République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaïd Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Equations différentielles Ordinaires

Présentée par

Benaissa Mohamed el Amine

Dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal et transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie

Soutenue le : 22/09 /2015 devant la commission d'examen

M. Derhad Mohammed	Prof. U.A.B.B Tlemcen	Encadreur
M. Yebdri Mustapha	Prof. U.A.B.B Tlemcen	Président
M. Messirdi Bachir	M. C. B. U.A.B.B Tlemcen	Examinateur
M. Messirdi Miloud	M. C. A. U.A.B.B Tlemcen	Examinateur

Année universitaire : 2014-2015

Dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal et transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie

Benaissa Mohamed el Amine

Table des Matières

0.1 **Remerciements** 2
0.2 **Dédicace** 3

Introduction **4**

1 Intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville **5**
1.1 Introduction 5
1.2 Intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville 5
1.3 Quelques propriétés des intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville 8

2 Dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal **16**
2.1 Introduction 16
2.2 Dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal . . . 16
2.3 Propriétés de la dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal 21
2.4 Dérivées directionnelles fractionnaires locales au sens de Kolwankar-Gangal 29
2.4.2 Formule de Taylor fractionnaire locale 34

3 Transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie **39**
3.1 Introduction 39
3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Jumarie 39
3.3 Fonction de Mittag-Leffler 44
3.4 Intégration par rapport à $(dt)^\alpha$ 48
3.5 Transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie . . . 49
3.6 Exemples 55
3.7 Applications de la transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie pour la résolution des problèmes de Cauchy . 58

0.1 Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur Derhad Mohammed , qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, ses conseils et son écoute qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur le Professeur Yebdri Mustapha, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées; aussi je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury.

Mes remerciements vont à mes Professeurs Monsieur Messirdi Bachir et Monsieur Messirdi Miloud d'avoir accepté d'évaluer mon mémoire et vous m'avez honoré par vos participations a mon jury de soutenance.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur le Chef de Département de Mathématiques Monsieur Mebkhout Benmiloud qui a été toujours disponible pour nous et nous a vraiment aidé dans tous les domaines.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du Département de Mathématiques, qui m'ont accompagné et aidé à m'améliorer durant mon cursus de formation.

0.2 Dédicace

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux je dédie
ce modeste travail à :
Mes chers parents qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser.
ce travail de recherche dans les meilleures conditions.
A mon frère youcef.
A tous les membres de ma famille paternelle et maternelle.
A mes amies qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études.
Mes collègues de département, je remercie chacun de vous pour le
soutien et l'aide qu'il m'a apporté.

Introduction

L'objet de ce mémoire est de donner quelques résultats concernant la dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal. On donne aussi quelques résultats et applications concernant la transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie.

Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions et résultats concernant l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Dans le deuxième chapitre, on donne la définition de la dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar- Gangal et on donne quelques résultats et propriétés concernant cette notion de dérivée.

Enfin, le troisième chapitre est consacré à la transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie. Dans ce chapitre, on donne quelques propriétés et résultats concernant cette transformée de Laplace. On donne aussi quelques exemples concernant la résolution de certains problèmes de Cauchy.

Chapitre 1

Intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés concernant les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [4], [10], [12] et [14].

1.2 Intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire à gauche de x d'ordre α avec $\alpha > 0$ la fonction $I^{\alpha}_{a,-}$ définie par*

$$\left(I^{\alpha}_{a,-} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{-\alpha+1}} dt, \tag{1.1}$$

où $x > a$ et Γest la fonction Gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt.$$

Définition 1.2.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire à droite de x d'ordre α avec $\alpha > 0$ la fonction $I^{\alpha}_{b,+}$ définie par*

$$\left(I^{\alpha}_{b,+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{-\alpha+1}} dt, \tag{1.2}$$

où

$$b > x.$$

Définition 1.2.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche de x d'ordre α de f et on la note $\frac{d_{-}^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}}$ la fonction définie par*

$$\frac{d_{-}^{\alpha} f(x)}{d(x-a)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \tag{1.3}$$

où $x > a$ et $n-1 < \alpha < n$ avec n un entier naturel.

Définition 1.2.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite de x d'ordre α de f et on la note $\frac{d_{+}^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}}$ la fonction définie par*

$$\frac{d_{+}^{\alpha} f(x)}{d(b-x)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt,$$

où $b > x$ et $n-1 < \alpha < n$ avec n un entier naturel.

Remarque 1.2.5 *Pour la suite de ce mémoire, on note*

$$\frac{d_{-}^{\alpha} f(x)}{d(x-a)^{\alpha}} = \frac{d^{\alpha} f(x)}{d(x-a)^{\alpha}}.$$

Définition 1.2.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α de f et on la note $\frac{d^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}}$ la fonction définie par*

$$\frac{d^{\alpha} f(x)}{d(x-a)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt, \tag{1.4}$$

où $\alpha < 0$ et $x > a$.

Exemple 1.2.7 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = (x-a)^{\beta}, \ x > a, \ \beta > 0.$$

Soit $n-1<\alpha<n$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^\beta dt.\end{aligned}$$

Posons

$$t = a+(x-a)v.$$

Alors

$$dt = (x-a)dv.$$

Par suite, il résulte que

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^1 (x-a)^{n-\alpha-1}(1-v)^{n-\alpha-1}(x-a)^\beta v^\beta (x-a)dv \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\frac{(x-a)^{n-\alpha+\beta}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 (1-v)^{n-\alpha-1} v^\beta dv \\ &= \frac{d^n(x-a)^{n-\alpha+\beta}}{dx^n}\frac{\beta(n-\alpha,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)},\end{aligned}$$

où β est la fonction Béta d'Euler définie par

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ (x,\ y\in\mathbb{R}),$$

et comme

$$\beta(r_1,r_2) = \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_1+r_2)},$$

alors

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \frac{d^n(x-a)^{n-\alpha+\beta}}{dx^n}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)\Gamma(n-\alpha)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha+\beta}.$$

On distingue deux cas
Cas 1: $n-\alpha+\beta\in\{0,1,2,...,n-1\}$.
On a

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}.0 = 0.$$

Cas 2: *$n-\alpha+\beta \notin \{0,1,2,...,n-1\}$.*
On a

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(n-\alpha+\beta)...(n-\alpha+\beta-n+1)(x-a)^{-\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{-\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{-\alpha+\beta}. \tag{1.5}$$

Remarque 1.2.8 *On a*

$$\frac{d^\alpha 1}{d(x-a)^\alpha} = \frac{d^\alpha (x-a)^0}{d(x-a)^\alpha},$$

donc d'après (1.5)*, on obtient*

$$\frac{d^\alpha 1}{d(x-a)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}(x-a)^{-\alpha},\ x>a. \tag{1.6}$$

1.3 Quelques propriétés des intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Proposition 1.3.1 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^n avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $n-1<\alpha<n$. Alors*

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt. \tag{1.7}$$

Démonstration : *On a*

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt.$$

On utilise une intégration par parties. On pose

$$u = f(t) \ \text{ et } v' = (x-t)^{n-\alpha-1}.$$

Alors

$$u' = f'(t) \ \text{ et } v = -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left[f(a)(x-a)^{n-\alpha} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f'(t)}{(n-\alpha)(x-t)^{\alpha-n}} dt \\
&= \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(1-\alpha) f(a)(x-a)^{-\alpha}}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
&= \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.
\end{aligned}$$

On utilise une deuxième intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} &= \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[f'(a)(x-a)^{n-\alpha} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^x \frac{f^{(2)}(t)}{(n-\alpha)(x-t)^{\alpha-n}} dt \\
&= \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\
&\quad + \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(2-\alpha) f'(a)(x-a)^{1-\alpha}}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x \frac{f^{(2)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt,
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} &= \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{f'(a)(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x \frac{f^{(2)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.
\end{aligned}$$

En répétant ce processus n fois, on obtient

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

■

Corollaire 1.3.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors*

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = 0 \text{ si et seulement si } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

où $n-1 \leq \alpha < n$ et c_j sont des constants.

Démonstration : Supposons que les hypothèses du corollaire sont satisfaites.

Si

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} &= \frac{d^\alpha \left(\sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j}\right)}{d(x-a)^\alpha} \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{d^\alpha (x-a)^{\alpha-j}}{d(x-a)^\alpha}. \end{aligned}$$

D'après l'exemple précédent, on obtient

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{n-j},$$

comme

$$n - j < n.$$

Alors

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = 0.$$

Maintenant si

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} = 0.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha f(x)}{d(x-a)^\alpha} &= \frac{d^n}{dx^n}\left(I_{a,-}^{n-\alpha} f\right)(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\left(I_{a,-}^{n-\alpha} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j (x-a)^j.$$

Appliquons l'operateur $I_{a,-}^{\alpha}$ aux deux membres de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned}I_{a,-}^{\alpha}\left(I_{a,-}^{n-\alpha} f\right)(x) &= I_{a,-}^{\alpha}\left[\sum_{j=0}^{n-1} d_j (x-a)^j\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} d_j I_{a,-}^{\alpha}(x-a)^j \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} d_j \int_a^x \frac{(t-a)^j}{(x-t)^{-\alpha+1}} dt.\end{aligned}$$

Posons

$$t = a + (x-a)v.$$

Alors

$$\begin{aligned}\left(I_{a,-}^{n} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} d_j (x-a)^{\alpha+j} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} v^j dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} d_j (x-a)^{\alpha+j} \beta(\alpha, j+1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(j+1) d_j}{\Gamma(\alpha+j+1)} (x-a)^{\alpha+j}.\end{aligned}$$

Appliquons l'operateur $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ aux deux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a,-}^{n} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(j+1) d_j}{\Gamma(\alpha+j+1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\alpha+j}.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(j+1)d_j}{\Gamma(\alpha+j+1)}(\alpha+j)(\alpha+j-1)...(\alpha+j-n+1)(x-a)^{\alpha+j-n} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} k_j(x-a)^{\alpha+j-n},
\end{aligned}
$$

où

$$k_j = \frac{\Gamma(j+1)d_j}{\Gamma(\alpha+j+1)}(\alpha+j)(\alpha+j-1)...(\alpha+j-n+1).$$

Si on pose

$$n-j=l,$$

on obtient

$$f(x) = \sum_{l=1}^{n} c_l(x-a)^{\alpha-l},$$

où

$$k_{n-l} = c_l.$$

■

Définition 1.3.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et $(]a_k, b_k[)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite finie de sous-intervalles disjoints de $[a,b]$. On dit que f est absolument continue sur $[a,b]$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ telle que*

$$\sum_{k=0}^{n} |b_k - a_k| < \delta(\varepsilon) \;\; alors \; \sum_{k=0}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Remarque 1.3.4 *On note par $AC[a,b]$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.*

Proposition 1.3.5 *([14, Chapitre 1]) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors*

$$f \in AC[a,b] \;\; si\ et\ seulement\ si \; f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt,$$

avec

$$g \in L^1([a,b]).$$

Remarque 1.3.6 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $AC^n[a,b]$ l'ensemble suivant*

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \; tels\ que\ f \; existe\ sur \; [a,b] \;\; et\ f^{(n-1)} \in AC[a,b] \right\}.$$

Proposition 1.3.7 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $I_{a,-}^{n-\alpha} f \in AC^n [a,b]$. *Alors*

$$\left(I_{a,-}^{\alpha} \circ \frac{d^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}} \right)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \lim_{x \to a^+} \left[\frac{d^{\alpha-j} f(x)}{d(x-a)^{\alpha-j}} \right] \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \tag{1.8}$$

où $n-1 < \alpha < n$ *et* $x > a$.

