

Modélisation Par La Méthode Des Eléments Finis Des Vibrations Libre A Grandes Amplitudes Des Plaques Minces Rectangulaires

Belalia S.A. et Houmat A

Département de Génie mécanique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Université Abou-Bakr BELKAID - Tlemcen

Email : belaliasidou@yahoo.fr

Résumé-

Les vibrations à grandes amplitudes des plaques minces rectangulaires sont étudiées en utilisant la formulation directe par éléments finis et un élément rectangulaire conforme. Des résultats sont présentés pour des plaques rectangulaires avec différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux d'autres chercheurs.

1. Introduction

Les vibrations à grandes amplitudes des plaques minces rectangulaires ont été étudiées par beaucoup de chercheurs. Chuh-Mei [1] a présenté une formulation par éléments finis pour obtenir les pulsations non linéaires des plaques rectangulaires pour différentes conditions aux limites. Sa formulation est basée sur la connaissance de la matrice de rigidité de la géométrie correspondante à l'addition des forces planes dans la matrice de rigidité et à la matrice masse.

Dans cet article, une formulation simple par éléments finis est présentée pour les vibrations à grandes amplitudes des plaques. Cette formulation est basée sur la linéarisation des relations non linéaires déformation-déplacement puis l'itération pour trouver la pulsation non linéaire de la plaque. La formulation actuelle ne prend pas en considération les forces planes. Les rapports de pulsations non linéaires aux pulsations linéaires du mode fondamental sont calculés pour les plaques rectangulaires simplement appuyées et encastrées et des plaques carrées avec différentes conditions aux limites.

2 Formulation

Les relations déformation-déplacement non linéaires d'une plaque sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1)$$

On pose :

$$f1 = \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad f2 = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

L'élément fini utilisé dans cette formulation est un élément rectangulaire conforme avec 16 degrés de liberté. La fonction de déplacement est assumée telle que :

$$\begin{aligned} w(x, y) = & c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x^2 + c_5 \cdot xy + \\ & c_6 \cdot y^2 + c_7 \cdot x^3 + c_8 \cdot x^2 y + c_9 \cdot xy^2 + c_{10} \cdot y^3 + \\ & c_{11} \cdot x^3 y + c_{12} \cdot x^2 y^2 + c_{13} \cdot xy^3 + c_{14} \cdot x^3 y^2 + \\ & c_{15} \cdot x^2 y^3 + c_{16} \cdot x^3 y^3 \end{aligned} \quad (3)$$

Les constantes $c_1 - c_{16}$ sont déterminées à partir des inconnus nodaux :

$$\{w_i, \partial w_i / \partial x, \partial w_i / \partial y, \partial^2 w_i / \partial x \partial y\}.$$

La formule générale de LAGRANGE pour le cas de la vibration libre est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (4)$$

où U est l'énergie de déformation et T est l'énergie cinétique de l'élément données par :

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} C \iint \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (5)$$

$$\text{où } C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

et

$$T = \frac{\rho}{2} h \iint \dot{w}^2 dx dy \quad (7)$$

A partir des équations (5), (6) et (7), la matrice de rigidité élémentaire [k] et la matrice de masse élémentaire [m] peuvent être obtenues. Après assemblage des matrices élémentaires dans les matrices globales on obtient l'équation du problème vibratoire suivante :

$$[K] \{q\} - \omega^2 [M] \{q\} = 0 \quad (8)$$

Avec [K] est la matrice de rigidité globale, [M] est la matrice de masse globale, ω est la pulsation propre et {q} est le vecteur des déplacements nodaux. L'équation (8) peut être résolue en utilisant un algorithme standard pour obtenir les valeurs et les vecteurs propres.

