Masson paris,1994

[4] : Serge Laroze

« Résistance des matériaux et structures»  
Tome 2 : théorie des poutres

[5] : Hamza cherif S.M

Thèse magister GM option structure université de Tlemcen 2000

«Étude de la propagation d'onde libre et forcée dans une coque cylindrique de Mindlin sur appuis simple et raidie par des raidisseurs orthogonaux »

[6] : Zinai A. , Houmat A., Hamza cherif S.M

«Vibration libre d'une coque cylindrique mince sur appuis simpl orthogonaux »

[7] : M.Geradin-D.Rixen «Théorie des vibrations» 22<sup>e</sup> éd-paris Masson,1996

[8] : H.H.Yoo and S.H.Shin

« Vibration analysis of rotating cantilever beams»