

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du
diplôme de Master en Mathématiques

Option: Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O)

Thème

Systemes Dynamiques Réguliers Par Morceaux

Réalisé par :

- M. Djalal OUNADJELA

Présenté le 06 Juillet 2015 devant le jury composé du

- | | |
|------------------------------|----------------|
| - Pr. Hacene DIB | (Président) |
| - Pr. Mustafa YEBDRI | (Encadreur) |
| - Dr. Abdelatif BENCHAIB | (Examineur) |
| - Pr. Sidi Mohammed BOUGUIMA | (Examineur) |
| - Dr. Jamila HADJ SLIMAN | (Examinatrice) |
| - Dr. Benmiloud MEBKHOUT | (Examineur) |

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	v
Première partie	1
1. Systèmes étudiés	2
2. Les différents types de points d'équilibre	14
Deuxième partie	19
3. Bifurcation des points d'équilibre de bord (Boundary-equilibrium bifurcation : BEB)	20
4. Linéarisation autour d'un point d'équilibre de bord	21
5. Classification des comportements des points d'équilibre dans une BEB	24
Troisième partie	31
6. Stabilité et valeurs propres	32
Bibliographie	59

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques s'est avérée un puissant outil d'analyse et de compréhension du comportement de divers types de problèmes. Désormais, à notre disposition une approche qualitative et géométrique bien développée des systèmes dynamiques qui s'appuie généralement sur l'évolution du système étant défini par une fonction régulière de ses arguments. Cette approche s'est révélée d'un ultime usage pour permettre de bien comprendre le comportement de nombreux phénomènes physiques importants tels que les flux de fluides, déformations élastiques, systèmes optiques et biologiques non linéaires. Cependant, cette théorie exclut de nombreux systèmes importants qui surgissent dans la pratique. Ce sont les systèmes dynamiques contenant des termes qui sont des fonctions non-régulières de leurs arguments. Les problèmes de cette nature se posent partout! Des exemples importants proviennent de l'étude des circuits électriques possédant des commutateurs, dispositifs mécaniques dans lequel certains composants se croisent avec d'autres (tels que les engrenages), des problèmes avec frottement, glissement ou grincement, de nombreux systèmes de contrôle (y compris leur mise en œuvre par des méthodes numériques adaptatives) et modèles issus des sciences sociales et financières où le changement continu peut déclencher des actions discrètes. Ces problèmes sont tous caractérisés par des fonctions qui sont régulières par morceaux, et dont la régularité est perdue lors d'événements instantanés, par exemple, lors de l'utilisation d'un interrupteur. Ils possèdent une dynamique intéressante et une application pratique importante ainsi qu'une riche structure mathématique sous-jacente. A ce point surgit une lacune par le fait que leur comportement n'est pas facile à décrire en termes de la théorie qualitative moderne des systèmes dynamiques.

Or, un système dynamique régulier par morceaux n'existe pas et en réalité tous les systèmes physiques sont réguliers (au moins à des échelles de longueur supérieure à celle de la taille moléculaire). Cependant, cette affirmation est trompeuse. Les échelles de temps sur lesquelles des transitions, tel un impact se produisent dans un système d'ingénierie peuvent être remarquablement faible par rapport à celle de la dynamique d'ensemble, et donc, le modèle global correcte est certainement discontinu sur une échelle de temps macroscopique. En outre, des phénomènes relativement simples lorsque considérés du point de vue des systèmes réguliers par morceaux s'avèrent souvent être des limites naturelles de scénarios beaucoup plus complexes observées dans les systèmes fluides.

Une deuxième raison de l'exclusion des systèmes réguliers par morceaux de la littérature, c'est qu'ils remettent en question bon nombre de nos hypothèses sur la dynamique. Par exemple, comment pouvons-nous définir des concepts tels que la stabilité structurelle, bifurcation et mesures qualitatives de chaos dans de tels systèmes? En formulant des hypothèses prudentes sur les problèmes que nous

études, qui ne sont pas incompatibles avec les problèmes physiques qui y mènent, il deviendra évident que bon nombre des concepts que l'on croyait être propres aux systèmes réguliers seulement, s'étendent naturellement à ceux réguliers par morceaux.

Au cours des dernières années, beaucoup d'efforts de recherche ont été fournis pour la classification et la compréhension de ces phénomènes. Pour une revue des résultats disponibles, voir les travaux de Di Bernardo (2008) ou les livres de Mosekilde & Zhusubalyev (2003) et de Leine & Nijmeijer (2004).

Initialement, l'analyse a porté sur la classification des scénarios possibles de bifurcation qui se produisent lorsque des points d'équilibres entrent en collision avec les variétés de transition (collisions de frontière).

On a aussi le travail pionnier réalisé par Feigin (1970, 1974, 1995) qui concerne les systèmes linéaires par morceaux continus.

Une classification complète de tous les scénarios possibles dans le cas d'une ou deux dimensions a ensuite été présentée par Nusse & Yorke (1992, 1994, 1995) et Banerjee & Grebogi (1999). Une classification des scénarios les plus simples en dimensions « n » a été apportée par Di Bernardo (1999).

Le contenu de ce mémoire étant en grande partie inspiré des travaux des mathématiciens M. Di Bernardo, A. Nordmark, G. Olivar [4]. est divisé en trois parties. Dans la première partie on donnera quelques définitions avec un aperçu général des systèmes étudiés. La deuxième partie est consacrée à l'étude de la bifurcation dans ses aspects les plus simples, elle fournira les conditions suffisantes à l'apparition de deux scénarios élémentaires. Un lien entre des valeurs propres spécifiques, entre autre la stabilité des points d'équilibre, et la manifestation des deux scénarios élémentaires de bifurcations sera donné dans la troisième partie de ce mémoire. Ceci tout en présentant des exemples et des illustrations pour faciliter au lecteur la compréhension des résultats obtenus et leurs démonstrations.

Le lecteur pourra consulter les références dont ce travail a été inspiré et qui sont données à la fin de cet ouvrage.

Première partie

DÉFINITION 1. Un système d'équations différentielles ordinaires (EDO), $x' = F(x)$; est dit régulier par morceaux si l'espace de phase peut être partitionné en un nombre dénombrable de régions où F prend la forme de différentes fonctions régulières (c'est-à-dire de classe C^k pour $k \in \mathbb{N}^*$). La non-régularité se manifeste sur des régions frontières de codimension 1 dites frontières de discontinuité ou variétés de transition.

EXEMPLE 1. Soit l'application $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

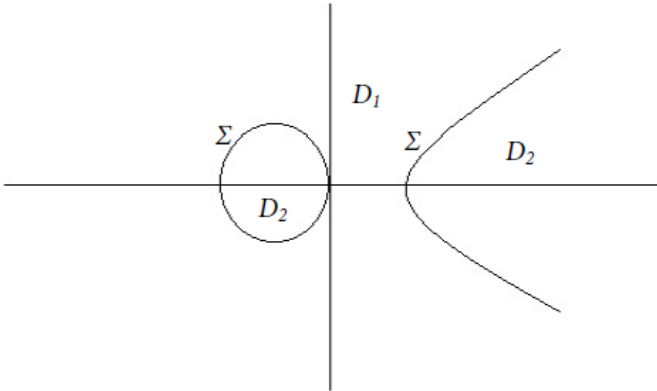
$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ \sin(x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

La fonction F est régulière (de classe C^∞) dans chaque région isolée, et on a deux variétés de transition, qui sont les deux points $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$, ils sont de dimensions nulles mais puisque \mathbb{R} est de dimension 1 ces variétés sont de codimension $1 - 0 = 1$.

EXEMPLE 2. Soit $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application définie comme suit

$$G(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x + 1)^2 + y^2 < -1 \\ (\sin(y), 0) & \text{si } y^2 - x < -1 \\ (1, y^2) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans ce cas il y a trois régions où G est régulière (de classe C^∞), et on a deux variétés de transition qui sont le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1, ainsi que la parabole d'équation $x = y^2 + 1$, ils sont de dimension 1 mais puisque \mathbb{R}^2 est de dimension deux ces variétés sont de codimension $2 - 1 = 1$. (Voir figure ci-dessous)



1. Systèmes étudiés

Dans ce travail on s'intéresse à trois classes de systèmes dynamiques réguliers par morceaux qui sont :

Les systèmes réguliers par morceaux continus (systèmes PWSC: piece-wise smooth continuous)

Les systèmes de Filippov

Les systèmes d'impact

On se focalisera sur les systèmes possédant une seule frontière de discontinuité Σ du moment que la bifurcation sujette à la présente étude se localise au voisinage d'un point appartenant à Σ .

1.1. Systèmes PWSC. On va restreindre notre attention à une région locale

de l'espace des phases D .

La surface Σ (surface par abus de langage) peut être décrite comme étant l'ensemble du niveau zéro d'une fonction scalaire non-singulière H . Notons les sous-ensembles de D où H est positive, respectivement négative par D_1 , respectivement D_2 . C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x \in D : H(x) > 0\} = H^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \\ D_2 &= \{x \in D : H(x) < 0\} = H^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \\ \Sigma &= H^{-1}(\{0\}) \end{aligned}$$

Si l'espace de phase est le plan, la surface Σ sera réduite à une courbe, qui est de codimension 1 dans le plan et qui le divise en deux régions.

EXEMPLE 3. Si on prend $D = \mathbb{R}^2$ et $H(x, y) = x$.

Alors l'ensemble $\Sigma = H^{-1}(\{0\})$ est l'axe des y , la région D_1 est formée par tous les points à droite cet axe, et la région D_2 par tous les points à gauche.

EXEMPLE 4. Prenons $D = \mathbb{R}^2$ et $H(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Dans ce cas on trouve que l'ensemble $\Sigma = H^{-1}(\{0\})$ est le cercle unité, la région D_1 est l'extérieur du cercle et la région D_2 est l'intérieur du cercle.

La définition se généralise aux systèmes n -dimensionnel avec paramètre $\mu \in \mathbb{R}$. On définit le système comme suit:

$$(1.1) \quad x' = \begin{cases} F_1(x, \mu) & \text{si } H(x, \mu) > 0 \\ F_2(x, \mu) & \text{si } H(x, \mu) < 0 \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont des fonctions suffisamment régulières de leur arguments sur D .

DEFINITION 2. On appelle système PWSC un système du type (1.1) tel que l'hypothèse suivante soit satisfaite :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} F_1(x, \mu) &= F(x, \mu) \\ F_2(x, \mu) &= F(x, \mu) + G(x, \mu)H(x, \mu) \end{aligned}$$

Pour une certaine fonction régulière $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Il est clair que pour les points (x, μ) satisfaisants $H(x, \mu) = 0$ on trouve $F_1(x, \mu) = F_2(x, \mu)$.

EXEMPLE 5. Soit $n = 1$, et soit le système

$$x' = \begin{cases} F_1(x, \mu) = x & \text{si } x > 0 \\ F_2(x, \mu) = \mu x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a $H(x, \mu) = x$.

Le système peut être écrit sous la forme

$$x' = \begin{cases} F_1(x, \mu) = x & \text{si } H(x, \mu) = x > 0 \\ F_2(x, \mu) = x + (\mu x - 1)x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour $G(x, \mu) = \mu x - 1$ le système est de la forme (1.2) et donc il est un système PWSC.

1.2. Système de Filippov. Les systèmes de Filippov sont par contre caractérisés par la propriété : $F_1(x) \neq F_2(x)$ quand $x \in \Sigma$. Donc Ce type de systèmes dynamiques réguliers par morceaux ne diffère du précédent que par l'ordre des discontinuités à la frontière Σ .

Pour les systèmes de Filippov au lieu de la forme (1.1) on adoptera la forme

$$(1.3) \quad \begin{aligned} F_1(x, \mu) &= F(x, \mu) \\ F_2(x, \mu) &= F(x, \mu) + G(x, \mu) \end{aligned}$$

Pour une certaine fonction régulière $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, mais cette fois G est non-nulle quand $H(x, \mu) = 0$. Plus spécifiquement, on supposera dans ce qui suit que $H_x G \neq 0$ sur D où H_x désigne la différentielle de H par rapport à x . Le lecteur trouvera justification plus tard dans ce mémoire.

REMARQUE 1. La fonction H ne joue aucun rôle dans l'expression de F_2 . Son rôle se limite seulement à délimiter les deux régions D_1 et D_2 ainsi qu'à définir l'ensemble Σ .

EXEMPLE 6. Soit le système dynamique donné par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ e^y \end{pmatrix} & \text{si } H(x, y) = y > 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Qui peut être écrit sous la forme:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ e^x \end{pmatrix} & \text{si } H(x, y) = y > 0 \\ \begin{pmatrix} y \\ e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y - x \\ -e^x \end{pmatrix} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Ici Σ est l'axe des x .

Si on pose $G(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ e^x \end{pmatrix}$ alors G est régulière et $G(x, y) \neq (0, 0) (\forall (x, y) \in \Sigma)$.

Donc ce système est bien un système de Filippov.

1.2.1. *Mouvement de Glissement.* Il est connu que si

$$(1.4) \quad H_x F_1 \cdot H_x F_2 < 0$$

sur un sous-ensemble de Σ , alors le système peut manifester un mouvement de glissement. Avant de développer étudions l'exemple suivant.

EXEMPLE 7. Soit le système de Filippov non-paramétré

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{si } y > 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Dans cet exemple

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R}^2 \\ H(x, y) &= y \\ \Sigma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \text{ est l'axe des } x \\ G(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$

Alors les solutions sont de la forme

$$x(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 - t \end{pmatrix} & t < y_0 \quad \text{si } y_0 > 0 \\ \text{et} \\ \begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 + t \end{pmatrix} & t < -y_0 \quad \text{si } 0 > y_0 \end{cases}$$

Mais que peut-il se passer si l'on veut faire un prolongement de trajectoire après avoir atteint l'ensemble Σ ?

Supposons qu'une trajectoire démarre du point $(0, 1) \in D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, elle atteint Σ au temps $t = 1$ au point $(0, 0)$ et après cet instant elle ne peut pas continuer son mouvement dans D_1 . Mais peut-elle le faire dans D_2 ?

La réponse est négative car en prenant pour condition initial le point $(0, 0)$, la trajectoire ne peut pas se prolonger dans D_2 car sinon on aura $y(t) = 0 + t < 0$ si $t > 0$ ce qui est absurde. Donc au final la trajectoire ne peut continuer son mouvement ni dans D_1 ni dans D_2 , et donc si on désire la prolonger on ne peut le faire que sur la surface Σ en glissant dessus d'où l'appellation: mouvement de glissement. La question qui se pose est quel champ de vecteurs sera le moteur du mouvement prolongé, puisqu'on est sur Σ .

Pour l'exemple adopté on remarque que

$$H_{(x,y)}(x, y) = (0 \quad 1)$$

Alors $[H_{(x,y)}F_1 \cdot H_{(x,y)}F_2](x, y) = -1 \cdot 1 = -1 < 0$ sur D et en particulier sur Σ . Géométriquement ceci signifie que sur Σ les composantes de F_1 et F_2 projetées sur le vecteur $H_{(x,y)}$, qui est normal à Σ , sont de signes opposés et donc agissent de façon antagoniste sur les points de la surface Σ .

Pour les systèmes de Filippov de la forme (1.3), le mouvement de glissement peut apparaître à travers les points qui satisfont la condition: $H(x, \mu) = 0$, où le système subit le champ de vecteurs défini par :

$$(1.5) \quad F_s(x, \mu) = F(x, \mu) + \lambda G(x, \mu)$$

Où λ est choisi pour garder la trajectoire sur Σ et donc pour garder $H = 0$. On en déduit que F_s doit être tangent à Σ à tout moment, donc perpendiculaire à H_x i.e. $H_x F_s = 0$ sur Σ .

Mais sur Σ on a $H_x F_1 \cdot H_x F_2 = (H_x F)^2 + H_x F \cdot H_x G < 0$ et ceci implique que $H_x G \neq 0$ (d'où notre supposition pour les systèmes de Filippov) car sinon on aura $(H_x F)^2 < 0$ ce qui est absurde.