Il doit être noté ici que les valeurs des fonctions f1 et f2 de l'équation (2) ne sont pas connues et comme nous avons un procédé itératif on peut admettre que f1 = f2 = 0 pour la première itération. Pour les itérations qui suivent les fonctions f1 et f2 peuvent être évaluées à partir des vecteurs propres calculés et qui correspondent à une amplitude donnée en un point précis dans la plaque pour l'itération précédente. L'itération continue jusqu'à une valeur de la fréquence non linéaire pour laquelle correspond un test de convergence de l'ordre de 10^{-6} .

3 Résultats

Des résultats numériques sont présentés pour des plaques carrées et rectangulaires avec différentes conditions aux limites.

Le tableau 1 présente le rapport de pulsations non linéaires aux pulsations linéaires (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque carrée simplement appuyée pour le mode fondamental en fonction du rapport de l'amplitude à l'épaisseur de 0-1 et les compare avec les résultats de Chuh-Mei [1], Chu-Herrman [2] (basé sur la méthode de perturbation) et Wah [3] (basé sur la méthode de Galerkin modifiée) sont également inclus dans le tableau 1 pour la comparaison. Dans les tableaux qui suivent les résultats obtenus sont comparés seulement avec les résultats de Chuh-Mei, car ce dernier a travaillé avec un maillage s'étendant sur toute la plaque. Les résultats du tableau 1 sont représentés dans la figure 1.

Les tableaux 2, 3, 4 présentent les rapports de pulsations (mode fondamental) d'une plaque carrée avec différentes conditions au limites et pour le rapport Am/h de 0-1. La figure 2 représente graphiquement ces résultats.

Les tableaux 5,6 présentent les résultats obtenus pour une plaque rectangulaire simplement appuyée et encadrée. Ces résultats sont représentés dans la figure 3.

Tableau 1. Rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque carrée AAAA (mode fondamental).

Am/h	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
Solution présente	1.000	1.018	1.071	1.152	1.254	1.371
Chuh-Mei	1.000	1.018	1.071	1.153	1.259	1.383
Chu-Herrman	1.000	1.019	1.076	1.163	1.273	1.402
Wah	1.000	1.022	1.086	1.183	1.307	1.449

Tableau 2. Rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque carrée EEEE (mode fondamental).

Am/h	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
Solution présente	1.000	1.007	1.027	1.059	1.101	1.152
Chuh-Mei	1.000	1.006	1.026	1.056	1.097	1.143

Tableau 3. Rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque carrée AAEE (mode fondamental)

Am/h	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
Solution présente	1.000	1.014	1.052	1.110	1.182	1.264
Chuh-Mei	1.000	1.014	1.053	1.112	1.186	1.270

Tableau 4. Rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque carrée AEAE (mode fondamental)

Am/h	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
Solution présente	1.000	1.009	1.037	1.081	1.139	1.207
Chuh-Mei	1.000	1.010	1.038	1.083	1.143	1.214

Tableau 5 : Rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque rectangulaire AAAA (Mode fondamental)

Am/h	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
Solution présente	1.000	1.024	1.091	1.193	1.322	1.471
Chuh-Mei	1.000	1.024	1.092	1.196	1.326	1.476

Tableau 6 : Rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque rectangulaire EEEE (Mode fondamental)

Am/h	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
Solution présente	1.000	1.007	1.028	1.062	1.108	1.165
Chuh-Mei	1.000	1.007	1.029	1.064	1.110	1.163

A: appui simple, E: encastrement

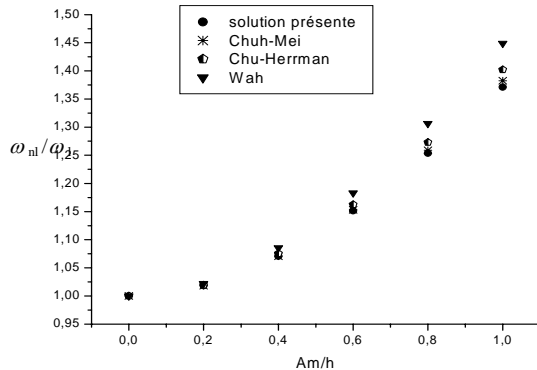


Figure 1. rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque carrée simplement appuyée