Démonstration : On sait que

$$\left(\frac{d^{\alpha}}{d(x-a)^{\alpha}} \circ I_{a,-}^{\alpha} f \right)(x) = f(x).$$

Si on remplace f par $\frac{d^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}}$, on obtient

$$\left(\frac{d^{\alpha}}{d(x-a)^{\alpha}} \circ I_{a,-}^{\alpha} \circ \frac{d^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}} \right)(x) = \frac{d^{\alpha} f(x)}{d(x-a)^{\alpha}}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{d^{\alpha}}{d(x-a)^{\alpha}} \circ \left(I_{a,-}^{\alpha} \circ \frac{d^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}} - f \right)(x) = 0.$$

D'après le corollaire précédent, on a

$$\left(I_{a,-}^{\alpha} \circ \frac{d^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}} \right)(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j}. \tag{1.9}$$

Appliquons l'operateur $I_{a,-}^{n-\alpha}$ aux deux membres de (1.9), on obtient

$$\left(I_{a,-}^{n-\alpha} \circ I_{a,-}^{\alpha} \circ \frac{d^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}} \right)(x) = \left(I_{a,-}^{n-\alpha} f \right)(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j I_{a,-}^{n-\alpha} (x-a)^{\alpha-j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left(I_{a,-}^{n} \circ \frac{d^{\alpha} f}{d(x-a)^{\alpha}} \right)(x) &= \left(I_{a,-}^{n-\alpha} f \right)(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\alpha-j} \, dt. \end{aligned}$$

Posons

$$t = a + (x-a)v,$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(I_{a,-}^{n}\circ\frac{d^{\alpha}f}{d(x-a)^{\alpha}}\right)(x) &= \left(I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-j}\int_0^1(1-v)^{n-\alpha-1}\,v^{\alpha-j}dv \\
&= \left(I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-j}\beta(n-\alpha,\alpha-j+1) \\
&= \left(I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)}(x-a)^{n-j}.
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'operateur $\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}$ aux deux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\circ I_{a,-}^{n}\circ\frac{d^{\alpha}f}{d(x-a)^{\alpha}}\right)(x) &= \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\circ I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}(x-a)^{n-j}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\left(I_{a,-}^{k}\circ\frac{d^{\alpha}f}{d(x-a)^{\alpha}}\right)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\circ\left(I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}(x-a)^{n-j} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\circ\left(I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)}(n-j)\,...(k-j+1)(x-a)^{k-j},
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\left(I_{a,-}^{k}\circ\frac{d^{\alpha}f}{d(x-a)^{\alpha}}\right)(x) &= \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\circ I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{k}\frac{c_j\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)}(n-j)\,...(k-j+1)(x-a)^{k-j}.
\end{aligned}$$

Par passage a la limite quand x tend vers a^+, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\left(I_{a,-}^{k}\circ\frac{d^{\alpha}f}{d(x-a)^{\alpha}}\right)(x) &= \lim_{x\to a^+}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\circ I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x)\\ &+\lim_{x\to a^+}\sum_{j=1}^{k}\left[\begin{array}{c}\frac{c_j\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)}(n-j)\ldots(k-j+1)\\ \times(x-a)^{k-j}\end{array}\right].\end{aligned}$$

Alors

$$0=\lim_{x\to a^+}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\circ I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x)+c_k\Gamma(\alpha-k+1).$$

C'est-à-dire

$$c_k=-\frac{\lim_{x\to a^+}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\circ I_{a,-}^{n-\alpha}f\right)(x)}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{1.10}$$

Donc d'aprés (1.9) et (1.10), on obtient

$$\left(I_{a,-}^{\alpha}\circ\frac{d^{\alpha}f}{d(x-a)^{\alpha}}\right)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n}\lim_{x\to a^+}\left[\frac{d^{\alpha-j}f(x)}{d(x-a)^{\alpha-j}}\right]\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

■

Chapitre 2

Dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne la définition de la dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar- Gangal et on donne quelques résultats et propriétés concernant cette notion de dérivée.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1], [3] et [11].

2.2 Dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal

Définition 2.2.1 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $0 < \alpha < 1$. *On appelle dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal d'ordre* α *de* f *et on la note* $\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm} f$ *la fonction définie par*

$$\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm} f(x) = \lim_{y \to x^{\pm}} \frac{d^{\alpha}(f(y) - f(x))}{d(\pm(y - x))^{\alpha}}. \tag{2.1}$$

Exemple 2.2.2 *Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x) = x^p, \ x > 0 \ \textit{et} \ \ 0 < p < 1.$$

Calculons $\mathbb{D}^{q}_{\pm} f$ *au point* 0 *avec* $0 < q < 1$.
On a

$$\mathbb{D}^{q}_{\pm} f(0) = \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{d^{q}(f(y) - f(0))}{d(\pm(y - 0))^{q}}.$$

Comme

$$f(0) = 0.$$

Alors

$$\mathbb{D}^q_{\pm} f(0) = \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{d^q f(y)}{d(\pm(y-0))^q}.$$

D'aprés (1.3), *on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^q_{\pm} f(0) &= \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{f(t)}{(y-t)^{q-1+1}} dt. \\ &= \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{t^p}{(y-t)^q} dt. \end{aligned}$$

Posons

$$t = yv,$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^q_{\pm} f(0) &= \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dy} \int_0^1 y^{1-q+p} (1-v)^{-q} v^p dv \\ &= \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dy} y^{1-q+p} \int_0^1 (1-v)^{-q} v^p dv. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{D}^q_{\pm} f(0) = \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dy} y^{1-q+p} \beta(1-q, p+1).$$

Alors

$$\mathbb{D}^q_{\pm} f(0) = \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{d}{dy} y^{1-q+p} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(1-q+p+1)}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^q_{\pm} f(0) &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(1-q+p+1)} \lim_{y \to 0^{\pm}} \left[(1-q+p)\, y^{-q+p} \right] \\ &= \begin{cases} 0 \ si\ q < p, \\ \Gamma(p+1) \ si\ p = q, \\ \infty \ si\ p < q. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 2.2.3 *1) Si f est dérivable au point x, alors*

$$\lim_{\alpha \to 1} \mathbb{D}^{\alpha}_{\pm} f(x) = f'(x).$$

2) On a $\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm}(C) = 0$ pour tout $C \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$.

Théorème 1 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x)$ *existe pour* $0 < \alpha < 1$. *Alors*

i)

$$f(y) = f(x) \pm \frac{\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\pm (y-x)\right]^{\alpha} + R_{\pm}(y,x), \tag{2.2}$$

où

$$R_{\pm}(y,x) = \pm \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{y-x} \left[\pm (y-x-t)\right]^{\alpha} \frac{dF_{\pm}(x, \pm t, \alpha)}{dt} dt. \tag{2.3}$$

ii)

$$\lim_{y \to x^{\pm}} \frac{R_{\pm}(y,x)}{\left[\pm (y-x)\right]^{\alpha}} = 0. \tag{2.4}$$

Démonstration : *i) On pose*

$$F_{\pm}(x, \pm (y-x), \alpha) = \frac{d^{\alpha}(f(y) - f(x))}{d(\pm(y-x))^{\alpha}}. \tag{2.5}$$

On a

$$I_{0,-}^{\alpha} F_{+}(x, y-x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{y-x} \frac{F_{+}(x,t,\alpha)}{(y-x-t)^{-\alpha+1}} dt.$$

Posons

$$t = v - x.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{y-x} \frac{F_{+}(x,t,\alpha)}{(y-x-t)^{-\alpha+1}} dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{y} \frac{F_{+}(x,v-x,\alpha)}{(y-v)^{-\alpha+1}} dv \\ &= \left(I_{x,-}^{\alpha} F_{+}(x,.,\alpha)\right)(y-x), \end{aligned}$$

comme

$$\frac{d^{\alpha-j} f(x)}{d(x-a)^{\alpha-j}} = I_{a,-}^{j-\alpha}(f)(x).$$

Alors d'après (1.8), *on a*

$$\begin{aligned} \left(I_{x,-}^{\alpha} F_{+}(x,.,\alpha)\right)(y-x) &= I_{x,-}^{\alpha} \left(\frac{d^{\alpha}(f(y)-f(x))}{d((y-x))^{\alpha}}\right) \\ &= f(y) - f(x) \\ &\quad - \left[\lim_{y \to x^{+}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{y} \frac{\left[(f - f(x))\right](t)}{(y-t)^{\alpha-1+1}} dt\right] \\ &\quad \times \left[\frac{(y-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]. \end{aligned}$$

Comme $0<\alpha<1$, *on a*

$$\left[\lim_{y\to x^+}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^y\frac{\left[(f-f(x))\right](t)}{(y-t)^{\alpha}}dt\right]\left[\frac{(y-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]=0.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= \left(I^{\alpha}_{x,-}F_+(x,.,\alpha)\right)(y-x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{y-x}\frac{F_+(x,t,\alpha)}{(y-x-t)^{-\alpha+1}}dt. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{y-x}\frac{F_+(x,t,\alpha)}{(y-x-t)^{-\alpha+1}}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{(y-x-t)^{\alpha}}{\alpha}F_+(x,t,\alpha)\right]_0^{y-x}\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{y-x}\frac{(y-x-t)^{\alpha}}{\alpha}\frac{dF_+(x,t,\alpha)}{dt}dt. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} F_+(x,0,\alpha) \quad &: = \lim_{y\to x^+}F_+(x,(y-x),\alpha)\\ &= \lim_{y\to x^+}\frac{d^{\alpha}(f(y)-f(x))}{d(+(y-x))^{\alpha}}\\ &= \mathbb{D}^{\alpha}_+f(x). \end{aligned}$$

Alors

$$f(y)-f(x)=\frac{\mathbb{D}^{\alpha}_+f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}(y-x)^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{y-x}(y-x-t)^{\alpha}\frac{dF_+(x,t,\alpha)}{dt}dt.$$

C'est-à-dire

$$f(y)=f(x)+\frac{\mathbb{D}^{\alpha}_+f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}(y-x)^{\alpha}+R_+(y,x),$$

avec

$$R_+(y,x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{y-x}(y-x-t)^{\alpha}\frac{dF_+(x,t,\alpha)}{dt}dt.$$

D'une façon similaire, on montre que

$$f(y)=f(x)-\frac{\mathbb{D}^{\alpha}_-f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\left[-(y-x)\right]^{\alpha}+R_-(y,x),$$

avec

$$R_{-}(y,x)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{0}^{y-x}\left[-\left(y-x-t\right)\right]^{\alpha}\frac{dF_{-}(x,-t,\alpha)}{dt}dt.$$

En conclusion

$$f(y)=f(x)\pm\frac{\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\pm\left(y-x\right)\right]^{\alpha}+R_{\pm}(y,x),$$

avec

$$R_{\pm}(y,x)=\pm\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{0}^{y-x}\left[\pm\left(y-x-t\right)\right]^{\alpha}\frac{dF_{\pm}(x,\pm t,\alpha)}{dt}dt.$$

ii) On a

$$\frac{R_{+}(y,x)}{\left(y-x\right)^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{0}^{y-x}\left(\frac{y-x-t}{y-x}\right)^{\alpha}\frac{dF_{+}(x,t,\alpha)}{dt}dt.$$

On pose

$$t=(y-x)v,$$

alors

$$\frac{R_{+}(y,x)}{\left(y-x\right)^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{0}^{1}\left(1-v\right)^{\alpha}\frac{dF_{+}(x,(y-x)v,\alpha)}{dv}dv.$$

Comme

$$\left(1-v\right)^{\alpha}\leq 1,$$

alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{R_{+}(y,x)}{\left(y-x\right)^{\alpha}}\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left|F(x,y-x,\alpha)-F(x,0,\alpha)\right|\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left|F(x,y-x,\alpha)-\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(x)\right|.\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{y\to x^{+}}F(x,\left(y-x\right),\alpha)=\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(x),$$

on obtient

$$\lim_{y\to x^{+}}\left|\frac{R_{+}(y,x)}{\left(y-x\right)^{\alpha}}\right|=0.$$

D'une façon similaire, on montre que

$$\lim_{y\to x^{-}}\frac{R_{-}(y,x)}{\left[-\left(y-x\right)\right]^{\alpha}}=0.$$

En conclusion

$$\lim_{y\to x^{\pm}} \frac{R_{\pm}(y,x)}{[\pm (y-x)]^{\alpha}} = 0.$$

■

Corollaire 2.2.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha < 1$. Alors*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x) = \Gamma(\alpha+1) \lim_{y\to x^{\pm}} \frac{\pm (f(y)-f(x))}{[\pm (y-x)]^{\alpha}}. \tag{2.6}$$

Démonstration : D'après le Théorème précédente, on a

$$\lim_{y\to x^{\pm}} \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x) = \Gamma(\alpha+1) \lim_{y\to x^{\pm}} \frac{\pm (f(y)-f(x))}{[\pm (y-x)]^{\alpha}}.$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x) = \Gamma(\alpha+1) \lim_{y\to x^{\pm}} \frac{\pm (f(y)-f(x))}{[\pm (y-x)]^{\alpha}}.$$

■

2.3 Propriétés de la dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal

Proposition 2.3.1 *Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles telles que $\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f$ et $\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} g$ existe en x_0 avec $0 < \alpha < 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

1)

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} (f+g)(x_0) = \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x_0) + \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} g(x_0). \tag{2.7}$$

2)

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} (\lambda f)(x_0) = \lambda \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x_0). \tag{2.8}$$

3)

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} (fg)(x_0) = \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x_0) g(x_0) + f(x_0) \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} g(x_0). \tag{2.9}$$

Démonstration : Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.

1) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} (f+g)(x_0) &= \lim_{y\to x_0^{\pm}} \frac{d^{\alpha}((f+g)(y) - (f+g)(x_0))}{d(\pm(y-x_0))^{\alpha}} \\
&= \lim_{y\to x_0^{\pm}} \frac{d^{\alpha}(f(y)+g(y)-f(x_0)-g(x_0))}{d(\pm(y-x_0))^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left(f+g\right)\left(x_0\right)=\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x_0)+\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}g(x_0).$$

2) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left(\lambda f\right)\left(x_0\right) &= \lim_{y\to x_0^{\pm}}\frac{d^{\alpha}(\lambda f(y)-\lambda f(x_0))}{d(\pm(y-x))^{\alpha}}\\ &= \lambda\lim_{y\to x_0^{\pm}}\frac{d^{\alpha}(f(y)-f(x_0))}{d(\pm(y-x_0))^{\alpha}}.\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left(\lambda f\right)\left(x_0\right)=\lambda\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x_0).$$

3) D'après (2.6), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{+}^{\alpha}\left(fg\right)\left(x_0\right) &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to x_0^{+}}\frac{\left(\left(fg\right)\left(x\right)-\left(fg\right)\left(x_0\right)\right)}{\left(x-x_0\right)^{\alpha}}\\ &= \Gamma(\alpha+1)\\ &\quad\times\lim_{x\to x_0^{+}}\frac{\left[\left(f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x)g(x_0)\right]\right.}{\left(x-x_0\right)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{+}^{\alpha}\left(fg\right)\left(x_0\right) &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to x_0^{+}}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{\left(x-x_0\right)^{\alpha}}g(x_0)+f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{\left(x-x_0\right)^{\alpha}}\right]\\ &= \mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(x_0)g(x_0)+f(x_0)\mathbb{D}_{+}^{\alpha}g(x_0).\end{aligned}$$

D'une façon similaire, on montre que

$$\mathbb{D}_{-}^{\alpha}\left(fg\right)\left(x_0\right)=\mathbb{D}_{-}^{\alpha}f(x_0)g(x_0)+f(x_0)\mathbb{D}_{-}^{\alpha}g(x_0).$$

En conclusion

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left(fg\right)\left(x_0\right)=\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x_0)g(x_0)+f(x_0)\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}g(x_0).$$

■

Proposition 2.3.2 *Soient* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et* $f:[g(a),g(b)]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[g(a),g(b)]$. *Si* f *admet une dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal d'ordre* $0<\alpha<1$ *en* $g(x_0)$, $x_0\in[a,b]$ *et* g *admet une dérivée fractionnaire locale au sens de*

Kolwankar-Gangal d'ordre β avec $0 < \beta < 1$ en x_0. Alors $f \circ g$ admet une dérivée fractionnaire

locale au sens de Kolwankar-Gangal d'ordre $\alpha\beta$ et on a

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha\beta}\left(f \circ g\right)(x_0) = \frac{\Gamma(\beta\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{\alpha}}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(g(x_0))\left(\mathbb{D}_{\pm}^{\beta}g(x_0)\right)^{\alpha}. \tag{2.10}$$

Si de plus g de classe C^1, on a

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left(f \circ g\right)(x_0) = s^{\alpha}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(g(x_0))\left(sg'(x_0)\right)^{\alpha}, \tag{2.11}$$

où $s = signe(g'(x))$.

Démonstration : 1) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{+}^{\alpha\beta}\left(f \circ g\right)(x_0) &= \Gamma(\beta\alpha+1)\lim_{x\to x_0^+}\frac{(f\circ g)(x) - \left(f \circ g\right)(x_0)}{\left(x-x_0\right)^{\alpha\beta}} \\
&= \Gamma(\beta\alpha+1) \\
&\quad \times \lim_{x\to x_0^+}\frac{(f\circ g)(x) - \left(f \circ g\right)(x_0)}{\left(g(x)-g(x_0)\right)^{\alpha}}\left(\frac{\left(g(x)-g(x_0)\right)}{\left(x-x_0\right)^{\beta}}\right)^{\alpha} \\
&= \Gamma(\beta\alpha+1) \\
&\quad \times \lim_{x\to x_0^+}\frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_0)\right)}{\left(g(x)-g(x_0)\right)^{\alpha}}\left(\frac{\left(g(x)-g(x_0)\right)}{\left(x-x_0\right)^{\beta}}\right)^{\alpha} \\
&= \Gamma(\beta\alpha+1)\frac{\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(g(x_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{\mathbb{D}_{+}^{\beta}g(x_0)}{\Gamma(\beta+1)}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{D}_{+}^{\alpha\beta}\left(f \circ g\right)(x_0) = \frac{\Gamma(\beta\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{\alpha}}\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(g(x_0))\left(\mathbb{D}_{+}^{\beta}g(x_0)\right)^{\alpha}.$$

D'une façon similaire, on montre que

$$\mathbb{D}_{-}^{\alpha\beta}\left(f \circ g\right)(x_0) = \frac{\Gamma(\beta\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{\alpha}}\mathbb{D}_{-}^{\alpha}f(g(x_0))\left(\mathbb{D}_{-}^{\beta}g(x_0)\right)^{\alpha}.$$

En conclusion

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha\beta}\left(f \circ g\right)(x_0) = \frac{\Gamma(\beta\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{\alpha}}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(g(x_0))\left(\mathbb{D}_{\pm}^{\beta}g(x_0)\right)^{\alpha}.$$

2) Pour $\beta = 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}(f \circ g)(x_0) &= \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(g(x_0)) \left(\mathbb{D}_{\pm}^{1} g(x_0)\right)^{\alpha} \\ &= \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(g(x_0)\,(g'(x))^{\alpha}.\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}(f \circ g)(x_0) = s^{\alpha}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(g(x_0))\,(sg'(x_0))^{\alpha}.$$

■

Proposition 2.3.3 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles telles que la fonction g se s'annule pas sur $[a,b]$. Si f et g admettent une dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal*
d'ordre $0 < \alpha < 1$ sur $[a,b]$ en x_0, alors

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f(x_0)g(x_0) - f(x_0)\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} g(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{2.12}$$

Démonstration : *On a*

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{+}^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to x_0^+}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{(x-x_0)^{\alpha}} \\ &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to x_0^+}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{(x-x_0)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{+}^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{(x-x_0)^{\alpha}\,g(x)\,g(x_0)} \\ &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0)}{(x-x_0)^{\alpha}\,g(x)\,g(x_0)} \\ &\quad +\Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{(x-x_0)^{\alpha}\,g(x)\,g(x_0)}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{+}^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{x\to x_0^+}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{\alpha}}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)^{\alpha}}}{g(x)\,g(x_0)} \\ &= \frac{\mathbb{D}_{+}^{\alpha} f(x_0)g(x_0) - f(x_0)\mathbb{D}_{+}^{\alpha} g(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

D'une façon similaire, on montre que

$$\mathbb{D}_-^\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 = \frac{\mathbb{D}_-^\alpha f(x_0)g(x_0) - f(x_0)\mathbb{D}_-^\alpha g(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

En conclusion

$$\mathbb{D}_\pm^\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x_0)g(x_0) - f(x_0)\mathbb{D}_\pm^\alpha g(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

■

Lemme 2.3.4 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors*

$$\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x) = 0, \text{ pour tout } x \in [a,b] \text{ et } 0 < \alpha < 1. \tag{2.13}$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x) &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{y\to x^\pm}\frac{\pm\left(f(x)-f(y)\right)}{\left[\pm\left(x-y\right)\right]^\alpha} \\
&= \Gamma(\alpha+1)\lim_{y\to x^\pm}\left[\frac{\pm\left(f(x)-f(y)\right)}{\left[\pm\left(x-y\right)\right]}\left[\pm\left(x-y\right)\right]^{1-\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Par suite

$$\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x) = \Gamma(\alpha+1)f'(x)\lim_{y\to x^\pm}\left[\pm\left(x-y\right)\right]^{1-\alpha}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$, on obtient

$$\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x) = 0.$$

■

Théorème 2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et supposons que $\mathbb{D}_+^\alpha f(a)$, $\mathbb{D}_-^\alpha f(b)$ et $\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x)$ existent et $\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x)$ continue au point a et b avec $x \in (a,b)$ et $0 < \alpha < 1$. Si de plus $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $[a,b]$.*

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_\pm^\alpha((\varphi f)(x)) &= \varphi(x)\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x), \\
\mathbb{D}_+^\alpha((\varphi f)(a)) &= \varphi(a)\mathbb{D}_+^\alpha f(a), \\
\mathbb{D}_-^\alpha((\varphi f)(b)) &= \varphi(b)\mathbb{D}_-^\alpha f(b).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Démonstration : *On a*

$$\mathbb{D}_\pm^\alpha((\varphi f)(x)) = \varphi(x)\mathbb{D}_\pm^\alpha f(x) + f(x)\mathbb{D}_\pm^\alpha\varphi(x).$$

Comme φ dérivable sur $[a,b]$, alors d'après le Lemme 2.3.4, on a

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\varphi(x) = 0.$$

Par suite

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}((\varphi f)(x)) = \varphi(x)\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x).$$

Comme $x \in (a,b)$, on obtient

$$\lim_{x\to a^+}\mathbb{D}_{+}^{\alpha}((\varphi f)(x)) = \lim_{x\to a^+}\varphi(x)\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(x),$$

et

$$\lim_{x\to b^-}\mathbb{D}_{-}^{\alpha}((\varphi f)(x)) = \lim_{x\to b^-}\varphi(x)\mathbb{D}_{-}^{\alpha}f(x).$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{D}_{+}^{\alpha}((\varphi f)(a)) = \varphi(a)\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(a),$$

et

$$\mathbb{D}_{-}^{\alpha}((\varphi f)(b)) = \varphi(b)\mathbb{D}_{-}^{\alpha}f(b).$$

■

Définition 2.3.5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors la dérivée locale au sens de Kolwankar-Gangal d'ordre $\alpha + n$ avec $0 < \alpha < 1$ est définie par*

$$\left(\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha+n}f\right)(x) = \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f^{(n)}(x). \tag{2.15}$$

Théorème 3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et supposons que $\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f^{(n)}$ existe sur $[a,b]$. Alors*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha+n}(\varphi f)(x) = \varphi(x)\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f^{(n)}(x), \tag{2.16}$$

avec

$$0 < \alpha < 1.$$

Démonstration : *On a*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha+n}(\varphi f)(x) = \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}(\varphi f)^{(n)}(x).$$

On pose

$$g = (\varphi f)^{(n)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}(\varphi f)^{(n)}(x) &= \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}g(x)\\ &= \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\varphi^{(n-k)}(x),\end{aligned}$$

avec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'après (2.9), *on obtient*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left(\varphi f\right)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f^{(k)}(x)\varphi^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\varphi^{(n-k)}(x)\right].$$

Comme $f \in C^{n}([a,b])$ *et* $\varphi(x) \in C^{n+1}([a,b])$, *alors d'après Lemme 2.3.4, on a toutes les dérivées fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal sont nulles sauf pour*

$$k = n.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left(\varphi f\right)^{(n)}(x) &= \binom{n}{n}\left[\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f^{(n)}(x)\varphi^{(n-n)}(x)\right] \\ &= \varphi(x)\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f^{(n)}(x).\end{aligned}$$

■

Théorème 4 *(Formule de Faà di Bruno [13, Théorème 2]) Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^{n}([a,b])$ *et* $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^{n}([c,d])$ *avec* $n \in \mathbb{N}$, *on suppose* $g([c,d]) \subset [a,b]$. *Alors la formule de Faà di Bruno est donnée par*

$$\left(f \circ g\right)^{(n)}(x) = n!\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}\left(g(x)\right) \times \Pi_{r=1}^{n}\frac{1}{a_r!}\left(\frac{g^{(r)}(x)}{r!}\right)^{a_r},$$

avec

$$\sum_{r=1}^{n} r a_r = n \ \textit{et}\ \sum_{r=1}^{n} a_r = m.$$

Théorème 5 *Soit* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^{n+1} *sur* $[a,b]$, f *une fonction de classe* C^{n} *sur* $h([a,b])$ *et* $\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n}\left[f^{(n)}(h(x))\right]$ *existe avec* $n < \alpha < n+1$, $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left[f(h(x))\right] = \left(\frac{dh}{dx}\right)^{n}\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n}\left[f^{(n)}(h(x))\right]. \tag{2.17}$$