Nous sommes alors aidés par ce dernier résultat pour résoudre $H_x F_s = 0$ en λ sur Σ pour trouver

$$(1.6) \quad \lambda = -\frac{H_x F}{H_x G}(x, \mu)$$

La condition de glissement (1.4) implique aussi que

$$\begin{aligned} H_x F \cdot H_x(F + G) &< 0 \\ H_x F \cdot (H_x F + H_x G) &< 0 \\ (H_x F)^2 + H_x F \cdot H_x G &< 0 \\ (H_x F)^2 &< -H_x F \cdot H_x G \end{aligned}$$

On en déduit que $H_x F \neq 0$ car sinon on aura $0 < 0$ ce qui est absurde, ce qui permet de diviser la dernière inégalité par $(H_x F)^2$ pour trouver

$$1 < -\frac{H_x G}{H_x F} = \frac{1}{\lambda}$$

Donc

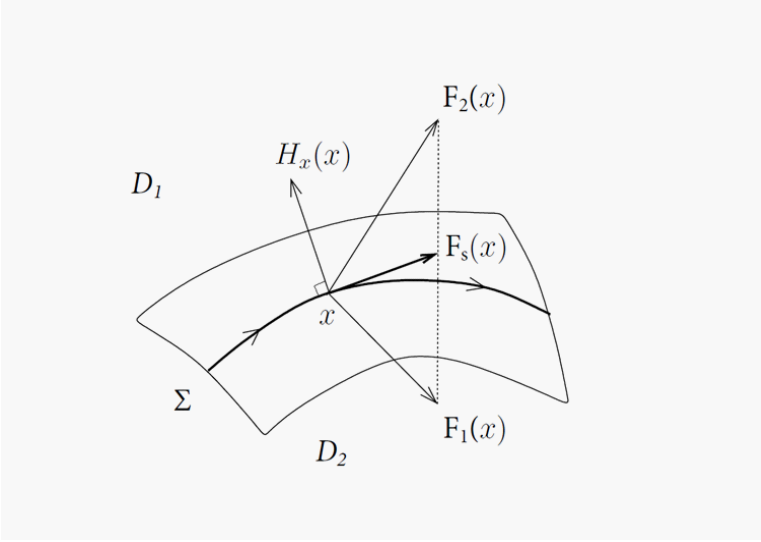
$$0 < \lambda < 1$$

Donc la condition (1.4) montre que le glissement est possible seulement si $0 < \lambda < 1$.

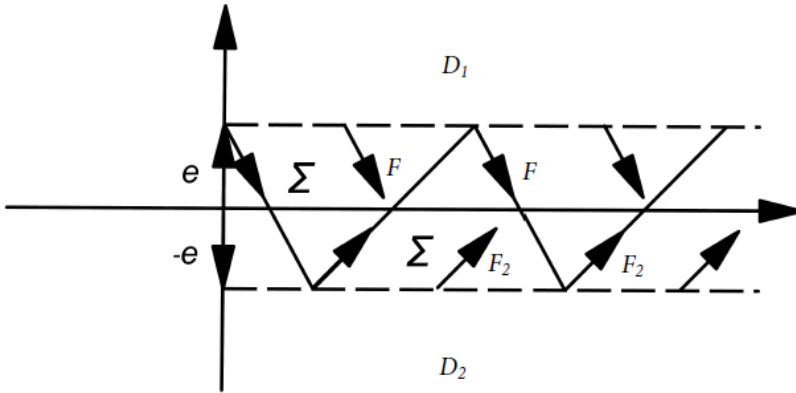
REMARQUE 2. L'intuition suggère naturellement que le champ de vecteur F_s soit une combinaison convexe stricte de F_1 et F_2 i.e. pour un certain $0 < \lambda < 1$ on a F_s qui vérifie:

$$\begin{aligned} F_s &= (1 - \lambda)F_1 + \lambda F_2 \\ &= (1 - \lambda)F + \lambda(F + G) \\ &= F + \lambda G \end{aligned}$$

Le schéma suivant illustre bien cette idée.



En abordant une approche inspirée par les lois de la physique, on peut considérer que Σ possède une épaisseur $2\vec{e}$ négligeable et que F et F_2 agissent alternativement sur un point en mouvement lorsqu'il atteint l'un des deux côtés de Σ pour garder toujours son mouvement coincé dans Σ . (Voir figure ci-dessous)



En faisant d'abord agir F sur un point du premier côté de Σ , il parcourt dans Σ le chemin $\frac{\|\vec{e}\|^2 F}{-\vec{e}F}$ pendant le temps $\frac{\|\vec{e}\|^2}{-\vec{e}F}$. Et lorsque ce point atteint le deuxième côté de Σ il parcourt dans Σ le chemin $\frac{\|\vec{e}\|^2 F_2}{\vec{e}F_2}$ pendant le temps $\frac{\|\vec{e}\|^2}{\vec{e}F_2}$.

La vitesse résultante sera

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{\frac{\|\vec{e}\|^2 F_2}{\vec{e}F_2} - \frac{\|\vec{e}\|^2 F}{-\vec{e}F}}{\frac{\|\vec{e}\|^2}{\vec{e}F_2} - \frac{\|\vec{e}\|^2}{-\vec{e}F}} \\ &= \frac{\vec{e}F F_2 - \vec{e}F_2 F}{\vec{e}F - \vec{e}F_2} \end{aligned}$$

Il est clair que F_s est une combinaison convexe stricte de F et F_2 . D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{\vec{e}FF + \vec{e}FG - \vec{e}FF - \vec{e}GF}{-\vec{e}G} \\ &= \frac{\vec{e}GF - \vec{e}FG}{\vec{e}G} \\ &= F - \frac{\vec{e}F}{\vec{e}G}G \end{aligned}$$

Sachant que $\vec{e} = \frac{\|e\|}{\|H_x\|}H_x$, alors

$$F_s = F - \frac{H_x F}{H_x G}G$$

Ce qui est la même chose que les formules (1.5) et (1.6) combinées.

EXEMPLE 8. Reprenons l'exemple précédent

On a bien

$$H_{(x,y)}G(x,y) = 2 \neq 0$$

Et

$$H_{(x,y)}F(x,y) = -1 < 0$$

Donc on peut calculer

$$0 < \lambda = \frac{1}{2} < 1$$

Et on aura pour le champ de glissement sur Σ

$$F_s(x,y) = F_s(x,0) = (0, -1) + \frac{1}{2}(1, 2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

qui est évidemment tangent à Σ car il lui est parallèle.

Donc si on veut prolonger notre trajectoire à partir du point $(0,0)$ après l'instant $t = 1$ on aura

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{t-1}{2}, 0\right) \text{ pour } t > 1$$

1.3. Systèmes d'impact.

Tout d'abord, considérons l'exemple suivant

EXEMPLE 9. Soit une bille rigide assimilée à un point matériel, lâchée du repos et rebondissant sur une surface horizontale rigide.

Le mouvement étant purement vertical, on peut utiliser uniquement une seule coordonnée pour les variables de positions.

Supposons que la bille soit lâchée à l'instant $t = 0$ du point de hauteur $x(0) = x_0$ avec une vitesse $x'(0) = x'_0 = 0$ et qu'elle heurte verticalement une surface Σ se situant à la hauteur 0.

Le mouvement de la bille, comme le suggère l'intuition, s'effectue uniquement en haut de la surface Σ c'est-à-dire là où $x > 0$

L'équation du mouvement dans cette région est donnée par

$$x'' = -g \quad g > 0$$

En posant $x' = y$ on aura le système bidimensionnel suivant

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ -g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} y(t) &= x'(t) = -gt + x'_0 \\ &= -gt \end{aligned}$$

Et

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + x_0$$

Avec

$$-\frac{gt^2}{2} + x_0 \geq 0$$

Ce qui donne

$$-\sqrt{\frac{2x_0}{g}} < t < \sqrt{\frac{2x_0}{g}}$$

A l'instant

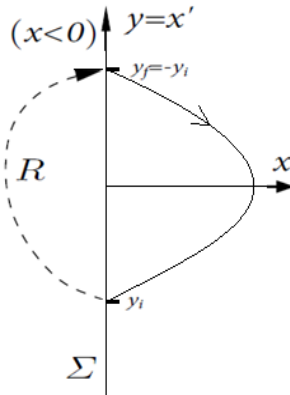
$$t = \sqrt{\frac{2x_0}{g}}$$

la bille atteint la surface horizontale avec la vitesse

$$y\left(\sqrt{\frac{2x_0}{g}}\right) = x'\left(\sqrt{\frac{2x_0}{g}}\right) = -\sqrt{2gx_0}$$

et ensuite elle rebondit instantanément c'est-à-dire qu'elle change instantanément ses coordonnées de $(x_i, y_i) = (0, -\sqrt{2gx_0})$ à $(x_f, y_f) = (0, \sqrt{2gx_0})$ suivant une règle R décrite par les lois d'impact de la physique et donnée par l'expression

$$(x_f, y_f) = R(x_i, y_i) = (x_i, -y_i) \quad x_f = x = 0 \quad y_i < 0$$



Donc le mouvement continuera à partir de l'instant $t = \sqrt{\frac{2x_0}{g}}$, de l'état $(x_f, y_f) = (0, \sqrt{2gx_0})$ et ceci donnera

$$y(t) = -g \left(t - 2\sqrt{\frac{2x_0}{g}} \right)$$

Et

$$x(t) = -\frac{g}{2} \left(t - \sqrt{\frac{2x_0}{g}} \right) \left(t - 3\sqrt{\frac{2x_0}{g}} \right)$$

Avec

$$\sqrt{\frac{2x_0}{g}} < t < 3\sqrt{\frac{2x_0}{g}}$$

A l'instant $t = -\sqrt{\frac{2x_0}{g}}$ on peut effectuer un prolongement à gauche de la même manière et ainsi de suite pour tous les temps de la forme $t = (2k+1)\sqrt{\frac{2x_0}{g}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte que:

- La dynamique totale de la bille est donnée par:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{2} \left(t - (2k-1)\sqrt{\frac{2x_0}{g}} \right) \left(t - (2k+1)\sqrt{\frac{2x_0}{g}} \right) \\ -gt + 2k\sqrt{2gx_0} \end{pmatrix} \quad (2k-1)\sqrt{\frac{2x_0}{g}} < t < (2k+1)\sqrt{\frac{2x_0}{g}} \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Le mouvement de la bille s'effectue uniquement à droite de l'axe des y c'est-à-dire

$$(x(t), y(t)) \in D_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0\}$$

- La bille ne pénètre jamais dans la région $D_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < 0\}$

- Cette dynamique a été possible grâce à une loi d'impact R sur la surface $\Sigma = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\}$ donnée par

$$(x_f, y_f) = R(x_i, y_i) = (x_i, -y_i), (x_i, y_i) \in \Sigma$$

- Il n'y a impact que si la bille atteint Σ avec une vitesse négative c'est-à-dire que si $y_i \leq 0$. La bille quitte ensuite Σ avec une vitesse positive $y_f = -y_i \geq 0$ et continue ainsi son mouvement dans D_1 .

- Si Σ est atteinte avec une vitesse verticale nulle ($y_i = 0$) alors

$$(x_f, y_f) = R(0, 0) = (0, 0) = (x_i, y_i)$$

Et donc R sera réduite à l'identité.

- Si $x_0 = 0$ la bille ne peut se déplacer ni dans D_1 ni dans D_2 donc elle doit rester sur Σ avec une vitesse nulle, c'est-à-dire immobilisée sur Σ puisque son mouvement n'a aucune chance d'être horizontal. C'est la seule possibilité de glissement sur Σ .

La dynamique de cette bille rebondissante est un exemple parmi ce qu'on appelle les systèmes dynamique d'impact. Ce type de systèmes est une combinaison d'équations différentielles et d'applications (d'où son autre appellation: système hybride) et est considéré seulement pour les valeurs positives de H . Donc un système de ce type ne pénètre jamais dans la région D_2 , et quand une trajectoire tente de traverser Σ vers D_2 , on doit appliquer un saut d'état, se ramenant à un point où la trajectoire peut continuer dans D_1 . Ce saut est pensé comme étant un impact, et l'objectif c'est de calculer ce saut à l'aide d'une « loi d'impact ». Par conséquent on considère les systèmes de la forme :

$$(1.7) \quad x' = F'(x, \mu) \quad \text{si} \quad H(x, \mu) > 0$$

Par commodité, on notera la vitesse et l'accélération (du champ de vecteur F relative à H) par :

$$\begin{aligned} v(x, \mu) &= H_x F(x, \mu) \\ a(x, \mu) &= \frac{dv}{dt} = v_x \cdot \frac{dx}{dt} = v_x F(x, \mu) = (H_x F)_x F(x, \mu) \end{aligned}$$

A l'atteinte de la surface Σ en un point x_i , la loi d'impact est supposée avoir la forme :

$$(1.8) \quad x_f = R(x_i, \mu) = x_i - G(x_i, \mu)v(x_i, \mu)$$

Où G est une fonction suffisamment régulière. Notons que R se réduit à l'identité quand la vitesse d'impact $v(x_i, \mu) = 0$, ce qui est une exigence raisonnable pour les modèles mécaniques d'impact où le frottement est absent.

On exigera aussi que la loi d'impact R applique un point x_i vérifiant $H(x_i, \mu) = 0$ et $v(x_i, \mu) < 0$ vers un point $x_f = R(x_i, \mu)$ vérifiant $H(x_f, \mu) = 0$ et $v(x_f, \mu) \geq 0$. Ceci est aussi motivé par des considérations mécaniques, puisque H devrait impliquer une contrainte sur les variables de position, qui ne doivent pas changer durant l'impact. Notons par v_i la quantité $v(x_i, \mu)$, ces dernières conditions impliquent que

$$\begin{aligned} H(x_f, \mu) - H(x_i, \mu) &= H_x(x_f - x_i) + O(\|x_f - x_i\|^2) \\ &= -H_x G(x_i, \mu)v_i + O(\|G(x_i, \mu)\|^2 v_i^2) \\ &= -H_x G(x_i, \mu)v_i + O(v_i^2) = 0 \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$(1.9) \quad \begin{aligned} H_x G(x_i, \mu) &= O(v_i) \\ v(x_f, \mu) &= v(x_i, \mu) + v_x(x_f - x_i) + O(\|x_f - x_i\|^2) \\ &= v_i - v_x G(x_i, \mu)v_i + O(v_i^2) \\ &= (1 - v_x G(x_i, \mu))v_i + O(v_i^2) \end{aligned}$$

Donc pour les points vérifiant $H(x, \mu) = v(x, \mu) = 0$, on doit avoir

$$(1.10) \quad H_x G(x, \mu) = 0$$

et

$$(1.11) \quad r(x, \mu) := - \lim_{z \rightarrow x} \frac{v(R(z, \mu), \mu)}{v(z, \mu)} = -(1 - v_x G(x, \mu)) \geq 0$$

La quantité r étant ici le coefficient limite de restitution en approchant une vitesse d'impact nulle. Remarquons aussi que $v_x G(x, \mu) \geq 1 > 0$

1.3.1. *Mouvement de glissement.* Les systèmes d'impact possèdent aussi la possibilité de manifester un mouvement de glissement passant par les points satisfaisants

$$(1.12) \quad H(x, \mu) = 0$$

$$(1.13) \quad v(x, \mu) = 0$$

$$(1.14) \quad a(x, \mu) < 0$$

Où la loi d'impact R est réduite à l'identité mais la continuation dans D_1 n'est pas possible à cause de l'accélération négative ($a(x, \mu) < 0$) qui fait rabattre le mouvement sur Σ . En considérant le mouvement continué comme une commutation continue entre le champ de vecteurs F et les impacts à vitesses nulles (R déplace l'Etat dans le sens de G puisque le vecteur $x_f - x_i = -G(x_i, \mu)v_i$ est clairement colinéaire à $G(x_i, \mu)$) on constate que le champ de vecteurs de glissement doit être de la forme

$$F_s(x, \mu) = F(x, \mu) + \lambda G(x, \mu),$$

Où λ est choisi pour garder $H = 0$, $v = 0$. Donc F_s doit être perpendiculaire à la fois à H_x et v_x c'est-à-dire qu'on doit avoir $H_x F_s = v_x F_s = 0$.

Résoudre l'équation $H_x F_s = 0$ pour λ donnera

$$H_x F(x, \mu) + \lambda H_x G(x, \mu) = 0$$

Donc on aboutira seulement à $0+0=0$ puisque on sait que $H_x F = v = H_x G = 0$ en ces points.

Résoudre plutôt l'équation $v_x F_s = 0$ donnera :

$$(1.15) \quad \lambda = -\frac{a(x, \mu)}{v_x G(x, \mu)}$$

Où, tel qu'on l'a déjà vérifié par (1.11), le dénominateur n'est jamais nul.

EXEMPLE 10. *En revenant à l'exemple de la bille rebondissante, sachant que $H(x, y) = x > 0$ on trouve pour les points $(x_i, y_i) \in \Sigma$ que*

$$\begin{aligned} v(x, y) &= H_{(x,y)} F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -g \end{pmatrix} = y \\ (x_f, y_f) &= R(x_i, y_i) = (x_i, -y_i) \text{ pour } (y_i < 0, x_i = 0) \\ &= (x_i, y_i) - 2(0, y_i) \text{ pour } (y_i < 0, x_i = 0) \\ &= (x_i, y_i) - (0, 2)y_i \text{ pour } (y_i < 0, x_i = 0) \end{aligned}$$

En posant $G(x, y) = (0, 2)$ on arrive à

$$(x_f, y_f) = (x_i, y_i) - G(x_i, y_i)v(x_i, y_i)$$

Et $v(x, y) = H(x, y) = 0$ donne

$$y = x = 0$$

D'autre part on a

$$a(x, y) = v_{(x,y)}F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -g \end{pmatrix} = -g < 0$$

Et

$$\lambda = -\frac{a(x, y)}{v_{(x,y)}G(x, y)} = \frac{g}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{g}{2}$$

Donc il y a possibilité de mouvement de glissement et en calculant F_s , on trouve

$$F_s(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -g \end{pmatrix} + \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui signifie que la bille peut être immobilisée au point $(0, 0)$ (point d'équilibre).

