



Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem with sign changing nonlinearities

N. Daoudi-Merzagui^a, Y. Tabet^b

^aDepartment of Mathematics, E.P.S.T of Tlemcen, 13000 Tlemcen, Algeria
^bDepartment of Mathematics, University of Tlemcen, 13000 Tlemcen, Algeria

Abstract. In this paper, we study the existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem where the nonlinear term f is allowed to change sign. We obtain at least two positive solutions by using a fixed point theorem in double cones.

1. Introduction

The study of multi-point boundary value problems (BVPs for short) for nonlinear second-order ordinary differential equations was initiated by Il'in and Moviseev [8, 9]. Gupta studied certain three-point BVPs [7], and several authors studied nonlinear second order BVPs with integral boundary conditions, see for example [11, 12] and the references therein. We quote also the research of A. Ashyralyev [1, 2] where nonlocal BVPs are considered for parabolic and elliptic differential and difference equations. The fixed point theorem of Krasnoselskii is one of the methods used in these studies. Karakostas in [11], by applying the Krasnoselskii fixed point theorem on a suitable cone, proved the existence of multiple positive solutions for a nonlocal BVPs of the form

$$u''(t) + q(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(r)dg(r),$$

where $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, with $f(x) \geq 0$ when $x \geq 0$.

By using the fixed point theorem in double cones, Guo in [6] showed the existence of positive solutions for second-order three point BVP where the nonlinearity is allowed to change sign. And by a theorem similar to the one in [6], Xu [4] considered a nonlinear second-order m -point BVP where the nonlinear term is allowed to change sign.

In [10], Liu studied the existence of positive solutions for BVPs with integral boundary conditions and sign changing nonlinearities of the form:

$$(\varphi_p u')' + f(t, u) = 0 \quad 0 < t < 1,$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 34B18; Secondary 34B15.

Keywords. Nonlocal boundary value problem; positive solution; fixed point theorem in double cones.

Received: 01 December 2012; Accepted: 31 March 2013

Communicated by Eberhard Malkowsky

Email addresses: nmerzagui@yahoo.fr (N. Daoudi-Merzagui), tab_dayas@yahoo.fr (Y. Tabet)

$$au(0) - bu'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i), \quad u(1) = \int_0^1 g(s)u(s)ds.$$

In this paper we are concerned with existence results for BVP associated to nonautonomous second order differential equations when the non linearities are sign changing and with integral boundary conditions. In particular using the fixed point theorem in double cones, we study the following problem

$$u''(t) + q(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

$$u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(r)dg(r), \tag{3}$$

where q and f verify the assumptions:

(H1) $0 < \alpha < \beta < 1$ and $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ is an increasing function, left continuous at $t = \beta$, right continuous at $t = \alpha$, and such that $\beta(g(\beta) - g(\alpha)) < 1$.

It is clear that without loss of generality we can assume that $g(\alpha) = 0$.

(H2) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and $f(0) \geq (\neq 0)$.

(H3) $q : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ is continuous and not identically zero on $[\beta, 1]$.

We start by recalling the fixed point theorem in double cones.

For a cone K in a Banach space $(X, \|\cdot\|)$ and a constant $r > 0$. Let $\theta : K \rightarrow \mathbb{R}^+$ a continuous functional such that $\theta(\lambda x) \leq \theta(x)$ for $\lambda \in (0, 1)$. For positive constants a, b we define the following sets:

$$K_r = \{x \in K : \|x\| < r\},$$

$$\partial K_r = \{x \in K : \|x\| = r\},$$

$$K(b) = \{x \in K : \theta(x) < b\},$$

$$\partial K(b) = \{x \in K : \theta(x) = b\},$$

and

$$K_a(b) = \{x \in K : a < \|x\|, \theta(x) < b\}.$$

Theorem 1.1. *Let X be a real Banach space with norm $\|\cdot\|$ and $K, K' \subset X$ two solid cones with $K' \subset K$. Suppose $T : K \rightarrow K$ and $T^* : K' \rightarrow K'$ are two completely continuous operators and $\theta : K' \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a continuous functional satisfying $\theta(x) \leq \|x\| \leq M\theta(x)$ for all $x \in K'$, where $M \geq 1$ is a constant. If there exist constants $b > a > 0$ such that*

$$(C1) \quad \|Tx\| < a \text{ for } x \in \partial K_a;$$

$$(C2) \quad \|T^*x\| < a \text{ for } x \in \partial K'_a \text{ and } \theta(T^*x) > b \text{ for } x \in \partial K'(b);$$

$$(C3) \quad Tx = T^*x, \text{ for } x \in K'_a(b) \cap \{u : T^*u = u\}.$$

Then T has at least two fixed points y_1 and y_2 in K , such that

$$0 \leq \|y_1\| < a < \|y_2\|, \quad \theta(y_2) < b.$$

The paper is organized as follows: Section 2 contains the basic preliminaries. The main result are given in Section 3.

2. Preliminaries

We present some lemmas that are important to prove our main results. Denote by I the interval $[0, 1]$, and by X the space of all continuous functions $C(I)$. Let $X_0 = \{x \in X : x(0) = 0\}$. The spaces X and X_0 become Banach spaces when they are furnished with the usual sup-norm $\|\cdot\|$.

Lemma 2.1. *If $u \in X_0$ is a concave function satisfying condition (3) and g is a function satisfying (H1), then we have*

- (i) $u(t) \geq 0, t \in [0, 1]$,
- (ii) $u(t) \geq \mu\|u\|, t \in [\alpha, 1]$,

where

$$\mu := \min \{ \gamma, 1 - \beta, (\beta - \alpha)\gamma g(\beta) \},$$

and

$$\gamma := \min \left\{ \alpha, 1 - \beta, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \right\}.$$

(Notice that $0 < \mu < 1$).

Proof. We prove the lemma in three steps:

1. If $u(1) \geq 0$, then, by the concavity of u and the fact that $u(0) = 0$, we have

$$u(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1].$$

Assume that $u(1) < 0$. From (3), (H1) and the mean value theorem, it follows that there is $\xi_u \in [\alpha, \beta]$ such that $u(1) = u(\xi_u)g(\beta)$ (notice that $g(\alpha) = 0$).

Moreover, since $g(\beta) > 0$ and $u(1) < 0$, we have $u(\xi_u) < 0$. This and $\beta g(\beta) < 1$ lead to

$$u(1) = g(\beta)u(\xi_u) > \frac{1}{\beta}u(\xi_u) \geq \frac{1}{\xi_u}u(\xi_u),$$

which contradicts the concavity of u .

2. Now, we shall prove that, if u is a concave function in X_0 , then

$$u(t) \geq \gamma\|u\|, \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Indeed let $t_0 \in [0, 1]$ be such that $\|u\| = u(t_0)$. We distinguish three cases:

- Case(1): $\beta \leq t_0$.

Then $s \leq t_0$, for every $s \in [\alpha, \beta]$, and, since u is a concave function, we have $su(t_0) \leq t_0u(s)$. Thus, $\alpha\|u\| \leq u(s)$, and hence

$$u(s) \geq \gamma\|u\|.$$

- Case(2): $\alpha \leq t_0 \leq \beta$.

If $s \in [\alpha, t_0]$, then following the same arguments as in case(1), we obtain

$$u(s) \geq \gamma\|u\|.$$

Let $s \in (t_0, \beta]$. Then we observe that

$$\frac{1 - s}{1 - t_0} \leq \frac{u(s) - u(1)}{u(t_0) - u(1)},$$

because of the concavity of the function u . Thus we have

$$(1 - s)u(t_0) \leq (1 - t_0)u(s) + (t_0 - s)u(1) \leq (1 - t_0)u(s).$$

This implies that

$$(1 - \beta)u(t_0) \leq (1 - \alpha)u(s),$$

hence,

$$\frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \|u\| \leq u(s),$$

and finally,

$$u(s) \geq \gamma \|u\|.$$

- Case(3): $t_0 < \alpha$.

Then $t_0 < s$ for every $s \in [\alpha, \beta]$, and following the same arguments as in case(2), we obtain

$$(1 - s)u(t_0) \leq (1 - t_0)u(s),$$

which implies that

$$(1 - \beta)\|u\| \leq u(s),$$

and so,

$$u(s) \geq \gamma \|u\|.$$

3. In order to show that

$$u(s) \geq \mu \|u\|, \quad s \in [\alpha, 1],$$

we distinguish two cases, $u(\beta) < u(1)$ and $u(1) \leq u(\beta)$.

-If $u(\beta) < u(1)$, then by the concavity, for every $s \geq \beta$, we have $u(\beta) \leq u(s)$.

Therefore, by the above first part of the proof of Lemma 2.1 for all $s \in [\alpha, 1]$, we have

$$u(s) \geq \min \{ \min \{ u(s) : s \in [\alpha, \beta] \}, \min \{ u(s) : s \in [\beta, 1] \} \},$$

and so

$$u(s) \geq \min \{ \gamma \|u\|, u(\beta) \} = \gamma \|u\|.$$

-If $u(1) \leq u(\beta)$, then again, by the concavity, we have $u(s) \geq u(1)$, for every $s \in [\beta, 1]$. Therefore, from (3), for any such s we have

$$u(s) \geq \int_{\alpha}^{\beta} u(r) dg(r) \geq \gamma \|u\| (\beta - \alpha) g(\beta).$$

Hence in any case it holds $u(s) \geq \mu \|u\|$, $s \in [\alpha, 1]$ and the proof is complete. \square

Lemma 2.2. Let $\delta = 1 - \int_{\alpha}^{\beta} r dg(r) > 0$, if $y \in X$. Then the boundary-value problem

$$u''(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{4}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(r) dg(r), \tag{5}$$

has a unique solution

$$u(t) = \frac{t}{\delta} \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{t}{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r (r-s)y(s)ds dg(r) - \int_0^t (t-s)y(s)ds. \tag{6}$$

Proof. From (4), we have

$$u''(t) = -y(t).$$

For $t \in [0, 1)$, integration from 0 to t , gives

$$u'(t) = u'(0) - \int_0^t y(s)ds.$$

For $t \in [0, 1]$, integration from 0 to t , yields

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t \left(\int_0^r y(s)ds \right) dr,$$

i.e.,

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t (t-s)y(s)ds. \tag{7}$$

So,

$$u(1) = u'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

Integrating (7) from α to β , where $0 < \alpha < \beta < 1$ we have

$$\int_\alpha^\beta u(r)dg(r) = - \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r) + u'(0) \int_\alpha^\beta rdg(r).$$

From (5), we obtain

$$u'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds = u'(0) \int_\alpha^\beta rdg(r) - \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r).$$

Thus,

$$u'(0)(1 - \int_\alpha^\beta rdg(r)) = \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r),$$

and since $\delta = 1 - \int_\alpha^\beta rdg(r) > 0$,
then

$$u'(0) = \frac{1}{\delta} \left(\int_0^1 (1-s)y(s)ds - \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r) \right).$$

Therefore, (4)-(5) has a unique solution

$$u(t) = \frac{t}{\delta} \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{t}{\delta} \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r) - \int_0^t (t-s)y(s)ds.$$

□

Lemma 2.3. Suppose that $\delta = 1 - \int_\alpha^\beta rdg(r) > 0$. Then the BVP

$$-u''(t) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \int_\alpha^\beta u(r)dg(r),$$

has the following Green's function

$$G(t, s) = \frac{1}{\delta} \begin{cases} s \int_{\alpha}^{\beta} (t-r)dg(r) + s(1-t) & \text{if } 0 \leq s < t < r \leq \beta \text{ or } 0 \leq s < r < t \leq 1 \\ (t-s) \int_{\alpha}^{\beta} rdg(r) + s(1-t) & \text{if } \alpha \leq r \leq s \leq t \leq 1 \\ t \int_{\alpha}^{\beta} (s-r)dg(r) + t(1-s) & \text{if } 0 \leq t \leq s \leq r \leq \beta \\ (1-s)t & \text{if } \alpha \leq r \leq t \leq s \leq 1 \text{ or } 0 \leq t < r \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Proof. If $0 \leq t \leq r$, the unique solution (6) given by Lemma 2.2 can be given in the form

$$u(t) = \frac{1}{\delta} \left[\int_0^t \left(s \int_{\alpha}^{\beta} (t-r)dg(r) + s(1-t) \right) y(s)ds \right] + \frac{1}{\delta} \left[\int_t^r \left(t(1-s) + t \int_{\alpha}^{\beta} (s-r)dg(r) \right) y(s)ds + \int_r^1 t(1-s)y(s)ds \right].$$

If $r \leq t \leq 1$, the unique solution (6) can be expressed

$$u(t) = \frac{1}{\delta} \left[\int_0^r \left(s \int_{\alpha}^{\beta} (t-r)dg(r) + s(1-t) \right) y(s)ds \right] + \frac{1}{\delta} \left[\int_r^t \left((t-s) \int_{\alpha}^{\beta} rdg(r) + s(1-t) \right) y(s)ds + \int_t^1 t(1-s)y(s)ds \right].$$

Therefore, the unique solution of (4)-(5) can be expressed $u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds$. The proof is completed. \square

Consider

$$K = \{u \in X : u(t) \geq 0, t \in [0, 1]\},$$

and

$$K' = \{u \in X_0 : u \text{ is concave and (3) holds}\}.$$

Clearly, $K, K' \subset X$ are cones with $K' \subset K$. For all $u \in K$, define

$$\theta(u) = \min_{\alpha \leq t \leq 1} u(t).$$

Let $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$, we define the operators T, A and T^* by:

$T : K \rightarrow K, A : K \rightarrow X$ and $T^* : K' \rightarrow K'$, such that

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \left[\int_0^1 G(t, s)q(s)f(u(s))ds \right]^+, & \text{for all } t \in [0, 1], \\ Au(t) &= \int_0^1 G(t, s)q(s)f(u(s))ds, & \text{for all } t \in [0, 1], \\ T^*u(t) &= \int_0^1 G(t, s)q(s)f^+(u(s))ds, & \text{for all } t \in [0, 1], \end{aligned}$$

Remark 1. If $\psi : X \rightarrow K$ is a function such that $(\psi u)(t) = u(t)^+$, then $T = \psi \circ A$.