Démonstration : *D'après* (2.15), *on a*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}\left[f(h(x))\right] = \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n}\left[f(h(x))\right]^{(n)}. \tag{2.18}$$

D'après la formule de Faà di Bruno, on a

$$[f(h(x))]^{(n)} = n! \sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(h(x)) \times \Pi_{r=1}^{n} \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(x)}{r!} \right)^{a_r}, \tag{2.19}$$

avec

$$\sum_{r=1}^{n} r a_r = n \quad et \quad \sum_{r=1}^{n} a_r = m.$$

D'après (2.14) *et la formule* (2.19), *on obtient*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n} [f(h(x))]^{(n)} = n! \left[\sum_{m=1}^{n} \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n} \left[f^{(m)}(h(x)) \right] \times \Pi_{r=1}^{n} \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(x)}{r!} \right)^{a_r} \right].$$

Comme $0 < \alpha - n < 1$ *et* $f \in C^n$, *alors*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n} \left[f^{(m)}(h(x)) \right] = 0, \ \text{pour } m = 1, 2, ..., n-1.$$

Par suite pour $m = n$, *on a*

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n} [f(h(x))]^{(n)} = n! \left[\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n} \left[f^{(n)}(h(x)) \right] \times \Pi_{r=1}^{n} \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(x)}{r!} \right)^{a_r} \right], \tag{2.20}$$

avec

$$\sum_{r=1}^{n} r a_r = n \ et \ \sum_{r=1}^{n} a_r = n.$$

Cette dernière égalité est valable sauf si

$$a_1 = n \ et \ a_2 = a_3 = ... = a_n = 0.$$

Par suite d'après (2.18) *et* (2.20), *on obtient*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} [f(h(x))] &= \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n} [f(h(x))]^{(n)} \\ &= n! \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n} \left[f^{(n)}(h(x)) \right] \frac{1}{n!} \left(\frac{h'(x)}{1!} \right)^{n}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} [f(h(x))] = (\frac{dh}{dx})^n \ \ \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha-n} \left[f^{(n)}(h(x)) \right].$$

■

2.4 Dérivées directionnelles fractionnaires locales au sens de Kolwankar-Gangal

Dans cette partie, on donne quelques définitions et résultats concernant les dérivées directionnelles fractionnaires locales au sens de Kolwankar-Gangal .

Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction avec $m \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que toutes les dérivées partielles d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}$ existent et soit V un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

On a la définition suivante

Définition 2.4.1 *On dit f admet une dérivée directionnelle fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal d'ordre α avec $n < \alpha < n+1$ et on la note $(\mathbb{D}_V^\alpha)_\pm f$ si*

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_\pm f(X) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d^\alpha\left(f(X \pm tV) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m tv_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)\right)}{dt^\alpha} \tag{2.21}$$

existe.

On a le résultat suivant

Théorème 6 *Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction, V un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et on suppose que la dérivée directionnelle fractionnaire locale d'ordre α existe. Alors*

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_\pm f(X) = (\mathbb{D}_V^{\alpha-n})_\pm \left(\left(\sum_{i=1}^m v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(X)\right) \quad \textit{pour } n < \alpha < n+1. \tag{2.22}$$

Démonstration : *Soit $n < \alpha < n+1$, on a*

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_+ f(X) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d^\alpha\left(f(X + tV) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m tv_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)\right)}{dt^\alpha}.$$

D'après (1.3), *on a*

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_+ f(X) = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{d^{n+1}I_1(\delta)}{d\delta^{n+1}},$$

où

$$I_1(\delta) = \int_0^\delta \frac{f(X + sV) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m sv_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)}{(\delta - s)^{\alpha-n}} ds.$$

On utilise une intégration par parties. Pour cela, on pose

$$u' = (\delta - s)^{n-\alpha} \ \text{ et } \ v = f(X + sV) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} s v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X).$$

Alors

$$\begin{aligned} u &= \frac{-(\delta - s)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1}. \\ v' &= \sum_{i=1}^{m} v_i f_{x_i}(X + sV) - \sum_{k=1}^{n} \frac{k s^{k-1}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X). \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} I_1(\delta) &= \left[\frac{-(\delta - s)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} \begin{pmatrix} f(X + sV) \\ - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} s v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X) \end{pmatrix} \right]_0^\delta \\ & \quad + \int_0^\delta \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i f_{x_i}(X + sV) - \sum_{k=1}^{n} \frac{k s^{k-1}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X)}{(n - \alpha + 1)\,(\delta - s)^{\alpha-n-1}} ds. \end{aligned}$$

Alors

$$I_1(\delta) = \int_0^\delta \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i f_{x_i}(X + sV) - \sum_{k=1}^{n} \frac{k s^{k-1}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X)}{(n - \alpha + 1)\,(\delta - s)^{\alpha-n-1}} ds.$$

On pose

$$I_2(\delta) = \frac{dI_1(\delta)}{d\delta},$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
I_2(\delta) &= \frac{d}{d\delta}\int\limits_0^\delta \frac{\sum_{i=1}^m v_i f_{x_i}(X+sV) - \sum_{k=1}^n \frac{ks^{k-1}}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)}{(n-\alpha+1)\,(\delta-s)^{\alpha-n-1}} ds \\
&= \int\limits_0^\delta \frac{\sum_{i=1}^m v_i f_{x_i}(X+sV) - \sum_{k=1}^n \frac{ks^{k-1}}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)}{(\delta-s)^{\alpha-n}} ds \\
&\quad +1\left[\frac{\sum_{i=1}^m v_i f_{x_i}(X+\delta V) - \sum_{k=1}^n \frac{k\delta^{k-1}}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)}{(n-\alpha+1)\,(\delta-\delta)^{\alpha-n-1}}\right] \\
&\quad +0\left[\frac{\sum_{i=1}^m v_i f_{x_i}(X) - \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(X)}{(n-\alpha+1)\,\delta^{\alpha-n-1}}\right] \\
&= \int\limits_0^\delta \frac{\sum_{i=1}^m v_i f_{x_i}(X+sV) - \sum_{k=1}^n \frac{ks^{k-1}}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)}{(\delta-s)^{\alpha-n}} ds.
\end{aligned}
$$

On utilise une deuxième intégration par parties. Pour cela, on pose

$$u' = (\delta-s)^{n-\alpha} \text{ et } v = \sum_{i=1}^m v_i f_{x_i}(X+sV) - \sum_{k=1}^n \frac{ks^{k-1}}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X).$$

Alors

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{-(\delta-s)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} \\
v' &= \sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^m v_j f_{x_i x_j}(X+sV)\right) - \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)s^{k-2}}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X).
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
I_2(\delta) &= \left[\frac{-(\delta-s)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m v_i f_{x_i}(X+sV) \\ -\sum_{k=1}^n \frac{ks^{k-1}}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)\end{pmatrix}\right]_0^\delta \\
&\quad + \int\limits_0^\delta \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^m v_j f_{x_i x_j}(X+sV)\right) \\ -\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)s^{k-2}}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)\end{pmatrix}}{(n-\alpha+1)\,(\delta-s)^{\alpha-n-1}} ds.
\end{aligned}
$$

Alors

$$I_2(\delta) = \int_0^\delta \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^m v_j f_{x_i x_j}(X+sV) \right) \\ -\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)s^{k-2}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X) \end{pmatrix}}{(n-\alpha+1)(\delta-s)^{\alpha-n-1}} ds.$$

On pose

$$I_3(\delta) = \frac{dI_2(\delta)}{d\delta}.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
I_3(\delta) &= \frac{d}{d\delta} \int_0^\delta \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^m v_j f_{x_i x_j}(X+sV) \right) \\ -\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)s^{k-2}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X) \end{pmatrix}}{(n-\alpha+1)(\delta-s)^{\alpha-n-1}} ds \\
&= \int_0^\delta \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^m v_j f_{x_i x_j}(X+sV) \right) \\ -\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)s^{k-2}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X) \end{pmatrix}}{(\delta-s)^{\alpha-n}} ds \\
&\quad +1 \left[\frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^m v_j f_{x_i x_j}(X+\delta V) \right) \\ -\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)\delta^{k-2}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X) \end{pmatrix}}{(n-\alpha+1)(\delta-\delta)^{\alpha-n-1}} \right] \\
&\quad +0 \left[\frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m v_i \left(\sum_{j=1}^m v_j f_{x_i x_j}(X) \right) \\ -\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f(X) \end{pmatrix}}{(n-\alpha+1)\delta^{\alpha-n-1}} \right] \\
&= \int_0^\delta \frac{\begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f(X+sV) \\ -\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)s^{k-2}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X) \end{pmatrix}}{(\delta-s)^{\alpha-n}} ds.
\end{aligned}$$

En répétant ce processus n fois, on obtient

$$\frac{d^n I_1(\delta)}{d\delta^n} = \int_0^\delta \frac{\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(X+sV) - \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(X)}{(\delta - s)^{\alpha-n}} ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}_V^\alpha)_+ f(X) &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{d}{d\delta}\left(\frac{d^n I_1(\delta)}{d\delta^n}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{d}{d\delta} \int_0^\delta \frac{A(s,X,V)}{(\delta-s)^{\alpha-n}} ds, \end{aligned} \tag{2.23}$$

avec

$$A(s,X,V) = \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n \left(f(X+sV) - f(X)\right).$$

D'autre part d'après (2.21), *on a*

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}_V^{\alpha-n})_+ \left(\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(X)\right) &= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{d^{\alpha-n}\left[A(\delta,X,V)\right]}{d\delta^{\alpha-n}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \\ &\quad \times \lim_{\delta\to 0^+} \frac{d}{d\delta} \int_0^\delta \frac{A(s,X,V)}{(\delta-s)^{\alpha-n}} ds. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(\mathbb{D}_V^{\alpha-n})_+ \left(\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(X)\right) = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{d}{d\delta} \int_0^\delta \frac{A(s,X,V)}{(\delta-s)^{\alpha-n}} ds. \tag{2.24}$$

Par suite d'aprés (2.23) *et* (2.24), *il résulte que*

$$(\mathbb{D}_V^{\alpha-n})_+ \left(\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(X)\right) = (\mathbb{D}_V^\alpha)_+ f(X).$$

D'une façon similaire, on montre que

$$(\mathbb{D}_V^{\alpha-n})_- \left(\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(X)\right) = (\mathbb{D}_V^\alpha)_- f(X).$$

En conclusion

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_\pm f(X) = (\mathbb{D}_V^{\alpha-n})_\pm \left(\left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n f(X) \right).$$

■

2.4.2 Formule de Taylor fractionnaire locale

On a le résultat suivant

Lemme 2.4.3 *Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, alors*

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_\pm f(X) = 0, \tag{2.25}$$

où $n < \alpha < n+1$

Démonstration : On a

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_+ f(X) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d^\alpha \left(f(X+tV) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^m tv_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)\right)}{dt^\alpha}.$$

On pose

$$g(t) = f(X+tV) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^m tv_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X).$$

Par suite

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_+ f(X) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha}.$$

Donc d'après (1.7), on a

$$(\mathbb{D}_V^\alpha)_+ f(X) = \lim_{t\to 0^+} \left[\begin{array}{c} \sum_{r=0}^n \frac{g^{(r)}(0) t^{-\alpha+r}}{\Gamma(r+1-\alpha)} \\ +\frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha} g^{(n+1)}(u)\, du \end{array} \right]. \tag{2.26}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} g^{(r)}(t) &= \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(X+tV) \\ &\quad - \sum_{k=r}^n \frac{k(k-1)...(k-r+1) t^{k-r}}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g^{(r)}(0) &= \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^r f(X) - \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^r f(X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite d'après (2.26), on obtient

$$(\mathbb{D}_V^{\alpha})_+ f(X) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha}\, g^{(n+1)}(u)\, du,$$

comme $g^{(n+1)}(u)$ est continue et

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha}\, du = -\left[\frac{(t-u)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1}\right]_0^t = 0.$$

Alors

$$(\mathbb{D}_V^{\alpha})_+ f(X) = 0.$$

D'une façon similaire, on montre que

$$(\mathbb{D}_V^{\alpha})_- f(X) = 0.$$

En conclusion

$$(\mathbb{D}_V^{\alpha})_\pm f(X) = 0.$$

■

Théorème 7 *Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(\mathbb{D}_V^{\alpha})_\pm f$ existe avec $X \in \mathbb{R}^m$ et $n < \alpha < n+1$. Alors f admet le développement de Taylor suivant*

$$\begin{aligned} f(X \pm tV) &= f(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} t v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X) + \frac{(\mathbb{D}_V^{\alpha})_\pm f(X)}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \frac{dF(X \pm sV, s, \alpha)}{ds} (t-s)^{\alpha} ds, \end{aligned}$$

où

$$F(X \pm sV, s, \alpha) = \frac{d^{\alpha}\left(f(X \pm sV) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} s v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)\right)}{ds^{\alpha}}.$$

Démonstration : Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.