EXEMPLE 11. Si on ajoute une dimension au système pour autoriser le mouvement horizontal on aura le système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Et en posant $z = x'$, $w = y'$ on aura

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Sachant que

$$H(x, y, z, w) = y > 0$$

et

$$R(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} w \quad \text{si } w < 0 \quad \text{et } y = 0$$

on trouve que

$$v(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = w = y'$$

$$a(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = -g < 0$$

$$G(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_{(x,y,z,w)}G(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\lambda = -\frac{a(x, y, z, w)}{v_{(x,y,z,w)}G(x, y, z, w)} = \frac{g}{2}$$

Sachant que $v(x, y, z, w) = H(x, y, z, w) = 0$ ceci implique
 $w = y' = y = 0$

Donc il y a possibilité de mouvement de glissement et en calculant F_s on trouve

$$\begin{aligned} F_s(x, y, z, w) &= \begin{pmatrix} z \\ w \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ w \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où F_s n'est pas identiquement nulle, et en posant

$$(x(0), y(0), z(0), w(0)) = (x(0), y(0), x'(0), y'(0)) = (x_0, y_0, x'_0, y'_0)$$

On en déduit

$$(x(t), y(t), x'(t), y'(t)) = (x'_0 t + x_0, 0, x'_0, 0) \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce qui donne un mouvement horizontal sur l'axe des x . Et si $x'_0 = 0$ on aura

$$(x(t), y(t), x'(t), y'(t)) = (x_0, 0, 0, 0) \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce qui décrit une immobilité du point (analogie avec la notion de point d'équilibre).

2. Les différents types de points d'équilibre

Les systèmes PWSC, de Filippov et d'impact peuvent tous présenter différents types de points d'équilibre. Dans ce qui suit on définira les différents types des points d'équilibre possibles en expliquant les différences entre chacun d'eux. En particulier, notons que pour qu'un point d'équilibre soit admissible pour le système en question, il doit être non seulement un point d'équilibre pour les champs de vecteurs $F = F_1$ ou F_2 , mais doit aussi être situé dans la région de l'espace de phases consistante avec la définition du système. Alors, on peut donner les définitions suivantes.

DÉFINITION 3. On dit que x est un point d'équilibre admissible si, pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$, x vérifie
soit

$$F(x, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad H(x, \mu) > 0$$

soit

$$F_2(x, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad H(x, \mu) < 0$$

Alternativement, on dit qu'un point $x \in D$ est un point d'équilibre virtuel s'il vérifie

Soit

$$F(x, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad H(x, \mu) < 0$$

Soit

$$F_2(x, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad H(x, \mu) > 0$$

Pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$.

La différence est capitale entre c'est deux types de point d'équilibre. Un point d'équilibre admissible est un point d'équilibre au vrai sens du terme, çà veut dire qu'en démarrant la dynamique de ce point on reste toujours sur ce point. Or un point d'équilibre virtuel, n'en est pas forcément un car il annule un champ qui ne lui est pas appliqué à la différence d'un point d'équilibre admissible.

Pour les systèmes de Filippov et d'impact, il est possible pour le flot de glissement de posséder un ou plusieurs points d'équilibre. On donne, alors, la définition suivante.

DÉFINITION 4. Un point x est dit pseudo-point d'équilibre s'il est un point d'équilibre du flot de glissement, c'est-à-dire.

$$(2.1) \quad \begin{aligned} F_s(x, \mu) &= F(x, \mu) + \lambda G(x, \mu) = 0 \\ H(x, \mu) &= 0 \end{aligned}$$

Pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$, avec λ étant la quantité définie dans (1.6) pour les systèmes de Filippov et (1.15) pour les systèmes d'impact.

On a vu que $F_s(x, \mu) = (1 - \lambda)F(x, \mu) + \lambda F_2(x, \mu)$, donc F_s est une combinaison linéaire de F et F_2 . On en déduit qu'en un pseudo-point d'équilibre x les vecteurs $F(x, \mu)$ et $F_2(x, \mu)$ sont colinéaires.

Aussi, pour qu'un pseudo-point d'équilibre soit admissible, on doit s'assurer que λ se trouve dans l'intervalle autorisé. Alors on peut donner les définitions suivantes.

DÉFINITION 5. Un pseudo-point d'équilibre est dit admissible pour un système Filippov si

$$0 < \lambda < 1$$

et pour un système d'impact si

$$0 < \lambda$$

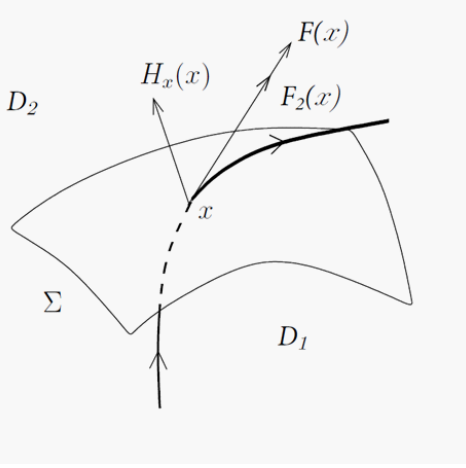
Alternativement, on dit qu'un pseudo-point d'équilibre est virtuel pour un système Filippov si

$$\lambda \notin [0, 1]$$

et pour un système d'impact si

$$0 > \lambda$$

Là aussi la différence est capitale entre ces types de pseudo-points d'équilibre. Le premier est un pseudo-point d'équilibre au vrai sens du terme qui annule un flot de glissement responsable d'un mouvement de glissement. Or en un pseudo-point d'équilibre virtuel on a $H_x F \cdot H_x F_2 > 0$ c'est-à-dire que F et F_2 sont non-nuls et pointés vers la même région (D_1 ou D_2) et de plus ils sont colinéaires. Ça veut dire que lorsque la dynamique atteint ce pseudo-point d'équilibre virtuel grâce à l'un des champs, l'autre champ prendra la relève pour aider à traverser la surface Σ . Donc il est impossible d'avoir une immobilité en un pseudo-point d'équilibre virtuel c'est-à-dire on perd la notion d'équilibre. (Voir figure ci-dessous)



Notons que Les pseudo-points d'équilibre et points d'équilibre (réels) peuvent coïncider sur Σ .

DÉFINITION 6. Un point x est dit point d'équilibre de bord si

$$F(x, \mu) = 0 \quad \text{ou} \quad F_2(x, \mu) = 0$$

et

$$H(x, \mu) = 0$$

REMARQUE 3. Entre le cas d'un point d'équilibre admissible et celui d'un point d'équilibre virtuel, on a le cas d'un point x vérifiant

$$F(x, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad H(x, \mu) = 0$$

ou

$$F_2(x, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad H(x, \mu) = 0$$

Ce qui est le cas d'un point d'équilibre de bord.

Et entre le cas d'un pseudo-point d'équilibre admissible et celui d'un pseudo-point d'équilibre virtuel, on a le cas d'un point x vérifiant:

Pour un système de Filippov

$$F_s(x, \mu) = F(x, \mu) + \lambda G(x, \mu) = 0$$

$$H(x, \mu) = 0$$

$$\lambda \in \{0, 1\}$$

Ce qui est équivalent à

$$F_s(x, \mu) = F(x, \mu) \quad \text{ou} \quad F_s(x, \mu) = F_2(x, \mu)$$

et

$$H(x, \mu) = 0$$

Ce qui est aussi le cas d'un point d'équilibre de bord

Et pour un système d'impact

$$F_s(x, \mu) = F(x, \mu) + \lambda G(x, \mu) = 0$$

$$H(x, \mu) = 0$$

$$\lambda = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$F_s(x, \mu) = F(x, \mu)$$

et

$$H(x, \mu) = 0$$

Ce qui est encore le cas d'un point d'équilibre de bord

Par conséquent, un point d'équilibre de bord peut être vu comme étant à la frontière entre les versions admissible et virtuelle des réels et pseudo-points d'équilibre à la fois.

Deuxième partie

3. Bifurcation des points d'équilibre de bord (Boundary-equilibrium bifurcation : BEB)

A partir de maintenant pour les systèmes PWSC et de Filippov on considèrera seulement les points d'équilibres de bord qui sont les zéros du champ de vecteurs F , car pour ces deux types de systèmes les rôles de F et F_2 sont symétriques, donc il n'y a aucune perte de généralité.

On définit une bifurcation de points d'équilibre de bord comme suit.

DÉFINITION 7. *On dit qu'un système subit une bifurcation de points d'équilibre de bord à $\mu = \mu^*$ s'il existe un point $x = x^*$ tel que*

- (3.1) 1. $F(x^*, \mu^*) = 0$
2. $H(x^*, \mu^*) = 0$
3. $F_x(x^*, \mu^*)$ est inversible (où de façon équivalente $\det(F_x) \neq 0$)
4. $H_\mu(x^*, \mu^*) - H_x(x^*, \mu^*)F_x^{-1}(x^*, \mu^*)F_\mu(x^*, \mu^*) \neq 0$

REMARQUE 4. *Les deux premières propriétés définissent les conditions pour que x^* soit un point d'équilibre de bord lorsque $\mu = \mu^*$.*

La troisième propriété donne une condition de non-dégénérescence qui assurera que x^ soit un point d'équilibre isolé du champ de vecteur F .*

L'explication est la suivante:

On sait par le théorème des accroissements fini que

$$F(x^* + at, \mu^*) - F(x^*, \mu^*) = \left. \frac{dF(x^* + at, \mu^*)}{dt} \right|_{\xi} t = F_x(x^* + a\xi, \mu^*)at$$

Ceci pour tout $t \in \mathbb{R}_+^$, et tout $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et un certain $\xi \in]0, t[$, par suite sachant que $F(x^*, \mu^*) = 0$ on a*

$$F(x^* + at, \mu^*) = F_x(x^* + a\xi, \mu^*)at$$

Or puisque F est au moins de classe C^1 , $F_x(\cdot, \mu^)$ est continue donc pareillement pour $\det(F_x(\cdot, \mu^*))$.*

Sachant que $\det(F_x(x^, \mu^*)) \neq 0$, la continuité de $\det(F_x(\cdot, \mu^*))$ implique qu'il existe un voisinage V de x^* sur lequel $\det(F_x(x, \mu^*))$ est non-nul et par conséquent $F_x(x, \mu^*)$ est inversible donc non singulière.*

D'un autre côté, pour $t = 1$ et $x^ + a \in V$ on a $0 < \xi < 1$ et donc*

$$\|(x^* + a) - x^*\| = \|a\| > \|a\| \xi = \|a\xi\| = \|(x^* + a\xi) - x^*\|$$

d'où $x^ + a\xi \in V$. On en déduit que $F_x(x^* + a\xi, \mu^*)$ est non-singulière et puisque $at \neq 0$ on a donc $F(x^* + a, \mu^*) \neq 0$. Si l'on considère que $a = x - x^*$ pour un certain $x \in V \setminus \{x^*\}$, ce qui donne $a \neq 0$, on aura*

$$F(x, \mu^*) \neq 0 \text{ pour tout } x \in V \setminus \{x^*\}.$$

Ce qui montre que x^ est un point d'équilibre isolé du champ de vecteur F .*

La dernière propriété est une condition de non-dégénérescence par rapport au paramètre, pour qu'une branche de points d'équilibre $x(\mu)$ du champ de vecteur F , telle que $x(\mu^) = x^*$, passe à travers la surface d'équation $H = 0$ avec une vitesse non-nulle au point de bifurcation $\mu = \mu^*$. La condition résulte du fait que*

la dérivée totale $\frac{d}{d\mu}H(x(\mu), \mu)$ est non-nulle au point (x^*, μ^*) . C'est-à-dire qu'au départ il fallait que soit vérifiée la propriété suivante:

$$\left. \frac{dH(x(\mu), \mu)}{d\mu} \right|_{\mu^*} \neq 0$$

Par suite

$$H_\mu(x(\mu^*), \mu^*) + H_x(x(\mu^*), \mu^*)x_\mu(\mu^*) \neq 0$$

Or pour une branche de pseudo-points d'équilibre on doit avoir

$$F(x(\mu), \mu) = 0$$

Par suite

$$(3.2) \quad 0 = \left. \frac{dF(x(\mu), \mu)}{d\mu} \right|_{\mu^*} = F_x(x(\mu^*), \mu^*)x_\mu(\mu^*) + F_\mu(x(\mu^*), \mu^*)$$

D'où en se rappelant que $F_x(x(\mu^*), \mu^*) = F_x(x^*, \mu^*)$ est inversible

$$x_\mu(\mu^*) = -F_x(x(\mu^*), \mu^*)^{-1} \cdot F_\mu(x(\mu^*), \mu^*)$$

Et en remplaçant dans (3.2), on retrouve la quatrième condition.

4. Linéarisation autour d'un point d'équilibre de bord

Au point d'équilibre de bord (x^*, μ^*) , on a $F(x^*, \mu^*) = 0$ et $H(x^*, \mu^*) = 0$, mais $G(x^*, \mu^*) \neq 0$. Ceci signifie que pour une approximation du champ de vecteur valable à l'ordre linéaire $x - x^*$ et $\mu - \mu^*$, on peut utiliser:

$$\begin{aligned} F(x, \mu) &\approx \tilde{F}(x, \mu) = A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) \\ H(x, \mu) &\approx \tilde{H}(x, \mu) = C(x - x^*) + N(\mu - \mu^*) \\ G(x, \mu) &\approx \tilde{G}(x, \mu) = B \end{aligned}$$

Où $A = F_x(x^*, \mu^*)$, $M = F_\mu(x^*, \mu^*)$, $C = H_x(x^*, \mu^*)$, $N = H_\mu(x^*, \mu^*)$ et $B = G(x^*, \mu^*)$.

Les systèmes résultants de l'utilisation de \tilde{F} , \tilde{H} et \tilde{G} à la place de F , H et G respectivement, sont dits systèmes linéarisés (autour du point d'équilibre de bord)

Pour un système de Filippov la condition $H_x G(x^*, \mu^*) \neq 0$ devient pour le système linéarisé

$$(4.1) \quad CB \neq 0$$

On trouvera aussi que le champ de vecteur de glissement linéarisé $\tilde{F}_s = \tilde{F} + \lambda \tilde{G}$, après substitution de $\lambda = -\frac{C(A(x-x^*)+M(\mu-\mu^*))}{CB}$, devient

$$\begin{aligned}
(4.2) \quad \tilde{F}_s(x, \mu) &= A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) - \frac{BC(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*))}{CB} \\
&= A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) - \frac{BC(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*))}{CB} \\
&= A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) - \frac{BC}{CB}(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*)) \\
&= \left(Id - \frac{BC}{CB} \right) (A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*))
\end{aligned}$$

Pour un système d'impact les conditions $H_x G(x^*, \mu^*) = 0$, $R(x^*, \mu^*) \geq 0$ deviennent

$$(4.3) \quad CB = 0$$

$$(4.4) \quad CAB - 1 \geq 0$$

Pour le système d'impact, le champ de vecteur de glissement linéarisé $\tilde{F}_s = \tilde{F} + \lambda \tilde{G}$ devient après substitution de $\lambda = -\frac{CA}{CAB}(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*))$

$$\begin{aligned}
(4.5) \quad \tilde{F}_s(x, \mu) &= A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) - \frac{BCA}{CAB}(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*)) \\
&= A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) - \frac{BCA}{CAB}(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*)) \\
&= A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) - \frac{BCA}{CAB}(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*)) \\
&= \left(Id - \frac{BCA}{CAB} \right) (A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*))
\end{aligned}$$

Notons que les systèmes PWSC et d'impact linéarisés possèdent la propriété de l'invariance d'échelle, c'est-à-dire qu'on a le même système qui résulte si $x - x^*$ et aussi $\mu - \mu^*$ sont multipliés par le même facteur positif. En effet, soit $a > 0$, alors en posant le changement de variables $y = x^* + A(x - x^*)$, $\alpha = \mu^* + A(\mu - \mu^*)$, on aura

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(y, \alpha) &= C(y - x^*) + N(\alpha - \mu^*) \\
&= CA(x - x^*) + NA(\mu - \mu^*) \\
&= a\tilde{H}(x, \mu)
\end{aligned}$$

Et comme $a > 0$

$$\tilde{H}(y, \alpha) > 0 \Leftrightarrow \tilde{H}(x, \mu) > 0$$

et

$$\tilde{H}(y, \alpha) < 0 \Leftrightarrow \tilde{H}(x, \mu) < 0$$

D'un autre côté on a

$$\begin{aligned}
y' &= ax' \quad \text{si } \tilde{H}(x, \mu) > 0 \\
&= a\tilde{F}(x, \mu) \quad \text{si } \tilde{H}(x, \mu) > 0 \\
&= a\tilde{F}(x, \mu) \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) > 0 \\
&= a(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*)) \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) > 0 \\
&= Aa(x - x^*) + Ma(\mu - \mu^*) \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) > 0 \\
&= A(y - x^*) + M(\alpha - \mu^*) \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) > 0 \\
&= \tilde{F}(y, \alpha) \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) > 0
\end{aligned}$$

Donc la dynamique de ses systèmes linéarisés peuvent être complètement décrite en prenant les valeurs de $\mu - \mu^*$ dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Donc on peut parler des propriétés du système linéarisé positif ou négatif et qui peuvent très bien avoir des dynamiques très différentes.

