

Modélisation du comportement dynamique des arbres tournants sur paliers rigides dans le cas des grands déplacements

Boukhalfa. A, Hadjoui. A, Hamza cherif. S.M.
Département de génie mécanique / Faculté des sciences de l'ingénieur
Université Abou Bakr Belkaid – Tlemcen
Tel : 043 28 56 86 / Fax : 043 28 56 85
E-mail: BKA1975E@Yahoo.fr

Résumé : Le travail présenté concerne le comportement dynamique des arbres tournants sur paliers rigides. Une étude théorique permet l'établissement des énergies cinétique et de déformation de l'arbre, nécessaires à l'aboutissement des équations du mouvement. Ces équations sont déterminées en tenant compte de l'effet de couplage qui est dû essentiellement aux effets gyroscopiques et la non linéarité géométrique. La modélisation du système étudié est faite par la version -p de la méthode des éléments finis. Pour cela un élément fini hiérarchique de type poutre à cinq degrés de liberté par nœud est développé en vue d'élaborer un code de calcul, permettant de déterminer les fréquences propres d'un arbre tournant dans les cas linéaire et non linéaire. L'étude présentée montre les influences de l'effet gyroscopique et la non linéarité géométrique.

Mots clés : Effet gyroscopique; Arbre tournant; Grands déplacements; MEFHT

1. INTRODUCTION

Les machines tournantes, qui représentent un objectif important de la recherche, sont des enjeux stratégiques de notre société et deviennent de plus en plus des produits de hautes technologies. Elles sont au cœur des équipements de transformation des énergies et d'extraction des énergies fossiles. Elles ont un rôle prépondérant dans le transport des personnes et des biens. Toute recherche sur leur comportement dynamique aide les constructeurs à relever de nombreux défis dans un contexte de forte concurrence internationale :

- Augmentation des performances : rendements, confort, miniaturisation
- Fiabilité, sécurité
- Réduction des coûts, des nuisances qui s'inscrivent majoritairement dans le développement durable.

Les progrès réalisés dans la conception et la fabrication des applications industrielles qui comportent les arbres tournants (les turbines, les compresseurs, les broches des machines outils,...etc.) ont donné jour à des machines de plus en plus performantes. Leur puissance massique étant en constante augmentation, elles doivent traverser plusieurs vitesses critiques en montée en vitesse et en ralentissement. Les inévitables défauts d'usinage et de montage provoquent alors des problèmes vibratoires importants. Les industriels, constructeurs et exploitants cherchent à éliminer ces défauts pour augmenter la durée de vie des

machines, pour optimiser leur rendement et pour assurer leur régularité de fonctionnement. Un des problèmes vibratoires les plus importants est dû à l'effet gyroscopique et la non linéarité géométrique, qui est un axe de recherche, où beaucoup d'auteurs ont travaillé dans ce domaine.

Le comportement dynamique des arbres tournants a un grand intérêt pratique dans l'industrie et beaucoup d'auteurs ont contribué au développement de modèles mathématiques et numériques de ce comportement. On peut citer entre autres, *Zu* et *al* qui ont étudié l'effet des conditions aux limites sur les fréquences propres des arbres tournants [1], l'effet gyroscopiques et le couplage entre mouvements rigides et élastiques [2]-[3]. *Nelson* et *al* [4] ont utilisé la méthode des éléments finis pour l'étude des rotors (arbre+disques+paliers) sur appuis déformables de type roulements. D'autres chercheurs ont travaillé sur l'analyse modale des rotors sous excitation sismique [5] et sur les rotors en impact [6].

Dans notre étude la méthode des éléments finis hiérarchiques avec des fonctions de forme trigonométriques [7] est utilisée pour déterminer les matrices de rigidité linéaire et non linéaire, matrice masse, matrice de l'effet gyroscopique et la matrice de rigidification centrifuge d'un arbre en mouvement de rotation autour de son axe longitudinal, afin de déterminer l'influence de l'effet gyroscopique sur les fréquences propres dans le cas des grands déplacements.