On a

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{D}_V^\alpha)_\pm f(X) &= \lim_{s\to 0^+} F(X \pm sv, s, \alpha) \\
: &= F(X, 0, \alpha).
\end{aligned}
$$

On pose

$$
h(X \pm tV) = f(X \pm tV) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} tv_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X).
$$

D'après (1.8), on a

$$
I_{0,-}^\alpha\left(\frac{d^\alpha h(X \pm tV)}{dt^\alpha}\right) = h(X \pm tV) - \sum_{j=1}^{n+1} \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{d^{\alpha-j} h(X \pm tV)}{dt^{\alpha-j}}\right] \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.
$$

C'est-à-dire

$$
h(X \pm tV) = I_{0,-}^\alpha\left(\frac{d^\alpha h(X \pm tV)}{dt^\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{n+1} \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{d^{\alpha-j} h(X \pm tV)}{dt^{\alpha-j}}\right] \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.
$$

Comme

$$
I_{a,-}^\alpha(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{-\alpha+1}} dt, \alpha > 0,
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
h(X \pm tV) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\frac{d^\alpha h(X \pm sV)}{ds^\alpha}}{(t-s)^{-\alpha+1}} ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n+1} \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{d^{\alpha-j} h(X \pm tV)}{dt^{\alpha-j}}\right] \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
h(X \pm tV) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{F(X \pm sV, s, \alpha)}{(t-s)^{-\alpha+1}} ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} (\mathbb{D}_V^{\alpha-j})_\pm f(X) \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} + (\mathbb{D}_V^{\alpha-n-1})_\pm f(X) \frac{t^{\alpha-n-1}}{\Gamma(\alpha-n)}.
\end{aligned}
$$

Comme $-1 < \alpha - n - 1 < 0$ et d'après (1.4), on a

$$\begin{aligned} h(X \pm tV) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{F(X \pm sV, s, \alpha)}{(t-s)^{-\alpha+1}} ds + \sum_{j=1}^{n} (\mathbb{D}_V^{\alpha-j})_{\pm} f(X) \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\ &+ \frac{t^{\alpha-n-1}}{\Gamma(\alpha-n)} \times \\ &\lim_{t \to 0^+} \left[\int_0^t \frac{f(X \pm sV) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} s v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X)}{\Gamma(n+1-\alpha)(t-s)^{\alpha-n}} ds \right]. \end{aligned}$$

Posons

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{F(X \pm sV, s, \alpha)}{(t-s)^{-\alpha+1}} ds.$$

On intègre par parties, pour cela on pose.

$$u = F(X \pm sV, s, \alpha) \text{ et } v' = (t-s)^{\alpha-1}$$

Alors

$$u' = \frac{dF(X \pm sV, s, \alpha)}{ds} \text{ et } v = -\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha}.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} I &= -\left[\frac{F(X \pm sV, s, \alpha)(t-s)^{\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right]_0^t + \int_0^t \left(\frac{dF(X \pm sV, s, \alpha)}{ds} \right) \frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} ds \\ &= \frac{F(X, 0, \alpha) t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^t \left(\frac{dF(X \pm sV, s, \alpha)}{ds} \right) \frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} ds. \end{aligned}$$

Comme $n < \alpha < n+1$, $\alpha - j < n$ et $f \in C^n$, alors d'après le lemme précédente, on a

$$(\mathbb{D}_V^{\alpha-j})_{\pm} f(X) = 0, \text{ pour tout } j = 1, ..., n.$$

Comme

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha} &= -\lim_{t \to 0^+} \left[\frac{(t-s)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} \right]_0^t \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} = 0, \end{aligned}$$

et

$$f(X \pm sV) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} s v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X) \text{ est continue sur } [0, t].$$

Alors

$$\frac{t^{\alpha-n-1}}{\Gamma(\alpha-n)}\lim_{t\to 0^+}\left[\int_0^t \frac{f(X\pm sV)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^{m} sv_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)}{\Gamma(n+1-\alpha)(t-s)^{\alpha-n}}\right]=0.$$

Par suite

$$h(X\pm tV)=\frac{F(X,0,\alpha)t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\int_0^t\left(\frac{dF(X\pm sv,s,\alpha)}{ds}\right)\frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}ds.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} f(X\pm tV) &= f(X)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(k+1)}\left(\sum_{i=1}^{m} tv_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X)+\frac{(D_V^{\alpha})_{\pm}f(X)}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}\\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t \frac{dF(X\pm sV,s,\alpha)}{ds}(t-s)^{\alpha}ds. \end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'étude de la transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie, on donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [[5]-[9]].

3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Jumarie

Définition 3.2.1 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et α un nombre réel strictement négatif. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre α de f et on la note $D_x^\alpha f(x)$ la fonction définie par*

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)\, dt, \tag{3.1}$$

où

$$x > 0.$$

Exemple 3.2.2 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = K,$$

où K est une constante réelle. Pour $\alpha < 0$ et $x > 0$, on a

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} K dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= K\frac{\left[-(x-t)^{-\alpha}\right]_0^x}{(-\alpha)\,\Gamma(-\alpha)} \\ &= \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Définition 3.2.3 *Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $0<\alpha<1$.*

On appelle la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre α de f et on la note $D_x^\alpha f(x)$ la fonction définie par

$$D_x^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\left(f(t)-f(0)\right)dt,$$

où

$$x>0.$$

Remarque 3.2.4 *1) Si $f(0)=0$ alors $D_x^\alpha f(x)$ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f.*

2) La dérivée fractionnaire au sens de Jumarie est un définition non locale.

3) La dérivée fractionnaire au sens de Jumarie pour $0<\alpha<1$ d'une constante est nulle.

Exemple 3.2.5 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x)=x^{\alpha k},\ 0<\alpha<1 \text{ et } k\in\mathbb{N}.$$

Pour $x>0$, on a

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\left(t^{\alpha k}-0\right)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}t^{\alpha k}dt. \end{aligned}$$

Posons

$$t=xv.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}x^{1+\alpha k-\alpha}\int_0^1 (1-v)^{-\alpha}v^{\alpha k}dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}x^{1+\alpha k-\alpha}\beta(1-\alpha,\alpha k+1). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(1+\alpha k-\alpha+1)}\frac{d}{dx}x^{1+\alpha k-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k-\alpha+1)}x^{\alpha k-\alpha}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Définition 3.2.6 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n < \alpha < n+1$, la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie est définie par*

$$D_x^\alpha [f(x)] := \left(D_x^{\alpha-n} f(x)\right)^{(n)}.$$

Exemple 3.2.7 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = x^\gamma,\ n < \alpha < n+1 \text{ et } \gamma > 0.$$

Calculons $D_x^\alpha f(x)$. Pour $x > 0$.
On pose

$$\theta = \alpha - n.$$

Alors

$$0 < \theta < 1.$$

C'est-à-dire

$$D_x^{\theta+n} [f(x)] := \left(D_x^\theta f(x)\right)^{(n)}.$$

D'autres part, on a

$$\begin{aligned} D_x^\theta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\theta}(t^\gamma - 0)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\theta} t^\gamma dt. \end{aligned}$$

Posons

$$t = xv.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_x^\theta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)}\frac{d}{dx}x^{1+\gamma-\theta}\int_0^1 (1-v)^{-\theta} v^\gamma dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)}\frac{d}{dx}x^{1+\gamma-\theta}\beta(1-\theta,\gamma+1). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_x^{\theta} f(x) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1+\gamma-\theta+1)} \frac{d}{dx} x^{1+\gamma-\theta} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\theta+1)} x^{\gamma-\theta}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D_x^{\theta+n}\left[f(x)\right] &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\theta+1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\gamma-\theta} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\theta-n+1)} x^{\gamma-\theta-n}. \end{aligned}$$

Par suite

$$D_x^{\alpha}\left[f(x)\right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} x^{\gamma-\alpha}.$$

Théorème 8 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que f admet une dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre αk avec $0 < \alpha < 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors*

la formule de Taylor-Young d'ordre fractionnaire est donnée par

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} D_x^{\alpha k} f(x) + h^{\alpha n}\varepsilon(h),$$

avec

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Corollaire 3.2.8 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha < 1$. Alors*

$$D_x^{\alpha} f(x) = \Gamma(\alpha+1) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}}.$$

Démonstration : Pour $n = 1$, On a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h^{\alpha} D_x^{\alpha} f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} + h^{\alpha}\varepsilon\left(h\right).$$

C'est-à-dire

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}} = \frac{D_x^{\alpha} f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} + \varepsilon\left(h\right).$$

Alors

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^\alpha}=\frac{D_x^\alpha f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

C'est-à-dire

$$D_x^\alpha f(x)=\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^\alpha}.$$

■

Théorème 9 *Soient $u,\ v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues non différentiables et $0<\alpha<1$. Alors*

$$D_x^\alpha\left(uv\right)(x)=v(x)D_x^\alpha u(x)+u(x)D_x^\alpha v(x).$$

Démonstration : D'après le corollaire précédent, on a

$$\begin{aligned}D_x^\alpha\left(uv\right)(x) &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{(uv)\left(x+h\right)-(uv)\left(x\right)}{h^\alpha}\\ &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h^\alpha}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}D_x^\alpha\left(uv\right)(x) &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\left[v(x+h)-v(x)\right]}{h^\alpha}\\ &\quad+\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)-u(x)\right]v(x)}{h^\alpha}\\ &= v(x)D_x^\alpha u(x)+u(x)D_x^\alpha v(x).\end{aligned}$$

■

Théorème 10 *Soient $u,\ v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues, v est non différentiable et $u\circ v$ est différentiable, alors*

$$D_x^\alpha\left[u\left(v(x)\right)\right]=u'(v)D_x^\alpha v(x),$$

où

$$0<\alpha<1.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}D_x^\alpha\left[u\left(v(x)\right)\right] &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{u\left(v(x+h)\right)-u\left(v(x)\right)}{h^\alpha}\\ &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\left[\frac{u\left(v(x+h)\right)-u\left(v(x)\right)}{v(x+h)-v(x)}\left(\frac{v(x+h)-v(x)}{h^\alpha}\right)\right].\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha \left[u\left(v(x)\right)\right] &= \left[\lim_{h\to 0} \frac{u\left(v(x+h)\right)-u\left(v(x)\right)}{v(x+h)-v(x)}\right] \\
&\quad \times \left[\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h^\alpha}\right] \\
&= u'(v) D_x^\alpha v(x).
\end{aligned}$$

■

Théorème 11 *Soient* u, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues,* v *est différentiable et* $u \circ v$ *est non différentiable, alors*

$$D_x^\alpha \left[u\left(v(x)\right)\right] = D_v^\alpha u(v) \left(v'(x)\right)^\alpha,$$

où

$$0 < \alpha < 1.$$

Démonstration : *On a*

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha \left[u\left(v(x)\right)\right] &= \Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{u\left(v(x+h)\right)-u\left(v(x)\right)}{h^\alpha} \\
&= \Gamma(\alpha+1) \\
&\quad \times \lim_{h\to 0}\left[\frac{u\left(v(x+h)\right)-u\left(v(x)\right)}{\left(v(x+h)-v(x)\right)^\alpha}\left(\frac{\left(v(x+h)-v(x)\right)^\alpha}{h^\alpha}\right)\right].
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha \left[u\left(v(x)\right)\right] &= \left[\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{u\left(v(x+h)\right)-u\left(v(x)\right)}{\left(v(x+h)-v(x)\right)^\alpha}\right] \\
&\quad \times \left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right)^\alpha\right] \\
&= D_v^\alpha u(v) \left(v'(x)\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