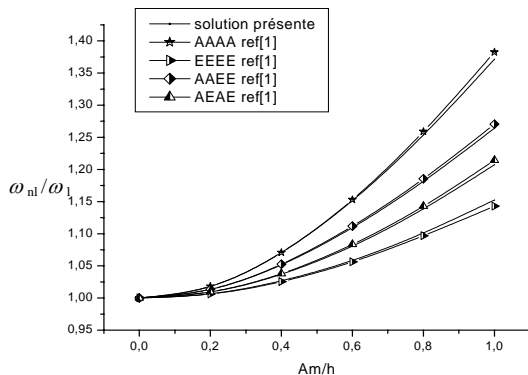


Figure 2. rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque carrée avec différentes conditions aux limites

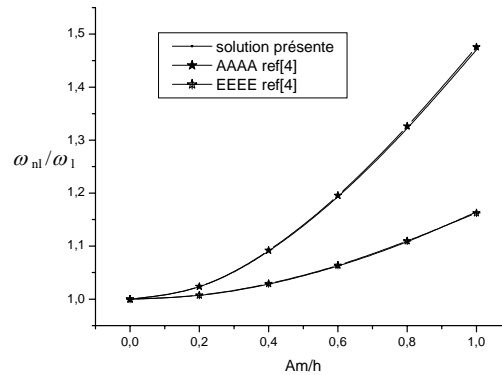


Figure 3. rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) d'une plaque rectangulaire avec différentes conditions aux limites

De la figure 1 en comparant les résultats obtenus avec les résultats de Chuh-Mei, Chu-Herrman et Wah, on remarque que la solution présente est très proche de ceux de Chuh-Mei. et ceux de Wah sont légèrement supérieurs aux trois résultats. On peut dire que la solution présente est précise.

Les tableaux 2, 3, 4 présentent le rapport de pulsations (mode fondamental) d'une plaque carrée EEEE, AAEE, AEAE. Ces résultats sont très proches de ceux de Chuh-Mei. Une remarque importante est que lorsque la plaque est moins restreinte le rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) est très important, donc les conditions aux limites influent sur ce rapport.

Les tableaux 5,6 donnent le rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) du mode fondamental d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et encadrée ($A/B=2$). On remarque que les résultats obtenus sont presque identiques à ceux de Chuh-Mei. De même, on remarque que le rapport de pulsations (ω_{nl}/ω_l) pour la plaque simplement appuyée est plus important que celui de la plaque encadrée.

4 Conclusion

Les rapports de pulsations non linéaires aux pulsations linéaires du mode fondamental sont présentés en fonction du rapport de l'amplitude sur l'épaisseur des plaques carrées et rectangulaires avec différentes conditions aux limites. Une formulation par éléments finis utilisant un élément conforme est utilisée. Les comparaisons avec d'autres travaux montrent que les résultats obtenus sont précis. La méthode peut être facilement utilisée pour le calcul des rapports de pulsations non linéaires aux pulsations linéaires pour des modes supérieurs.

5 References

- [1] Chuh-Mei, Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibrations of beams and plates, *Computers&structures*, vol. 3, pp.163-174,1973.
- [2] H.N.Chu & G.Herrman, Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates.*Appl.Mech.*23, 532-540(1956).
- [3] W.Han & M.petyt, Geometrically nonlinear vibration analysis of thin rectangular plates using the hierarchical finite element method –I: the fundamental mode of isotropic plates, *Computers&structures*, vol.63, No.2, pp.295-308, 1997.
- [4] G.V.Rao, I.S.Raju & K.K.Raju, A finite element formulation for large amplitude flexural vibrations of thin rectangular plates, *Computers&structures*, vol.6, pp.163-167, 1976