2. FORMULATION

2.1. Energie cinétique

La figure 1 schématise un arbre flexible tournant autour de l'axe x.

x, y, z dénotent les coordonnées fixes et $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ dénotent les coordonnées mobiles fixées à la poutre.

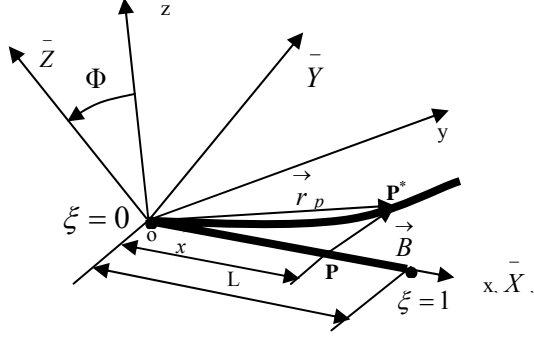


Figure 1 : Système de coordonnées fixes et mobiles

P : Point P avant déformation.

P* : Point P après déformation.

(o, x, y, z) : Repère fixe (R_F).

(o, $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$) : Repère mobile (R_M) liée à la poutre en mouvement.

Φ : L'angle de rotation de la poutre.

{x}: Vecteur position de P dans (R_M) avant déformation.

{B}: Vecteur déplacement de P/ (R_M) écrit dans le repère mobile.

{r_p}: Vecteur position de P*/(R_M) dans (R_M) après déformation.

Le champ de déplacement (U, V, W) d'un point P de la section droite de l'arbre (figure 1) est :

$$\begin{cases} U(x, y, z) = U_0(x) - y \frac{\partial V_0}{\partial x} - z \frac{\partial W_0}{\partial x} \\ V(x, y, z) = V_0(x) \\ W(x, y, z) = W_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

Le vecteur position $\{r_p\}$ d'un point P de la poutre

dans le repère $(O, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ est donné par:

$$\{r_p\} = \{x\} + \{B\} \quad (2)$$

avec :

$$\{B\} = (u, v, w)^T \quad (3)$$

La base fixe est liée à la base mobile par la matrice de passage Q, ainsi la position du vecteur globale R_p est donnée par la relation suivante :

$$\{R_p\} = [Q] \{r_p\} \quad (4)$$

De (4) on trouve :

$$\{\dot{R}_p\} = \left[\dot{Q} \right] \{r_p\} + [Q] \{\dot{r}_p\} \quad (5)$$

La dérivée par rapport au temps de la matrice de transformation nous donne :

$$\left[\dot{Q} \right] = \frac{\partial [Q]}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\dot{\Phi} \right] \cdot \frac{\partial [Q]}{\partial \Phi} \quad (6)$$

Ainsi, on aura :

$$\{\dot{R}_p\} = \left[\dot{\Phi} \right] \cdot \frac{\partial [Q]}{\partial \Phi} (\{x\} + \{B\}) + [Q] \{\dot{B}\} \quad (7)$$

L'expression de l'énergie cinétique est donnée par l'équation suivante :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{R}_p\}^T \{\dot{R}_p\} dv \quad (8)$$

En remplaçant le vecteur vitesse dans l'expression de l'énergie cinétique, on aura

$$\begin{aligned} E_C = & \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \left[\dot{\Phi} \right] \{B\} dv \\ & + \frac{1}{2} \rho \int_v \{B\}^T \left[\dot{\Phi} \right]^T \left[\dot{\Phi} \right] \{B\} dv + \rho \int_v \{B\}^T \left[\dot{\Phi} \right] \{X\} dv \\ & + \rho \int_v \{B\}^T \left[\dot{\Phi} \right]^T \left[\dot{\Phi} \right] \{X\} dv + \frac{1}{2} \rho \int_v \{X\}^T \left[\dot{\Phi} \right]^T \left[\dot{\Phi} \right] \{X\} dv \end{aligned} \quad (9)$$