■

3.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 3.3.1 *La fonction de Mittag-Leffler* E_α *d'indice* $\alpha > 0$ *est définie pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *par la série entière suivante*

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(1+\alpha n\right)},$$

où Γ *est la fonction Gamma d'Euler définie par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt.$$

Proposition 3.3.2 *Pour tout* $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $0 < \alpha < 1$, *on a*

1)

$$E_\alpha(\lambda x^\alpha) E_\alpha(\lambda y^\alpha) = E_\alpha(\lambda (x+y)^\alpha).$$

2)

$$E_\alpha(i x^\alpha) = \cos_\alpha (x^\alpha) + i \sin_\alpha (x^\alpha),$$

où

$$\cos_\alpha (x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\alpha 2k}}{\Gamma(1+\alpha 2k)} \ \textit{et} \ \sin_\alpha (x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma(1+\alpha(2k+1))}.$$

Démonstration : 1) On a

$$\begin{aligned} E_\alpha(\lambda x^\alpha) E_\alpha(\lambda y^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{\alpha n}}{\Gamma(1+\alpha n)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n y^{\alpha n}}{\Gamma(1+\alpha n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k x^{\alpha k} \lambda^{n-k} y^{\alpha(n-k)}}{\Gamma(1+\alpha k)\Gamma(1+\alpha(n-k))}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} E_\alpha(\lambda x^\alpha) E_\alpha(\lambda y^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{\alpha k} y^{\alpha(n-k)}}{\Gamma(1+\alpha k)\Gamma(1+\alpha(n-k))} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(1+\alpha n)} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{\alpha k} y^{\alpha(n-k)} \Gamma(1+\alpha n)}{\Gamma(1+\alpha k)\Gamma(1+\alpha(n-k))}. \end{aligned}$$

On pose

$$l = \alpha k.$$

Alors

$$\begin{aligned} E_\alpha(\lambda x^\alpha) E_\alpha(\lambda y^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(1+\alpha n)} \sum_{l=0}^{\alpha n} \frac{x^l y^{\alpha n - l} \Gamma(1+\alpha n)}{\Gamma(1+l)\Gamma(1+\alpha n - l)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(1+\alpha n)} (x+y)^{\alpha n} \\ &= E_\alpha(\lambda (x+y)^\alpha). \end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned} E_\alpha(ix^\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix^\alpha)^k}{\Gamma(1+\alpha k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix^\alpha)^{2k+1}}{\Gamma(1+\alpha(2k+1))} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix^\alpha)^{2k}}{\Gamma(1+\alpha 2k)} \\ &= i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma(1+\alpha(2k+1))} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\alpha 2k}}{\Gamma(1+\alpha 2k)}. \end{aligned}$$

Alors

$$E_\alpha(ix^\alpha) = \cos_\alpha(x^\alpha) + i\sin_\alpha(x^\alpha).$$

■

Proposition 3.3.3 *Pour tout $x, \lambda \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$, on a*

1)

$$D_x^\alpha E_\alpha(\lambda x^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda x^\alpha).$$

2)

$$D_x^\alpha \cos_\alpha(x^\alpha) = -\sin_\alpha(x^\alpha).$$

3)

$$D_x^\alpha \sin_\alpha(x^\alpha) = \cos_\alpha(x^\alpha).$$

Démonstration : 1) On a

$$\begin{aligned} D_x^\alpha E_\alpha(\lambda x^\alpha) &= D_x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{\alpha n}}{\Gamma(1+\alpha n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_x^\alpha \frac{\lambda^n x^{\alpha n}}{\Gamma(1+\alpha n)}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_x^\alpha E_\alpha(\lambda x^\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(1+\alpha n) x^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(1+\alpha n)\Gamma(1+\alpha(n-1))} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(1+\alpha(n-1))}. \end{aligned}$$

Posons

$$l = n-1.$$

Alors
$$D_x^\alpha E_\alpha(\lambda x^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda x^\alpha).$$
2) On a
$$\cos_\alpha(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2\alpha k}}{\Gamma(1+2\alpha k)}.$$
Alors
$$\begin{aligned} D_x^\alpha \cos_\alpha(x^\alpha) &= D_x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2\alpha k}}{\Gamma(1+2\alpha k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k D_x^\alpha \frac{x^{2\alpha k}}{\Gamma(1+2\alpha k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2\alpha k-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha(2k-1))}. \end{aligned}$$
Posons
$$l = k-1.$$
Alors
$$\begin{aligned} D_x^\alpha \cos_\alpha(x^\alpha) &= -\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{\alpha(2l+1)}}{\Gamma(1+\alpha(2l+1))} \\ &= -\sin_\alpha(x^\alpha). \end{aligned}$$
3) On a
$$\sin_\alpha(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma(1+\alpha(2k+1))}.$$
Alors
$$\begin{aligned} D_x^\alpha \sin_\alpha(x^\alpha) &= D_x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma(1+\alpha(2k+1))} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k D_x^\alpha \frac{x^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma(1+\alpha(2k+1))} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2\alpha k}}{\Gamma(1+2\alpha k)} \\ &= \cos_\alpha(x^\alpha). \end{aligned}$$

■

3.4 Intégration par rapport à $(dt)^{\alpha}$.

Lemme 3.4.1 *Soit $f : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha < 1$. Alors, on a*

$$\int_0^t f(\tau)\,(d\tau)^{\alpha} = \alpha \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Démonstration : Soit $f : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha < 1$.

On considère le problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} dY(t) = f(t)\,(dt)^{\alpha}, \; t > 0, \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

On a

$$Y(t) = \int_0^t f(\tau)\,(d\tau)^{\alpha}. \tag{3.3}$$

D'autre part comme

$$d^{\alpha} Y(t) = \Gamma(\alpha+1) dY(t),$$

on obtient

$$\frac{d^{\alpha} Y(t)}{(dt)^{\alpha}} = \Gamma(\alpha+1) f(t).$$

C'est-à-dire

$$D_t^{\alpha} Y(t) = \Gamma(\alpha+1) f(t),$$

où

$$D_t^{\alpha} Y(t) = \frac{d^{\alpha} Y(t)}{(dt)^{\alpha}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(t) &= \Gamma(\alpha+1) D_t^{-\alpha} f(t) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \\ &= \alpha \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$Y(t) = \alpha \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{3.4}$$

D'après (3.3) et (3.4), on obtient

$$\int_0^t f(\tau)\,(d\tau)^{\alpha} = \alpha \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

■

Lemme 3.4.2 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha < 1$, alors*

$$D_t^\alpha \int_0^t f(\tau)\,(d\tau)^\alpha = \Gamma(\alpha+1) f(t).$$

Démonstration : On considère le problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} Y^{(\alpha)}(t) & = \quad f(t)\,,\ t > 0, \\ Y(0) & = 0. \end{cases}$$

Alors

$$Y^{(\alpha)}(t) = \frac{d^\alpha Y}{(dt)^\alpha} = f(t).$$

Comme

$$d^\alpha Y = \Gamma(\alpha+1) dY,$$

on obtient

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)dY}{(dt)^\alpha} = f(t).$$

C'est-à-dire

$$Y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t f(\tau)\,(d\tau)^\alpha\,.$$

Alors

$$D_t^\alpha Y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} D_t^\alpha \int_0^t f(\tau)\,(d\tau)^\alpha\,,$$

comme

$$D_t^\alpha Y(t) = Y^{(\alpha)}(t) = f(t),$$

on obtient

$$D_t^\alpha \int_0^t f(\tau)\,(d\tau)^\alpha = \Gamma(\alpha+1) f(t).$$

■

3.5 Transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie

Définition 3.5.1 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction. La transformée fractionnaire de Laplace au sens de Jumarie est définie par*

$$L_\alpha \{f(x)\}_s \quad : \quad = F_\alpha(s) = \int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)\,(dx)^\alpha \tag{3.5}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^M E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)\,(dx)^\alpha\,, \tag{3.6}$$

où $s \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.5.2 *Soint* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *et* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *deux fonctions,* $0 < \alpha < 1$. *Alors*

1)

$$\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ L_\alpha \left\{af(x) + bg(x)\right\}_s = aL_\alpha \left\{f(x)\right\}_s + bL_\alpha \left\{g(x)\right\}_s . \tag{3.7}$$

2)

$$L_\alpha \left\{x^\alpha f(x)\right\}_s = -D_s^\alpha L_\alpha \left\{f(x)\right\}_s . \tag{3.8}$$

3)

$$\forall a > 0,\ L_\alpha \left\{f(ax)\right\}_s = \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha L_\alpha \left\{f(x)\right\}_{\frac{s}{a}} . \tag{3.9}$$

4)

$$\forall b > 0,\ L_\alpha \left\{f(x-b)\right\}_s = L_\alpha \left\{f(x)\right\}_s E_\alpha(-s^\alpha b^\alpha). \tag{3.10}$$

5)

$$\forall c > 0,\ L_\alpha \left\{f(x)E(-c^\alpha x^\alpha)\right\}_s = L_\alpha \left\{f(x)\right\}_{s+c} . \tag{3.11}$$

6)

$$L_\alpha \left\{-x^\alpha f(x)\right\}_s = D_s^\alpha L_\alpha \left\{f(x)\right\}_s . \tag{3.12}$$

7)

$$L_\alpha \left\{D_x^\alpha f(x)\right\}_s = s^\alpha L_\alpha \left\{f(x)\right\}_s - \Gamma(\alpha+1)f(0). \tag{3.13}$$

8)

$$L_\alpha \left\{\int_0^x f(u)\,(du)^\alpha\right\}_s = \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha} L_\alpha \left\{f(x)\right\}_s . \tag{3.14}$$

9)

$$\forall k \geq 0,\ L_\alpha \left\{x^{\alpha k}\right\}_s = \Gamma(\alpha+1)\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{s^{(k+1)\alpha}}. \tag{3.15}$$

Démonstration : 1) On a

$$L_\alpha \left\{af(x) + bg(x)\right\}_s = \int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha)\left[af(x) + bg(x)\right](dx)^\alpha.$$

Alors

$$\begin{aligned} L_\alpha \left\{af(x) + bg(x)\right\}_s &= a\int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)(dx)^\alpha \\ &\quad + b\int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) g(x)(dx)^\alpha \\ &= aL_\alpha \left\{f(x)\right\}_s + bL_\alpha \left\{g(x)\right\}_s . \end{aligned}$$

2) On a

$$L_\alpha \left\{x^\alpha f(x)\right\}_s = \int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) x^\alpha f(x) \, (dx)^\alpha \,,$$

et comme

$$D_s^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) = -x^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha).$$

Alors

$$\begin{aligned} L_\alpha \left\{x^\alpha f(x)\right\}_s &= -\int_0^\infty D_s^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x) \, (dx)^\alpha \\ &= -D_s^\alpha \int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x) \, (dx)^\alpha \\ &= -D_s^\alpha L_\alpha \left\{f(x)\right\}_s . \end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned} L_\alpha \left\{f(ax)\right\}_s &= \lim_{M\to\infty} \int_0^M E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(ax) \, (dx)^\alpha \\ &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^M (M-x)^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(ax) dx. \end{aligned}$$

Posons

$$u = ax.$$

Donc

$$\begin{aligned} L_\alpha \left\{f(ax)\right\}_s &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^M (M-x)^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(ax) dx \\ &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^{aM} (M-\frac{u}{a})^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha \frac{u^\alpha}{a^\alpha}) f(u) \frac{du}{a} \\ &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^{aM} (\frac{aM-u}{a})^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha \frac{u^\alpha}{a^\alpha}) f(u) \frac{du}{a} \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha L_\alpha \left\{f(x)\right\}_{\frac{s}{a}} . \end{aligned}$$

4) On a

$$\begin{aligned} L_\alpha \left\{f(x-b)\right\}_s &= \lim_{M\to\infty} \int_0^M E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x-b) \, (dx)^\alpha \\ &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^M (M-x)^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x-b) dx. \end{aligned}$$