Ceci est partiellement vrai pour les systèmes linéarisés de Filippov, puisque la matrice B doit être multipliée par le même facteur que celui des coordonnées et le paramètre du système. En effet,

$$\begin{aligned}
y' &= ax' \quad \text{si } \tilde{H}(x, \mu) < 0 \\
&= a(\tilde{F}(x, \mu) + \tilde{G}(x, \mu)) \quad \text{si } \tilde{H}(x, \mu) < 0 \\
&= a(\tilde{F}(x, \mu) + \tilde{G}(x, \mu)) \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) < 0 \\
&= a(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) + B) \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) < 0 \\
&= Aa(x - x^*) + Ma(\mu - \mu^*) + aB \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) < 0 \\
&= A(y - x^*) + M(\alpha - \mu^*) + aB \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) < 0 \\
&= \tilde{F}(y, \alpha) + aB \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) < 0 \\
&= \tilde{F}(y, \alpha) + a\tilde{G}(y, \alpha) \quad \text{si } \tilde{H}(y, \alpha) < 0
\end{aligned}$$

D'un autre coté, toujours pour un système de Filippov, vu que $H_x G \neq 0$, on en déduit que F_2 est dirigé soit vers Σ soit loin de Σ dans un voisinage de (x^*, μ^*) . En effet, puisque $0 < \lambda < 1$

$$H_x F_2 = H_x F + H_x G = H_x G \left(1 + \frac{H_x F}{H_x G} \right) = H_x G(1 - \lambda) \neq 0$$

Donc tout point où F_2 est parallèle à Σ doit se trouver à une distance non nulle de (x^*, μ^*) à cause de la continuité des fonctions mises en jeu. On en déduit que la dynamique au voisinage de (x^*, μ^*) du côté D_2 est simple : on s'approche ou s'éloigne de Σ . Ceci implique qu'au voisinage de (x^*, μ^*) du côté D_2 on s'approche de Σ soit pour les temps positifs soit pour les temps négatifs.

Ainsi la dynamique locale au voisinage de (x^*, μ^*) ne peut entraîner un mouvement dans D_2 , et on peut dire que le champs de vecteurs dans D_2 est sans importance pour l'étude de la dynamique locale, sauf le fait qu'il entre dans l'expression du champs de vecteurs de glissement.

Néanmoins, dans les systèmes linéarisés, le champ de vecteur de glissement est indépendant de l'échelle de B puisque cette dernière quantité figure à la fois dans les numérateurs et dénominateurs de $\frac{BC}{CB}$ et de $\frac{BCA}{CAB}$. Alors pour définir les systèmes linéarisés positif et négatif on peut utiliser l'une des deux approches équivalentes:

soit on pose $\mu - \mu^* = \pm\delta$ pour un $\delta > 0$ suffisamment petit (pour garder $F_x(x, \mu)$ toujours inversible).

soit on remplace B par $\frac{B}{\delta}$ et prendre $\mu - \mu^* = \pm 1$.

Dans le dernier cas, toute trajectoire bornée qui n'entraîne pas de mouvement dans la région $\tilde{D}_2 = \{x \in D : \tilde{H} < 0\}$ est indépendante de δ si δ est suffisamment petit. En effet :

Posons $\tilde{D}_1 = \{x \in D : \tilde{H} > 0\}$ et $\tilde{\Sigma} = \{x \in D : \tilde{H} = 0\}$.

Soit $K \subset D \setminus \tilde{D}_2 = \tilde{D}_1 \cup \tilde{\Sigma}$ un ensemble compact tel que $x \in K$ et contenant une trajectoire solution du système linéarisé. Cette trajectoire ne va subir que l'action du champ \tilde{F} et celle du champ \tilde{F}_s . Or \tilde{F} et \tilde{F}_s sont indépendants de l'échelle du système. Or on sait que tout voisinage de $x(\mu)$ peut être ramené jusqu'à englober K tout entier en faisant usage d'un paramètre $\frac{1}{\delta}$ assez grand donc d'un paramètre δ assez petit. Et puisque \tilde{F} et \tilde{F}_s sont indépendants de l'échelle du système, on retrouvera toujours la même trajectoire.

Sur tout voisinage borné de x^* du système non linéaire et pour des petites valeurs de $\mu - \mu^*$ du même signe, le système linéarisé positif ou négatif entier convenablement ajusté est une petite perturbation du système non linéaire. La perturbation peut être rendue arbitrairement petite en laissant $\mu \rightarrow \mu^*$. On affirme par suite que la dynamique au voisinage du point de bifurcation peut être entièrement décrite par le système linéarisé positif ou négatif. Une telle affirmation est issue du théorème de Hartmann–Grobman [6] qui met en évidence l'équivalence topologique entre un système et son linéarisé autour de ses points d'équilibre hyperboliques. Alors si le système linéarisé positif ou négatif contient un point d'équilibre hyperbolique ou un cycle limite alors le système non linéaire entier doit contenir le même type d'ensemble limite pour toutes les valeurs suffisamment petite de $\mu - \mu^*$ du même signe.

5. Classification des comportements des points d'équilibre dans une BEB

5.1. Scénarios possibles les plus simples. Sans perte de généralité supposons dans ce qui suit que $x = 0$ est un point d'équilibre de bord pour $\mu = 0$. On cherchera à dévoiler les scénarios possibles qui peuvent apparaître quand μ subit une perturbation. On peut observer les cas suivants:

5.1.1. *Persistence (ou passage de frontière).* Au point de bifurcation, un point d'équilibre admissible de la région D_1 devient un point d'équilibre de bord et se transforme en devenant virtuel. Simultanément un point d'équilibre virtuel de la région D_2 (PWSC) ou un pseudo point d'équilibre (système de Filippov ou d'impact) devient admissible. Donc il y a un (pseudo-)point d'équilibre admissible dans les deux cotés de la bifurcation, d'où l'emploi du terme persistence.

5.1.2. *Pli non régulier.* Au point de bifurcation, la collision de deux branches de points d'équilibre admissible est observée donnant naissance à un point d'équilibre de bord avant de devenir deux branches de points d'équilibre virtuels après le point de bifurcation.

Maintenant on va spécifier comment chacun de ces scénarios peut se manifester pour les trois types de systèmes introduits.

5.2. Systèmes PWSC. Notre objectif est de trouver des conditions pour faire la distinction entre ces deux cas de scénarios fondamentaux pour des systèmes n -dimensionnels arbitraires.

On introduira dans ce qui suit les variables arbitraires λ^\pm pour la valeur de H aux points d'équilibre. Ces variables n'ont rien à voir avec le multiplicateur λ introduit pour le mouvement de glissement des systèmes de Filippov et d'impact. Ils permettent simplement d'exprimer les conditions de l'admissibilité du point d'équilibre en une forme plus compacte.

Spécifiquement, pour qu'un point x^+ soit un point d'équilibre admissible dans la région D_1 on doit avoir

$$(5.1) \quad \begin{aligned} F(x^+, \mu) &= 0 \\ \text{et} \\ H(x^+, \mu) &= \lambda^+ > 0 \end{aligned}$$

De façon similaire, pour qu'un point x^- soit un point d'équilibre admissible dans la région D_2 , en utilisant (1.2), il faudra que

$$\begin{aligned} F(x^-, \mu) + G(x^-, \mu)\lambda^- &= 0 \\ \text{et} \\ H(x^-, \mu) &= \lambda^- < 0 \end{aligned}$$

Maintenant, en linéarisant autour du point d'équilibre de bord $(x, \mu) = (0, 0)$ on aura

$$(5.2) \quad Ax^+ + M\mu = 0$$

$$(5.3) \quad Cx^+ + N\mu = \lambda^+ > 0$$

Et

$$(5.4) \quad Ax^- + M\mu + B\lambda^- = 0$$

$$(5.5) \quad Cx^- + N\mu = \lambda^- < 0$$

Où $A = F_x$, $M = F_\mu$, $C = H_x$, $N = H_\mu$ et $B = G$ sont toutes évaluées à $(x, \mu) = (0, 0)$. Notons que A est inversible par la troisième condition de (3.1). Alors de (5.2) on a

$$x^+ = -A^{-1}M\mu$$

Et en remplaçant dans (5.3), on obtient

$$(5.6) \quad \lambda^+ = (N - CA^{-1}M)\mu$$

Remarquons que x^+ est admissible si $\lambda^+ > 0$ et virtuel si $\lambda^+ < 0$.
De façon similaire, on utilisant (5.4) et (5.5), on obtient

$$x^- = -A^{-1}(M\mu + B\lambda^-) = 0$$

D'où

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \lambda^- &= -CA^{-1}(M\mu + B\lambda^-) + N\mu \\ \lambda^-(1 + CA^{-1}B) &= (-CA^{-1}M + n)\mu \\ \lambda^- &= \frac{(N - CA^{-1}M)\mu}{(1 + CA^{-1}B)} \end{aligned}$$

$$(5.8) \quad \lambda^- = \frac{\lambda^+}{(1 + CA^{-1}B)}$$

Remarquons que x^- est admissible si $\lambda^- < 0$ et virtuel si $\lambda^- > 0$.
Alors on peut énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Supposons que $x = 0$ soit un point d'équilibre de bord pour un système PWSC quand $\mu = 0$ et définissant les matrices du système linéarisé telles mentionnées plus haut. Supposons que*

$$(5.9) \quad \det(A) \neq 0$$

$$(5.10) \quad N - CA^{-1}M \neq 0$$

$$(5.11) \quad 1 + CA^{-1}B \neq 0$$

Alors si

$$(5.12) \quad 1 + CA^{-1}B > 0$$

Un scénario de persistance est observé au point de bifurcation de point d'équilibre de bord (BEB)

Et si

$$(5.13) \quad 1 + CA^{-1}B < 0$$

Alors un pli non régulier est observé.

PREUVE. Considérons en premier lieu le système linéarisé. Et supposons que la condition (5.12) est satisfaite alors λ^+ et λ^- ont le même signe pour la même valeur de μ . Donc les points d'équilibre x^+ et x^- se situent au même coté par rapport à Σ . On en déduit qu'à chaque valeur de $\mu \neq 0$ l'un des points x^+ et x^- est admissible et l'autre est virtuel. D'où le scénario de persistance.

Si en outre la condition (5.13) est vérifiée, λ^+ et λ^- seront de signes opposées pour la même valeur de μ , et donc les points d'équilibre x^+ et x^- n'auront pas le droit de se trouver du même coté de Σ . On en déduit qu'à chaque valeur de $\mu \neq 0$

les des points x^+ et x^- sont de même nature donc soit à la fois admissibles soit à la fois virtuels. D'où le scénario de pli non régulier.

En second lieu, comme les conditions données (5.9) et (5.10) assurent que le système linéarisé soit non-singulier, les mêmes conclusions restent valident pour le système non-linéaire dans un certain voisinage du point d'équilibre de bord. \square

EXEMPLE 12.

$$(5.14) \quad \dot{x} = \begin{cases} Ax + M\mu & \text{si } Cx > 0 \\ (A + BC)x + M\mu & \text{si } Cx < 0 \end{cases}$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 + \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\epsilon \neq 2)$$

Et

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0 \ 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\epsilon \end{pmatrix}$$

Les symboles des matrices sont compatibles avec ceux utilisés dans les sections précédentes, avec $N = 0$, en effet, $\det(A) = -2 + \epsilon$ pour $\epsilon \neq 2$, et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{-2+\epsilon} \\ 1 & 0 & \frac{1}{-2+\epsilon} \\ 0 & 1 & \frac{3}{-2+\epsilon} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} N - CA^{-1}M &= 0 - (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{-2+\epsilon} \\ 1 & 0 & \frac{1}{-2+\epsilon} \\ 0 & 1 & \frac{3}{-2+\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 - \epsilon} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

D'un autre côté

$$\begin{aligned} 1 + CA^{-1}B &= 1 + (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{-2+\epsilon} \\ 1 & 0 & \frac{1}{-2+\epsilon} \\ 0 & 1 & \frac{3}{-2+\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\epsilon \end{pmatrix} \\ &= 1 - \frac{\epsilon}{-2 + \epsilon} \\ &= \frac{2}{-2 + \epsilon} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

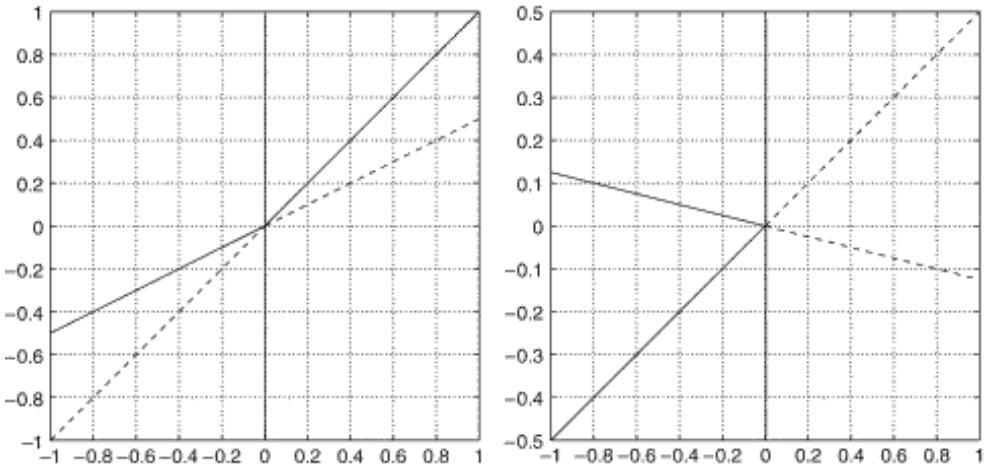
Et de

$$\lambda^- = \frac{\lambda^+}{1 + CA^{-1}B}$$

On trouve

$$\lambda^- = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \lambda^+$$

Dans ce cas selon le théorème développé dans cette section on a une BEB à $x^* = 0$, $\mu^* = 0$ et on aura persistance si $\epsilon < 2$ et pli non-régulier si $\epsilon > 2$. La Fig. 1 montre les effets d'une BEB pour $\epsilon = 1$ et $\epsilon = 10$. On peut clairement voir la différence entre les deux scénarios avec branches de point d'équilibre admissibles et virtuels se fondant en un point d'équilibre de bord quand $\mu = 0$. (voir figure ci-dessous)



Diagrammes de bifurcation d'un exemple représentatif tridimensionnel montrant un scénario de persistance et de pli non-régulier associés à une BEB résultant à $\mu = 0$. L'axe horizontal correspond au paramètre μ , et l'axe vertical à Cx c'est-à-dire la première coordonnée de x . Les points d'équilibre admissibles sont représentés avec une ligne pleine, et ceux virtuels avec une ligne en pointillés. à gauche: $\epsilon = 1$ (persistance); à droit : $\epsilon = 10$ (pli non-régulier).

5.3. Systèmes de Filippov et d'impact. Comme les équations pour les points d'équilibre et pseudo-points d'équilibre sont les mêmes pour les systèmes de Filippov et d'impact, cette section s'applique à ces deux types de systèmes à la fois.

Avec une simple translation dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ on peut toujours se ramener au cas où le système manifeste une BEB au point $(x, \mu) = (0, 0)$. Alors, sans perte de généralité on peut supposer que $x = 0$ est un point d'équilibre de bord pour $\mu = 0$. On doit maintenant chercher les conditions pour classer les comportements des points d'équilibre lors de la manifestation d'une BEB. On va montrer que quand μ varie, des scénarios similaires à ceux présentés dans les systèmes PWSC sont possibles. C'est-à-dire qu'on peut observer une persistance quand une branche de points d'équilibre devient une branche de pseudo-points d'équilibre ou, alternativement, observer un pli non régulier quand une branche de points d'équilibre admissibles disparaît après collision avec une branche de pseudo-points d'équilibre à la frontière.

Soit x un point d'équilibre admissible et soit \tilde{x} un pseudo-point d'équilibre admissible. Alors

$$\begin{cases} F(x, \mu) = 0 \\ \text{et} \\ H(x, \mu) = \lambda^+ > 0 \\ F(\tilde{x}, \mu) + G(\tilde{x}, \mu)\tilde{\lambda} = 0 \\ \text{et} \\ H(\tilde{x}, \mu) = 0 \end{cases}$$

Avec $\tilde{\lambda} > 0$ pour un système d'impact et $1 > \tilde{\lambda} > 0$ pour un système de Filippov
En linéarisant autour du point d'équilibre de bord $(x, \mu) = (0, 0)$, on trouve

$$(5.15) \quad \begin{cases} Ax + M\mu = 0 \\ Cx + N\mu = \lambda^+ > 0 \end{cases}$$

Et

$$(5.16) \quad \begin{cases} A\tilde{x} + M\mu + B\tilde{\lambda} = 0 \\ C\tilde{x} + N\mu = 0 \end{cases}$$

avec

$$\tilde{\lambda} > 0 \text{ (impact)}, 1 > \tilde{\lambda} > 0 \text{ (Filippov)}$$

Où $A = F_x$, $M = F_\mu$, $C = H_x$, $N = H_\mu$ et $B = G$ sont toutes évaluées en $x = 0$, $\mu = 0$.