Lemma 2.4. $T^* : K' \rightarrow K'$ is completely continuous.

Proof. Let $u \in K'$, since $f^+(u(t)) \geq 0$ for all $t \in [0, 1]$, then

$$(T^*u)''(t) = -q(t)f^+(u(t)) \leq 0,$$

this implies that T^*u is concave function. It is clear that T^*u satisfies the boundary conditions (2), (3). Thus $T^* : K' \rightarrow K'$. By using the continuity of f and the definition of f^+ , we can have that T^* is completely continuous from Ascoli-Arzelà theorem. \square

Lemma 2.5. A function $u(t)$ is a solution of BVP (1)-(3) if and only if $u(t)$ is a fixed point of the operator A .

Lemma 2.6. *If $A : K \rightarrow X$ is completely continuous, then $T = \psi \circ A : K \rightarrow K$ is also completely continuous.*

Proof. The complete continuity of A implies that A is continuous and applies each bounded subset of K on a relatively compact set of X .

Given a function $h \in X$, for each $\varepsilon > 0$ there is $\sigma > 0$ such that

$$\|Ah - Ak\| < \varepsilon \text{ for } k \in X, \|h - k\| < \sigma.$$

Since

$$\begin{aligned} |(\psi Ah)(t) - (\psi Ak)(t)| &= |\max\{(Ah)(t), 0\} - \max\{(Ak)(t), 0\}| \\ &\leq |(Ah)(t) - (Ak)(t)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

we have

$$\|(\psi A)h - (\psi A)k\| < \varepsilon \text{ for } k \in X, \|h - k\| < \sigma,$$

and so ψA is continuous.

For any arbitrary bounded set $D \subset X$ and for all $\varepsilon > 0$, there are $y_i, i = 1, \dots, m$ such that

$$AD \subset \bigcup_{i=1}^m \beta(y_i, \varepsilon),$$

where $\beta(y_i, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - y_i\| < \varepsilon\}$.

Then, if we denote ψy by \bar{y} for all $\bar{y} \in (\psi \circ A)(D)$, there is a $y \in AD$ such that $\bar{y}(t) = \max\{y(t), 0\}$. We choose $y_i \in \{y_1, \dots, y_m\}$ such that

$$\max_{t \in [0,1]} |y(t) - y_i(t)| < \varepsilon.$$

Thus

$$\max_{t \in [0,1]} |\bar{y}(t) - \bar{y}_i(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |y(t) - y_i(t)| < \varepsilon,$$

which implies

$$\bar{y} \in B(\bar{y}_i, \varepsilon),$$

and therefore $(\psi \circ A)(D)$ is relatively compact. \square

By the continuity of f , we have $A : K \rightarrow X$ is completely continuous. $T : K \rightarrow K$ is completely continuous by using Lemma 2.6.

Lemma 2.7. *If u is a fixed point of the operator T , then u is also a fixed point of the operator A .*

Proof. Let u be a fixed point of the operator T . Obviously, if $Au(t) \geq 0$ for $t \in [0, 1]$, then u is a fixed point of the operator A . So, to prove the lemma, we show that if $Tu(t) = u(t)$, then $Au(t) \geq 0$ for $t \in [0, 1]$. Suppose on the contrary, that there is a $t_0 \in (0, 1)$ such that $Au(t_0) < 0 = u(0)$. Let (t_1, t_2) be the maximal interval which contains t_0 and such that $Au(t) < 0, t \in (t_1, t_2)$. It follows $[t_1, t_2] \neq [0, 1]$ by (H2).

If $t_2 < 1$, we have $u(t) = 0$ for $t \in [t_1, t_2]$, $Au(t) < 0$ for $t \in (t_1, t_2)$ and $Au(t_2) = 0$. Thus $(Au)'(t_2) = 0$. By (H2) we have $(Au)''(t) = -q(t)f(0) \leq 0$ for $t \in [t_1, t_2]$, so, $(Au)'(t) \geq 0$ for $t \in [t_1, t_2]$. We obtain $t_1 = 0$. Therefore, $Au(0) \leq Au(t_0) < 0$, we arrive at a contradiction.

If $t_1 > 0$, we have $u(t) = 0$ for $t \in [t_1, t_2]$, $Au(t) < 0$ for $t \in (t_1, t_2)$ and $(Au)(t_1) = 0$. Thus $(Au)'(t_1) \leq 0$. From (H2) we have $(Au)''(t) = -q(t)f(0) \leq 0$ for $t \in [t_1, t_2]$, so $t_2 = 1$. by the concavity of $Au(t)$ on $[t_1, 1]$ we have

$$\frac{|(Au)(s)|}{s-1} \leq \frac{|(Au)(1)|}{1-t_1}.$$

This implies that

$$|(Au)(s)| \leq \frac{s-1}{1-t_1} |(Au)(1)| < s|(Au)(1)|.$$

From the above inequalities, we obtain

$$\int_{\alpha}^{\beta} |Au(s)|dg(s) \leq \int_{\alpha}^{\beta} s|(Au)(1)|dg(s) < |(Au)(1)|,$$

which contradicts

$$|(Au)(1)| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} Au(s)dg(s) \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |Au(s)|dg(s).$$

Therefore u is a fixed point of operator A . \square

3. Main results

In this section, we show the existence of two positive solutions for BVP (1)-(3) by applying a fixed-point theorem in double cones.

By definition of G , the continuity of G , and the fact that $\delta = 1 - \int_{\alpha}^{\beta} rdg(r) > 0$, it is clear that for $s \in [0, 1]$:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} G(t, s) = \frac{1-s}{\delta}.$$

Theorem 3.1. *Suppose that conditions (H1),(H2), and (H3) hold. Assume that there exist positive numbers a, b , and d such that*

$$0 < \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} sdg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s)dg(s)} \right\} d < a < \mu b < b,$$

and that f satisfies the following assumptions:

(H4) $f(u) \geq 0$ for $u \in [d, b]$;

(H5) $\frac{M_a}{\delta} \int_0^1 (1-s)q(s)ds < a$, where

$$M_a = \sup_{\|u\|=a} |f(u)|.$$

(H6) $b(1 - \alpha g(\beta)) \leq m_b \alpha \int_{\beta}^1 (1-s)q(s)ds$, where

$$m_b = \inf \{f(u) : u \in [\mu b, b]\}.$$

Then, (1)-(3) has at least two positive solutions u_1 and u_2 such that

$$0 \leq \|u_1\| < a < \|u_2\|, \theta(u_2) < b.$$

Proof. For all $u \in \partial K_a$, from (H5) we have

$$\|Tu\| = \max_{t \in [0,1]} \left[\int_0^1 G(t, s)q(s)f(u(s))ds \right]^+$$

$$\|Tu\| \leq \max_{t \in [0,1]} \max \left\{ \int_0^1 G(t, s)q(s)f(u(s))ds, 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \|Tu\| &\leq M_a \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s)q(s)ds \\ &\leq \frac{M_a}{\delta} \int_0^1 (1-s)q(s)ds \\ &< a. \end{aligned}$$

So, (C1) of Theorem 1.1 is satisfied. for $u \in \partial K'_a$; i.e., $\|u\| = a$. from (H5) we have

$$\begin{aligned} \|T^*u\| &= \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(u(s))ds \\ &\leq M_a \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s)q(s)ds \\ &\leq \frac{M_a}{\delta} \int_0^1 (1-s)q(s)ds \\ &< a. \end{aligned}$$

Let $u \in \partial K'(\mu b)$; i.e., $u \in K'$ and $\theta(u) = \mu b$. For $t \in [\alpha, 1]$, we have

$$\mu b = \theta(u) = \min_{t \in [\alpha,1]} u(t) \geq \mu \|u\| \quad (\text{from Lemma 2.1}),$$

hence

$$\|u\| \leq b.$$

On the other hand

$$u(t) \geq \min_{t \in [\alpha,1]} u(t) = \theta(u) = \mu b,$$

so

$$\mu b \leq u(t) \leq \|u\| \leq b,$$

and therefore it holds

$$f(u(s)) \geq m_b, \quad \text{for } s \in [\beta, 1]. \tag{8}$$

Observe that the unique solution of the BVP

$$\begin{cases} x''(t) + q(t)f^+(u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \int_\alpha^\beta x(s)dg(s), \end{cases}$$

is the function $x(t)$ given by

$$\begin{aligned} x(t) &= T^*u(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(u(s))ds \\ &= \frac{t}{\delta} \int_0^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds - \frac{t}{\delta} \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)q(s)f^+(u(s))dsdg(r) \\ &\quad - \int_0^t (t-s)q(s)f^+(u(s))ds. \end{aligned}$$

Let

$$E(x) := \left\{ \xi \in [\alpha, \beta] : \int_\alpha^\beta x(s)dg(s) = x(\xi) \int_\alpha^\beta dg(s) = x(\xi)g(\beta) \right\}$$

be the set of all mean values of x , by the function g . Obviously $E(x)$ is a compact set. Consider the point

$$\xi_x := \min E(x).$$

It is clear that x solves the BVP

$$\begin{cases} y''(t) + q(t)f^+(u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = y(\xi_x)g(\beta), \end{cases}$$

and so, x is the function given by the closed formula

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{t}{\tau_x} \int_0^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds - \frac{t}{\tau_x}g(\beta) \int_0^{\xi_x} (\xi_x - s)q(s)f^+(u(s))ds \\ & - \int_0^t (t-s)q(s)f^+(u(s))ds, \end{aligned}$$

for $t \in [0, 1]$, where

$$\tau_x := 1 - \xi_x g(\beta) > 0.$$

Notice that $\alpha \leq \xi_x \leq \beta$ and, in view of (H1), $\xi_x > 0$. Then we have

$$\begin{aligned} (T^*u)(\xi_x) = x(\xi_x) &= \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds - \frac{\xi_x}{\tau_x}g(\beta) \int_0^{\xi_x} (\xi_x - s)q(s)f^+(u(s))ds \\ & - \int_0^{\xi_x} (\xi_x - s)q(s)f^+(u(s))ds, \\ &= \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds - \frac{1}{\tau_x} \int_0^{\xi_x} (\xi_x - s)q(s)f^+(u(s))ds, \\ &= \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^1 q(s)f^+(u(s))ds - \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^1 sq(s)f^+(u(s))ds \\ & - \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^{\xi_x} q(s)f^+(u(s))ds + \frac{1}{\tau_x} \int_0^{\xi_x} sq(s)f^+(u(s))ds, \\ &= \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_{\xi_x}^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds + \frac{1}{\tau_x}(1 - \xi_x) \int_0^{\xi_x} sq(s)f^+(u(s))ds. \end{aligned}$$

Taking into account (H6), and (8), we finally obtain that

$$\begin{aligned} (T^*u)(\xi_x) &\geq \frac{\alpha}{\tau_x} \int_{\beta}^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds \\ (T^*u)(\xi_x) &\geq \frac{\alpha m_b}{\tau_x} \int_{\beta}^1 (1-s)q(s)ds \\ &\geq \frac{1}{\tau_x}(1 - \alpha g(\beta))b \\ &\geq \frac{1}{\tau_x}(1 - \xi_x g(\beta))b \\ &\geq b, \end{aligned}$$

hence

$$\|T^*u\| \geq b.$$

On the other hand, from Lemma 2.1, we have

$$\theta(T^*u) = \min_{t \in [\alpha, 1]} T^*u(t) \geq \mu \|T^*u\|,$$

thus

$$\theta(T^*u) \geq \mu b.$$

So, (C2) of Theorem 1.1 is satisfied. Finally, we show that (C3) of Theorem 1.1 is also satisfied.

Let $u \in K'_a(\mu b) \cap \{u : T^*u = u\}$, then

$$\|u\| > a > \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} \right\} d.$$

From (ii) of Lemma 2.1 we have

$$u(\alpha) \geq \min_{t \in [\alpha, 1]} u(t) \geq \mu \|u\| > \mu \frac{1}{\mu} \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} \right\} d,$$

hence,

$$u(\alpha) > \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} \right\} d. \tag{9}$$

If $u(1) \geq d$, then, by the concavity of u and the fact that $u(0) = 0$, we have $u(t) \geq d, t \in [0, 1]$. Assume that $u(1) < d$. Since u is a concave function, thus for $s \in [\alpha, 1]$ we have

$$\frac{1}{1-s} \geq \frac{1-\alpha}{1-s} \geq \frac{u(\alpha) - u(1)}{u(s) - u(1)}.$$

This implies that

$$u(\alpha)(1-s) \leq u(s) - su(1).$$

So

$$u(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s) \leq \int_{\alpha}^{\beta} u(s) dg(s) - \int_{\alpha}^{\beta} su(1) dg(s).$$

By $u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(s) dg(s)$ we get

$$u(\alpha) \leq \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} u(1) < \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} d \leq \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} \right\} d,$$

which contradicts to (9). So, $u(1) \geq d$. Therefore, for $u \in K'_a(\mu b) \cap \{u : T^*u = u\}$ we have

$$d \leq u(t) \leq \|u\| \leq \mu b \leq b.$$

From (H4) we know that

$$f^+(u(s)) = f(u(s)).$$

This implies that

$$Tu = T^*u.$$

So, the conditions of Theorem (1.1) are satisfied. Then T has two fixed points u_1 and u_2 satisfying

$$0 \leq \|u_1\| < a < \|u_2\|, \theta(u_2) < b.$$

The proof is complete. \square

4. Conclusion

The condition of the positivity of f is not essential for the application of the generalisation of Krasnosel'skii's theorem. Indeed, we have established the existence and multiplicity of positive solutions in the case where the nonlinear term f is allowed to change sign.

We obtain the same result in the case where the nonlinearity is not autonomous, and without separated variables. So, we can consider $f(t, u)$ instead of $q(t)f(u)$, we obtain an existence and multiplicity results, if we replace the hypothesis (H2) and (H3) by:

(H2)' $f : [0, 1] \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ such that:

- (i) f is continuous on $[0, 1]$.
- (ii) $f(t, 0) \geq (\neq 0)$ for all t in $[0, 1]$.
- (iii) $f(\cdot, u) \neq 0$ on $[\beta, 1]$, for every $u \in]0, \infty[$.