Posons
$$u = x - b.$$
Alors
$$\begin{aligned} L_\alpha \{f(x-b)\}_s &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^M (M-x)^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x-b)dx \\ &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^{M-b} (M-b-u)^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha (b+u)^\alpha) f(u)du, \end{aligned}$$
et comme
$$E_\alpha(\lambda x^\alpha) E_\alpha(\lambda y^\alpha) = E_\alpha(\lambda (x+y)^\alpha).$$
Alors
$$\begin{aligned} L_\alpha \{f(x-b)\}_s &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^{M-b} (M-b-u)^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha (b+u)^\alpha) f(u)du \\ &= \lim_{M\to\infty} \alpha \int_0^{M-b} (M-b-u)^{\alpha-1} E_\alpha(-s^\alpha b^\alpha) E_\alpha(-s^\alpha u^\alpha) f(u)du. \end{aligned}$$
C'est-à-dire
$$L_\alpha \{f(x-b)\}_s = L_\alpha \{f(x)\}_s E_\alpha(-s^\alpha b^\alpha).$$
5) On a
$$L_\alpha \{f(x)E(-c^\alpha x^\alpha)\}_s = \int_0^\infty E(-c^\alpha x^\alpha) E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x) (dx)^\alpha ,$$
et comme
$$E_\alpha(-x^\alpha c^\alpha) E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha) = E_\alpha(-x^\alpha (c+s)^\alpha).$$
Alors
$$L_\alpha \{f(x)E(-c^\alpha x^\alpha)\}_s = L_\alpha \{f(x)\}_{s+c} .$$
6) On a
$$L_\alpha \{-x^\alpha f(x)\}_s = - \int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) x^\alpha f(x) (dx)^\alpha .$$
D'après (3.8), on a
$$\begin{aligned} L_\alpha \{-x^\alpha f(x)\}_s &= -\left(-D_s^\alpha L_\alpha \{f(x)\}_s\right) \\ &= D_s^\alpha L_\alpha \{f(x)\}_s . \end{aligned}$$

7) On a

$$D_x^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) = -s^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha),$$

et comme

$$D_x^\alpha (uv)(x) = v(x) D_x^\alpha u(x) + u(x) D_x^\alpha v(x).$$

Alors

$$\begin{aligned} D_x^\alpha \left(E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)\right) &= \left(D_x^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha)\right) f(x) + E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) D_x^\alpha f(x) \\ &= -s^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x) + E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) D_x^\alpha f(x). \end{aligned}$$

En intégrant deux membres de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t D_x^\alpha \left(E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)\right) (dx)^\alpha &= -s^\alpha \int_0^t E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)\,(dx)^\alpha \\ &\quad + \int_0^t \left(E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) D_x^\alpha f(x)\right) (dx)^\alpha . \end{aligned}$$

D'autres part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t D_x^\alpha \left(E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)\right) (dx)^\alpha &= \int_0^t \frac{d^\alpha \left(E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)\right)}{(dx)^\alpha} (dx)^\alpha \\ &= \Gamma(\alpha+1) \int_0^t d\left(E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1)\left[E_\alpha(-s^\alpha t^\alpha) f(t)) - f(0)\right] &= -s^\alpha \int_0^t E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) f(x)(dx)^\alpha \\ &\quad + \int_0^t E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) D_x^\alpha f(x)(dx)^\alpha. \end{aligned}$$

En fait tend t vers ∞, on obtient

$$-\Gamma(\alpha+1) f(0) = -s^\alpha L_\alpha \{f(x)\}_s + L_\alpha \{D_x^\alpha f(x)\}_s .$$

C'est-à-dire

$$L_\alpha \{D_x^\alpha f(x)\}_s = -\Gamma(\alpha+1) f(0) + s^\alpha L_\alpha \{f(x)\}_s .$$

8) On pose

$$g(x) = \int_0^x f(u)\,(du)^\alpha .$$

Alors
$$D_x^\alpha g(x) = \Gamma(\alpha+1) f(x).$$
D'après (3.13), on obtient
$$\begin{aligned} L_\alpha \left\{ D_x^\alpha g(x) \right\}_s &= -\Gamma(\alpha+1) g(0) + s^\alpha L_\alpha \left\{ g(x) \right\}_s \\ &= \Gamma(\alpha+1) L_\alpha \left\{ f(x) \right\}_s . \end{aligned}$$
Comme
$$g(0) = 0.$$
Alors
$$L_\alpha \left\{ g(x) \right\}_s = \frac{\Gamma(\alpha+1) L_\alpha \left\{ f(x) \right\}}{s^\alpha}.$$
C'est-à-dire
$$L_\alpha \left\{ \int_0^x f(u) \, (du)^\alpha \right\}_s = \Gamma(\alpha+1) s^{-\alpha} L_\alpha \left\{ f(x) \right\}_s .$$
9) On a
$$D_x^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) = -s^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha).$$
Alors
$$d^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) = -s^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) \, (dx)^\alpha ,$$
comme
$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t d^\alpha E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) = \Gamma(\alpha+1) \lim_{t\to\infty} \int_0^t d \left(E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) \right) .$$
Alors
$$\begin{aligned} \int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) \, (dx)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} \\ &= L_\alpha \left\{ 1 \right\}_s . \end{aligned}$$

Donc pour $k = 0$, (3.15) est vraie. On fait un raisonnement par récurrence, on suppose que (3.15) est vraie pour k et on montre (3.15) pour $k+1$.

On a
$$L_\alpha \left\{ x^{\alpha(k+1)} \right\}_s = \int_0^{+\infty} E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) x^{\alpha(k+1)} \, (dx)^\alpha .$$
On utilise une intégration par parties, on pose
$$D_x^\alpha v(x) = E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) \text{ et } u(x) = x^{\alpha(k+1)}.$$

Alors

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{\Gamma(\alpha\,(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} x^{\alpha k} \text{ et } v(x) = \frac{-1}{s^\alpha} E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha).$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_a^b (D_x^\alpha v(x))\, u(x)(dx)^\alpha &= \Gamma(\alpha+1)\,[u(x)v(x)]_a^b \\ &\quad - \int_a^b v(x)\,(D_x^\alpha u(x))\,(dx)^\alpha. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \int_0^t E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) x^{\alpha(k+1)}(dx)^\alpha &= -\lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} \left[E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha) x^{\alpha(k+1)}\right]_0^t \\ &\quad + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{s^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha\,(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} \\ &\quad \times \int_0^t E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha) x^{\alpha k}(dx)^\alpha \\ &= \frac{1}{s^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha\,(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} L_\alpha\left\{x^{\alpha k}\right\}_s \\ &= \Gamma(\alpha+1) \frac{\Gamma(\alpha\,(k+1)+1)}{s^{(k+2)\alpha}}. \end{aligned}$$

■

3.6 Exemples

Exemple 3.6.1 *On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = \sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha).$$

Calculons $L_\alpha\{f(x)\}_s$.
On a

$$L_\alpha\{\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\}_s = \lim_{t\to\infty} \int_0^t E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha) \sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\,(dx)^\alpha,\ 0<\alpha<1.$$

On utilise une intégration par parties, on pose

$$D_x^\alpha v(x) = \sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha) \text{ et } u(x) = E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha).$$

Alors

$$v(x) = \frac{-1}{c^\alpha}\cos_\alpha(c^\alpha x^\alpha) \;\; et \; D_x^\alpha u(x) = -s^\alpha E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha).$$

Comme

$$\int_a^b (D_x^\alpha v(x))\, u(x)(dx)^\alpha = \Gamma(\alpha+1)\,[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\,(D_x^\alpha u(x))\,(dx)^\alpha.$$

Alors

$$\begin{aligned} L_\alpha\left\{\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\right\}_s &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha)\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\,(dx)^\alpha \\ &= \frac{-\Gamma(\alpha+1)}{c^\alpha}\lim_{t\to\infty}\left[E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha)\cos_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\right]_0^t \\ &\quad - \lim_{t\to\infty}\frac{s^\alpha}{c^\alpha}\int_0^t E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha)\cos_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\,(dx)^\alpha. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$L_\alpha\left\{\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\right\}_s = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{c^\alpha} - \frac{s^\alpha}{c^\alpha}\lim_{t\to\infty}\int_0^t E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha)\cos_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\,(dx)^\alpha.$$

On utilise une deuxième intégration par parties, pour cela on pose

$$D_x^\alpha v(x) = \cos_\alpha(c^\alpha x^\alpha) \;\; et \; u(x) = E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha).$$

Alors

$$v(x) = \frac{1}{c^\alpha}\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha) \;\; et \; D_x^\alpha u(x) = -s^\alpha E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha).$$

Par suite

$$\begin{aligned} L_\alpha\left\{\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\right\}_s &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{c^\alpha} - \frac{s^\alpha}{c^\alpha} \\ &\quad \times \lim_{t\to\infty}\left[\begin{array}{c} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{c^\alpha}\left[E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha)\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\right]_0^t \\ +\frac{s^\alpha}{c^\alpha}\int_0^t E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha)\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\,(dx)^\alpha \end{array}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{c^\alpha} - \frac{s^{2\alpha}}{c^{2\alpha}}\lim_{t\to\infty}\int_0^t E_\alpha(-x^\alpha s^\alpha)\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\,(dx)^\alpha. \end{aligned}$$

Alors

$$L_\alpha\left\{\sin_\alpha(c^\alpha x^\alpha)\right\}_s = \frac{\Gamma(\alpha+1)c^\alpha}{s^{2\alpha}+c^{2\alpha}}. \tag{3.16}$$

Exemple 3.6.2 *On considère la fonction f définie par*

$$f\left(x\right)=\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right).$$

Calculons $L_{\alpha}\left\{f(x)\right\}_{s}$.
On a

$$L_{\alpha}\left\{\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}=\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha})\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha},\ 0<\alpha<1.$$

On utilise une intégration par parties, on pose

$$D_{x}^{\alpha}v(x)=\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\ \textit{ et } u(x)=E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha}).$$

Alors

$$v(x)=\frac{1}{c^{\alpha}}\sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\ \textit{ et } D_{x}^{\alpha}u(x)=-s^{\alpha}E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha}).$$

Par suite

$$\begin{aligned}
L_{\alpha}\left\{\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s} &= \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha})\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha}.\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{c^{\alpha}}\left[E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha})\sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right]_{0}^{t}\\
&\quad+\lim_{t\to\infty}\frac{s^{\alpha}}{c^{\alpha}}\int_{0}^{t}E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha})\sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{s^{\alpha}}{c^{\alpha}}\int_{0}^{t}E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha})\sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

On utilise une deuxième intégration par parties, pour cela on pose

$$D_{x}^{\alpha}v(x)=\sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\ \textit{ et } u(x)=E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha}).$$

Alors

$$v(x)=\frac{-1}{c^{\alpha}}\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\ \textit{ et } D_{x}^{\alpha}u(x)=-s^{\alpha}E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha}).$$

C'est-à-dire

$$L_{\alpha}\left\{\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}=\frac{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}{c^{2\alpha}}-\frac{s^{2\alpha}}{c^{2\alpha}}\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}E_{\alpha}(-x^{\alpha}s^{\alpha})\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha}.$$

Alors

$$L_{\alpha}\left\{\cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}=\frac{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}{s^{2\alpha}+c^{2\alpha}}. \tag{3.17}$$

Exemple 3.6.3 *On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = E_\alpha(ic^\alpha x^\alpha).$$

Calculons $L_\alpha \{f(x)\}_s$.
On a

$$L_\alpha \{E_\alpha(ic^\alpha x^\alpha)\}_s = L_\alpha \{\cos_\alpha (c^\alpha x^\alpha)\}_s + iL_\alpha \{\sin_\alpha (c^\alpha x^\alpha)\}_s .$$

Alors d'après (3.16) *et* (3.17), *on obtient*

$$\begin{aligned} L_\alpha \{E_\alpha(ic^\alpha x^\alpha)\}_s &= \frac{\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}{s^{2\alpha}+c^{2\alpha}} + i\frac{\Gamma(\alpha+1)c^\alpha}{s^{2\alpha}+c^{2\alpha}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha - ic^\alpha},\ 0<\alpha<1. \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.7 Applications de la transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie pour la résolution des problèmes de Cauchy

Exemple 3.7.1 *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} D_x^\alpha y(x) + y(x) = 0, \\ y(0) = y_0,\ y_0 \in \mathbb{R}^*, \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$.
On a

$$D_x^\alpha y(x) + y(x) = 0. \tag{3.19}$$

En appliquant la transformée fractionnaire de Laplace au sens de Jumarie aux deux membres de l'équation (3.19), *on obtient*

$$L_\alpha \{D_x^\alpha y(x)\}_s + L_\alpha \{y(x)\}_s = 0.$$

D'après (3.13), *on a*

$$L_\alpha \{D_x^\alpha y(x)\}_s = s^\alpha L_\alpha \{y(x)\}_s - \Gamma(\alpha+1)y(0). \tag{3.20}$$