2.2. Energie de déformation

Une fois le champ de déplacement connu il est possible de déterminer les composantes du tenseur de déformation. Dans le cas d'une poutre de type Euler Bernoulli (effet du cisaillement transversal négligeable) ε admet une seule composante ε_{xx} suivant x et qui est donnée par :

$$\varepsilon_{xx} = \left[\frac{\partial U_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (10)$$

et qu'on peut l'écrire sous la nouvelle forme en fonction des termes linéaires et non linéaires

$$\begin{aligned} \varepsilon_L = & \left[\frac{\partial U_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right]; \\ \varepsilon_{NL} = & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

une fois les déformations connues on peut déterminer les contraintes associées et qui se réduisent à une seule composante σ_{xx} qui est donnée par:

$$\sigma_{xx} = E \left[\frac{\partial U_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right] + E \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dV_0}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dW_0}{dx} \right)^2 \right] \quad (12)$$

où E : est le module d'élasticité longitudinal. L'énergie de déformation tenant compte des termes non linéaires est exprimée par :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_S E(\varepsilon_L)^2 ds \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_S E(\varepsilon_{NL})^2 ds \right] dx + \int_0^L \left[\int_S E(\varepsilon_L \cdot \varepsilon_{NL}) ds \right] dx \quad (13)$$

qu'on peut l'exprimer sous forme explicite par l'équation suivante:

$$E_d = \frac{1}{2} ES \int_0^L \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} EI_z \int_0^L \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} EI_y \int_0^L \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} ES \int_0^L \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} ES \int_0^L \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{8} ES \int_0^L \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{8} ES \int_0^L \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{4} ES \int_0^L \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 dx \quad (14)$$

où:

La section de la poutre :

$$S = \int_s ds \quad (15)$$

Le moment quadratique suivant l'axe z :

$$I_y = \int_s z^2 ds \quad (16)$$

Le moment quadratique suivant l'axe y :

$$I_z = \int_s y^2 ds \quad (17)$$

2.3. Sélection des Fonctions de Forme et modélisation de l'élément poutre.

L'arbre en rotation est modélisé par un seul élément fini hiérarchique à deux nœuds.

Les coordonnées locales sont liées aux coordonnées adimensionnelles par la relation :

$$\xi = x/L \quad \text{avec } (0 \leq \xi \leq 1). \quad (18)$$

Le vecteur des déplacements généralisés est donné par :

$$\{q\} = \{q_u; q_v; q_w\}^T \quad (19)$$

Avec :

$$\{q_u\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N_u}\}^T \cdot \exp(j\omega t) \quad (20)$$

$$\{q_v\} = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N_v}\}^T \cdot \exp(j\omega t) \quad (21)$$

$$\{q_w\} = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_{N_w}\}^T \cdot \exp(j\omega t) \quad (22)$$

Le champ déplacement d'un point de la poutre est donné par :

$$\begin{cases} U_0 = \sum_{m=1}^{N_u} x_m(t) \cdot g_m(\xi) = [N_u] \{q_u\} \\ V_0 = \sum_{m=1}^{N_v} y_m(t) \cdot f_m(\xi) = [N_v] \{q_v\} \\ W_0 = \sum_{m=1}^{N_w} z_m(t) \cdot f_m(\xi) = [N_w] \{q_w\} \end{cases} \quad (23)$$

avec :

N_u : Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale x.

N_v : Nombre de fonction de forme de la direction transversale y.

N_w : Nombre de fonction de forme de la direction transversale z.

Le groupe des fonctions de forme est donné par :

$[g_1, g_2, \dots, g_{r+2}]$: Pour le déplacement longitudinal U

$[f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{r+4}]$: Pour le déplacement transversal V et W

où :

$$\begin{cases} g_1 = 1 - \xi \\ g_2 = \xi \\ g_{r+2} = \sin \delta r \xi \\ \delta r = r\pi. \quad r = 1, 2, 3, \dots \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} f_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ f_2 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ f_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ f_4 = -\xi^2 - \xi^3 \\ f_{r+4} = \delta r \left[-\xi + (2 + (-1)^r) \xi^2 - (1 + (-1)^r) \xi^3 \right] + \sin \delta r \xi \\ \delta r = r\pi. \quad r = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (24)$$

Les deux fonctions de forme du groupe (g_1, g_2) et les quatre fonctions de forme du groupe (f_1, f_2, f_3, f_4) sont celles de la méthode des éléments finis nécessaires à la description des déplacements aux nœuds de l'élément, alors que les fonctions trigonométriques contribuent seulement au champ de déplacement interne et n'affectent pas les déplacements aux nœuds.