Acknowledgement. The authors would like to thank Professors Eberhard Malkowsky and Assia Guezane-Lakoud for their helpful suggestions to the improvement of this paper.

References

- [1] A. Ashyralyev, E. Ozturk, On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-posedness, *Applied Mathematics and Computation* 219 (2012) 1093–1107.
- [2] A. Ashyralyev, O. Yildirim, On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations, *Taiwanese Journal of Mathematics* 14 (2010) 165–194.
- [3] A. V. Bitsadze, On the theory of nonlocal boundary value problems, *Soviet Math. Dokk* 30 (1964) 8–10.
- [4] Z. Chen and F. Xu, Multiple positive solutions for nonlinear second-order m -point boundary-value problems with sign changing nonlinearities, *Electronic Journal of Differential Equations* 2008(2008) 1–12.
- [5] W. G. Ge and J. L. Ren, Fixed point theorems in double cones and their applicatios to nonlinear boundary value problems, *Chinese Annals of Mathematics* 27(2006) 155–168.
- [6] Y. Guo, W. Ge, S. Dong, Two positive solutions for second order three point boudndary value problems with sign change nonlinearities, *Acta. Math. Appl. Sinica* 27 (2004) 522–529.
- [7] C. P. Gupta, Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation, *J. Math. Anal. Appl* 168 (1992) 540–551.
- [8] V. A. Il'in and E.I.Moiseev, A nonlocal boundary value problem of the first kind for the Sturm-Liouville operator in differntial and difference interpretations, *differential Equations* 23 (1987) 803-810.
- [9] V. A. Il'in and E.I.Moiseev, Nonlocal boundary value problem of the second kind for the Sturm-Liouville operator, *Differential Equations* 23 (1987) 979–987.
- [10] M. Jia, S. Liu, and Y.Tian, existence of positive solutions for boundary-value problems with integral boundary conditions and sign changing nonlinearities, *Electronic Journal of Differential Equations* 163(2010) 1–12 .
- [11] L. Karakostas and P. Tsamatos, Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem, *Juliusz Schauder Center* 19(2002) 109–121.
- [12] J. Xu and Z. Yang, Triple positive solutions for singular integral boundary value problems, *Int. J. open problems compt. Math* 3(2010) 456–467.

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Equations Différentielles

Présentée par

Yassamina Tabet Zatla

Etude de l'existence de solutions pour une classe de problèmes différentiels d'ordre supérieur ou égal à 2

Thèse dirigée par Madame Naima Daoudi-Merzagui
soutenue le 01/07/2015 devant le jury composé de :

<i>M^r</i> . M. YEBDRI	Professeur à U.A.B.B Tlemcen	Président
<i>M^r</i> . M. BENCHOHRA	Professeur à U.S.B.A Sidi Bel Abbas	Examineur
<i>M^r</i> . M. BOUCHEKIF	Professeur à U.A.B.B Tlemcen	Examineur
<i>M^r</i> . A. LAKMECHE	Professeur à U.S.B.A Sidi Bel Abbas	Examineur
<i>M^r</i> . S.M BOUGUIMA	Professeur à U.A.B.B Tlemcen	Examineur
<i>M^{me}</i> . N. DAOUDI-MERZAGUI	Professeur à U.A.B.B Tlemcen	Directeur

*Je dédie ce travail à la mémoire de
mon très cher Père Redouane qui de
son paradis savoure les senteurs du
« Yasmine » qu'il a semé dans sa
pépinière, et à celle qui a fait de moi
tout ce que je suis ma chère mère
Nacéra.*

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout Puissant de m'avoir aidé à réaliser le rêve de mon défunt père.

La finalisation de ce travail n'aurait été possible sans l'aide précieuse de personnes qui me sont chères.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Le Professeur Merzagui Naima, pour son aide précieuse, pour son soutien sans faille, pour ses conseils avisés, pour sa disponibilité en toutes heures et pour sa générosité permanente. Elle a su tirer le meilleur de moi et ce travail est aussi le sien, je l'en remercie du fond du cœur. J'ai été enchantée de l'avoir eu comme Maître et j'espère lui faire honneur par ce travail.

Je remercie aussi Mr Le Professeur Yebdri Mustapha pour avoir accepté de présider ma soutenance. Après m'avoir encadré pour mon Master, j'espère qu'il sera fier de son étudiante. Je remercie aussi le Professeur Benchohra Mouffak, le Professeur Bouchekif Mohammed, le Professeur Bouguima Sidi Mohammed et le Professeur Lakmeche Abdelkader, pour avoir pris sur leur temps précieux afin d'examiner et de juger ce travail.

Je remercie tous les enseignants qui m'ont donné une partie de leur savoir en particulier celui qui m'a toujours aidé scientifiquement et a été comme un père pour moi au niveau du département de mathématiques Mon Professeur : Monsieur Mebkhout Benmiloud.

Je tiens à inclure dans mes remerciements le Professeur Augustin Fruchard directeur du laboratoire Mia (France) pour m'avoir chaleureusement accueilli et m'avoir facilité l'intégration dans son groupe de travail et pour son aide précieuse.

Mes plus précieuses pensées vont à ma famille qui me soutient inconditionnellement. J'aimerais donc remercier Ma chère, affectueuse, inlassable, infatigable, et dévouée Mère Nacéra pour qui je suis la prunelle de ces yeux, qui ne me refuse rien et qui a toujours fait tout son possible

pour me permettre de réaliser mes rêves de fille, de demoiselle, d'étudiante et de femme. Merci Maman.

A mon frère Mohammed et à mes soeurs Amina et Zahia qui n'ont cessé de m'aider et surtout de me supporter ; je leur rappelle que leur devoir de fraternité ne s'arrêtera pas après ma soutenance. Je n'oublierai pas Abdelhak qui a sacrifié tant de week-end pour nous emmener découvrir du pays, et Nesrine qui a toujours été généreuse et très amicale avec moi.

A mes poussins Malak, Redouane, Riham et Younes qui se sont tant défoulés sur leur tante et heureusement que je leur ai rendu la pièce de leur monnaie.

Un remerciement particulier à mes tantes, mes oncles et mes cousines et à tous les autres proches de la famille que cet espace ne permet pas de citer nommément, je dis merci.

Je remercie aussi mes deux amies, celle qui a été toujours à mon écoute et celle qui a traversé la méditerranée mais ne m'oublie jamais "Ah que je suis heureuse quand j'entends sa voix au téléphone". Souhila et Wafaa, merci. A tous les autres amis qui me sont chers.

Et puis je garde le meilleur pour la fin, je voudrai remercier Nassim Boukli Hacène pour m'avoir soutenu, encouragé et d'avoir été d'aussi bonne compagnie à tout moment.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	9
1.1 Définitions et notations	9
1.2 Fonction de Green	10
1.2.1 Détermination de la fonction de Green	10
1.2.2 Exemple	11
1.3 Degré topologique	12
1.3.1 Degré topologique de Brouwer	13
1.3.2 Degré topologique de Leray-Schauder	14
1.4 Notion d'indice	14
1.4.1 Indice de Brouwer	14
1.5 Indice de point fixe dans les cônes	15
2 Théorèmes du point fixe	16
2.1 Théorème de Banach	16
2.2 Théorème de Brouwer	16
2.3 Théorème de Schauder	17
2.4 Théorème de point fixe de Krasnoselskii	17
2.4.1 Evolution du théorème de Krasnoselskii	18
2.4.2 Extensions du théorème de Krasnoselskii	20
3 Non-linéarité régulière	26
3.1 Intervalle borné	26
3.1.1 Introduction	26
3.1.2 Résultats auxiliaires	29
3.1.3 Formulation abstraite	34
3.1.4 Etude de l'existence de solutions positives	37

3.1.5	Exemple	42
3.2	Intervalle non borné	43
3.2.1	Introduction	43
3.2.2	Résultats auxiliaires	45
3.2.3	Inversion du problème	46
3.2.4	Résultat principal	47
3.2.5	Exemple	52
4	Non-linéarité singulière	54
4.1	Introduction	54
4.2	Résultats auxiliaires	55
4.3	Existence de solutions positives	60
4.4	Exemples	65
5	Généralisation	68
5.1	Introduction	68
5.2	Preliminaires	69
5.3	Résultat principal	72
5.4	Exemple	76
	Conclusion et Perspectives	79
	Bibliographie	80

Introduction

Les équations différentielles remontent à l'invention du calcul différentiel et intégral, faite indépendamment par le Britannique Newton et l'Allemand Leibniz dans les années 1670-1680. Au début, ces équations servaient à résoudre des problèmes géométriques, comme la détermination d'une courbe dont les tangentes sont soumises à une condition donnée. C'est seulement vers 1730 que le mathématicien suisse Leonhard Euler a commencé à les utiliser pour traiter des problèmes de dynamique. Aujourd'hui, elles apparaissent dans presque tous les domaines de la science et de la technique : mathématiques, physique, chimie, biologie, ingénierie, économie, etc... Elles servent à traduire les lois qui régissent la variation de telle ou telle grandeur, de la position d'une navette spatiale à la charge d'un condensateur électrique, en passant par la concentration d'un produit lors d'une réaction chimique ou l'effectif d'une population. Dans les domaines de la physique, de la chimie, ou de la biologie, de nombreux modèles sont régis par des problèmes aux limites associés à des équations différentielles considérées sur des intervalles bornés ou non bornés avec différentes conditions aux bords. Dans la pratique, seules les solutions positives peuvent être utiles car elles correspondent à des paramètres mesurables tels que la température, la densité... ; paramètres qui sont utilisés dans les différentes lois de la physique. La résolution (recherche de solutions) des équations différentielles ou encore des problèmes aux limites associés à des équations différentielles, est un champ d'investigation très large.

Les mathématiciens se posent naturellement des questions liées essentiellement à l'existence de solutions ayant une certaine régularité mathématique et un certain sens physique. Ces différentes situations conduisent à des problèmes mathématiques riches, et intéressants. Pour répondre à certaines de ces questions mathématiques, il faut s'en remettre à certains outils mathématiques de base tels que les théorèmes de point fixe lesquels servent entre autres à démontrer l'existence des solutions pour divers genres d'équations. La théorie de point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence de solutions dans de nombreux problèmes.

Le développement de la théorie du point fixe, qui est la branche cardinale de l'analyse non

linéaire, a donné de grands effets sur l'avancement de l'analyse non linéaire, considérée comme une branche autonome des mathématiques, l'analyse non linéaire a été élaboré dans les années 1950 par des mathématiciens tel Felix Brouwer comme une combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

Les théorèmes de points fixes sont associés aux noms de mathématiciens célèbres tels que Cauchy, Liouville, Lipschitz et surtout, Picard. En fait, les précurseurs de la théorie du point fixe approché sont explicites dans les travaux de Picard. Toutefois, c'est le mathématicien polonais Stefan Banach, qui est crédité sur le placement d'une idée abstraite. Le principe de l'application contractante est l'un des rares théorèmes constructifs de l'analyse mathématique. Il constitue un outil de grande importance vue l'étendue de son champs d'application à priori, dans l'étude des équations non linéaires qui jouent un rôle crucial aussi bien en mathématiques qu'en sciences appliquées. Le théorème du point fixe de Banach ou celui de Picard assure l'existence d'un unique point fixe pour une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Le point fixe est la limite d'un procédé itératif défini à partir d'une répétition d'image par cette application contractante d'un point initial arbitraire dans cet espace. Ce concept a été prouvé en premier lieu, par Banach en 1922 puis développé par plusieurs mathématiciens dont nous citons Brouwer et Schauder en 1930 ainsi que Krasnoselskii en 1955. Le théorème du point fixe de Schauder, qui est en fait, une extension de celui de Brouwer en dimension infinie. Il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement, unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des majorations sur la fonction mais simplement sa continuité. Néanmoins, la mise en branle des méthodes variationnelles a focalisé ces dernières décennies, en majeure partie, l'intérêt des mathématiciens au détriment des méthodes topologiques. En effet, ces méthodes variationnelles puisent leur efficacité dans leur orientation vers les applications. Leur atout majeur est le fait qu'ils fassent intervenir des fonctions généralisées et des espaces de Sobolev réflexifs qui constituent une chaîne de liaison entre les solutions faibles et les solutions classiques. Le théorème du point fixe de Krasnoselskii apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité des solutions pour des opérateurs non linéaires qui sont étroitement, liés aux équations différentielles non linéaires, aux équations intégrales qui ont fait l'objet d'études intensives ces dernières décennies, citons par exemple les problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires avec des conditions intégrales et les problèmes aux limites non locaux qui sont souvent issus de la physique ou de la biologie.

Quand la détermination explicite de la solution devient impossible, nous avons recours à une résolution numérique. C'est ce que font d'habitude les ingénieurs, que ce soit pour calculer

la trajectoire précise d'une sonde spatiale ou pour déterminer le profil optimal d'un avion supersonique. Le principe de base est la discrétisation.

Cette thèse est consacrée à l'étude des problèmes aux limites non locaux associés à des équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre supérieur ou égal à 2. Nous nous intéressons à l'existence et à la multiplicité de solutions positives dans le cas où la non-linéarité change de signe.

L'objectif de notre travail est de déterminer des conditions suffisantes, simples qui permettent d'obtenir des résultats d'existence dans le cas où la non-linéarité présente ou ne présente pas de singularité. Notre approche est basée sur l'application d'une des variantes du théorème de point fixe de Krasnoselskii.

Cette thèse est composée de cinq chapitres distincts dont nous énonçons ici les grandes lignes. Après un premier chapitre, introduisant les outils et concepts utilisés dans la suite, nous consacrons le deuxième chapitre au théorème de point fixe de Krasnoselskii, son énoncé, son évolution et ses différentes généralisations ou nombreuses variantes dont il a fait l'objet depuis près de 50 ans. Aussi et toujours dans un souci de rendre la lecture plus agréable et plus compréhensible, nous évoquerons de façon plus détaillée la version du théorème de Krasnoselskii (dans le double cône). Le troisième chapitre sera une application de ce dernier théorème pour montrer l'existence et la multiplicité de solutions positives dans deux cas : sur un intervalle borné et sur une demi droite. Le quatrième chapitre, exposera une application du même théorème dans l'étude d'un problème aux limites singulier.