Maintenant, de (5.15) on a

$$x = -A^{-1}M\mu$$

et

$$(5.17) \quad \lambda^+ = (N - CA^{-1}M)\mu > 0$$

De plus, de (5.16) on a

$$\tilde{x} = -A^{-1}M\mu - A^{-1}B\tilde{\lambda}$$

Alors finalement, on trouve

$$\begin{aligned} C(-A^{-1}M\mu - A^{-1}B\tilde{\lambda}) + N\mu &= 0 \\ (CA^{-1}B)\tilde{\lambda} &= (N - CA^{-1}M)\mu \end{aligned}$$

D'où

$$(5.18) \quad \tilde{\lambda} = \frac{(N - CA^{-1}M)\mu}{CA^{-1}B}$$

Ou de façon équivalente

$$(5.19) \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda^+}{CA^{-1}B}$$

Et puisqu'on ne s'intéresse qu'à un voisinage de $(x, \mu) = 0$ alors la quantité λ^+ peut être rendu arbitrairement petite et donc $\tilde{\lambda}$ aussi. De ce fait on peut choisir un voisinage de $(x, \mu) = 0$ telle que l'on ait automatiquement $\tilde{\lambda} < 1$. Et par conséquent pour qu'un pseudo-point d'équilibre soit admissible pour un système de Filippov il suffit d'avoir $\tilde{\lambda} > 0$ comme pour un système d'impact et c'est ce qu'on retiendra pour la suite.

De ce fait, la première remarque qu'on peut faire c'est que pour que x et \tilde{x} existent pour la même valeur de μ , il faudra que $CA^{-1}B > 0$ afin que $\tilde{\lambda}$ et λ^+ aient le même signe positif.

THÉORÈME 2. *Soit un système de Filippov ou d'impact, soit $x = 0$ un point d'équilibre de bord pour $\mu = 0$ et soient les matrices du système linéarisé comme indiqué auparavant. Supposant que*

$$(5.20) \quad \det(A) \neq 0$$

$$(5.21) \quad N - CA^{-1}M \neq 0$$

$$(5.22) \quad CA^{-1}B \neq 0$$

Alors si

$$(5.23) \quad CA^{-1}B < 0$$

Une persistance est observée au point de BEB

Et si

$$(5.24) \quad CA^{-1}B > 0$$

Alors un pli non-régulier est observé

Notons que les conditions décrivant les deux types de comportement trouvés sont différentes de ceux du Théorème 1, comme on devrait s'y attendre.

PREUVE. Sous les hypothèses du théorème, et en considérant d'abord le système linéarisé, supposons que $CA^{-1}B < 0$. Dans ce cas on aura $\tilde{\lambda}$ et λ^+ qui seront de signes opposés. Donc il va de soi que l'un des deux points d'équilibre x , \tilde{x} est forcément admissible et l'autre est virtuel. D'où le scénario de persistance.

Si l'on supposera que $CA^{-1}B > 0$ alors, $\tilde{\lambda}$ et λ^+ étant de mêmes signes, les deux points d'équilibre x , \tilde{x} seront à la fois admissible ou bien virtuel. D'où le scénario de pli non-régulier.

En fin, la conclusion du théorème est établie de la même manière que dans le théorème précédent. \square

Troisième partie

6. Stabilité et valeurs propres

Le but de cette partie est d'établir un lien entre l'apparition d'une persistance ou de pli non-régulier avec la structure des valeurs propres des points d'équilibre d'une branche d'une BEB pour les systèmes réguliers par morceaux.

Pour un point d'équilibre du champ de vecteurs F sur une branche d'une BEB, la stabilité du système linéaire est entièrement déterminée par les valeurs propres de A , car on a déjà supposé que $\det(A) \neq 0$ et donc A ne possède aucune valeur propre nulle.

Notons par σ_1^- le nombre de valeurs propres de A à parties réelles négatives. De ce fait, $\det(A)$ est positif, respectivement négatif si σ_1^- est pair, respectivement impair.

Pour un système PWSC, un point d'équilibre de F_2 possède la Jacobienne $A + BC$.

Pour un système PWSC toujours, notons par σ_2^- le nombre de valeurs propres de $A + BC$ à parties réelles négatives. Dans ce qui suit on aura besoin du lemme suivant.

LEMME 1. *Soient la matrice A et les vecteurs B, C définis comme suit*

$$A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = (b_i)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$C = (c_i)_{1 \leq i \leq n} = (c_1 \quad \dots \quad c_n)$$

Supposons que $\det(A) \neq 0$ alors

$$\det(A + BC) = \det(A)(1 + CA^{-1}B)$$

PREUVE. Soit le vecteur x défini comme suit

$$x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Supposons que x vérifie $Ax = B$, on trouve

$$x = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} & b_n \end{pmatrix}}{\det(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 \det(A + BC) &= \det \left(\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \right) \\
 &= \det \left(\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} b_1 c_1 & \dots & b_1 c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n c_1 & \dots & b_n c_n \end{pmatrix} \right) \\
 &= \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} + b_1 c_1 & \dots & a_{1n} + b_1 c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_n c_1 & \dots & a_{nn} + b_n c_n \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Or la fonction \det est multilinéaire par rapport aux vecteurs colonnes, en particulier par rapport à la première, d'où

$$\det(A + BC) = \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_1 c_2 & \dots & a_{1n} + b_1 c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + b_n c_2 & \dots & a_{nn} + b_n c_n \end{pmatrix} \right) + \det \begin{pmatrix} b_1 c_1 & a_{12} + b_1 c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ b_n c_1 & a_{n2} + b_n c_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Sachant que le déterminant reste inchangé si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
 \det(A + BC) &= \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_1 c_2 & \dots & a_{1n} + b_1 c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + b_n c_2 & \dots & a_{nn} + b_n c_n \end{pmatrix} \right) + \\
 &\quad \det \begin{pmatrix} b_1 c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n c_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Et en utilisant la multilinéarité du déterminant une deuxième fois on trouve

$$\begin{aligned}
 \det(A + BC) &= \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_1 c_2 & \dots & a_{1n} + b_1 c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + b_n c_2 & \dots & a_{nn} + b_n c_n \end{pmatrix} \right) + \\
 &\quad c_1 \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_1 c_2 & \dots & a_{1n} + b_1 c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + b_n c_2 & \dots & a_{nn} + b_n c_n \end{pmatrix} \right) + c_1 x_1 \det(A)
 \end{aligned}$$

En refaisant les mêmes calculs pour la deuxième colonne on obtient :

$$\det(A + BC) = \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_1 c_3 & \dots & a_{1n} + b_1 c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} + b_n c_3 & \dots & a_{nn} + b_n c_n \end{pmatrix} \right) + \\ \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 c_2 & a_{13} + b_1 c_3 & \dots & a_{1n} + b_1 c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n c_2 & a_{n3} + b_n c_3 & \dots & a_{nn} + b_n c_n \end{pmatrix} \right) + c_1 x_1 \det(A)$$

En utilisant les mêmes astuces on trouve

$$\det(A+BC) = \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_1 c_3 & \dots & a_{1n} + b_1 c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} + b_n c_3 & \dots & a_{nn} + b_n c_n \end{pmatrix} \right) + c_2 x_2 \det(A) + c_1 x_1 \det(A)$$

On répétant le processus on obtient

$$\begin{aligned} \det(A + BC) &= \det(A) + c_n x_n \det(A) + \dots + c_1 x_1 \det(A) \\ &= \det(A)(1 + c_n x_n + \dots + c_1 x_1) \\ &= \det(A)(1 + Cx) \end{aligned}$$

Alors finalement on aboutit à

$$\det(A + BC) = \det(A)(1 + CA^{-1}B)$$

□

D'où pour le fait que $\det(A) \neq 0$ on a :

$$1 + CA^{-1}B = \frac{\det(A + BC)}{\det(A)}$$

Alors selon les parités de σ_1^- et σ_2^- on a trois cas :

Si σ_1^- et σ_2^- sont pairs alors $1 + CA^{-1}B > 0$ et donc on a une persistance.

Si σ_1^- et σ_2^- sont impairs alors $1 + CA^{-1}B > 0$ et donc on aussi a une persistance.

Si l'un de σ_1^- et σ_2^- est pair et l'autre est impair alors $1 + CA^{-1}B < 0$ et donc on a un pli non-régulier.

On peut énoncer ce résultat de manière plus compacte par la proposition suivante qu'on vient de démontrer pour les systèmes PWSC.

PROPOSITION 1. *Si $\sigma_1^- + \sigma_2^-$ est pair, respectivement impair, on retrouve une persistance, respectivement un pli non-régulier.*

Pour les systèmes de Filippov, de (4.2) on trouve que la matrice jacobienne du champ de vecteurs de glissement au point (x^*, μ^*) de la BEB est

$$(6.1) \quad A_s = \left(Id - \frac{BC}{CB} \right) A$$

On a

$$Id - \frac{BC}{CB} = \frac{(CB)Id - BC}{CB}$$

Or, d'après le lemme précédent

$$\begin{aligned}
 \det((CB)Id - BC) &= \det((CB)Id)(1 - C((CB)Id)^{-1}B) \\
 &= \det((CB)Id) \left(1 - C \frac{Id}{CB} B \right) \\
 &= \det((CB)Id) \left(1 - \frac{CB}{CB} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \det(A_s) &= \frac{1}{(CB)^n} \det((CB)Id - BC) \det(A) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

DÉFINITION 8. *On appelle ensemble, région, espace de glissement un sous-ensemble Σ_s de Σ susceptible de permettre un mouvement de glissement c'est-à-dire l'ensemble de tous les points x qui vérifient*

$$H(x, \mu) = 0 \text{ et } H_x G(x, \mu) \neq 0 \text{ pour les systèmes de Filippov}$$

et

$$H(x, \mu) = 0, v(x, \mu) = 0, \text{ et } v_x G(x, \mu) \neq 0 \text{ pour les systèmes d'impact}$$

LEMME 2. *Pour les systèmes de filippov, l'ensemble de glissement Σ_s est de codimension 1.*

PREUVE.

En linéarisant on aura $Cx = -N\mu$ et $CB \neq 0$ donc $Cx = -N\mu$ et $C \neq 0$ ce qui est l'équation d'un hyperplan et un hyper plan est toujours de codimension 1. La conclusion pour le système de Filippov est immédiate grâce à l'équivalence topologique. \square

Pour l'énoncé et la démonstration du prochain théorème on aura besoin des préliminaires suivants:

Soit $x, B \in \mathbb{R}^n$, $C^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lambda, y \in \mathbb{R}$. Choisissons $x(0)$ et $\lambda(x)$ tels que la solution du système linéaire associé à :

$$\begin{aligned}
 x' &= Ax + \lambda B \\
 y &= Cx
 \end{aligned}$$

vérifie $Cx(t) = 0$.

On suppose que $\det(A) \neq 0$ et $CA^{-1}B = \beta \neq 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ le plus petit entier positif tel que $CA^k B = \alpha \neq 0$.

On cite maintenant le théorème de Cayley–Hamilton dont on trouve la démonstration dans [2].

THÉORÈME 3. *Soit P_M le polynôme caractéristique d'une matrice carrée M , alors $P_M(M) = 0$. Autrement dit : le polynôme caractéristique de M est annulé par M .*

Sachant que la matrice A est inversible, ce théorème donne.

$$\begin{aligned}
0 &= P_A(A) \\
0 &= (-1)^n A^n + \text{tr}(A) (-1)^{n-1} A^{n-1} + c_{n-2} A^n + \dots + c_1 A + \det(A) \\
0 &= A^{-1} \left((-1)^n A^n + \text{tr}(A) (-1)^{n-1} A^{n-1} + c_{n-2} A^n + \dots + c_1 A + \det(A) \right) \\
0 &= (-1)^n A^{n-1} + \text{tr}(A) (-1)^{n-1} A^{n-2} + c_{n-2} A^{n-3} + \dots + c_1 + \det(A) A^{-1} \\
\det(A) A^{-1} &= (-1)^{n+1} A^{n-1} + \text{tr}(A) (-1)^n A^{n-2} - c_{n-2} A^{n-3} + \dots - c_1 \\
A^{-1} &= \frac{(-1)^{n+1} A^{n-1} + \text{tr}(A) (-1)^n A^{n-2} - c_{n-2} A^{n-3} + \dots - c_1}{\det(A)} \\
CA^{-1}B &= \frac{(-1)^{n+1} CA^{n-1}B + \text{tr}(A) (-1)^n CA^{n-2}B - c_{n-2} CA^{n-3}B + \dots - c_1 CB}{\det(A)}
\end{aligned}$$

On en déduit que $CA^{-1}B$ est une combinaison linéaire des CA^iB , $i = 0, \dots, (n-1)$, et comme $CA^{-1}B = \beta \neq 0$ donc forcément l'un des CA^iB , $i = 0, \dots, (n-1)$ est non nul, et on en déduit que $k < n$.

On définit la matrice T^* de dimension $(k+1) \times n$ par

$$T^* = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \\ CA^k \end{pmatrix}$$

Et définissons aussi l'espace de glissement généralisé Σ'_s comme étant l'espace annulateur droit de T^* (c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $T^*x = 0$), en d'autres termes $\Sigma'_s = \text{Ker}(T^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : T^*x = 0\}$.

Prenons

$$\lambda(x) = -\frac{CA^{k+1}x}{CA^k B} = -\frac{CA^{k+1}x}{\alpha}$$

Ce qui signifie que nous utiliserons le champ de vecteur de glissement:

$$A_s = \left(Id - \frac{BCA^k}{CA^k B} \right) A$$

Si x est dans Σ'_s alors $T^*x = 0$, c'est-à-dire $CA^i x = 0$, $i = 0, \dots, k$ et donc

$$\begin{aligned}
T^* x' &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \\ CA^k \end{pmatrix} A_s x \\
&= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \\ CA^k \end{pmatrix} \left(Id - \frac{BCA^k}{CA^k B} \right) Ax \\
&= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \\ CA^k \end{pmatrix} \left(A - \frac{BCA^{k+1}}{CA^k B} \right) x \\
&= \begin{pmatrix} CA - \frac{(CB)CA^{k+1}}{CA^k B} \\ CA^2 - \frac{(CAB)CA^{k+1}}{CA^k B} \\ \vdots \\ CA^k - \frac{(CA^{k-1}B)CA^{k+1}}{CA^k B} \\ CA^{k+1} - \frac{(CA^k B)CA^{k+1}}{CA^k B} \end{pmatrix} x \\
&= \begin{pmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \\ CA^{k+1} - CA^{k+1} \end{pmatrix} x \\
&= \begin{pmatrix} CAx \\ CA^2x \\ \vdots \\ CA^kx \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc on trouve bien

$$(6.2) \quad T^* x' = 0$$

On vient de démontrer que :

$$T^* x = 0 \implies T^* A_s x = 0$$

Donc, ceci donne les implications

$$T^* x = 0 \implies T^* A_s x = 0 \implies T^* A_s^2 x = 0 \implies \dots \implies T^* A_s^n x = 0$$

En d'autres termes

$$(6.3) \quad T^* A_s^n x = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

D'un autre côté, la solution générale du problème s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_s t} x(0) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_s^n t^n \right) x(0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n A_s^n x(0) \end{aligned}$$

Donc en faisant agir T^* sur $x(t)$ on arrive à :

$$T^* x(t) = T^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n A_s^n x(0) \right)$$

Mais puisque T^* est un opérateur linéaire agissant sur un espace de dimension fini il est alors continue. Ceci va justifier l'étape suivante :

$$\begin{aligned} T^* x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} T^* (t^n A_s^n x(0)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n T^* A_s^n x(0) \end{aligned}$$

Donc si $T^* x(0) = 0$ (c'est-à-dire que $x(0)$ est dans l'espace de glissement généralisé Σ'_s) alors par (6.3), on trouve :

$$T^* x(t) = 0$$

Et par (6.2) on trouve :

$$T^* x'(t) = T^* x(t) = 0$$

Donc Σ'_s est invariant par le champ de vecteurs de glissement A_s .

THÉORÈME.