En appliquant les équations de Lagrange, les équations de mouvements en vibration libre d'un arbre flexible en rotation peuvent être déterminées.

$$[M]\left\{\ddot{q}\right\} + [G]\left\{\dot{q}\right\} + [K_L]\{q\} + [K_{NL}]\{q\} + [R]\{q\} = \{0\} \quad (25)$$

Le système obtenu est un système non linéaire dont les équations sont couplées une fois par l'effet gyroscopique, représenté par la matrice [G] et par la non linéarité du tenseur de déformation, représenté par la matrice [K_{NL}] (les différentes matrices du système sont données en annexe).

2. RESULTATS ET INTERPRETATION

La fréquence ω est donnée en fonction du paramètre de fréquence ω^* par la relation :

$$\omega = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \cdot \omega^* \quad (26)$$

La vitesse de rotation Ω est donnée en fonction du paramètre de vitesse de rotation Ω^* :

$$\Omega = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \cdot \Omega^* \quad (27)$$

Les paramètres de fréquence des quatre premiers modes sont données dans le tableau 1, suivants différents cas des conditions aux limites pour une poutre en mouvements de flexion, suivant V et W avec une linéarité géométrique.

$$P=10, \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = 1, \Omega=0, I=I_V=I_Z$$

<i>Poutre encastree – libre (E-L)</i>				
MEFHT	3.5160	22.0348	61.7036	120.9762
Exacte	3.5160	22.0345	61.6972	120.9019
<i>Poutre bi- encastree (E-E)</i>				
MEFHT	22.3733	61.6729	120.9146	199.8995
Exacte	22.3732	61.6696	120.9120	199.8595
<i>Poutre encastree – appuyee (E-A)</i>				
MEFHT	15.4182	49.9651	104.2478	178.2970
Exacte	15.4182	49.9649	104.2477	178.2697
<i>Poutre bi- appuyee (A-A)</i>				
MEFHT	9.8696	39.4784	88.8264	157.9136
Exacte	9.8696	39.4784	88.8264	157.9136

Tableau 1 : Comparaison des ω^* de flexion calculés en utilisant la MEFHT avec la solution exacte pour une poutre avec différentes condition aux limites.

Dans le tableau 2, on compare les rapports des pulsations propres linéaire (ω_L) et les pulsations propres non linéaire (ω_{NL}) obtenus par notre programme avec les rapports obtenus par [8], pour une poutre E-E en mouvements longitudinal et de flexion et pour des différents rapports A_m/h .

Il faut noter que dans notre travail on a pris le mouvement longitudinal en considération, ce qui n'est pas le cas dans [8].

$$E=7.10^{10} \text{ Nm}^{-2}, S=0.00004 \text{ m}^2, \rho=2778 \text{ kg/ m}^3, \\ L=0.58\text{m}, I_z=1.333(3).10^{-11} \text{ m}^4, \\ \Omega=0, P=10$$

A_m/h		0	0.5	1.	1.5	2	2.25
ω_{NL}/ω_L	MEFHT	1	1.026	1.194	1.369	1.566	1.754
	[8]	1	1.066	1.238	1.477	1.753	1.899

Tableau 2 : Comparaison des rapports ω_{NL}/ω_L calculés en utilisant la MEFHT avec [8], pour une poutre E-E et différents rapports A_m/h .

Dans le tableau 3, on compare respectivement le paramètre de fréquence fondamental du mouvement de flexion obtenu par notre programme avec le paramètre de fréquence calculé par la relation [9], pour une poutre avec la condition aux limite E-L, et ceci pour différentes paramètre de vitesses de rotation Ω^* .