Une généralisation de la problématique dans le cas d'une équation différentielle d'ordre strictement supérieur à 2 sera abordée dans le dernier chapitre de ce travail.

Ce qui peut donner plus de valeur à un travail mathématique est son champ d'application et d'utilisation comme élément de base dans un domaine "réel" donné. Aussi, nous présentons quelques domaines (la liste n'est pas exhaustive) et nous n'émettons que des propositions sur la base de la littérature déjà publiée qui pourraient profiter du modèle mathématique étudié dans cette thèse. Prenons pour exemple l'équation

$$-x''(t) + cx' + \lambda x = f(t, x(t)), \quad 0 < t < +\infty, \quad (0.1)$$

sous les conditions aux limites

$$x(0) = x(+\infty) = 0. \quad (0.2)$$

Ce type de problèmes est utilisé dans deux domaines complètement distincts, il modélise deux

phénomènes différents :

La propagation d'une épidémie dans une population confinée dans une région donnée est régie par l'équation autonome (0.1) où $f(t, x) = xh(x)$, cette équation est dite équation de Fisher généralisée (voir [27], [28]), dans ce cas x représente la population infectée, le λ est un taux de mortalité, la fonction h désigne la densité des personnes susceptibles d'être touchées. (voir [29], [30]).

L'équation de Fisher généralisée décrit aussi l'évolution des ondes progressives par rapport au système de réaction-diffusion correspondant (voir [85]), où x représente une densité physique. La constante c se réfère à la vitesse d'onde tandis que la constante positive λ est un taux d'exclusion.

Dans la théorie de la combustion lorsqu'une flamme de prémélange (i.e, le combustible est toujours un gaz, parfaitement mélangé au comburant) se propage dans un long tube, la vitesse de réaction obéit à la loi d'Arrhenius où f se comporte comme e^{-x} au voisinage de $+\infty$.

En chimie, le λ est une constante d'échange thermique.

Les non-linéarités, qui représentent des termes de base, sont régies par des lois physiques spécifiques, par exemple, la loi de fonction pour des réactions chimiques est donnée par le terme de réaction d'équilibre $f(t, x) = xa(x)e^{\frac{x-1}{\epsilon}}$ où ϵ est un petit paramètre lié à l'énergie d'activation de la réaction (voir [7], [16]) et a est une fonction continue reliée à la concentration du produit chimique.

D'autre part, divers processus physiques de la théorie de fluide non-newtonien, de la théorie de la couche limite et des phénomènes non linéaires (voir [88]) sont modélés en se basant sur les équations singulières telles que l'équation d'Emden-Fowler $y'' = -\varphi(t)y^{-\gamma}$ ($\gamma > 0$) et autres. Ainsi, le problème aux Limites pour le potentiel électrique d'un atome neutre isolé obtenu en 1927 par Thomas [97] et Fermi [38], peut s'écrire

$$\begin{cases} y'' = \sqrt{y^3/t}, & 0 < t < +\infty, \\ y(0) = 1, y(+\infty) = 0., \end{cases} \quad (0.3)$$

Un autre exemple est donné par l'équation de couche limite pour un flot stationnaire sur une plaque semi-infinie (voir [20]) :

$$\begin{cases} y'' = -\frac{t}{2y^2}, & 0 < t < +\infty \\ y(0) = 0, y(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (0.4)$$

En 2003, Agarwal [1] a étudié le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{p}(p(t)y'(t))' + q(t)f(t, y(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} p(t)y'(t) = y(1) = 0, \end{cases} \quad (0.5)$$

où $f : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et présente une singularité en $y = 0$.

L'auteur s'est particulièrement intéressé à appliquer son résultat sur le problème posé dans la théorie des fluides pseudo-plastiques.

$$\begin{cases} y^{1/n}y'' + nt = 0, & 0 < t < 1, \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases} \quad (0.6)$$

En 2008, S. Djebali et K. Mebarki [31], [32] ont étudié les problèmes aux limites singuliers suivants

$$\begin{cases} x''(t) - k^2x(t) + \phi(t)f(t, x(t)) = 0, & 0 < t < +\infty, \\ x(0) = x(+\infty) = 0 \end{cases} \quad (0.7)$$

et

$$\begin{cases} -y''(t) + cy' + \lambda y(t) = \phi(t)g(t, y(t)), & 0 < t < +\infty, \\ x(0) = x(+\infty) = 0 \end{cases} \quad (0.8)$$

où k , c , et λ sont des constantes positives. La fonction ϕ présente une singularité en $t = 0$.

En 2012, ces deux problèmes ont été étudié par les mêmes auteurs mais dans le cas où f et g satisfont $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(t, x) = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(t, y) = +\infty$.

Le problème (0.8) peut être transformé en problème (0.7) en posant $k = \sqrt{\lambda + \frac{c^2}{4}}$, $x(t) = y(t)e^{-\frac{c}{2}t}$ et $f(t, x(t)) = e^{-\frac{c}{2}t}g(t, e^{\frac{c}{2}t}x(t))$.

Dans le troisième chapitre de notre thèse, nous allons montrer l'existence et la multiplicité de solutions positives pour le problème aux limites associé à l'équation différentielle considérée sur un intervalle non borné

$$(\psi(t)u'(t))' + \phi(t)f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (0.9)$$

sous les conditions aux limites

$$\alpha_1 u(0) - \beta_1 \psi(0)u'(0) = 0, \quad \alpha_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) + \beta_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)u'(t) = 0. \quad (0.10)$$

Ce problème peut être lié à l'un des modèles cités précédemment, prenant par exemple $\psi(t) = \exp(ct)$, $\phi(t) = \exp(-ct)$ où ($c > 0$), $f(t, u) = \exp(2ct)uf(u)$. L'équation (0.9) peut s'écrire

$$u''(t) + cu'(t) + uf(u) = 0, \quad 0 < t < +\infty. \quad (0.11)$$

Donc notre problème peut se ramener à un modèle qui peut être utilisé dans la théorie de la combustion, ou de l'épidémiologie.

Dans le même chapitre, nous présentons un résultat d'existence de solutions positives sur un intervalle borné pour une équation différentielle ordinaire du second ordre avec des conditions aux limites intégrales. Nous nous sommes particulièrement intéressés au problème suivant

$$u''(t) + q(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (0.12)$$

$$u(0) = 0, \quad (0.13)$$

$$u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(r)dg(r), \quad (0.14)$$

Ces problèmes aux limites ayant des solutions positives décrivent de nombreux phénomènes des mathématiques appliquées que l'on peut retrouver dans la théorie de la diffusion non linéaire produite par des sources non linéaires, l'allumage thermique des gaz et la concentration lors de problèmes chimiques ou biologiques. Pour plus de détails sur ces applications, voir [15], [18], [39], [64]. Les problèmes avec des conditions aux limites intégrales apparaissent naturellement dans les problèmes de conduction thermique [21], dans les problèmes de semi-conducteurs [77], en physique des plasmas, en thermo-élasticité, et en hydrodynamique [23].

Motivées par les modèles singuliers (0.5), et (0.6), dans le chapitre 4 de notre thèse, nous nous sommes attelées à étudier le problème aux limites à m-points suivant :

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (0.15)$$

$$u'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i). \quad (0.16)$$

où $f : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et présente une singularité en $u = 0$.

De nombreux problèmes pratiques importants conduisent à des problèmes aux limites à multi-points. C'est le cas, par exemple, pour la modélisation et l'analyse des problèmes posés par les réseaux électriques, les systèmes ferroviaires électriques et les lignes de télécommunication,

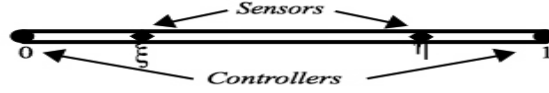
et aussi dans l'analyse des problèmes de certaines réactions cinétiques. Au cours des années précédentes, de nombreux auteurs ont étudié des problèmes aux limites à trois points. Ces problèmes ont des applications potentielles en physique, biologie, chimie, etc. Par exemple, un problème aux limites à trois points associés à une équation différentielle du second ordre est utilisé comme modèle pour la réponse de la membrane d'une calotte sphérique (voir [20])

$$\begin{cases} y''(t) + \left(\frac{t^2}{32y^2} - \frac{\lambda^2}{8}\right) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) = 0, \quad 2y'(1) - (1+v)y(1) = 0 & 0 < v < 1 \text{ et } \lambda > 0 \end{cases} \quad (0.17)$$

Un autre exemple est donné par le problème de flux thermique (voir [56])

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ u'(0) = au(\xi), \quad u'(1) = bu(\eta). \end{cases} \quad (0.18)$$

Ce type de problème se pose dans l'étude des états d'équilibre d'une barre chauffée d'une longueur égale à 1. Dans ce cas, deux contrôleurs en $t = 0$ et $t = 1$, ajoutent ou suppriment la chaleur selon les températures détectées par deux capteurs en $t = \xi$ et $t = \eta$.



En 2005, J. R. L Webb [103] a étudié l'existence de solutions positives pour le problème aux limites à trois points qui découle de la modélisation d'un thermostat

$$\begin{cases} -u''(t) = g(t)f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ u'(0) = 0, \quad \beta u'(1) + u(\eta) = 0. \end{cases} \quad (0.19)$$

Dans le but de généraliser les résultats cités précédemment, nous abordons dans le dernier chapitre de notre thèse, l'existence et la multiplicité de solutions positives pour le problème aux limites à m -points d'ordre $2n$

$$\begin{cases} x^{(2n)}(t) = f(t, x(t), x''(t), \dots, x^{(2(n-1))}(t)), & 0 \leq t \leq 1, \\ x^{(2i+1)}(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{i,j} x^{(2i+1)}(\xi_j), \quad x^{(2i)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{i,j} x^{(2i)}(\xi_j), & 0 \leq i \leq n-1, \end{cases} \quad (0.20)$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Les problèmes aux limites associés à des équations différentielles d'ordre supérieure à deux ont suscité beaucoup d'intérêt en raison de leur rôle important dans la théorie et les applications. Ces problèmes sont souvent utilisés pour modéliser les différents phénomènes de la physique, la biologie, la chimie et de l'ingénierie. Par exemple les problèmes aux limites d'ordre 4 sont utilisés en tant que modèle pour les états stationnaires de déviation d'un faisceau élastique (voir [9], [43], [106], [115]).

De nombreux auteurs ont considéré l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 suivante

$$x^{(4)}(t) = f(t, x(t), x''(t)) \quad 0 < t < 1, \quad (0.21)$$

sous les conditions aux limites à quatre points

$$\begin{aligned} x(0) &= x(1) = 0, \\ ax^{(2)}(\xi_1) - bx^{(3)}(\xi_1) &= 0, \quad cx^{(2)}(\xi_2) + dx^{(3)}(\xi_2) = 0, \end{aligned}$$

L'équation (0.21) est souvent désigné comme une équation de faisceau généralisée. L'interprétation physique de cette équation associée à certaines conditions aux limites peut être trouvée dans le livre de Zill et Cullen [117]. D'autres auteurs ont étudié l'équation (0.21) dans le cas où

$$f(t, x(t), x''(t)) = f(t, x(t))$$

avec les conditions

$$x(0) = x(1) = x'(0) = x'(1) = 0.$$

Ce problème décrit généralement les déformations des poutres élastiques avec deux points de terminaison fixes (voir [115]).

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduirons certaines notions et concepts, essentiels au développement des autres chapitres. Nous rappellerons certains théorèmes d'analyse fonctionnelle pour une meilleure présentation des démonstrations des résultats de notre travail.

1.1 Définitions et notations

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On note par E l'espace de Banach des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur I , i.e.

$$E = \{f / f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue}\}, \quad (1.1)$$

muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|. \quad (1.2)$$

Définition 1.1.1. *A une partie de E , A est dite uniformément bornée dans E si et seulement si*

$$\exists M > 0, \forall f \in A, \|f\|_\infty \leq M.$$

Définition 1.1.2. *Une partie A de E est équicontinue dans I si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall x \in I, \forall y \in I : |x - y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ pour tout } f \in A.$$

Définition 1.1.3. *On dit qu'une partie A de E est relativement compacte si sa fermeture \bar{A} est compacte.*

Lemme 1.1.1. *(Lemme d'Ascoli-Arzelà)*

Soit A une partie de E , A est relativement compacte si :

- i) A est équicontinue dans I .
- ii) A est uniformément bornée dans E .

Définition 1.1.4. Soit F un espace de Banach. L'application $f : E \rightarrow F$ est dite compacte si :

- i) f est continue sur E .
- ii) $f(E)$ est relativement compacte dans F .

Définition 1.1.5. L'application $f : E \rightarrow F$ est dite complètement continue si :

- i) f est continue sur E .
- ii) $\forall B \subset E ; B$ un borné $\Rightarrow f(B)$ est relativement compacte dans F .

Définition 1.1.6. Soit K un sous ensemble fermé. On dit que K est un cône dans E s'il vérifie les conditions :

- 1) $x \in K, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in K$.
- 2) $x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$.
- 3) $x \in K$ et $-x \in K \Rightarrow x = 0$

Définition 1.1.7. Une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si :

$$u(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \geq \lambda u(t_1) + (1 - \lambda)u(t_2), \quad \forall (t_1, t_2) \in I^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

1.2 Fonction de Green

Les fonctions de **Green** ont été introduites par George Green en 1828. Ces fonctions interviennent dans la résolution des équations linéaires à coefficients constants (qu'elles soient différentielles ou aux dérivées partielles) ou dans la transformation d'équations différentielles en équations intégrales. En plus de leur intérêt mathématique, les fonctions de Green sont largement utilisées en mécanique quantique, ou elles sont décrites comme "des propagateurs", et dans la théorie des processus stochastiques.

1.2.1 Détermination de la fonction de Green

Soient (a, b) un intervalle de \mathbb{R} , $p(x)$ une fonction positive continûment différentiable et $q(x)$, $f(x)$ deux fonctions continues.

Considérons une classe d'équations différentielles ordinaires non homogènes de la forme :

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.3)$$

sous les conditions

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \quad (1.4)$$

La fonction de Green associée à l'équation (1.3) est la fonction G vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dG}{dx} \right] + q(x)G = \delta(x - y), \quad (1.5)$$

où δ est la distribution de Dirac.