Soit \widehat{A}_s la restriction de A_s à l'espace de glissement généralisé Σ'_s . Alors

$$\det(A) = (-1)^k \frac{CA^k B}{CA^{-1}B} \det(\widehat{A}_s)$$

PREUVE. Soit S une matrice quelconque dont les colonnes forment une base pour Σ'_s , alors $T^* S = 0$. Trouvons une autre matrice T dont les colonnes avec celles de S forment une base pour tout l'espace \mathbb{R}^n . Commençons par la matrice

$$Q = \left(A^{-1}B \quad A^{k-1}B \quad A^{k-2}B \quad \dots \quad AB \quad B \right)$$

Alors

$$\begin{aligned}
 T^*Q &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \\ CA^k \end{pmatrix} (A^{-1}B \quad A^{k-1}B \quad A^{k-2}B \quad \dots \quad AB \quad B) \\
 &= \begin{pmatrix} CA^{-1}B & CA^{k-1}B & CA^{k-2}B & \dots & CAB & CB \\ CB & CA^k B & CA^{k-1}B & \dots & CA^2B & CAB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{k-2}B & CA^{2k-2}B & CA^{2k-3}B & \dots & CA^k B & CA^{k-1}B \\ CA^{k-1}B & CA^{2k-1}B & CA^{2k-2}B & \dots & CA^{k+1}B & CA^k B \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & CA^{2k-2}B & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & CA^{2k-1}B & \dots & CA^{k+1}B & \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où

$$\det(T^*Q) = \beta\alpha^k \neq 0$$

et

$$T^*Q = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha L \end{pmatrix}$$

Avec L une matrice triangulaire inférieure de dimensions $k \times k$ avec 1 sur sa diagonale. Alors T^*Q est inversible et son rang est égal à $k + 1$. Et puisque T^* est de dimension $(k + 1) \times n$, son rang doit aussi être égal à $k + 1$. On en déduit que le rang de S doit être égale à $n - k - 1$. Soit la matrice T définie par

$$T = Q(T^*Q)^{-1}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 T^*T &= T^*Q(T^*Q)^{-1} \\
 &= Id_{k+1}
 \end{aligned}$$

On en déduit que les colonnes de la matrice $P = \begin{pmatrix} T & S \end{pmatrix}$ forment une base pour \mathbb{R}^n et $P^{-1} = \begin{pmatrix} T^* \\ S^* \end{pmatrix}$ pour une certaine matrice S^* de dimension $(n-k-1) \times n$ telle que $S^*S = Id_{n-k-1}$ et $S^*T = 0$, puisque ainsi on aura

$$\begin{aligned}
 P^{-1}P &= \begin{pmatrix} T^* \\ S^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & S \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} T^*T & T^*S \\ S^*T & S^*S \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} Id_{k+1} & 0 \\ 0 & Id_{n-k-1} \end{pmatrix} \\
 &= Id
 \end{aligned}$$

Donc

$$\det(A) = \det(P^{-1}AP)$$

Et

$$\det(\widehat{A}_s) = \det(S^* A_s S)$$

D'un autre côté

$$S^* T = 0 \implies S^* Q (T^* Q)^{-1} = 0 \implies S^* Q = 0 \implies S^* \begin{pmatrix} A^{-1} B & A^{k-1} B & \dots & B \end{pmatrix} = 0 \implies S^* T$$

D'où

$$\begin{aligned} S^* A_s &= S^* \left(Id - \frac{BCA^k}{CA^k B} \right) A \\ &= S^* A - \frac{(S^* B) CA^{k+1}}{CA^k B} \\ &= S^* A \end{aligned}$$

Ce qui donne immédiatement

$$\det(S^* A_s S) = \det(S^* A S)$$

D'un autre côté T doit être de la forme $T = \begin{pmatrix} \frac{A^{-1} B}{\beta} & R \end{pmatrix}$ pour une certaine matrice R de dimension $n \times k$, car effectivement çà nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} T^* T &= \begin{pmatrix} C \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A^{-1} B}{\beta} & R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{CA^{-1} B}{\beta} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned} T^* A &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \\ CA^k \end{pmatrix} A \\ &= \begin{pmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \\ CA^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0 & Id_k) T^* \\ CA^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et ceci implique que

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} T^* \\ S^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} T & S \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T^*A \\ S^*A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & S \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id_k \end{pmatrix} T^* \\ CA^{k+1} \\ S^*A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & S \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id_k \end{pmatrix} T^*T & \begin{pmatrix} 0 & Id_k \end{pmatrix} T^*S \\ CA^{k+1}T & CA^{k+1}S \\ S^*AT & S^*AS \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id_k \end{pmatrix} & 0 \\ CA^{k+1} \begin{pmatrix} \frac{A^{-1}B}{\beta} & R \end{pmatrix} & CA^{k+1}S \\ S^*A \begin{pmatrix} \frac{A^{-1}B}{\beta} & R \end{pmatrix} & S^*AS \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id_k \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{CA^k B}{\beta} & CA^{k+1}R \end{pmatrix} & CA^{k+1}S \\ \begin{pmatrix} \frac{S^*B}{\beta} & S^*AR \end{pmatrix} & S^*AS \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & Id_k & 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} & CA^{k+1}R & CA^{k+1}S \\ 0 & S^*AR & S^*AS \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En développant le déterminant de cette matrice par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det(P^{-1}AP) = (-1)^k \frac{\alpha}{\beta} \det \begin{pmatrix} Id_k & 0 \\ S^*AR & S^*AS \end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix} Id_k & 0 \\ S^*AR & S^*AS \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure. D'où

$$\begin{aligned}
\det(P^{-1}AP) &= (-1)^k \frac{\alpha}{\beta} \det(Id_k) \det(S^*AS) \\
&= (-1)^k \frac{CA^k B}{CA^{-1}B} \det(S^*AS)
\end{aligned}$$

Et donc on a le résultat attendu

$$\det(A) = (-1)^k \frac{CA^k B}{CA^{-1}B} \det(\hat{A}_s)$$

□

REMARQUE 5. *On note que*

$$P^{-1}A_s P = \begin{pmatrix} 0 & Id_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^*AR & S^*AS \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que A_s possède un bloc de Jordan de type $k + 1$ associé à la valeur propre 0.

En revenant aux systèmes de Filippov, comme $\det(A_s) = 0$, il est préférable d'introduire un système de coordonnées non-singuliers pour l'ensemble de glissement Σ_s . Soit \widehat{A}_s la matrice jacobienne du champ de vecteurs de glissement restreint à l'ensemble de glissement Σ_s . Evidemment, $\det(\widehat{A}_s)$ est indépendant du choix du système de coordonnées, et en appliquant le théorème précédent pour le cas $k = 0$, on obtient

$$(6.4) \quad \det(\widehat{A}_s)(-CB) = \det(A)(-CA^{-1}B)$$

La raison d'écrire le signe moins avant CB trouve sa justification dans ce qui suit:

Si $CB > 0$ et s'il existe un pseudo-point d'équilibre admissible proche de (x^*, μ^*) , c'est-à-dire que pour une certaine paire (x, μ) on a

$$\widetilde{F}_s(x, \mu) = 0$$

Donc, comme on l'a déjà vu, $\widetilde{F}(x, \mu)$ et $\widetilde{F}_2(x, \mu)$ doivent être colinéaires. Et puisque $B = \widetilde{G}(x, \mu) = \widetilde{F}_2(x, \mu) - \widetilde{F}(x, \mu)$, alors B est colinéaire à $\widetilde{F}(x, \mu)$ et $\widetilde{F}_2(x, \mu)$. Donc le champ du système linéarisé au voisinage du pseudo-point d'équilibre est colinéaire à B et on en déduit que le mouvement dans ce voisinage est parallèle à B . D'un autre côté, puisque dans D_1 on a $H(x, \mu) > 0$, alors le vecteur gradient $H_x(x, \mu)$, et donc le vecteur C pour le système linéarisé, est dirigé vers D_1 . Et comme $CB > 0$, alors B pointe aussi vers D_1 . On sait que le pseudo-point d'équilibre est admissible, donc pour le système linéarisé on a

$$C\widetilde{F}(x, \mu) \cdot C\widetilde{F}_2(x, \mu) < 0$$

D'où

$$\begin{aligned} C\widetilde{F}(x, \mu) \cdot C(\widetilde{F}(x, \mu) + B) &< 0 \\ (C\widetilde{F}(x, \mu))^2 + C\widetilde{F}(x, \mu)CB &< 0 \\ C\widetilde{F}(x, \mu) &< -\frac{(C\widetilde{F}(x, \mu))^2}{CB} \\ C\widetilde{F}(x, \mu) &< 0 \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$C\widetilde{F}_2(x, \mu) > 0$$

Donc $\widetilde{F}(x, \mu)$ pointe dans la direction opposée de C c'est-à-dire vers D_2 , et ainsi $\widetilde{F}(x, \mu)$ doit être pointé dans la même direction que C c'est-à-dire dirigé vers D_1 .

Il en résulte alors que les points du voisinage seront monotonelement attirés vers Σ en un temps fini suivant une direction presque parallèle à B . Alors on pourrait penser à un pseudo point d'équilibre possédant une pseudo-valeur propre négative infinie (puisque l'attraction s'est produite en un temps fini) avec un pseudo-vecteur propre très proche de B .

Par contre, si $CB < 0$ et s'il existe un pseudo-point d'équilibre admissible (x, μ) proche de (x^*, μ^*) , on aura comme précédemment que le mouvement dans ce

voisinage de (x, μ) est parallèle à B . Mais comme $CB < 0$, alors B pointe vers D_2 . D'un autre côté on a pour le système linéarisé:

$$C\tilde{F}(x, \mu) \cdot C\tilde{F}_2(x, \mu) < 0$$

D'où

$$\begin{aligned} C\tilde{F}(x, \mu) \cdot C(\tilde{F}(x, \mu) + B) &< 0 \\ (C\tilde{F}(x, \mu))^2 + C\tilde{F}(x, \mu) \cdot CB &< 0 \\ C\tilde{F}(x, \mu) &> -\frac{(C\tilde{F}(x, \mu))^2}{CB} \\ C\tilde{F}(x, \mu) &> 0 \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$C\tilde{F}_2(x, \mu) < 0$$

Donc $\tilde{F}(x, \mu)$ pointe dans la même direction que de C c'est-à-dire vers D_1 , et ainsi $\tilde{F}(x, \mu)$ doit être pointé dans la direction opposée à celle de C c'est-à-dire vers D_2 .

Il en résulte alors que les points du voisinage seront monotonelement éloignés de Σ en un temps fini en suivant une direction parallèle à B . Alors on pourrait penser à un pseudo point d'équilibre possédant une pseudo-valeur propre positive infinie (puisque la répulsion se produit en un temps fini) avec un pseudo-vecteur propre très proche de B .

Alors si maintenant on note par σ_2^- le nombre de valeurs propres négatives plus, si elle existe, la pseudo-valeur propre infini négative de \hat{A}_s , alors le produit $\det(A_s)(-CB)$ est positif, respectivement négatif, si le nombre σ_2^- est pair, respectivement impair. Et si on désigne toujours par σ_1^- le nombre de valeurs propres négatives de A alors on trouve que la Proposition 1. a toujours lieu pour les systèmes de Filippov.

Pour les systèmes d'impact, on trouve de (4.5) que la matrice jacobienne du champ de vecteurs de glissement au point de la BEB est

$$(6.5) \quad A_s = \left(Id - \frac{BCA}{CAB} \right) A$$

On a le résultat suivant.

LEMME 3. *Pour les systèmes d'impact, l'ensemble de glissement Σ_s est de codimension 2.*

PREUVE. On a

$$CA_s x = C \left(Id - \frac{BCA}{CAB} \right) Ax = \left(CA - \frac{(CB)CA^2}{CAB} \right) x$$

Or on sait que pour les systèmes d'impact on a $CB = 0$, alors

$$CA_s x = CAx = Cx = 0$$

Donc x appartient à l'intersection des deux sous-espaces vectoriels d'équations

$$Cx = 0$$

Et

$$CAx = 0$$

On sait aussi que pour les systèmes d'impact on a l'hypothèse que $CA^2x \neq 0$ (1.14). Donc $CA \neq \gamma C$ ($\gamma \in \mathbb{R}$), car sinon on aura $CA^2x = CAAx = \gamma CAx = \gamma^2 Cx = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc les deux sous-espaces vectoriels d'équations $Cx = 0$ et $CAx = 0$ sont différents et ils sont chacun de codimension 1. Et on sait de l'algèbre linéaire que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels différents de codimension 1 est un sous-espace vectoriel de codimension 2 qui est notre ensemble de glissement pour le système linéarisé. Grâce à l'équivalence topologique on en déduit que l'ensemble de glissement pour les systèmes d'impact est de codimension 2. \square

Soit, encore, \widehat{A}_s la restriction de A_s à l'ensemble de glissement. Il s'en suit par le théorème précédent appliqué au cas $k = 1$ que

$$(6.6) \quad \det(\widehat{A}_s)(CAB) = \det(A)(-CA^{-1}B)$$

Pour la suite on aura besoin du théorème suivant

THÉORÈME 5. *Etant donné un système d'impact linéaire décrit par A, B, C, M, N supposons que $\det(A) \neq 0$, $CA^{-1}B \neq 0$ et $r = CAB - 1 > 0$, alors il existe un système continu régulier par morceaux (PWSC) linéaire décrit par $A, \widehat{B}(\epsilon), C, M, N$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ le système PWSC ainsi décrit est proche du système d'impact à l'ordre $O(\epsilon)$.*

PREUVE. Comme A, C, M, N sont les mêmes pour les deux systèmes, le comportement est le même dans la région D_1 , alors il suffit de montrer que le système PWSC linéaire suit la loi d'impact

$$x^+ = x^- - BC(A(x^- - x^*) + M(\mu - \mu^*))$$

quand une trajectoire coupe la surface Σ .

Pour le système d'impact on a $CB = 0$ et $CAB = r + 1 > 1$. On aura pour la matrice T^* défini dans le théorème précédent

$$T^* = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$$

D'où T doit être de la forme

$$T = \begin{pmatrix} A^{-1}B & R \\ CA^{-1}B & R \end{pmatrix} \quad (R \in \mathbb{R}^n)$$

On a

$$\begin{aligned}
 Id_2 &= T^*T \\
 &= \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} & R \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} & CR \\ CA \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} & CAR \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{CA^{-1}B}{CA^{-1}B} & CR \\ \frac{CB}{CA^{-1}B} & CAR \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & CR \\ 0 & CAR \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Si on prend $R = \frac{B}{CAB}$ on aura

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & CR \\ 0 & CAR \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{CB}{CAB} \\ 0 & \frac{CAB}{CAB} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= Id_2
 \end{aligned}$$

Donc la matrice T sera

$$T = \begin{pmatrix} \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} & \frac{B}{CAB} \end{pmatrix}$$

Soit $\gamma = \frac{\log(r)}{\pi}$ et soit

$$\widehat{B}(\epsilon) = T \begin{pmatrix} \frac{2\gamma}{\epsilon} \\ -\frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \end{pmatrix}$$

Soit le système PWSC dans la région D_2 possédant la dynamique $x' = A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) + \widehat{B}(C(x - x^*) + N(\mu - \mu^*))$

Puisque l'ensemble de glissement est de codimension 2, on peut prendre comme nouveau système de coordonnées : les coordonnées réduites à l'ensemble de glissement ainsi que deux autres coordonnées. Ces deux autres coordonnées seront la position relative à Σ et la vitesse relative à Σ (puisque sur Σ on a $H = 0$ et $CF = 0$)

Alors on peut faire le changement de coordonnées suivant

$$\begin{cases} y_1 = \frac{C(x-x^*)+N(\mu-\mu^*)}{\epsilon} \\ y_2 = C(A(x-x^*) + M(\mu-\mu^*)) \\ y_s = S^*(x-x^*) \end{cases}$$

Où S^* est une matrice telle que définie dans le théorème précédent. Alors y_1 est la position relative à Σ , y_2 est la vitesse relative à Σ , et y_s contient les coordonnées pour l'ensemble de glissement du système d'impact. Introduisons une nouvelle échelle de temps τ telle que

$$\frac{d}{d\tau} = \epsilon \frac{d}{dt}$$

Notons que

$$S^*T = 0 \Rightarrow S^* \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} = 0 \Rightarrow S^*A^{-1}B = 0$$

Et

$$S^*T = 0 \Rightarrow S^* \frac{B}{CAB} = 0 \Rightarrow S^*B = 0$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= \frac{Cx' dt}{\epsilon d\tau} \\ &= Cx' \\ &= y_2 + \epsilon C\widehat{B}y_1 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} C\widehat{B} &= C \left(\frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} \quad \frac{B}{CAB} \right) \begin{pmatrix} \frac{2\gamma}{\epsilon} \\ -\frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \end{pmatrix} \\ &= C \left(\frac{2\gamma}{\epsilon} \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} - \frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \frac{B}{CAB} \right) \\ &= \frac{2\gamma}{\epsilon} \frac{CA^{-1}B}{CA^{-1}B} - \frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \frac{CB}{CAB} \\ &= \frac{2\gamma}{\epsilon} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= y_2 + \epsilon \frac{2\gamma}{\epsilon} y_1 \\ &= y_2 + 2\gamma y_1 \end{aligned}$$

En plus on a

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{d\tau} &= CAx' \frac{dt}{d\tau} \\ &= \epsilon CAx' \\ &= \epsilon(CA(A(x-x^*) + M(\mu - \mu^*)) + \epsilon C\widehat{A}y_1) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} C\widehat{A} &= CA \left(\frac{2\gamma}{\epsilon} \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} - \frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \frac{B}{CAB} \right) \\ &= \frac{2\gamma}{\epsilon} \frac{CB}{CA^{-1}B} - \frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \frac{CAB}{CAB} \\ &= -\frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{d\tau} &= \epsilon(CA(A(x-x^*) + M(\mu - \mu^*)) - \frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} y_1) \\ &= -(1+\gamma^2)y_1 + \epsilon CA(A(x-x^*) + M(\mu - \mu^*)) \\ &= -(1+\gamma^2)y_1 + O(\epsilon) \end{aligned}$$