Paramètres de Vitesses de rotation Ω^*	Les paramètres de fréquence ω^* de flexion			
	ω^*1	ω^*1 [9]	ω^*2	ω^*2 [9]
0	3.5160	3.5160	3.5160	3.5160
0.2	3.3273	3.3391	3.7273	3.7023
0.4	3.1612	3.1715	3.9612	3.8979
0.6	3.0169	3.0131	4.2169	4.1027
0.8	2.8935	2.8638	4.4935	4.3166

Tableau 3 : Comparaison des ω^* du mouvements de flexion calculés en utilisant la MEFHT avec [9] pour une poutre E-L.

La figure 2 montre respectivement la variation du paramètre de fréquence fondamentale ω^* en fonction du paramètre de vitesse de rotation Ω^* (diagramme de Campbell) pour une poutre avec les condition aux limites E-L.

La vitesse de rotation provoque donc l'effet gyroscopique et cet effet provoque un couplage des déplacements perpendiculaire à l'axe de rotation, ce qui a pour conséquence de séparer les fréquences du rotation en deux branches (mode en précession directe ω_2 et mode en précession inverse ω_1). Cet effet a une influence importante sur le comportement des arbres tournants.

Le couplage gyroscopique inhérent aux structures tournantes induit un mouvement de précession –

directe ou inverse (rétrograde) selon que le sens de ce mouvement est identique ou contraire à celui de la rotation propre –

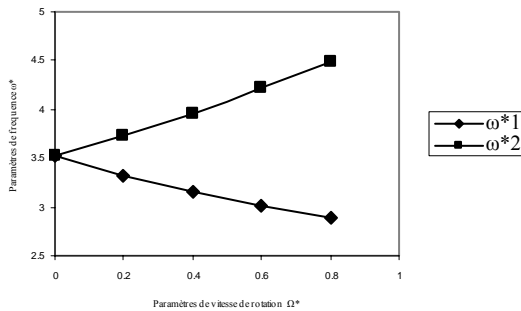


Figure 2 : Paramètre de fréquence en fonction du paramètre de vitesse de rotation suivant V et W pour une poutre E-L.

Dans le tableau 4, on donne les rapports de pulsations propres linéaires ω_L et non linéaire ω_{NL} suivants :

$$E=7.10^{10}, S=4.10^{-6} \text{ m}^2, \rho=2778 \text{ kg/ m}^3, L=0.58, \\ I_z=I_y=1.333(3).10^{-11} \text{ m}^4, P=10.$$

Ω (rd/s) A_m/h	0	20	90
0	1	1	1
0.25	1.0121	1.1364	1.5370
0.5	1.0283	1.5839	2.1664
0.75	1.0695	2.2491	4.0991
1	1.1836	3.1092	-

Tableau 4 : Variation des pulsations propres en fonction de Ω et A_m/h pour une poutre E-E.

Les figures 3, 4 et 5 montrent respectivement la variation des rapports de pulsations propres linéaire et les pulsations propres non linéaire ω_{NL}/ω_L en fonction de A_m/h pour le cas stationnaire $\Omega = 0$ et les cas où $\Omega=20$ rd/s et $\Omega=90$ rd/s.

On remarque qu'on a une variation proportionnelle de ω_{NL}/ω_L en fonction de A_m/h , et lorsque le rapport A_m/h approche de 1, le rapport ω_{NL}/ω_L augmente rapidement. Cette augmentation est encore beaucoup plus rapide lorsque la vitesse de rotation croît.

La vitesse de rotation a donc une influence très importante sur la valeur de l'amplitude maximale.

La variation de la vitesse de rotation a une influence sur l'amplitude maximale des déplacements de la structure lors de montées en

vitesse. L'effet non linéaire dû au raidissement géométrique est lié à l'état de contraintes dans la structure, et en augmente la raideur K^* , il couple les déplacements orthogonaux à l'axe de rotation.