La fonction de Green G doit satisfaire les conditions aux limites (1.4).

Une solution u de (1.3) s'exprime simplement par :

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy.$$

Pour $y \in (a, b)$ fixé, on détermine la fonction de Green $G(x, y)$, en tant que fonction de x .

G est en général déterminée autant que fonction vérifiant :

1. $G(x, y)$ satisfait l'équation (1.5) sur (a, y) et sur (y, b) .
2. $G(x, y)$ satisfait les conditions aux limites homogènes (1.4) en $x = a$ et en $x = b$.
3. $G(x, y)$ est continue en $x = y$, i.e.,

$$G|_{x=y^+} - G|_{x=y^-} = 0.$$

4. $\frac{\partial}{\partial x} G(x, y)$ est discontinue en $x = y$, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, y)|_{x=y^+} - \frac{\partial}{\partial x} G(x, y)|_{x=y^-} = \frac{1}{p(x)}.$$

1.2.2 Exemple

Détermination de la fonction de Green associé au problème :

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, & \beta - \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Dans ce genre de problème, la fonction de green est déterminée comme suit, le problème homogène aux conditions homogènes admet pour seule solution la solution triviale ($u = 0$); la fonction de Green $G(x, y)$ existe.

Soient φ_1, φ_2 deux fonctions indépendantes vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi_1''(x) = 0, \\ \varphi_1(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} \varphi_2''(x) = 0, \\ \varphi_2(1) = \beta. \end{cases} \quad (1.8)$$

Les solutions des problèmes (1.7) et (1.8) sont données par

$$\varphi_1(x) = x + \alpha, \quad \varphi_2(x) = x + \beta - 1.$$

De la définition du Wronskien, nous avons

$$w = W(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \alpha - \beta + 1.$$

Donc

$$G(x, y) = \frac{1}{w} \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ \varphi_1(y)\varphi_2(x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

1.3 Degré topologique

Dans cette section, nous développons la notion de degré topologique, qui intervient dans la démonstration du théorème de krasnoselskii, l'outil essentiel de notre travail.

Au cours de ces dernières années, le degré topologique s'est révélé un outil efficace permettant la résolution de certains problèmes aux limites non linéaires associés à des équations différentielles ordinaires.

Considérons l'équation abstraite :

$$f(x) = y \quad (1.10)$$

où $f : E \rightarrow F$ une application régulière et E, F sont deux espaces de Banach.

Une application degré D_0 a été construite en premier par Kronecker en 1869 dans le cas où $E = F = \mathbb{R}^N$, f de classe C^1 et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N admettant une frontière régulière telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$ noté $D_0(f, \Omega, 0)$ et par la suite par Brouwer en 1912 quand E et F sont des espaces

vectoriels orientés de dimensions finies, f continue et Ω un ouvert de E telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$ (il est appelé degré de Brouwer et noté : $d(f, \Omega, 0)$).

En 1934, Leray et Schauder construisent une application degré D_I quand $E = F$, E un espace de Banach et Ω un ouvert de E et $f = I + N$ où I est l'application identité sur E et $N : \bar{\Omega} \rightarrow E$ un opérateur compact et $0 \notin f(\partial\Omega)$ (il est appelé degré de Leray-Schauder, noté : $d(f, \Omega, 0)$ et il se réduit à celui de Brouwer en dimension finie).

1.3.1 Degré topologique de Brouwer

En dimension $N = 1$, les choses sont toujours plus simples. Si l'on souhaite un degré adapté à (1.10) et qui prenne en compte l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel on cherche les solutions, alors en décomposant Ω en ses composantes connexes $\Omega = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$ on peut définir

$$d(f, \Omega, y) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} (\text{sgn}(f(b_i) - y) - \text{sgn}(f(a_i) - y)), \quad (1.11)$$

lorsque $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$.

En dimension $N \geq 1$, nous donnons une formulation précise du degré topologique de Brouwer. Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité du degré topologique à travers ses propriétés.

Théorème 1.3.1. *Soit \mathcal{A} l'ensemble des triplets f, Ω, y où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $y \in \mathbb{R}^N$ et $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue et telle que $y \notin f(\partial\Omega)$. Il existe une et une seule application $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(P1) (normalisation) si Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $y \in \Omega$ alors $d(\text{Id}, \Omega, y) = 1$.

(P2) (additivité) si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$.

(P3) (invariance par homotopie) si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ et $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont continues et, pour tout $t \in [0, 1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, alors $d(h(0, \cdot), \Omega, y(0)) = d(h(1, \cdot), \Omega, y(1))$.

d est appelé le degré topologique de Brouwer.

1.3.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Définissons maintenant un degré ayant la même finalité que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est à dire un outil qui permette d'assurer qu'une équation de la forme $f(x) = y$, où f est continue d'un Banach E dans lui-même, admet au moins une solution x .

Le degré topologique en dimension infinie n'est pas défini pour toutes les applications continues d'un Banach E dans lui-même. Aussi, il faut restreindre les fonctions que l'on considère. Il existe plusieurs degrés en dimension infinie, qui ont pour principale différence la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique. Le degré que nous allons étudier ici, appelé degré de Leray-Schauder, est construit pour les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte.

Théorème 1.3.2. *Soit \mathcal{A}_c l'ensemble des triplets $I_d - f, \Omega, y$ où Ω est un ouvert borné de E , $y \in E$ et $f : \bar{\Omega} \rightarrow E$ est compacte et telle que $y \notin (I_d - f)(\partial\Omega)$. Il existe une application $d : \mathcal{A}_c \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés (P1), (P2) et (P3). d est appelé le degré topologique de Leray-Schauder, ce degré est unique.*

Des propriétés supplémentaires peuvent être déduites à partir des propriétés de normalisation, d'additivité et d'invariance par homotopie.

Proposition 1.3.1. *Le degré topologique de Leray-Schauder vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Si $d(I_d - f, \Omega, y) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega$ tel que $x - f(x) = y$.*
- (ii) *Pour tout $z \in E$, $d(I_d - f, \Omega, y) = d(I_d - f - z, \Omega, y - z)$.*
- (iii) *Soit $(I_d - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_c$ et $r = \text{dist}(y, (I_d - f)(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est compacte et $z \in \mathbb{R}^N$ telles que $\sup_{\partial\Omega} (\|g - f\|) + \|y - z\| < r$, alors $d(I_d - f, \Omega, y) = d(I_d - g, \Omega, z)$.*

1.4 Notion d'indice

Il est bien connu que les techniques de l'indice de point fixe ont été largement appliquées dans l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions pour des problèmes aux limites non linéaire.

1.4.1 Indice de Brouwer

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On peut localiser le degré de Brouwer dans un voisinage d'un point isolé de $f^{-1}(0)$. L'indice de Brouwer de

l'application f au point y est défini par

$$i(f, y) = d(f, B(y, r), 0),$$

où y un point isolé de $\Omega \cap f^{-1}(0)$, $r > 0$, et $B(y, r)$ la boule de centre y et de rayon r , tel que $B(y, r) \cap f^{-1}(0) = y$.

Exemple.

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible, alors pour tout $y = f^{-1}(0)$, $i(f, y) = \text{sign}(\det(f))$.

1.5 Indice de point fixe dans les cônes

Soient D un ensemble borné de E , K un cône de E , tel que $D_K \neq \emptyset$ et $\overline{D}_K \neq K$, où $D_K = D \cap K$. Supposons que $T : D_K \rightarrow K$ un opérateur compact tel que $x \neq Tx$, pour $x \in \partial D_K$. Alors l'indice de point fixe $i_K(T, D_K)$ vérifie les propriétés suivante :

1. S'il existe $e \in K \setminus \{0\}$ tel que $x \neq Tx + \lambda e$, pour tout $x \in \partial D_K$, et tout $\lambda > 0$, alors $i_K(T, D_K) = 0$.
2. Si $Tx \neq \lambda x$, pour tout $x \in \partial D_K$ et tout $\lambda > 1$, alors $i_K(T, D_K) = 1$.

La condition de Leray-Schauder qui figure dans (2) est vérifiée, si par exemple $\|Tx\| \leq \|x\|$ pour $x \in \partial D_K$.

Plus de détails sur l'indice de point fixe peuvent être trouvés dans l'article [5] et dans le livre de Guo et Lakshmikantham [46].

Chapitre 2

Théorèmes du point fixe

Les théorèmes du point fixe sont des outils mathématiques de base qui permettent de montrer l'existence de solutions pour divers genres d'équations.

Dans ce chapitre, nous présenterons les théorèmes de points fixe apparus avant le théorème de krasnoselskii à savoir, Banach, Brouwer, et Schauder. Etant donné un ensemble M et une application $f : M \rightarrow M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur f et M pour que f ait un point fixe. Ces résultats théoriques permettront de montrer l'existence de solutions sans les déterminer explicitement.

2.1 Théorème de Banach

Théorème 2.1.1. *Soit E un espace métrique complet (non vide). Si $f : E \rightarrow E$ est une contraction, alors f admet un unique point fixe dans E .*

Commentaire 1.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922, fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée.

Mais, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. Donc, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent son champ d'application.

2.2 Théorème de Brouwer

Théorème 2.2.1. *Soit M un compact, convexe non vide de \mathbb{R}^n et $f : M \rightarrow M$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans M .*

Commentaire 2.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

2.3 Théorème de Schauder

Théorème 2.3.1. *Soit A un sous ensemble non vide, convexe, fermé et borné de E . Si $f : A \rightarrow A$ est une application compacte, alors f admet un point fixe unique dans E .*

Commentaire 3.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, affirme que le point fixe n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimations sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

Théorème 2.3.2. *(Alternative non linéaire de Leray-Schauder)*

Soit E un espace de Banach et U un ouvert, borné de E , tel que $0 \in U$. Si $f : U \rightarrow E$ est une application compacte, alors

- i) f admet un point fixe dans U ,*
- ou bien*
- ii) $\exists x \in \partial U, \exists t \in [0, 1] : x = tf(x)$.*

2.4 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

Théorème 2.4.1. *Soit K un fermé, borné convexe non vide de l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$. Si $S, T : K \rightarrow E$ sont deux applications telles que :*

- i) S est continue et compacte.*
- ii) T est une contraction.*
- iii) $Sx + Ty \in K, \forall (x, y) \in K \times K$.*

Alors :

$$\exists x^* \in K; Sx^* + Tx^* = x^*.$$

Commentaire 4.

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème a été utilisé dans la résolution des équations différentielles non linéaires.

Proposition 2.4.1. [17] *Supposons que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées et qu'il existe $r > 0$ tel que : $K = \{y \in E : \|y\| \leq r\}$ et que $TK \subset K$. Si $\|x\| \leq \|(I - T)x\|, \forall x \in K$, alors la condition (iii) est vérifiée.*

2.4.1 Evolution du théorème de Krasnoselskii

Depuis la publication de ce théorème, de nombreux auteurs se sont attelés à essayer de généraliser et à modifier ce théorème [11], [66], [108], [17] la plupart ont manipulé les hypothèses (i), (ii) et (iii). Dans son article [17], Burton remplace (iii) par : $x = Tx + Sy, y \in K \Rightarrow x \in K$. Barroso [10] remplace (iii) par $\lambda \in [0, 1], x = \lambda Tx + Sy, y \in K \Rightarrow x \in K$.

Plus récemment les auteurs dans [108] considèrent T comme une expansion au lieu d'une contraction et affaiblissent la compacité de S .

D'autres auteurs ont considéré E localement convexe [11], [19].

L'hypothèse (i) a aussi été modifiée en considérant la continuité et la compacité faibles (topologie faible).

Le théorème de Krasnoselskii et ses généralisations ont été appliquées avec succès pour obtenir l'existence et la multiplicité de solutions positives pour des problèmes aux limites associées à des équations différentielles, notamment dans le cas des équations différentielles ordinaires et leurs versions discrètes. Krasnoselskii lui même a appliqué son théorème pour montrer l'existence de solutions périodiques pour un système d'équations différentielles ordinaires.

La version la plus utilisée du théorème de Krasnoselskii, est celle dans un cône, elle se présente en deux parties. La première dite forme compressive a beaucoup de ressemblance avec les théorèmes de Brouwer et Schauder : Dans [69] l'auteur montre qu'en fait c'est un cas particulier des théorèmes de Brouwer et Schauder. La deuxième partie dite expansive, complète la première.

Théorème de Krasnoselskii dans un cône (1960)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un Banach, K un cône fermé et convexe de E , a, b deux réels tels que $0 < a < b$.

Notons :

$$K_a = \{x \in K; \|x\| = a\}, \quad K_b = \{x \in K; \|x\| = b\},$$

$$K(a, b) = \{x \in K; a \leq \|x\| \leq b\}.$$

Théorème 2.4.2. *Soit $T : K \rightarrow K$ un opérateur complètement continu tel que :*

1. (La forme compressive) T admet un point fixe dans $K(a,b)$ si :

$$\|T(x)\| \geq \|x\| \text{ pour tout } x \in K_a, \quad (2.1)$$

et

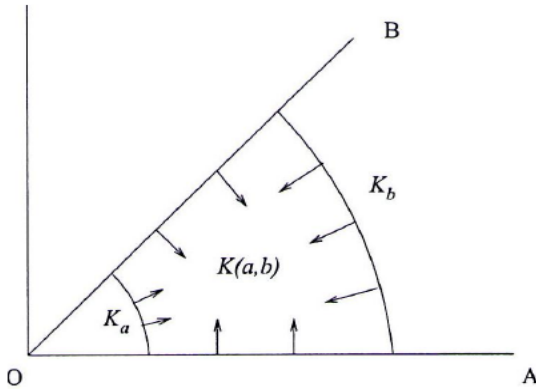
$$\|T(x)\| \leq \|x\| \text{ pour tout } x \in K_b. \quad (2.2)$$

2. (La forme expansive) T admet un point fixe dans $K(a,b)$ si :

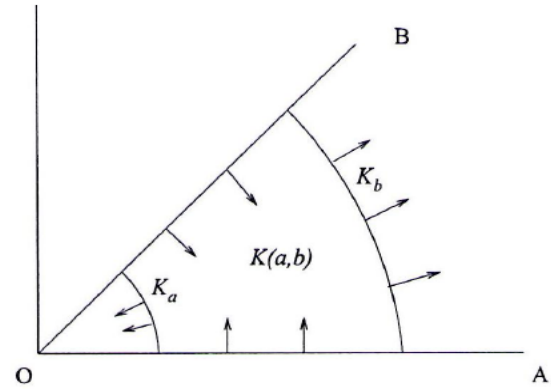
$$\|T(x)\| \leq \|x\| \text{ pour tout } x \in K_a, \quad (2.3)$$

et

$$\|T(x)\| \geq \|x\| \text{ pour tout } x \in K_b. \quad (2.4)$$



La forme compressive



la forme expansive

Théorème de Krasnoselskii dans \mathbb{R}^2

Remarque 1. Si l'inégalité (2.1) ou (2.2) est stricte, on dit que T est strictement compressive et de même, si l'inégalité (2.3) ou (2.4) est stricte, on dit que T est strictement expansive.