En plus

$$\begin{aligned}\frac{dy_s}{d\tau} &= S^{*} x' \frac{dt}{d\tau} \frac{dy_s}{d\tau} = \epsilon S^{*} (A(x - x^{*}) + M(\mu - \mu^{*}) + \epsilon \widehat{B} y_1) \\ &= \epsilon S^{*} (A(x - x^{*}) + M(\mu - \mu^{*})) + \epsilon^2 S^{*} \widehat{B} y_1\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}S^{*} \widehat{B} &= (S^{*} T) \begin{pmatrix} \frac{2\gamma}{\epsilon} \\ -\frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{dy_s}{d\tau} &= \epsilon S^{*} (A(x - x^{*}) + M(\mu - \mu^{*})) \\ &= O(\epsilon)\end{aligned}$$

En démarrant de la surface Σ (c'est-à-dire de $y_1(0) = 0$) avec la vitesse $y_2(0) = v_0 < 0$ et en intégrant jusqu'à atteindre Σ une autre fois à $\tau = \tau_1$ on trouve

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau}(0) &= 0 + y_2(0) \\ \frac{dy_1}{d\tau}(0) &= v_0 < 0 \\ \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} &= 2\gamma \frac{dy_1}{d\tau}(0) - (1 + \gamma^2) y_1 + O(\epsilon)\end{aligned}$$

Et donc

$$y_1(\tau) = -e^{\gamma\tau} \sin(\tau) v_0 + O(\epsilon)$$

D'où

$$\tau_1 = \pi + O(\epsilon)$$

En plus

$$\begin{aligned}y_2(\tau) &= \frac{dy_1}{d\tau}(\tau) - 2\gamma y_1(\tau) \\ &= -(\gamma e^{\gamma\tau} \sin(\tau) + e^{\gamma\tau} \cos(\tau) - 2\gamma e^{\gamma\tau} \sin(\tau)) v_0 \\ &= (\gamma e^{\gamma\tau} \sin(\tau) - e^{\gamma\tau} \cos(\tau)) v_0\end{aligned}$$

D'où

$$y_2(\tau_1) = -e^{\gamma\tau_1} \pi v_0 + O(\epsilon)$$

En plus

$$y_s(\tau) = y_s(0) + O(\epsilon)$$

D'où

$$y_s(\tau_1) = y_s(0) + O(\epsilon)$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}e^{\gamma\pi} &= e^{\frac{\log(r)}{\pi}\pi} \\ &= r \\ &= CAB - 1\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \pi + O(\epsilon) \\ y_1(\tau_1) &= 0 \\ y_2(\tau_1) &= -rv_0 + O(\epsilon) \\ y_s(\tau_1) &= y_s(0) + O(\epsilon)\end{aligned}$$

Pour $t_1 = \epsilon\tau_1$ ceci se traduit en revenant aux coordonnées de départ comme suit

$$\begin{aligned}y_1(\tau_1) &= 0 \iff \tilde{H}(x(t_1), \mu) = 0 \iff x(t_1) \in \Sigma \\ y_2(\tau_1) &= -rv_0 + O(\epsilon) \iff v(x(t_1), \mu) = (1 - CAB)v(x(0), \mu) + O(\epsilon) \\ y_s(\tau_1) &= y_s(0) + O(\epsilon) \iff S^*x(t_1) = S^*x(0) + O(\epsilon)\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à calculer $x(t_1)$

Pour cela on a

$$\begin{aligned}S^*T &= S^* \begin{pmatrix} \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} & \frac{B}{CAB} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{S^*A^{-1}B}{CA^{-1}B} & \frac{S^*B}{CAB} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Et puisque $S^*T = 0$ alors

$$S^*A^{-1}B = S^*B = 0$$

D'un autre côté puisque $CA^{-1}B \neq 0 = CB$ alors les vecteurs B et $A^{-1}B$ sont linéairement indépendants. On en déduit que B et $A^{-1}B$ forment une base pour le noyau de S^* car ce dernier est de dimension 2. Alors de la relation $S^*x(t_1) = S^*x(0) + O(\epsilon)$ il vient que pour certains nombres réels a et b à déterminer, on a

$$x(t_1) = x(0) + aB + bA^{-1}B + O(\epsilon)$$

En plus

$$\begin{aligned}y_1(\tau_1) = 0 &\implies \frac{C(x(0) + aB + bA^{-1}B + O(\epsilon) - x^*) + N(\mu - \mu^*)}{\epsilon} = 0 \\ &\implies C(x(0) + aB + bA^{-1}B + O(\epsilon) - x^*) + N(\mu - \mu^*) = 0 \\ &\implies C(x(0) - x^*) + N(\mu - \mu^*) + C(aB + bA^{-1}B + O(\epsilon)) = 0 \\ &\implies y_1(0) + C(aB + bA^{-1}B + O(\epsilon)) = 0 \\ &\implies C(aB + bA^{-1}B + O(\epsilon)) = 0 \\ &\implies aCB + bCA^{-1}B + O(\epsilon) = 0 \\ &\implies bCA^{-1}B + O(\epsilon) = 0 \\ &\implies b = O(\epsilon)\end{aligned}$$

Donc $x(t_1)$ doit être simplement de la forme

$$x(t_1) = x(0) + aB + O(\epsilon)$$

Or de la relation $y_2(\tau_1) = (1 - CAB)y_2(0) + O(\epsilon)$ on trouve

$$\begin{aligned} C(A(x(0) + aB + O(\epsilon) - x^*) + M(\mu - \mu^*)) &= (1 - CAB)C(A(x(0) - x^*) + M(\mu - \mu^*)) + O(\epsilon) \\ C(A(x(0) - x^*) + M(\mu - \mu^*)) + aCAB &= (1 - CAB)C(A(x(0) - x^*) + M(\mu - \mu^*)) + O(\epsilon) \\ aCAB &= -CAB(C(A(x(0) - x^*) + M(\mu - \mu^*))) + O(\epsilon) \\ a &= -C(A(x(0) - x^*) + M(\mu - \mu^*)) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Alors l'expression de $x(t_1)$ est finalement

$$x(t_1) = x(0) - BC(A(x(0) - x^*) + M(\mu - \mu^*)) + O(\epsilon)$$

Ce qui est proche à l'ordre $O(\epsilon)$ de la loi d'impact. Ce qui achève la démonstration. \square

En poursuivant l'analyse précédente et si l'on suppose qu'il existe un pseudo-point d'équilibre proche de (x, μ) alors, pour le système linéarisé, de $\tilde{F}(x, \mu) + \lambda B = 0$ on déduit

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, \mu) &= -\lambda B \\ \tilde{F}(x, \mu) &= \frac{a(x, \mu)}{CAB} \end{aligned}$$

Et comme $a(x, \mu) < 0$ et $CAB > 1$ alors $\tilde{F}(x, \mu)$ et B sont parallèles mais pointés vers des directions opposées. On en déduit que dans la région D_1 le mouvement au voisinage de (x, μ) est presque parallèle à B mais dans la direction opposée. En rappelant une autre fois que $a(x, \mu) < 0$ on en déduit que les points du voisinage de (x, μ) dans la région D_1 seront rabattus sur Σ presque parallèlement à B mais dans la direction opposée.

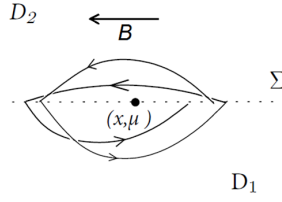
D'un autre côté, on sait grâce au théorème précédent qu'il existe toujours un système PWSC aussi proche que l'on souhaite du système d'impact en question. Soit donc $\hat{B}(\epsilon)$ la quantité désignée dans le théorème précédent. On a alors

$$\begin{aligned} \hat{B}(\epsilon) &= T \left(\begin{array}{c} \frac{2\gamma}{\epsilon} \\ -\frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} & CAB \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{2\gamma}{\epsilon} \\ -\frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \end{array} \right) \\ &= \frac{2\gamma}{\epsilon} \frac{A^{-1}B}{CA^{-1}B} - \frac{1+\gamma^2}{\epsilon^2} \frac{B}{CAB} \end{aligned}$$

Et lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ on trouve

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \hat{B}(\epsilon) = -\frac{1+\gamma^2}{CAB} B$$

Et comme $-\frac{1+\gamma^2}{CAB} < 0$ alors quand $\epsilon \rightarrow 0$ le vecteur $\hat{B}(\epsilon)$ sera d'une norme infinie et parallèle à B mais pointant vers la direction opposée. Donc pour les points de la région D_2 ($\tilde{H}(x, \mu) < 0$) c'est la partie $\hat{B}(\epsilon)\tilde{H}(x, \mu)$ qui sera prépondérante dans l'expression $\tilde{F}_2(x, \mu) = \tilde{F}(x, \mu) + \hat{B}(\epsilon)\tilde{H}(x, \mu)$. On pourra alors prendre $\tilde{F}_2(x, \mu) = \hat{B}(\epsilon)\tilde{H}(x, \mu)$ mais comme $\tilde{H}(x, \mu) < 0$ le mouvement dans D_2 au voisinage de (x, μ) sera presque parallèle à $\hat{B}(\epsilon)$ mais dans la direction opposée. En plus, on



sait que, par construction, le mouvement dans D_2 doit se terminer sur Σ . Ce qui revient à dire que dans D_2 les points du voisinage de (x, μ) se déplaceront presque parallèlement à B et dans la même direction pour se rabattre sur Σ . (voir figure ci-dessous)

On affirme alors que les points du voisinage du pseudo-point d'équilibre (x, μ) en dehors de l'ensemble de glissement se déplacent autour de ce point d'une manière oscillatoire en effectuant des impacts répétés. En plus, des relations $\lim_{z \rightarrow x} R(z, \mu) = x$ et $F(x, \mu) \neq 0$ on déduit qu'il y aura de moins en moins de temps entre les impacts au fur et à mesure qu'on s'approche de (x, μ) .

En remarquant que $F(z, \mu) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow x$, alors on peut voir ceci comme l'effet résultant d'avoir une paire de valeurs propres complexes ayant de très grandes parties imaginaires et par suite on pourrait penser que le pseudo-point d'équilibre possède une paire de pseudo-valeurs propres complexes avec de très grandes parties imaginaires. Etant complexes, ces pseudo-valeurs propres ne peuvent pas contribuer à la valeur du nombre σ_2^- . Mais puisque par (4.4) on sait que la quantité CAB est positive, alors on trouve que le produit $\det(A_s)(CAB)$ est aussi positif, respectivement négatif, si le nombre σ_2^- est pair, respectivement impair. Et encore une fois on trouve que la Proposition 1. a lieu aussi pour les systèmes d'impact.

Etudiant plus profondément la dynamique aux voisinage d'un pseudo point d'équilibre que l'on va désormais noter (\hat{x}, μ) pour des raison de calcul, alors pour ces points on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(x, \mu) &= A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*) \\
 \tilde{H}(x, \mu) &= C(x - x^*) + N(\mu - \mu^*) \\
 \tilde{G}(x, \mu) &= B \\
 \tilde{R}(x, \mu) &= x - BC\tilde{F}(x, \mu) \\
 \tilde{v}(x, \mu) &= C\tilde{F}(x, \mu) = C(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*)) \\
 \tilde{a}(x, \mu) &= CA\tilde{F}(x, \mu) = CA(A(x - x^*) + M(\mu - \mu^*)) \\
 r &= \tilde{v}_x \tilde{G}(x, \mu) - 1 = CAB - 1 \\
 \tilde{\lambda} &= -\frac{\tilde{a}(x, \mu)}{CAB} = -\frac{CA\tilde{F}(x, \mu)}{CAB}
 \end{aligned}$$

Au pseudo-point d'équilibre (\hat{x}, μ) on a

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\hat{x}, \mu) + \tilde{\lambda} \tilde{G}(\hat{x}, \mu) &= 0 \\
\tilde{F}(\hat{x}, \mu) - \frac{CA\tilde{F}(x, \mu)}{CAB} B &= 0 \\
\tilde{F}(\hat{x}, \mu) &= \frac{BCA}{CAB} \tilde{F}(x, \mu) \neq 0
\end{aligned}$$

D'un autre côté on a pour les points du voisinage de (\hat{x}, μ) dans D_1

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(x, \mu) &= \tilde{F}(\hat{x}, \mu) + \tilde{F}_x(x - \hat{x}) \\
x' &= \tilde{F}(x, \mu) = \tilde{F}(\hat{x}, \mu) + A(x - \hat{x})
\end{aligned}$$

Puisque tous les points du voisinage de (\hat{x}, μ) dans D_2 seront rabattus sur Σ suivant le vecteur B dans la même direction, on peut sans perte de généralité choisir comme condition initiale un point $x(0) = x_0 \in \Sigma$ avec $\tilde{v}(x_0, \mu) > 0$, ainsi le point démarre directement sa trajectoire dans D_1 . Alors la solution de l'équation différentielle précédente sera

$$x(t, \mu) = e^{At} \left(x_0 - \hat{x} + A^{-1} \tilde{F}(\hat{x}, \mu) \right) + \hat{x} - A^{-1} \tilde{F}(\hat{x}, \mu)$$

En développant cette expression au deuxième ordre en t on obtient

$$\begin{aligned}
x(t, \mu) &= \left(1 + At + \frac{A^2 t^2}{2} \right) \left(x_0 - \hat{x} + A^{-1} \tilde{F}(\hat{x}, \mu) \right) + \hat{x} - A^{-1} \tilde{F}(\hat{x}, \mu) \\
&= \hat{x} - A^{-1} \tilde{F}(\hat{x}, \mu) + x_0 - \hat{x} + A^{-1} \tilde{F}(\hat{x}, \mu) + At(x_0 - \hat{x}) + \\
&\quad \tilde{F}(\hat{x}, \mu)t + \frac{A^2 t^2}{2} (x_0 - \hat{x}) + \frac{A\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}{2} t^2 \\
&= x_0 + \left(A(x_0 - \hat{x}) + \tilde{F}(\hat{x}, \mu) \right) t + \left(\frac{A^2}{2} (x_0 - \hat{x}) + \frac{A\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}{2} \right) t^2
\end{aligned}$$

Si l'on veut calculer le temps pour lequel $x(t, \mu)$ atteint Σ on obtient grâce à l'équation $\tilde{H}(x(t, \mu), \mu) = 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(x(t, \mu), \mu) &= C \left(x_0 + \left(A(x_0 - \hat{x}) + \tilde{F}(\hat{x}, \mu) \right) t + \left(\frac{A^2}{2} (x_0 - \hat{x}) + \frac{A\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}{2} \right) t^2 - x^* \right) + \\
&\quad N(\mu - \mu^*) \\
&= \left(CA(x_0 - \hat{x}) + C\tilde{F}(\hat{x}, \mu) \right) t + \left(\frac{CA^2}{2} (x_0 - \hat{x}) + \frac{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}{2} \right) t^2 + \\
&\quad C(x_0 - x^*) + N(\mu - \mu^*) \\
&= CA(x_0 - \hat{x})t + \left(\frac{CA^2}{2} (x_0 - \hat{x}) + \frac{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}{2} \right) t^2 \\
&= \left(CA(x_0 - \hat{x}) + \left(\frac{CA^2}{2} (x_0 - \hat{x}) + \frac{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}{2} \right) t \right) t
\end{aligned}$$

On a donc deux solutions

$$t_0 = 0$$

Et

$$t_1 = \frac{-2CA(x_0 - \hat{x})}{CA^2(x_0 - \hat{x}) + CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}$$

Puisque qu'on se limite à un voisinage de \hat{x} le vecteur $x_0 - \hat{x}$ peut être rendu arbitrairement petit donc on peut prendre pour t_1 :

$$t_1 = -\frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}$$

Vérifions que $t_1 > 0$. Sachant que (\hat{x}, μ) est un pseudo-point d'équilibre alors $\tilde{v}(\hat{x}, \mu) = C\tilde{F}(\hat{x}, \mu) = 0$. Alors pour t_1 on aura

$$\begin{aligned} t_1 &= -2\frac{CA(x_0 - \hat{x}) + C\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \\ &= -2\frac{CA(x_0 - \hat{x}) + C(A(\hat{x} - x^*) + M(\mu - \mu^*))}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \\ &= -2\frac{C(A(\hat{x} - x^*) + A(x_0 - \hat{x}) + M(\mu - \mu^*))}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \\ &= -2\frac{C(A(x_0 - x^*) + M(\mu - \mu^*))}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \\ &= -2\frac{C\tilde{F}(x_0, \mu)}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \\ &= -2\frac{v(x_0, \mu)}{a(\hat{x}, \mu)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

En remplaçant t_1 dans l'expression de $x(t, \mu)$ on trouve on se limitant au premier ordre en t .

$$\begin{aligned} x(t_1, \mu) &= x_0 + \left(A(x_0 - \hat{x}) + \tilde{F}(\hat{x}, \mu)\right) t_1 \\ &= x_0 - \left(A(x_0 - \hat{x}) + \tilde{F}(\hat{x}, \mu)\right) \frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \\ &= x_0 - A(x_0 - \hat{x}) \frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} - \tilde{F}(\hat{x}, \mu) \frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \end{aligned}$$