L'influence de l'effet gyroscopique et la non linéarité géométrique provoquent un rapport très important de la fréquence linéaire et la fréquence non linéaire surtout lors de montée de l'amplitude et la vitesse de rotation.

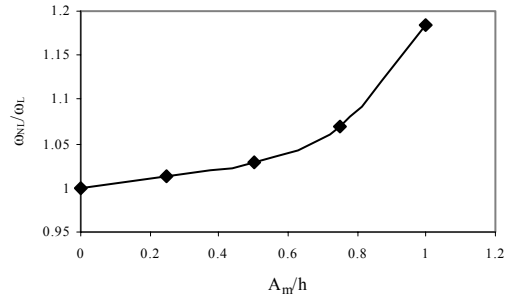


Figure 3 : ω_{NL}/ω_L en fonction de A_m/h pour une poutre E-E et $\Omega = 0$ rd/s.

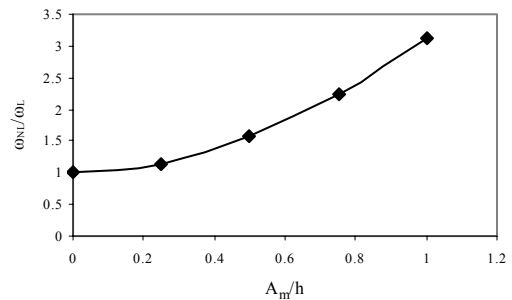


Figure 4 : ω_{NL}/ω_L en fonction de A_m/h une poutre E-E et $\Omega = 20$ rd/s.

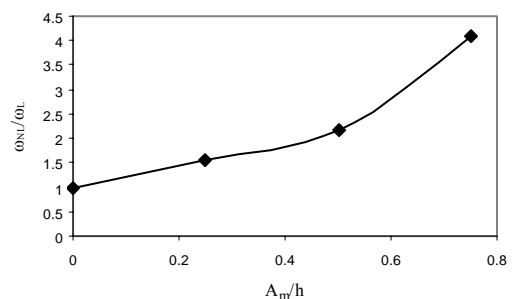


Figure 5 : ω_{NL}/ω_L en fonction de A_m/h une poutre E-E et $\Omega = 90$ rd/s.

3. CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

- Pour toutes formes géométriques des poutres et différentes conditions aux limites, la convergence des solutions est assurée par l'élément poutre à deux nœuds avec des résultats en concordance avec les solutions exactes.
- L'effet gyroscopique provoque un couplage des déplacements orthogonaux à l'axe de rotation ce qui a pour conséquence de séparer les fréquences en rotation en deux branches (mode en précession directe et mode en précession inverse). Cet effet a une influence importante sur les comportements des arbres tournants. Ce couplage gyroscopique inhérent aux structures tournantes induit un mouvement de précession – directe ou inverse (rétrograde) selon que le sens de ce mouvement est identique ou contraire à celui de la rotation propre –
- L'effet non linéaire est lié à l'état de contraintes dans la structure et augmente la raideur, il couple les déplacements orthogonaux à l'axe de rotation.
- La variation de la vitesse de rotation a une influence sur l'amplitude maximale des déplacements de la structure lors de montée en vitesse.
- Les arbres tournants doivent traverser plusieurs vitesses critiques en montée et en ralentissement.

Finalement, on conclut que l'influence de l'effet gyroscopique sur les fréquences propres des arbres tournants dans le cas des grands déplacements a un rôle très important lors des montées des vitesses de rotation, et qu'il ne doit pas être toujours négligé, surtout dans le cas des grandes vitesses de rotation.