Les adjectifs "compressive", "expansive" sont conventionnels et ne décrivent pas le comportement de T dans tous les cas.

Pour appliquer ce théorème aux problèmes aux limites différentiels, la technique conventionnelle est de faire une formulation abstraite du problème, en précisant les espaces de Banach

qui interviennent (passer aux opérateurs intégraux associés en utilisant la fonction de Green au besoin). Il y a plusieurs généralisations du théorème (2.4.2) ; les conditions (2.1) et (2.2) peuvent être remplacées par :

$$\exists y \in K \text{ tel que } x - T(x) \neq \delta y, \forall \delta \geq 0 \text{ et } \forall x \in K_a, \quad (2.5)$$

et

$$x \neq \lambda T(x), \forall \lambda \in [0, 1] \text{ et } \forall x \in K_b, \quad (2.6)$$

et les conditions (2.3) et (2.4) peuvent être remplacées par :

$$x \neq \lambda T(x), \forall \lambda \in [0, 1] \text{ et } \forall x \in K_a, \quad (2.7)$$

et

$$\exists y \in K \text{ tel que } x - T(x) \neq \delta y, \forall \delta \geq 0 \text{ et } \forall x \in K_b. \quad (2.8)$$

Dans la littérature, la condition (2.6) est appelée la condition de **Leray-Schauder**.

Une autre direction d'extension est de chercher une région plus générale que $K(a, b)$, D. Guo [46] a remplacé $K(a, b)$ par :

$$J = K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1),$$

où Ω_1 et Ω_2 sont deux ensembles ouverts bornés dans E tel que $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Et au lieu de K_a, K_b il considère $K \cap \partial\Omega_1$ et $K \cap \partial\Omega_2$.

2.4.2 Extensions du théorème de Krasnoselskii

Le premier résultat où on a considéré des opérateurs compacts au sens de Krasnoselskii est le suivant :

Théorème 2.4.3. Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, M un convexe, fermé de E , (Y, d) un espace métrique complet, $C : M \rightarrow Y$ un opérateur continu tel que $C(M)$ est un sous ensemble précompact de Y , et $T : M \times \overline{C(M)} \rightarrow M$ un opérateur continu tel que la famille $\left\{ T(\cdot, y) : y \in \overline{C(M)} \right\}$ est équicontractive. Alors l'équation $x = T(x, C(x))$ admet une solution dans M .

Remarque 2. On constate que dans le théorème précédent (**théorème** (2.4.3)) l'ensemble M n'est pas nécessairement borné comme dans le théorème (2.4.1), et n'a besoin que de la précompacité de $C(M)$.

Théorème 2.4.4. *Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, M un convexe, fermé de E , (Y, d) un espace métrique complet, $C : M \rightarrow Y$ un opérateur compact et $T : M \times \overline{C(M)} \rightarrow M$ un opérateur tel que la famille $\{T(\cdot, y) : y \in C(M)\}$ est équicontractive, et pour tout $x \in M$, la fonction $T(x, \cdot)$ est uniformément continue. Si on a*

$$T(x, C(x)) \in M, \quad \forall x \in M.$$

Alors l'équation $x = T(x, C(x))$ admet un point fixe dans M .

Théorème de Leggett-Williams

L'extension du théorème de Krasnoselskii la plus fréquemment utilisée pour obtenir la multiplicité de solutions est celle que l'on doit à Leggett et Williams [69] et qui peut être formulée comme suit :

Théorème 2.4.5. *Soit $\alpha : K \rightarrow [0, +\infty)$ une fonction continue concave et $\alpha(x) \leq \|x\|$. Pour a, b, c, d des nombres réels tels que $0 < a < b < d \leq c$, nous définissons l'ensemble*

$$K_\alpha(b, d) = \{x \in K, b \leq \alpha(x), \|x\| \leq d\}.$$

Si $T : k(0, c) \rightarrow k(0, c)$ est complètement continu et vérifie :

1. $\{x \in K_\alpha(b, d); \alpha(x) > b\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Tx) > b, \forall x \in K_\alpha(b, d)$.
2. $\|Tx\| < a$, pour $\|x\| \leq a$.
3. $\alpha(Tx) > b$, pour $x \in K_\alpha(b, c)$, avec $\|Tx\| > d$.

Alors T admet au moins trois points fixes.

Remarque 3. *Dans son ouvrage [50], J. D. Hamilton a démontré une variante du théorème de Krasnoselskii pour des opérateurs non compacts, à définir dans des espaces de Banach. D'autres généralisations dans les espaces de Frechet ont été démontrées par P. Petryschyn [41] en utilisant le degré topologique.*

Théorème de Avery et Peterson

Le Théorème de Avery et Peterson [8] est un théorème qui généralise le théorème de Leggett et Williams.

Soient γ, θ, α , et ψ des fonctionnelles non négatives continues dans le cône K . Alors pour des nombres positifs a, b, c et d , nous définissons les ensembles suivants :

$$K(\gamma, d) = \{u \in K; \gamma(u) < d\},$$

$$\overline{K(\gamma, d)} = \{u \in K; \gamma(u) \leq d\},$$

$$K(\gamma, \alpha, b, d) = \{u \in K; b \leq \alpha(u) \text{ et } \gamma(u) \leq d\},$$

$$K(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d) = \{u \in K; b \leq \alpha(u), \theta(u) \leq c \text{ et } \gamma(u) \leq d\},$$

et

$$R(\gamma, \psi, a, d) = \{u \in K; a \leq \psi(u), \text{ et } \gamma(u) \leq d\}.$$

Théorème 2.4.6. Soient K un cône de E , γ, θ deux fonctionnelles non négatives continues convexes dans le cône K , α une fonctionnelle non négative continue concave dans K , et ψ une fonctionnelle non négative continue de K , vérifiant $\psi(\lambda u) \leq \lambda\psi(u)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$ et pour des nombres positifs M et d tels que :

$$\alpha(u) \leq \psi(u) \text{ et } \|u\| \leq M\gamma(u); \forall u \in \overline{P(\gamma, d)}.$$

Supposons que $T : \overline{K(\gamma, d)} \rightarrow \overline{K(\gamma, d)}$ est complètement continu, et qu'il existe des nombres positifs a, b et c avec $a < b$, tels que :

$$(i) \{u \in K(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d); \alpha(u) > b\} \neq \emptyset \text{ et } \alpha(Tu) > b \text{ pour } u \in K(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d),$$

$$(ii) \alpha(Tu) > b \text{ pour } u \in K(\gamma, \alpha, b, d) \text{ avec } \theta(Tu) > c,$$

$$(iii) 0 \notin R(\gamma, \psi, a, d) \text{ et } \psi(Tu) < a \text{ pour } u \in R(\gamma, \psi, a, d) \text{ avec } \psi(u) = a$$

Alors T admet au moins trois points fixes $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\gamma, d)}$ tels que :

$$b < \alpha(u_1), a < \psi(u_2) \text{ pour } \alpha(u_2) < b, \text{ et } \psi(u_3) < a$$

Théorème de point fixe dans un double cône [42]

Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, $K \subset E$ un cône et a une constante positive. Nous définissons les ensembles suivants :

$$K_a = \{x \in K : \|x\| < a\},$$

$$\partial K_a = \{x \in K : \|x\| = a\},$$

et si $\alpha : K \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle continue telle que $\alpha(\lambda x) \leq \alpha(x)$ pour $\lambda \in (0, 1)$, nous définissons

$$K(b) = \{x \in K : \alpha(x) < b\},$$

$$\partial K(b) = \{x \in K : \alpha(x) = b\},$$

et

$$K_a(b) = \{x \in K : a < \|x\|, \alpha(x) < b\},$$

où a et b sont des constantes positives.

Théorème 2.4.7. Soient K, K' deux cônes de E tels que $K' \subset K$. Supposons que $T : K \rightarrow K$ et $T^* : K' \rightarrow K'$ deux opérateurs complètement continus et $\alpha : K' \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle continue vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\| \leq M\alpha(x)$ pour tout $x \in K'$, où M est une constante telle que $M \geq 1$. S'il existe des constantes $b > a > 0$ telles que

$$(C1) \quad \|Tx\| < a \text{ pour } x \in \partial K_a,$$

$$(C2) \quad \|T^*x\| < a \text{ pour } x \in \partial K'_a \text{ et } \alpha(T^*x) > b \text{ pour } x \in \partial K'(b),$$

$$(C3) \quad Tx = T^*x, \text{ pour } x \in K'_a(b) \cap \{u : T^*u = u\}.$$

Alors T admet au moins deux points fixes x_1 et x_2 dans K , tels que

$$0 \leq \|x_1\| < a < \|x_2\|, \quad \alpha(x_2) < b.$$

Démonstration. Notons par d_K le degré topologique de Leray Schauder cité dans la section (1.3) du premier chapitre.

La condition (C1) implique

$$\sup_{x \in \partial K_a} \|Tx\| < a,$$

en utilisant la propriété (iii) et la propriété de normalisation du degré d_K , nous obtenons

$$d_K(I_d - T, K_a, \theta) = d_K(I_d, K_a, \theta) = 1,$$

et par conséquent, T admet un point fixe x_1 dans K_a vérifiant $0 \leq \|x_1\| \leq a$. De même, la première partie de la condition (C2) implique

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'_a, \theta) = 1.$$

Montrons maintenant que :

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), \theta) = 0.$$

La condition (C2) implique

$$\alpha(T^*x) > b \quad \text{pour } x \in \partial K'(b),$$

or

$$\alpha(x) \leq \|x\| \leq M\alpha(x) \quad \text{pour } x \in K'.$$

Alors

$$\|T^*x\| \geq \alpha(T^*x) \geq b > 0 \quad \text{pour } x \in \partial K'(b),$$

et donc

$$\inf_{x \in \partial K'(b)} \|T^*x\| \geq b > 0.$$

Le théorème de Dugundji's extension [34] assure qu'il existe une extension $\tilde{T} : \overline{K'(b)} \rightarrow K$ complètement continu de $T^* : \partial K'(b) \rightarrow K$ ($T^*x = \tilde{T}x$ pour $x \in \partial K'(b)$) et $\tilde{T}(\overline{K'(b)}) \subset \overline{\text{convex } T^*(\partial K'(b))}$.

Par conséquent

$$\inf_{x \in \overline{K'(b)}} \|\tilde{T}x\| \geq b > 0.$$

Choisissons l'homotopie $H(x, \lambda) = x - \lambda\tilde{T}x$, et montrons que

$$H(x, \lambda) \neq \theta, \text{ pour tout } x \in \partial K'(b), \lambda \geq 1.$$

On procède par absurde, supposons qu'il existe $\lambda_0 \geq 1$ et $x_0 \in \partial K'(b)$ tel que

$$x_0 - \lambda_0\tilde{T}x_0 = \theta,$$

i.e,

$$x_0 = \lambda_0\tilde{T}x_0.$$

Il suit que

$$b = \alpha(x_0) = \alpha(\lambda_0\tilde{T}x_0) = \alpha(\lambda_0T^*x_0) \geq \alpha(T^*x_0) > b,$$

Ce qui donne une contradiction.

Donc

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), \theta) = d_{K'}(I_d - \tilde{T}, K'(b), \theta) = d_{K'}(I_d - \lambda\tilde{T}, K'(b), \theta). \quad (2.9)$$

Quand $\lambda > M$, pour tout $x \in \overline{K'(b)}$, nous avons

$$\|x\| \leq bM, \quad \|\lambda\tilde{T}x\| = \lambda \|\tilde{T}x\| \geq \lambda b > Mb,$$

et par conséquent l'équation $x - \lambda\tilde{T}x = \theta$ n'a pas de solution dans $\overline{K'(b)}$, ceci implique que

$$d_{K'}(I_d - \lambda\tilde{T}, K'(b), \theta) = 0 \text{ pour } \lambda \geq 1.$$

De (2.9), nous obtenons

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), \theta) = 0.$$

Alors

$$d_{K'}(I_d - T^*, K'_a(b), \theta) = d_{K'}(I_d - T^*, K'(b), \theta) - d_{K'}(I_d - T^*, K'_a(b), \theta) = -1.$$

Et donc T^* admet un point fixe x_2 dans $K'_a(b)$ avec $\|x_2\| > a$, $\alpha(y_2) < b$. La condition (C3) implique

$$x_2 = T^*x_2 = Tx_2 \in K' \subset K.$$

□

Lemme 2.4.1. (Deimling [26]).

Soient E un espace de Banach, K un cône de E . Pour $r > 0$, supposons que $T : \overline{K}_r \rightarrow K$ est complètement continu tel que $Tx \neq x$ pour $x \in \partial K_r$.

(a) Si $\|Tx\| \geq \|x\|$ pour $x \in \partial K_r$, alors

$$i_K(T, K_r) = 0.$$

(b) Si $\|Tx\| \leq \|x\|$ pour $x \in \partial K_r$, alors

$$i_K(T, K_r) = 1.$$

Chapitre 3

Non-linéarité régulière

Dans ce chapitre, nous montrons l'existence et la multiplicité de solutions positives dans deux cas : sur un intervalle borné et sur une demi droite.