Et en se limitant au premier ordre en $(x_0 - \hat{x})$ on trouve

$$x(t_1, \mu) = x_0 - \frac{2\tilde{F}(\hat{x}, \mu)CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)}$$

Et comme $\tilde{F}(\hat{x}, \mu)$ est parallèle à B on trouve

$$x(t_1, \mu) = x_0 - \frac{2BCA(x_0 - \hat{x})}{CAB}$$

Désignons par x_1, x_2 les points $x(t_1, \mu), R(x(t_1, \mu), \mu)$ de Σ respectivement. Alors x_2 est l'image de x_1 par la loi d'impact \tilde{R} . Et par suite

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - BC\tilde{F}(x_1, \mu) \\ &= x_1 - BC\left(\tilde{F}(\hat{x}, \mu) + A(x_1 - \hat{x})\right) \\ &= x_1 - \frac{B(C\tilde{F}(\hat{x}, \mu))}{CAB} + BCA(x_1 - \hat{x}) \\ &= x_1 - BCA(x_1 - \hat{x}) \end{aligned}$$

Par itération on construit ainsi la suite de points $(x_n)_{n \geq 0}$ de Σ telle que

$$\begin{aligned} x_0 &\in \Sigma \quad \text{et} \quad \tilde{v}(x_0, \mu) > 0 \\ x_{2n} &= \tilde{R}(x_{2n-1}, \mu) = x_{2n-1} - BCA(x_{2n-1} - \hat{x}) \quad (n \geq 1) \\ x_{2n+1} &= x_{2n} - 2\frac{BCA}{CAB}(x_{2n} - \hat{x}) \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} x_{2n} - \hat{x} &= (Id - BCA)(x_{2n-1} - \hat{x}) \quad (n \geq 1) \\ x_{2n+1} - \hat{x} &= \left(Id - 2\frac{BCA}{CAB}\right)(x_{2n} - \hat{x}) \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

En remarquant que les matrices $(Id - BCA)$ et $\left(Id - 2\frac{BCA}{CAB}\right)$ commutent en trouve

$$\begin{aligned} x_{2n} - \hat{x} &= (Id - BCA)^n \left(Id - 2\frac{BCA}{CAB}\right)^n (x_0 - \hat{x}) \quad (n \geq 1) \\ x_{2n+1} - \hat{x} &= (Id - BCA)^n \left(Id - 2\frac{BCA}{CAB}\right)^{n+1} (x_0 - \hat{x}) \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

D'un autre côté on a

$$\begin{aligned} (Id - BCA) \left(Id - 2\frac{BCA}{CAB}\right) &= Id - BCA - 2\frac{BCA}{CAB} + 2\frac{B(CAB)CA}{CAB} \\ &= Id - BCA - 2\frac{BCA}{CAB} + 2BCA \\ &= Id + BCA \left(1 - \frac{2}{CAB}\right) \\ &= Id + \frac{BCA(CAB - 2)}{CAB} \end{aligned}$$

On a aussi BCA qui vérifie

$$\begin{aligned}
(BCA)^i &= \overbrace{BCA \cdot BCA \cdot BCA \cdots BCA}^{i \text{ fois}} \\
&= B \underbrace{(CAB)(CAB) \cdots (CAB)}_{i-1 \text{ fois}} CA \\
&= B(CAB)^{i-1} CA \\
&= (CAB)^{i-1} BCA
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(Id - BCA)^n \left(Id - 2 \frac{BCA}{CAB} \right)^n &= \left(Id + \frac{BCA(CAB - 2)}{CAB} \right)^n \\
&= \sum_0^n C_n^i \left(\frac{BCA(CAB - 2)}{CAB} \right)^i \\
&= \sum_0^n C_n^i (CAB - 2)^i \left(\frac{BCA}{CAB} \right)^i \\
&= \sum_0^n C_n^i (CAB - 2)^i \frac{(BCA)^i}{(CAB)^i} \\
&= \sum_0^n C_n^i (CAB - 2)^i \frac{BCA (CAB)^{i-1}}{(CAB)^i} \\
&= \sum_0^n C_n^i (CAB - 2)^i \frac{BCA (CAB)^{i-1}}{(CAB)^i} \\
&= \frac{BCA}{CAB} \sum_0^n C_n^i (CAB - 2)^i \\
&= \frac{BCA}{CAB} (1 + CAB - 2)^n \\
&= \frac{BCA}{CAB} (CAB - 1)^n \\
&= r^n \frac{BCA}{CAB}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
(Id - BCA)^n \left(Id - 2 \frac{BCA}{CAB} \right)^{n+1} &= r^n \frac{BCA}{CAB} \left(Id - 2 \frac{BCA}{CAB} \right) \\
&= r^n \left(\frac{BCA}{CAB} - 2 \frac{B(CAB)CA}{(CAB)^2} \right) \\
&= r^n \left(\frac{BCA}{CAB} - 2 \frac{BCA}{CAB} \right) \\
&= -r^n \frac{BCA}{CAB}
\end{aligned}$$

En combinant les deux formules on trouve

$$x_n = \hat{x} + (-1)^n r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} B \frac{CA(x_0 - \hat{x})}{CAB} \quad (n \geq 1)$$

Où $[n]$ désigne la partie entière de n .

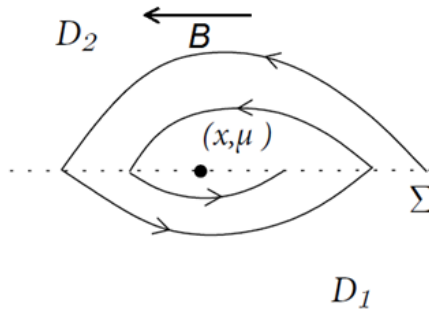
Alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers \hat{x} si $0 \leq r < 1$ et quitte tout voisinage borné de \hat{x} si $r > 1$ car x_n tend à avoir une norme infiniment grande.

Le mouvement de x_{2n-1} à x_{2n} est instantané alors que le mouvement de x_{2n} à x_{2n+1} prend le temps t_{n+1} donné par

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= -\frac{2CA(x_{2n} - \hat{x})}{CAF(\hat{x}, \mu)} \\ &= -r^n \frac{2CA}{CAF(\hat{x}, \mu)} B \frac{CA(x_0 - \hat{x})}{CAB} \\ &= -r^n \frac{2CAB}{CAF(\hat{x}, \mu)} \frac{CA(x_0 - \hat{x})}{CAB} \\ &= -2r^n \frac{CA(x_0 - \hat{x})}{CAF(\hat{x}, \mu)} \\ &= -2r^n \frac{v(x_0, \mu)}{a(\hat{x}, \mu)} \\ &= r^n t_1 \end{aligned}$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ converge si $0 \leq r < 1$.

On peut conclure ainsi que si le coefficient de restitution r est tel que $0 \leq r < 1$, alors le pseudo-point d'équilibre est localement attractif car les points du voisinage convergent vers le pseudo-point d'équilibre en un temps fini effectuant un nombre infini d'impacts. (Voir figure ci-dessous)



Si $r > 1$ le premier entier n' pour lequel la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ quitte un voisinage borné donné de \hat{x} peut être rendu infiniment grand en rendant b infiniment petit, c'est-à-dire en prenant x_0 très proche de \hat{x} . Si on se place dans la boule ouverte $B(\hat{x}, \delta)$, $\delta > 0$, alors $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta$ et pour tout $n \geq 1$ on trouve

$$\begin{aligned}
\|x_n - \hat{x}\| &\geq \delta \iff \frac{r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{CAB} \|BCA(x_0 - \hat{x})\| \geq \delta \\
&\iff r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{\delta CAB}{\|BCA(x_0 - \hat{x})\|} \\
&\iff r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{\delta CAB}{\|B\| CA(x_0 - \hat{x})} \\
&\iff \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{\log\left(\frac{\delta CAB}{\|B\| CA(x_0 - \hat{x})}\right)}{\log(r)} \\
&\iff \frac{n}{2} \geq - \left\lceil -\frac{\log\left(\frac{\delta CAB}{\|B\| CA(x_0 - \hat{x})}\right)}{\log(r)} \right\rceil \\
&\iff n \geq -2 \left\lceil -\frac{\log\left(\frac{\delta CAB}{\|B\| CA(x_0 - \hat{x})}\right)}{\log(r)} \right\rceil
\end{aligned}$$

Par suite, on peut donc prendre pour n' le nombre

$$n' = \max \left\{ 1, -2 \left\lceil -\frac{\log\left(\frac{\delta CAB}{\|B\| CA(x_0 - \hat{x})}\right)}{\log(r)} \right\rceil \right\}$$

On remarque très bien que $\lim_{x_0 \rightarrow \hat{x}} n' = +\infty$

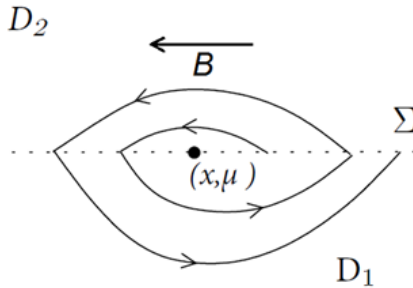
Le point atteint la coordonnée $x_{n'}$ soit au temps t_1 si $n' = 1$ soit au temps $t_1 + \dots + t_{\frac{n'}{2}}$ si n' est pair. Dans le deuxième cas on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\frac{n'}{2}} t_n &= \sum_{n=1}^{\frac{n'}{2}} r^n t_1 \\
&= t_1 \frac{r^{\frac{n'}{2}+1} - r}{r - 1} \\
&= \frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} r \frac{- \left[- \frac{\log\left(\frac{\delta CAB}{\|B\|CA(x_0 - \hat{x})}\right)}{\log(r)} \right] + 1}{r - 1} - r \\
&\leq \frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} r \frac{\frac{\log\left(\frac{\delta CAB}{\|B\|CA(x_0 - \hat{x})}\right)}{\log(r)} + 2 - r}{r - 1} \\
&\leq \frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \frac{e^{\log(r) \frac{\log\left(\frac{\delta CAB}{\|B\|CA(x_0 - \hat{x})}\right)}{\log(r)} + 2} - r}{r - 1} \\
&\leq \frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \frac{r^2 \frac{\delta CAB}{\|B\|CA(x_0 - \hat{x})} - r}{r - 1} \\
&\leq \frac{\delta CAB r^2}{(r - 1) \|B\| CA(x_0 - \hat{x})} \frac{2CA(x_0 - \hat{x})}{CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} \\
&\leq \frac{2\delta CAB r^2}{(r - 1) \|B\| CA\tilde{F}(\hat{x}, \mu)} < \infty
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{x_0 \rightarrow \hat{x}} \sum_{n=1}^{\frac{n'}{2}} t_n < \infty$$

Il en résulte que si $r > 1$ alors le pseudo-point d'équilibre sera localement répulsif et il y aura la possibilité pour le pseudo-point d'équilibre de se mouvoir en effectuant un nombre infini d'impacts en un temps fini. (Voir figure ci-dessous)



EXEMPLE 13. Soit le système d'impact suivant

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -g \end{pmatrix} \quad (g > 0) \\ H(x, y) = x \\ R(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -2y \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ce système représente une bille qui rebondit verticalement sur une surface avec un coefficient de restitution $r = 2 > 1$.

Le point $(0, 0)$ est un pseudo-point d'équilibre et comme la bille atteint toujours la surface Σ alors on peut prendre une condition initiale du type $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ avec $y_0 > 0$.

Les solutions s'écrivent alors

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{2} \left(t - (2^{n+1} - 2) \frac{y_0}{g} \right) \left(t - (2^{n+2} - 2) \frac{y_0}{g} \right) \\ -gt + (3 \cdot 2^n - 2) y_0 \end{pmatrix}$$

$$(2^{n+1} - 2) \frac{y_0}{g} \leq t \leq (2^{n+2} - 2) \frac{y_0}{g}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

On remarque que le mouvement de la bille a commencé à partir de l'instant :

$$t_i = \lim_{n \rightarrow -\infty} (2^{n+1} - 2) \frac{y_0}{g} = -\frac{2y_0}{g}$$

Et aussi à partir de la position

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} -\frac{g}{2} \left(t_i - (2^{n+1} - 2) \frac{y_0}{g} \right) \left(t_i - (2^{n+2} - 2) \frac{y_0}{g} \right) \\ -gt_i + (3 \cdot 2^n - 2) y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(-\frac{g}{2} \left(t_i - (2^{n+1} - 2) \frac{y_0}{g} \right) \left(t_i - (2^{n+2} - 2) \frac{y_0}{g} \right) \right) \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} (-gt_i + (3 \cdot 2^n - 2) y_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(-\frac{g}{2} \left(t_i + 2 \frac{y_0}{g} \right) \left(t_i + 2 \frac{y_0}{g} \right) \right) \\ -gt_i - 2y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à dire que le pseudo-point d'équilibre a quitté sa position à l'instant $t_i = -\frac{2y_0}{g}$. En dernier lieu, on note que Le temps t_i est aléatoire à cause de sa dépendance en y_0 .

REMARQUE 6. Le cas $r = 1$ n' a pas été étudié à cause de l' expression $-\frac{2\delta CABr^2}{(r-1)\|B\|CAF(\hat{x}, \mu)}$ qui ramène à l'écriture $\leq \infty$ qui ne rapporte aucune information utile.

Bibliographie

- [1] M. Akhmet, Principles Of Discontinuous Dynamical Systems, Springer, New York, 2010.
- [2] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, Introduction To Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [3] M. Di Bernardo C.J. Budd A.R. Champneys, P. Kowalczyk, Piecewise-Smooth Dynamical Systems Theory And Applications, Springer, 2008.
- [4] M. Di Bernardo, A. Nordmark, G. Olivar, Discontinuity-induced bifurcations of equilibria in piecewise-smooth and impacting dynamical systems, *Physica D* 237, 2008, 119–136.
- [5] A. F. Filippov, Differential Equations With Discontinuous Righthand Sides, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [6] P. Hartman, Ordinary Differential Equations Second Edition, Birkhauser, 1982.
- [7] Yu. A. Kuznetsov, S. Rinaldi, A. Gragnani, One-Parameter Bifurcations In Planar Filippov Systems, *International Journal Of Bifurcation And Chaos*, 13(8)2157, 2003.
- [8] E. Mosekilde, Z. T. Zhusubaliyev, Bifurcations And Chaos In Piecewise-Smooth Dynamical Systems, World Scientific, 2003.
- [9] J. R. Munkres, Topology Second Edition, Prentice, 2000.
- [10] D. J. W. Simpson, Bifurcations In Piecewise-Smooth Continuous Systems, World Scientific, 2010.

Abstract

A rich variety of dynamic scenarios can occur when a fixed point of a non-smooth application undergo a border collision. This work concerns a class closely related to discontinuity induced bifurcation, involving equilibrium points of an n-dimensional piecewise smooth flow. Specifically, the transitions considered are those that occurring when a border equilibrium point belonging to the transition manifold is disturbed. It has been proven that those equilibrium points can either persist under certain parameter variations or create different bifurcation scenarios. The conditions for the simplest possible scenarios are given for piecewise smooth continuous, Filippov systems and impact systems.

Keywords

Piecewise Smooth Systems; Bifurcations; discontinuity induced Bifurcations.

Résumé

Une riche variété de scénarios dynamiques peut se produire quand un point fixe d'une application non-régulière subisse une collision de frontière. Ce travail concerne une classe étroitement lié à la bifurcation discontinûment induite, impliquant des points d'équilibre d'un flot n-dimensionnel régulier par morceau. Plus précisément, les transitions étudiées sont celles qui se produisent lorsqu'un point d'équilibre de bord i.e appartenant à la variété de transition, est perturbée. Il a été prouvé que ces points d'équilibre peuvent soit persister sous certaines variations de paramètres ou bien donner lieu à différents scénarios de bifurcation. Les conditions à répertoirer pour les scénarios possibles les plus simples sont donnés pour les systèmes continus réguliers par morceaux, systèmes de Filippov et systèmes impact.

Mots-clés

Systèmes Réguliers Par Morceaux; Bifurcations; Bifurcations Discontinûment Induite.

ملخص

سيناريوهات ديناميكية غنية و متنوعة يمكن أن تحدث عندما تخضع نقطة ثابتة تنتمي لتطبيق غير سلس لاصطدام حدودي. هذا العمل يتعلق بنمط مرتبط ارتباطا وثيقا بالانقطاع بالتشعب الناجم عن الاستمرارية، و الذي تستلزم نقاط توازن مجرى نوني الأبعاد مستمر على أقسام. على وجه التحديد، التحولات المعنية بالدراسة هي تلك التي تحدث عندما نزعج نقطة توازن حدودية أي تابعة للتشكيلة الانتقالية. وقد ثبت أن نقاط التوازن هذه يمكن إما تستمر في ظل تغير العامل أو أن تعطي سيناريوهات تشعب مختلفة. شروط أبسط السيناريوهات المحتملة مقدمة بخصوص الأنظمة المستمرة السلسة على أقسام ، أنظمة فيليبوف، وأنظمة التصادم.

الكلمات المفتاحية

الأنظمة المستمرة السلسة على أقسام. التشعبات. التشعبات الناجمة عن الاستمرارية.