REFERENCES

- [1] *Jean.Wu., Zheng. Zu and Ray.P.S. Han*, Natural frequencies and normal modes of spinning Timoshenko beams with general boundary conditions, *Journal of applied mechanics*, June 1992, vol.59, 197-204.
- [2] *F.A. Raffa and F. Vatta*, Gyroscopic effects analysis in the Lagrangian formulation of rotating beams, *J. Meccanica* .1999; 34,357-366.
- [3] *Hu. K., Vlahopoulos N. and Mourelatos Z.P.* A finite element formulation for coupling rigid and flexible body dynamics of rotating beams, *J. Sound Vib.*2002; 253(1), 903-630.
- [4] *H. D. Nelson and J. M. Mc Vaugh*, The dynamics of rotor bearing systems using finite elements, *ASME J. Engng. Ind.*1976; 98, 593-600.
- [5] *B.J.Gaganis,A.K.Zisimopoulos, P.G.Nikolakopoulos,C.A.Papadopoulos,*

Modal analysis of rotor on piecewise linear journal bearings under seismic excitation, *journal of vibration and acoustics*.1999; vol.121.

[6] *Mohammed F.Abdul Azeez, Alexander F.Vakakis*, Numerical and experimental analysis of a continuous overhung rotor undergoing vibro-impact, *International journal of non linear mechanics*.1999, 34(1999)415-435.

[7] *A.Houmat*, An alternative hierarchical finite element formulation applied to plates vibrations, *journal of sound and vibration*. 1997; 206(2), 201-215.

[8] *P.Ribeiro, M.Petyt*, Non linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite-element method, *journal of sound and vibration* 1999; 224(4),591-624.

[9] *Gotz Von.Groll*, Dynamic properties of rotating structures: Modelling and visualization of simulation and experimental results, A thesis of the requirements for the degree of diplom ingenieur of the technische hochschule darmstadt. Fachberth mecanick, 64289 Darmstadt, Germany, 1995.

LISTE DES SYMBOLES

$U(x, y, z)$	Déplacement longitudinal.
$V(x, y, z)$	Déplacement transversal.
$W(x, y, z)$	Déplacement vertical.
E	Module d'élasticité.
ρ	Masse volumique.
L	Longueur de la poutre.
S	Section de la poutre.
h	Epaisseur ou diamètre de la poutre.
I_y	Moment quadratique suivant l'axe Z.
I_z	Moment quadratique suivant l'axe Y.
ξ	Coordonnée adimensionnelle.
ε_{ij}	Tenseur de déformation.
σ_{ij}	Tenseur de contrainte.
ω	Fréquence propre.
ω^*	Paramètre de fréquence.
Ω^*	Paramètre de vitesse.
$[N_i]$	Groupe des fonctions de formes. Avec ($i = u, v, w$).
$g(\xi)$	Fonctions des formes suivant le déplacement longitudinal U.
$f(\xi)$	Fonctions des formes suivant les déplacements de flexion V et W.
p	Nombre des fonctions hiérarchiques.
$\{w_L\}$	Vecteurs propres linéaires.
ω_L	Valeurs propres linéaires.
$\{w_{NL}\}$	Vecteurs propres non linéaires.
ω_{NL}	Valeurs propres non linéaires.
A_m	Amplitude spécifiée.

ANNEXE

L'équation (25) sous forme développée prend la forme :

$$\begin{cases} [M_u] \{\ddot{q}_u\} + [K_u] \{q_u\} + [K_2] \{q_v\} + [K_4] \{q_w\} = \{0\} \\ [M_v] \{\ddot{q}_v\} + [G1] \{\dot{q}_w\} + [K_v] \{q_v\} + [R_v] \{q_v\} + [K_3] \{q_u\} \\ + [K_6] \{q_v\} + [K_8] \{q_w\} = \{0\} \\ [M_w] \{\ddot{q}_w\} - [G1]^T \{\dot{q}_v\} + [K_w] \{q_w\} + [R_w] \{q_w\} \\ + [K_5] \{q_u\} + [K_8]^T \{q_v\} + [K_7] \{q_w\} = \{0\} \end{cases}$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [M_U] & 0 & 0 \\ 0 & [M_V] & 0 \\ 0 & 0 & [M_W] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \\ \ddot{q}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [G1] \\ 0 & -[G1]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_v \\ \dot{q}_w \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} [K_U] & 0 & 0 \\ 0 & [K_V] & 0 \\ 0 & 0 & [K_W] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [R_V] & 0 \\ 0 & 0 & [R_W] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & [K_2] & [K_4] \\ [K_3] & [K_6] & [K_8] \\ [K_5] & [K_8]^T & [K_7] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_U] & 0 & 0 \\ 0 & [M_V] & 0 \\ 0 & 0 & [M_W] \end{bmatrix}; [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [G1] \\ 0 & -[G1]^T & 0 \end{bmatrix}; \\ [K_L] = \begin{bmatrix} [K_U] & 0 & 0 \\ 0 & [K_V] & 0 \\ 0 & 0 & [K_W] \end{bmatrix}; \\ [K_{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & [K_2] & [K_4] \\ [K_3] & [K_6] & [K_8] \\ [K_5] & [K_8]^T & [K_7] \end{bmatrix}; [R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [R_V] & 0 \\ 0 & 0 & [R_W] \end{bmatrix}$$