3.1 Intervalle borné

Dans cette section, nous présentons le travail [83] publié dans "*Filomat*".

3.1.1 Introduction

Nous étudions la solvabilité d'une équation différentielle ordinaire du second ordre avec des conditions aux limites intégrales. Nous nous sommes particulièrement intéressées au problème suivant

$$u''(t) + q(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.1)$$

$$u(0) = 0, \quad (3.2)$$

$$u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(r)dg(r), \quad (3.3)$$

tout d'abord, nous présentons quelques articles forts utiles au lecteur pour une meilleure compréhension de notre travail.

En 2000, Ma [80] a montré l'existence de solutions positives pour le problème aux limites suivant

$$u''(t) + a(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} h(t)u(t)dt,$$

où $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ et f est soit super-linéaire ($f_0 = 0$ et $f_{\infty} = \infty$) ou sous-linéaire ($f_0 = \infty$ et $f_{\infty} = 0$), avec

$$f_0 = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u}, \quad f_{\infty} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u}.$$

En 2002, Karakostas et Tsamatos [60] ont traité l'existence de solutions positives multiples pour le problème aux limites (3.1)-(3.3).

où $0 < \alpha < \beta < 1$, $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue.

Dans [104], [105], Webb et Infante ont utilisé la théorie de l'indice de point fixe et ont proposé une méthode générale pour résoudre les problèmes avec des conditions aux limites intégrales de type Riemann-Stieltjes et ceci dans le cas où f est positive. Ils ont étudié l'existence et la multiplicité de solutions positives d'une équation différentielle non linéaire de la forme

$$-u''(t) = g(t)f(t, u(t)),$$

sous les conditions aux limites

$$u(0) = \alpha[u], u(1) = \beta[u]$$

$$u(0) = \alpha[u], u'(1) = \beta[u]$$

$$u(0) = \alpha[u], u'(1) + \beta[u] = 0$$

$$u'(0) = \alpha[u], u(1) = \beta[u]$$

$$u'(0) + \alpha[u] = 0, u(1) = \beta[u]$$

où α, β sont des fonctionnelles linéaires données par :

$$\alpha[u] = \int_0^1 u(s)dA(s), \beta[u] = \int_0^1 u(s)dB(s)$$

avec A, B sont à variation bornée.

La formulation des conditions aux limites non locales en termes de fonctionnelles linéaires comprend les conditions à multi-points et les conditions intégrales

$$\alpha[u] = \sum_{j=1}^m \alpha_j u(\eta_j), \text{ ou bien } \alpha[u] = \int_0^1 u(s)g(s)ds.$$

Initié par Picone (1908) [90], l'étude des problèmes avec des conditions aux limites non locales à multi-points a été développée par plusieurs auteurs. Concernant les problèmes avec des conditions aux limites intégrales, nous citons l'article de Whyburn (1942) [107], et les travaux de Ma

[82], Ntouyas [86], Karakostas [60], [61] et Webb [104].

Depuis, l'intérêt porté à ce type de problèmes ne cesse de croître et plusieurs auteurs ont essayé d'y apporter leur contributions ([52], [53], [60], [55], [35], [77]).

Lorsque la non-linéarité change de signe, en utilisant le théorème (2.4.7), Guo dans [45] a discuté l'existence des solutions positives pour le problème aux limites suivant

$$u'' + f(t, u) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad u(1) = \alpha u(\eta),$$

où $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

En 2008, Xu [24] a étudié le problème non linéaire aux limites à m -points

$$u''(t) + f(t, u) = 0 \quad 0 < t < 1,$$

$$\beta u(0) - \gamma u'(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i).$$

où $\beta \geq 0, \gamma > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m-3, \alpha_{m-2} > 0, 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1, 0 < \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \xi_i < 1$ et le terme non linéaire f change de signe.

En 2010, Liu [57] a prouvé l'existence d'au moins deux solutions positives pour le problème aux limites du second ordre

$$(\varphi_p u')' + f(t, u) = 0 \quad 0 < t < 1,$$

$$a u(0) - b u'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i), \quad u(1) = \int_0^1 g(s) u(s) ds.$$

où $a, b \in [0, +\infty), \alpha_i \in [0, +\infty), i = 1, 2, \dots, m-2, 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1, m \geq 3, \varphi_p(u) = |u|^{p-2}u, p > 1, \varphi_q = \varphi_p^{-1}, \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Les travaux cités précédemment imposent en général des conditions de non résonance. Par ailleurs, les articles [75], [78], [51], [74], [54] complètent cette étude dans le cas de résonance où le terme non linéaire est positif. Par exemple, dans [54], Infante et Zima ont considéré le cas de résonance en étudiant le problème aux limites suivant

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.4)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i u(\eta_i), \quad (3.5)$$

où $0 < \eta_i < 1$ et $\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i = 1$, en se basant sur le théorème (2.4.5).

Et, en 2013, Liu et Ouyang [74] ont traité un autre cas de résonance en étudiant l'existence de solutions positives multiples pour le problème aux limites suivant :

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.6)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \alpha \int_0^1 u(s) ds, \quad (3.7)$$

où $0 < \eta_i < 1$, $\frac{1}{2}\alpha\eta^2 = 1$.

Dans le but de généraliser le résultat de Karakostat [60], nous montrons l'existence d'au moins deux solutions positives pour le problème aux limites (3.1)-(3.3) en utilisant le théorème (2.4.7).

Inspiré par les papiers [24], [57], nous étudions le problème posé dans [60], en passant aux opérateurs intégraux associés et ceci en utilisant la fonction de Green.

L'originalité de notre travail tient au fait que les questions d'existence pour des problèmes aux limites non locaux dans le cas où la non-linéarité change de signe n'ont été que très rarement abordé dans la littérature. On s'est par la suite doublement démarqués en poussant notre réflexion à l'étude d'un "sous type de ces problèmes" en l'occurrence les problèmes aux limites avec une condition intégrale de type Stieltjes dans le cas où le terme non linéaire change de signe.

Les hypothèses considérées dans notre travail sur f et g sont :

(H1) $0 < \alpha < \beta < 1$ et $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante, continue à gauche en $t = \beta$, continue à droite en $t = \alpha$ et telle que $\beta(g(\beta) - g(\alpha)) < 1$.

(H2) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $f(0) \geq 0$ ($\neq 0$).

(H3) $q : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est continue, non identiquement nulle sur $[\beta, 1]$, et $\int_0^1 q(t) dt < \infty$.

3.1.2 Résultats auxiliaires

Nous présentons quelques lemmes importants pour prouver notre résultat principal.

Soient I l'intervalle $[0, 1]$, et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de Banach défini par (1.1), (1.2).

Soit $E_0 = \{x \in E : x(0) = 0\}$. L'espace E_0 est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{t \in [0, 1]} |u(t)|.$$

Commençons par introduire le lemme (3.1.1), qui sera essentiel pour la construction des cônes K et K' cités dans le théorème (2.4.7).

Lemme 3.1.1. *Si $u \in E_0$ est une fonction concave vérifiant (3.3) et g une fonction satisfaisant (H1), alors nous avons*

- (i) $u(t) \geq 0, t \in [0, 1]$ et
(ii) $u(t) \geq \mu \|u\|, \quad t \in [\alpha, 1],$

où

$$\mu := \min \{ \gamma, 1 - \beta, (\beta - \alpha)\gamma g(\beta) \},$$

et

$$\gamma := \min \left\{ \alpha, 1 - \beta, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \right\}.$$

(notons que $0 < \mu < 1$.)

Démonstration. (i) Si $u(1) \geq 0$, alors la concavité de u et le fait que $u(0) = 0$, entraînent

$$u(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1].$$

supposons au contraire que $u(1) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\xi_u \in [\alpha, \beta]$ tel que $u(1) = u(\xi_u)g(\beta)$ (notons que $g(\alpha) = 0$).

En outre, $g(\beta) > 0$ et $u(1) < 0$, impliquent $u(\xi_u) < 0$. Et comme $\beta g(\beta) < 1$, alors nous obtenons

$$u(1) = g(\beta)u(\xi_u) > \frac{1}{\beta}u(\xi_u) \geq \frac{1}{\xi_u}u(\xi_u),$$

ce qui contredit la concavité de u .

(ii) Commençons par montrer que si u est une fonction concave dans E_0 , alors

$$u(t) \geq \gamma \|u\|, \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Supposons que $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\|u\| = u(t_0)$. Nous distinguons trois cas :

1. Si $\beta \leq t_0$, alors $s \leq t_0$, pour tout $s \in [\alpha, \beta]$, et puisque u est une fonction concave, nous avons

$$su(t_0) \leq t_0u(s),$$

par suite

$$\alpha \|u\| \leq s \|u\| \leq t_0 u(s) \leq u(s),$$

et comme

$$\gamma = \min \left\{ \alpha, 1 - \beta, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \right\},$$

alors

$$u(s) \geq \gamma \|u\|.$$

2. Si $\alpha \leq t_0 \leq \beta$, alors nous considérons deux sous cas

(a) Si $s \in [\alpha, t_0]$, en suivant le même argument que dans le cas 1, nous obtenons

$$u(s) \geq \gamma \|u\|.$$

(b) Si $s \in (t_0, \beta]$, alors observons que par la concavité de u , nous avons

$$\frac{1-s}{1-t_0} \leq \frac{u(s) - u(1)}{u(t_0) - u(1)},$$

ceci implique

$$\begin{aligned} (1-s)u(t_0) &\leq (1-t_0)u(s) + (t_0-s)u(1) \\ &\leq (1-t_0)u(s) \quad \text{car } (t_0 \leq s), \end{aligned}$$

et puisque $s \leq \beta$ et $t_0 \geq \alpha$, alors

$$(1-\beta)u(t_0) \leq (1-\alpha)u(s),$$

d'où

$$\frac{1-\beta}{1-\alpha} \|u\| \leq u(s),$$

et finalement

$$u(s) \geq \gamma \|u\|.$$

3. Si $t_0 < \alpha$, alors $t_0 < s$ pour tout $s \in [\alpha, \beta]$, en suivant le même argument que dans le cas 2, nous obtenons

$$(1-s)u(t_0) \leq (1-t_0)u(s),$$

d'où

$$(1-\beta)\|u\| \leq u(s),$$

et donc

$$u(s) \geq \gamma \|u\|.$$

Maintenant, nous allons montrer que

$$u(s) \geq \mu \|u\|, \quad s \in [\alpha, 1],$$

nous distinguons deux cas, $u(\beta) < u(1)$ et $u(1) \leq u(\beta)$.

- Si $u(\beta) < u(1)$, alors de la concavité de u , nous avons $u(\beta) \leq u(s)$ pour tout $s \geq \beta$. Par conséquent, par la première partie de la preuve, pour tout $s \in [\alpha, 1]$, nous avons

$$u(s) \geq \min \{ \min \{ u(s) : s \in [\alpha, \beta] \}, \min \{ u(s) : s \in [\beta, 1] \} \},$$

et par suite $u(s) \geq \min \{ \gamma \|u\|, u(\beta) \} = \gamma \|u\|$.

- Si $u(1) \leq u(\beta)$, par la concavité, nous avons $u(s) \geq u(1)$, pour tout $s \in [\beta, 1]$. Par conséquent, par (3.3), pour chaque s nous avons

$$u(s) \geq \int_{\alpha}^{\beta} u(r) dg(r) \geq \gamma \|u\| (\beta - \alpha) g(\beta),$$

comme

$$\mu = \min \{ \gamma, 1 - \beta, (\beta - \alpha) \gamma g(\beta) \},$$

alors les deux cas impliquent

$$u(s) \geq \mu \|u\|.$$

Ce qui achève la preuve. □

Dans le résultat suivant, nous déterminons la solution du problème linéaire correspondant à 3.1-3.2 .

Lemme 3.1.2. *Soit $\delta = 1 - \int_{\alpha}^{\beta} r dg(r) > 0$, si $y \in E$. Alors le problème*

$$u''(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.8)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(r) dg(r), \quad (3.9)$$

admet une unique solution,

$$u(t) = \frac{t}{\delta} \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{t}{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r (r-s)y(s)ds dg(r) - \int_0^t (t-s)y(s)ds. \quad (3.10)$$

Démonstration. Par (3.8), nous avons

$$u''(t) = -y(t).$$

Pour $t \in [0, 1)$, l'intégration de 0 à t , donne

$$u'(t) = u'(0) - \int_0^t y(s)ds.$$

Pour $t \in [0, 1]$ l'intégration de 0 à t , implique

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t \left(\int_0^r y(s)ds \right) dr,$$

L'intégrale double est étendue au domaine triangulaire du plan des r, s , $0 \leq s \leq r$, $0 \leq r \leq t$, donc en changeant l'ordre des intégrations, nous obtenons

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t y(s)ds \int_s^t dr,$$

Par suite

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t (t-s)y(s)ds, \quad (3.11)$$

d'où

$$u(1) = u'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

En intégrant (3.11) de α à β , où $0 < \alpha < \beta < 1$, nous trouvons

$$\int_\alpha^\beta u(r)dg(r) = - \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r) + u'(0) \int_\alpha^\beta rdg(r).$$

Par (3.3), nous obtenons

$$u'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds = u'(0) \int_\alpha^\beta rdg(r) - \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r),$$

d'où

$$u'(0)(1 - \int_\alpha^\beta rdg(r)) = \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r),$$

et comme $\delta = 1 - \int_\alpha^\beta rdg(r) > 0$,

alors

$$u'(0) = \frac{1}{\delta} \left(\int_0^1 (1-s)y(s)ds - \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r) \right).$$

Et par conséquent, (3.8)-(3.9) admet une unique solution

$$u(t) = \frac{t}{\delta} \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{t}{\delta} \int_\alpha^\beta \int_0^r (r-s)y(s)dsdg(r) - \int_0^t (t-s)y(s)ds.$$

□

La fonction de Green du problème homogène associé à 3.8-3.8 est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.1.3. *Supposons que $\delta = 1 - \int_{\alpha}^{\beta} rdg(r) > 0$. Alors le problème aux limites*

$$u''(t) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(r)dg(r),$$

a pour fonction de Green

$$G(t, s) = \frac{1}{\delta} \begin{cases} s \int_{\alpha}^{\beta} (t-r)dg(r) + s(1-t) & \text{si } 0 \leq s < t < r \leq \beta \text{ ou } 0 \leq s < r < t \leq 1 \\ (t-s) \int_{\alpha}^{\beta} rdg(r) + s(1-t) & \text{si } \alpha \leq r \leq s \leq t \leq 1 \\ t \int_{\alpha}^{\beta} (s-r)dg(r) + t(1-s) & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq r \leq \beta \\ (1-s)t & \text{si } \alpha \leq r \leq t \leq s \leq 1 \text{ ou } 0 \leq t < r \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Démonstration. Si $0 \leq t \leq r$, alors l'unique solution (3.10) donnée par le lemme (3.1.2) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\delta} \left[\int_0^t \left(s \int_{\alpha}^{\beta} (t-r)dg(r) + s(1-t) \right) y(s)ds \right] \\ &+ \frac{1}{\delta} \left[\int_t^r \left(t(1-s) + t \int_{\alpha}^{\beta} (s-r)dg(r) \right) y(s)ds + \int_r^1 t(1-s)y(s)ds \right]. \end{aligned}$$

Si $r \leq t \leq 1$, alors l'unique solution (3.10) peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\delta} \left[\int_0^r \left(s \int_{\alpha}^{\beta} (t-r)dg(r) + s(1-t) \right) y(s)ds \right] \\ &+ \frac{1}{\delta} \left[\int_r^t \left((t-s) \int_{\alpha}^{\beta} rdg(r) + s(1-t) \right) y(s)ds + \int_t^1 t(1-s)y(s)ds \right]. \end{aligned}$$

□

3.1.3 Formulation abstraite

Pour préparer l'application du théorème (2.4.7), nous prouvons quelques résultat auxiliaires permettant de vérifier toutes les conditions du théorème.