Alors

$$\begin{aligned} L_\alpha \{D_x^\alpha y(x)\}_s + L_\alpha \{y(x)\}_s &= s^\alpha L_\alpha \{y(x)\}_s - \Gamma(\alpha+1)y_0 + L_\alpha \{y(x)\}_s \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire
$$L_\alpha \{y(x)\}_s = \frac{y_0\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha+1}.$$
Alors
$$y(x) = y_0 L_\alpha^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha+1}\right\}.$$
Donc d'après (3.18), *on obtient*
$$y(x) = y_0 E_\alpha(-x^\alpha).$$

Exemple 3.7.2 *On considère le problème de Cauchy suivant:*
$$\begin{cases} D_x^\alpha y\,(x) = y\,(x-1)\,, \\ y(0) = c,\ \ c \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
avec $0 < \alpha < 1$.
On a
$$D_x^\alpha y\,(x) = y\,(x-1)\,. \tag{3.21}$$
En appliquant la transformée fractionnaire de Laplace au sens de Jumarie aux deux membres de l'équation (3.21), *on obtient*
$$L_\alpha \{D_x^\alpha y(x)\}_s = L_\alpha \{y\,(x-1)\}_s\,.$$
D'après (3.13) *et* (3.10), *on a*
$$s^\alpha L_\alpha \{y(x)\}_s - \Gamma(\alpha+1)c = E_\alpha(-s^\alpha) L_\alpha \{y\,(x)\}_s\,.$$
Alors
$$\left(s^\alpha - E_\alpha(-s^\alpha)\right) L_\alpha \{y\,(x)\}_s = \Gamma(\alpha+1)c.$$
C'est-à-dire
$$\begin{aligned} L_\alpha \{y\,(x)\}_s &= \frac{\Gamma(\alpha+1)c}{(s^\alpha - E_\alpha(-s^\alpha))} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)c}{s^\alpha\left(1 - \frac{E_\alpha(-s^\alpha)}{s^\alpha}\right)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)c}{s^\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{E_\alpha(-s^\alpha)}{s^\alpha}\right)^k, \end{aligned}$$
comme
$$E_\alpha^k(-s^\alpha) = E_\alpha(-k^\alpha s^\alpha).$$

Alors

$$y(x) = \Gamma(\alpha+1)c \sum_{k=0}^{+\infty} L_\alpha^{-1} \left\{ \frac{E_\alpha(-k^\alpha s^\alpha)}{s^{\alpha(k+1)}} \right\},$$

et comme

$$L_\alpha \left\{ (x-k)^{\alpha k} \right\}_s = E_\alpha(-k^\alpha s^\alpha) L_\alpha \left\{ x^{\alpha k} \right\}_s.$$

Alors

$$y(x) = c \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-k)^{\alpha k}}{\Gamma(1+k\alpha)}.$$

Exemple 3.7.3 *On considère le problème de Cauchy suivant:*

$$\begin{cases} D_x^\alpha y(x) + y(x) = \sin_\alpha(x^\alpha), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$.
On a

$$D_x^\alpha y(x) + y(x) = \sin_\alpha(x^\alpha). \tag{3.22}$$

En appliquant la transformée fractionnaire de Laplace au sens de Jumarie aux deux membres de l'équation (3.22), *on obtient*

$$L_\alpha \left\{ D_x^\alpha y(x) \right\}_s + L_\alpha \left\{ y(x) \right\}_s = L_\alpha \left\{ \sin_\alpha(x^\alpha) \right\}_s.$$

D'après (3.13) *et* (3.16), *on obtient*

$$\begin{aligned} L_\alpha \left\{ D_x^\alpha y(x) \right\}_s + L_\alpha \left\{ y(x) \right\}_s &= s^\alpha L_\alpha \left\{ y(x) \right\}_s - \Gamma(\alpha+1)y(0) + L_\alpha \left\{ y(x) \right\}_s \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{2\alpha}+1}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} L_\alpha \left\{ y(x) \right\}_s &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s^\alpha+1)(s^{2\alpha}+1)}. \\ &= \Gamma(\alpha+1) \left[\frac{1}{2} \frac{1}{s^\alpha+1} - \frac{(i+1)}{4} \frac{1}{s^\alpha - i} + \frac{(i-1)}{4} \frac{1}{s^\alpha + i} \right]. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} y(x) &= L_\alpha^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s^\alpha+1)(s^{2\alpha}+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} L_\alpha^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha+1} \right\} - \frac{(i+1)}{4} L_\alpha^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha - i} \right\} \\ &\quad + \frac{(i-1)}{4} L_\alpha^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha + i} \right\}. \end{aligned}$$

D'après (3.18)*, on obtient*

$$y(x) = \frac{1}{2}E_\alpha(-x^\alpha) - \frac{(i+1)}{4}E_\alpha(ix^\alpha) + \frac{(i-1)}{4}E_\alpha(-ix^\alpha),$$

et comme

$$E_\alpha(ix^\alpha) = \cos_\alpha(x^\alpha) + i\sin_\alpha(x^\alpha).$$

Alors

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[-\cos_\alpha(x^\alpha) + \sin_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(-x^\alpha)\right].$$

Exemple 3.7.4 *On considère le système suivant*

$$\begin{cases} D_x^\alpha y_1(x) + y_2(x) = 0, \\ D_x^\alpha y_2(x) + y_1(x) = 0, \\ y_2(0) = -1, \\ y_1(0) = 1, \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$.

En appliquant la transformée fractionnaire de Laplace au sens de Jumarie aux équations dans ce système, on obtient

$$\begin{cases} s^\alpha L_\alpha\{y_1(x)\}_s - \Gamma(\alpha+1)y_1(0) + L_\alpha\{y_2(x)\}_s = 0, \\ L_\alpha\{y_1(x)\}_s + s^\alpha L_\alpha\{y_2(x)\}_s - \Gamma(\alpha+1)y_2(0) = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\left\{\begin{pmatrix} s^\alpha & 1 \\ 1 & s^\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_\alpha\{y_1(x)\}_s \\ L_\alpha\{y_2(x)\}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma(\alpha+1) \\ -\Gamma(\alpha+1) \end{pmatrix}\right..$$

Calculons le determinant Δ *de*

$$\begin{pmatrix} s^\alpha & 1 \\ 1 & s^\alpha \end{pmatrix},$$

on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^\alpha & 1 \\ 1 & s^\alpha \end{vmatrix} = s^{2\alpha} - 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} L_\alpha\{y_1(x)\}_s &= \frac{\begin{vmatrix} \Gamma(\alpha+1) & 1 \\ -\Gamma(\alpha+1) & s^\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha - 1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
L_\alpha \left\{y_2(x)\right\}_s &= \frac{\begin{vmatrix} s^\alpha & \Gamma(\alpha+1) \\ 1 & -\Gamma(\alpha+1) \end{vmatrix}}{\Delta} \\
&= -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha - 1}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$y_1(x) = L_\alpha^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s^\alpha-1)}\right\},$$

et

$$y_2(x) = -L_\alpha^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s^\alpha-1)}\right\}.$$

Alors

$$y_1(x) = E_\alpha(x^\alpha) \text{ et } y_2(x) = -E_\alpha(x^\alpha).$$

Exemple 3.7.5 *On a le système suivant*

$$\left\{\begin{array}{c} D_x^\alpha y_1(x) + y_1(x) = y_2(x) + E_\alpha(x^\alpha), \\ D_x^\alpha y_2(x) + y_2(x) = y_1(x) + E_\alpha(x^\alpha), \\ y_2(0) = y_1(0) = 1. \end{array}\right.$$

En appliquant la transformée fractionnaire de Laplace au sens de Jumarie aux équations dans ce système, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} s^\alpha L_\alpha\left\{y_1(x)\right\}_s - \Gamma(\alpha+1)y_1(0) + L_\alpha\left\{y_1(x)\right\}_s = L_\alpha\left\{y_2(x)\right\}_s + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha-1}, \\ L_\alpha\left\{y_2(x)\right\}_s + s^\alpha L_\alpha\left\{y_2(x)\right\}_s - \Gamma(\alpha+1)y_2(0) = L_\alpha\left\{y_1(x)\right\}_s + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha-1}. \end{array}\right.$$

C'est-à-dire

$$\left\{\begin{pmatrix} s^\alpha+1 & -1 \\ -1 & s^\alpha+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_\alpha\left\{y_1(x)\right\}_s \\ L_\alpha\left\{y_2(x)\right\}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}{s^\alpha-1} \\ \frac{\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}{s^\alpha-1} \end{pmatrix}\right..$$

Calculons le determinant Δ *de*

$$\begin{pmatrix} s^\alpha+1 & -1 \\ -1 & s^\alpha+1 \end{pmatrix},$$

on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^\alpha+1 & -1 \\ -1 & s^\alpha+1 \end{vmatrix} = s^\alpha\left(s^\alpha+2\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} L_\alpha\left\{y_1(x)\right\}_s &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}{s^\alpha-1} & -1 \\ \frac{\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}{s^\alpha-1} & s^\alpha+1 \end{vmatrix}}{\Delta} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_\alpha\left\{y_2(x)\right\}_s &= \frac{\begin{vmatrix} s^\alpha+1 & \frac{\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}{s^\alpha-1} \\ -1 & \frac{\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}{s^\alpha-1} \end{vmatrix}}{\Delta} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha-1}. \end{aligned}$$

Par suite

$$y_1(x) = L_\alpha^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s^\alpha-1)}\right\},$$

et

$$y_2(x) = L_\alpha^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s^\alpha-1)}\right\}.$$

Alors

$$y_1(x) = E_\alpha(x^\alpha) \ \textit{et} \ y_2(x) = E_\alpha(x^\alpha).$$

Bibliographie

[1] A.Babakhani and V. Daftardar–Gejji, On calculus of local fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl. 270 (2002), 66–79.

[2] F. Ben Adda and J. Cresson, About non-differentiable functions, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 721-737.

[3] F. Ben Adda and J. Cresson, Calcul fractionnaire, variétés fractales et relativité d'échelle, Prépublication 2000/11 Math. Besançon, 93 pages, 2001.

[4] H. Dib, Equations différentielles fractionnaires, $4^{\text{ème}}$ Ecole EDA-EDO Tlemcen 23-27 mai 2009, 29 pages.

[5] G. Jumarie, Laplace's transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouvillle derivative, Appl. Math. Lett.22 (2009), 1659–1664.

[6] G. Jumarie, Modified Riemann–Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions Further results, Comput. Math. Appl. 51 (2006), 1367–1376.

[7] G. Jumarie, On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to $(dt)^{\alpha}$, Appl. Math. Lett. 18 (2005), 739–748.

[8] G. Jumarie, On the solution of the stochastic differential equation of exponential growth driven by fractional Brownian motion, Appl. Math. Lett.18 (2005), 817–826.

[9] G. Jumarie, Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann–Liouville derivative for non-differentiable functions, Appl. Math. Lett. 22 (2009), 378–385.

[10] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam (2006).

[11] K.M. Kolwankar and A.D. Gangal, Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions, Chaos 6 (1996), 505–513.

[12] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego (1999).

[13] S. Roman, The formula of Faà di Bruno, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 805-809.

[14] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon (1993).

ملخص

والغرض من هذا العمل هو دراسة النظرية الأساسية على مشتقات كسور المحلية الذي يقدمها كولونكر و جنقل لجميع الوظائف المستمرة و هذا النوع من المشتقات فإنه يختفي عند تطبيقه على وظائف للاختلاف.
ندرس أيضا بعض النتائج و الخاصيات فيما يتعلق بتحويل كسور لابلاس بمعنى جمري التي تستخدم في حل مشاكل كوشي.

Résumé

L'objet de ce travail est l'étude les théoriques fondamentales concernant la dérivée fractionnaire locale introduite par Kolwankar et Gangal pour les fonctions partout continue ,cette type de dérivée elle s'annule quand on applique à des fonctions dérivables .

On étude aussi quelques résultats et propriétés concernant la transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie qui utilise dans la résolution des problèmes de Cauchy.

Abstract

The purpose of this work is the fundamental theoretical study on the local fractional derivative introduced by Kolwankar Gangal and for all continuous functions, This type of derivative it vanishes when applied to differentiable functions.
We study also some results and properties concerning the fractional Laplace transform the meaning of Jumarie. which uses the resolution Cauchy problems.