Alors que les différentes matrices sont exprimées ainsi :

$$[M] = \begin{bmatrix} \rho S L \int_0^1 [N_u]^T [N_u] d\xi & 0 & 0 \\ 0 & \rho S L \int_0^1 [N_v]^T [N_v] d\xi & 0 \\ 0 & 0 & \rho S L \int_0^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \end{bmatrix}$$

$$[G1] = 2 \rho \Omega S L \int_0^1 [N_v]^T [N_w] d\xi ;$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho S L \Omega^2 \int_0^1 [N_v]^T [N_v] d\xi & 0 \\ 0 & 0 & \rho S L \Omega^2 \int_0^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \end{bmatrix}$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{E.S}{L} \int_0^l [N'_u]^T [N'_u] d\xi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E.I_Z}{L^3} \int_0^l [N'_v]^T [N'_v] L d\xi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E.I_y}{L^3} \int_0^l [N'_w]^T [N'_w] L d\xi \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \frac{1}{2} [K_3]^T ;$$

$$[K_3] = \frac{E.S}{2L^2} \int_0^l [N'_v]^T \{q_v\} [N'_u] [N'_u] d\xi ;$$

$$[K_4] = \frac{1}{2} [K_5]^T ;$$

$$[K_5] = \frac{E.S}{2L^2} \int_0^l [N'_w]^T \{q_w\} [N'_u] [N'_u] d\xi ;$$

$$[K_6] = \frac{E.S}{2L^3} \int_0^l [N'_v]^T [N'_v] \{q_v\} \{q_v\}^T [N'_v]^T [N'_v] d\xi ;$$

$$[K_7] = \frac{E.S}{2L^3} \int_0^l \{q_w\}^T [N'_w]^T [N'_w] \{q_w\} \{q_w\}^T [N'_w]^T [N'_w] d\xi$$

$$[K_8] = \frac{E.S}{2L^3} \int_0^l [N'_v]^T [N'_v] \{q_v\} \{q_w\}^T [N'_w]^T [N'_w] d\xi$$

Ω est la vitesse de rotation de l'arbre.

Les termes des matrices sont fonction des intégrales :

$$I_{mn}^{\alpha\beta} = \int_0^1 g_m^\alpha(\xi) \cdot g_n^\beta(\xi) d\xi ; \quad J_{mn}^{\alpha\beta} = \int_0^1 f_m^\alpha(\xi) \cdot f_n^\beta(\xi) d\xi ;$$

$$I J_{rmn}^{\alpha\beta\gamma} = \int_0^1 f_r^\alpha(\xi) \cdot g_m^\beta(\xi) \cdot f_n^\gamma(\xi) d\xi$$

$$T_{rsmn}^{\alpha\beta\gamma\lambda} = \int_0^1 f_r^\alpha(\xi) \cdot f_s^\beta(\xi) \cdot f_m^\gamma(\xi) \cdot f_n^\lambda(\xi) d\xi$$

(r,s,m,n) désignent le nombre des fonctions de forme utilisées.

($\alpha, \beta, \gamma, \lambda$) est l'ordre de dérivation.