Définissons les ensembles K et K' dans E par

$$K = \{u \in E : u(t) \geq 0, t \in [0, 1]\},$$

et

$$K' = \{u \in E_0 : u \text{ est une fonction concave sur } [0, 1], \text{ et vérifie la condition (3.3)}\}.$$

Il est clair que K , et K' sont deux cônes dans E tel que $K' \subset K$. Pour tout $u \in K$, nous définissons

$$\theta(u) = \min_{\alpha \leq t \leq 1} u(t),$$

et les opérateurs T , A et T^* par :

$T : K \rightarrow K$, $A : K \rightarrow E$ et $T^* : K' \rightarrow K'$, tels que

$$Tu(t) = \left[\int_0^1 G(t, s)q(s)f(u(s))ds \right]^+, \quad \text{pour tout } t \in [0, 1],$$

$$Au(t) = \int_0^1 G(t, s)q(s)f(u(s))ds, \quad \text{pour tout } t \in [0, 1],$$

$$T^*u(t) = \int_0^1 G(t, s)q(s)f^+(u(s))ds. \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Pour $x \in E$, nous définissons la fonction $\Psi : E \rightarrow K$ telle que :

$$\Psi(x) = x^+ = \max \{x, 0\}. \quad (3.12)$$

De 3.12, nous avons

$$T = \Psi \circ A.$$

Les lemmes suivants sont utilisés pour montrer notre résultat principal.

Lemme 3.1.4. $T^* : K' \rightarrow K'$ est complètement continu.

Démonstration. Soit $u \in K'$, puisque $f^+(u(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors

$$(T^*u)''(t) = -q(t)f^+(u(t)) \leq 0,$$

ceci implique que T^*u est une fonction concave. De plus, T^*u satisfait les conditions (3.2), (3.3). Donc $T^* : K' \rightarrow K'$. En utilisant la continuité de f et la définition de f^+ , nous pouvons facilement montrer que T^* est complètement continu par le théorème d'Ascoli-Arzelà (1.1.1). \square

Lemme 3.1.5. Si $A : K \rightarrow X$ est complètement continu, alors $T = \psi \circ A : K \rightarrow K$ est complètement continu.

Démonstration. L'opérateur A est complètement continu implique que A est continu et transforme tout ensemble borné de X en un ensemble relativement compact. Notons ψy par \bar{y} .

Pour une fonction donnée $h \in X$, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\|Ah - Ak\| < \varepsilon \text{ pour } k \in X, \|h - k\| < \sigma.$$

Puisque

$$\begin{aligned} |(\psi Ah)(t) - (\psi Ak)(t)| &= |\max\{(Ah)(t), 0\} - \max\{(Ak)(t), 0\}| \\ &\leq |(Ah)(t) - (Ak)(t)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

alors

$$\|(\psi A)h - (\psi A)k\| < \varepsilon \text{ pour } k \in X, \|h - k\| < \sigma,$$

et donc ψA est continu.

Pour un ensemble borné $D \subset X$ et pour $\varepsilon > 0$, il existe $y_i, i = 1, \dots, m$ tel que

$$AD \subset \bigcup_{i=1}^m \beta(y_i, \varepsilon),$$

où $\beta(y_i, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - y_i\| < \varepsilon\}$, alors pour tout $\bar{y} \in (\psi \circ A)(D)$, il existe $y \in AD$ tel que $\bar{y}(t) = \max\{y(t), 0\}$. Nous choisissons un $y_i \in \{y_1, \dots, y_m\}$ tel que

$$\max_{t \in [0,1]} |y(t) - y_i(t)| < \varepsilon.$$

Puisque

$$\max_{t \in [0,1]} |\bar{y}(t) - \bar{y}_i(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |y(t) - y_i(t)| < \varepsilon,$$

alors

$$\bar{y} \in B(\bar{y}_i, \varepsilon),$$

et donc $(\psi \circ A)(D)$ est relativement compact. □

Par la continuité de f , il est facile de voir que $A : K \rightarrow E$ est complètement continu. Donc $T : K \rightarrow K$ est complètement continu par le lemme (3.1.5).

Lemme 3.1.6. *Si u est point fixe de l'opérateur T alors u est aussi point fixe de l'opérateur A*

Démonstration. Soit u un point fixe de l'opérateur T . Evidemment si $Au(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors u est un point fixe de A . Montrons que si $Tu(t) = u(t)$, alors $Au(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Supposons le contraire, alors il existe $t_0 \in (0, 1)$ tel que $Au(t_0) < 0 = u(t_0)$. Soit (t_1, t_2) l'intervalle maximal qui contient t_0 tel que $Au(t) < 0, t \in (t_1, t_2)$. Il suit que $[t_1, t_2] \neq [0, 1]$ par (H2).

Si $t_2 < 1$, nous avons $u(t) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, $Au(t) < 0$ pour $t \in (t_1, t_2)$ et $Au(t_2) = 0$ donc $(Au)'(t_2) = 0$. Par (H2) nous avons $(Au)''(t) = -q(t)f(0) \leq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, donc $(Au)'(t) \geq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Nous obtenons $t_1 = 0$. Par conséquent, $Au(0) \leq Au(t_0) < 0$,

contradiction.

Si $t_1 > 0$, nous avons $u(t) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, $Au(t) < 0$ pour $t \in (t_1, t_2)$ et $(Au)'(t_1) \leq 0$. Par (H2) nous avons $(Au)''(t) = -q(t)f(0) \leq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, donc $t_2 = 1$. Par la concavité de Au sur $[t_1, 1]$ nous avons

$$\frac{|(Au)(s)|}{s - t_1} \leq \frac{|(Au)(1)|}{1 - t_1},$$

ceci implique

$$|(Au)(s)| \leq \frac{s - 1}{1 - t_1} |(Au)(1)| < s |(Au)(1)|,$$

par suite

$$\int_{\alpha}^{\beta} |Au(s)| dg(s) \leq \int_{\alpha}^{\beta} s |(Au)(1)| dg(s) < |(Au)(1)|.$$

D'autre part

$$|(Au)(1)| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} Au(s) dg(s) \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |Au(s)| dg(s),$$

Ceci est une contradiction. Par conséquent u est un point fixe de l'opérateur A . \square

Lemme 3.1.7. *u est solution du problème aux limites (3.1)-(3.3) si et seulement si u est point fixe de l'opérateur A .*

3.1.4 Etude de l'existence de solutions positives

En appliquant le théorème (2.4.7), nous montrons l'existence de deux solutions positives pour le problème aux limites (3.1)-(3.3).

Notre résultat est formulé comme suit :

Théorème 3.1.1. *S'il existe des constantes positives a , b , et d telles que*

$$0 < \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1 - s) dg(s)} \right\} d < a < \mu b < b,$$

et f satisfait en plus de (H1)-(H3), les conditions suivantes :

(H4) $f(u) \geq 0$ pour $u \in [d, b]$;

(H5) $\frac{M_a}{\delta} \int_0^1 (1 - s) q(s) ds < a$, où

$$M_a = \sup_{\|u\|=a} |f(u)|.$$

(H6) $b(1 - \alpha g(\beta)) \leq m_b \alpha \int_{\beta}^1 (1 - s) q(s) ds$, où

$$m_b = \inf \{ f(u) : u \in [\mu b, b] \}.$$

Alors, (3.1)-(3.3) admet au moins deux solutions positives u_1 et u_2 telles que

$$0 \leq \|u_1\| < a < \|u_2\|, \theta(u_2) < b$$

Démonstration. Pour tout $u \in \partial K_a$, par (H5), nous avons

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \max_{t \in [0,1]} \left[\int_0^1 G(t,s)q(s)f(u(s))ds \right]^+ \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \max \left\{ \int_0^1 G(t,s)q(s)f(u(s))ds, 0 \right\} \\ &\leq M_a \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s)q(s)ds \\ &\leq \frac{M_a}{\delta} \int_0^1 (1-s)q(s)ds \quad (\text{car } \max_{t \in [0,1]} G(t,s) = \frac{1-s}{\delta}) \\ &< a. \end{aligned}$$

Donc (C1) du théorème (2.4.7) est satisfaite. Pour $u \in \partial K'_a$; i.e., $\|u\| = a$. Par (H5), nous avons

$$\begin{aligned} \|T^*u\| &= \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s)q(s)f^+(u(s))ds \\ &\leq M_a \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s)q(s)ds \\ &\leq \frac{M_a}{\delta} \int_0^1 (1-s)q(s)ds \\ &< a. \end{aligned}$$

Soit $u \in \partial K'(\mu b)$; i.e., $u \in K'$ et $\theta(u) = \mu b$. Pour $t \in [\alpha, 1]$, nous avons d'une part

$$\mu b = \theta(u) = \min_{t \in [\alpha, 1]} u(t) \geq \mu \|u\| \quad (\text{d'après le lemme (3.1.1)}),$$

d'où

$$\|u\| \leq b,$$

d'autre part

$$u(t) \geq \min_{t \in [\alpha, 1]} u(t) = \theta(u) = \mu b,$$

donc

$$\mu b \leq u(t) \leq \|u\| \leq b,$$

et par conséquent

$$f(u(s)) \geq m_b, \quad \text{pour } s \in [\beta, 1]. \quad (3.13)$$

Observons que l'unique solution du problème aux limites

$$x''(t) + q(t)f^+(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.14)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \int_{\alpha}^{\beta} x(s)dg(s),$$

est la fonction $x(t)$ donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= T^*u(t) = \int_0^1 G(t, s)q(s)f^+(u(s))ds \\ &= \frac{t}{\delta} \int_0^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds - \frac{t}{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r (r-s)q(s)f^+(u(s))dsdg(r) \\ &\quad - \int_0^t (t-s)q(s)f^+(u(s))ds. \end{aligned}$$

Posons

$$E(x) = \left\{ \xi \in [\alpha, \beta] : \int_{\alpha}^{\beta} x(s)dg(s) = x(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} dg(s) = x(\xi)g(\beta) \right\}$$

l'ensemble des valeurs moyennes de x (x est solution de (3.14)). Evidemment $E(x)$ est un ensemble compact. Considérons le point

$$\xi_x = \min E(x).$$

Il est clair que x est la solution du problème aux limites

$$y''(t) + q(t)f^+(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = y(\xi_x)g(\beta),$$

et donc, x est donnée par la formule

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t}{\tau_x} \int_0^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds - \frac{t}{\tau_x} g(\beta) \int_0^{\xi_x} (\xi_x - s)q(s)f^+(u(s))dsdg(r) \\ &\quad - \int_0^t (t-s)q(s)f^+(u(s))ds, \end{aligned}$$

Pour $t \in [0, 1]$, où

$$\tau_x = 1 - \xi_x g(\beta) > 0.$$

Notons que pour $\alpha \leq \xi_x \leq \beta$, nous avons

$$(T^*u)(\xi_x) = x(\xi_x) = \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds - \frac{\xi_x}{\tau_x} g(\beta) \int_0^{\xi_x} (\xi_x - s)q(s)f^+(u(s))dsdg(r)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\xi_x} (\xi_x - s)q(s)f^+(u(s))ds, \\
& = \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds - \frac{1}{\tau_x} \int_0^{\xi_x} (\xi_x - s)q(s)f^+(u(s))ds, \\
& = \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^1 q(s)f^+(u(s))ds - \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^1 sq(s)f^+(u(s))ds \\
& \quad - \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_0^{\xi_x} q(s)f^+(u(s))ds + \frac{1}{\tau_x} \int_0^{\xi_x} sq(s)f^+(u(s))ds, \\
& = \frac{\xi_x}{\tau_x} \int_{\xi_x}^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds + \frac{1}{\tau_x}(1-\xi_x) \int_0^{\xi_x} sq(s)f^+(u(s))ds.
\end{aligned}$$

En utilisant (H6), et (3.13), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
(T^*u)(\xi_x) & \geq \frac{\alpha}{\tau_x} \int_{\beta}^1 (1-s)q(s)f^+(u(s))ds \\
& \geq \frac{\alpha b m_b}{\tau_x} \int_{\beta}^1 (1-s)q(s)ds \\
& \geq \frac{1}{\tau_x} (1 - \alpha g(\beta))b \\
& \geq \frac{1}{\tau_x} (1 - \xi_x g(\beta))b \\
& \geq b.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|T^*u\| \geq b,$$

or

$$\theta(T^*u) = \min_{t \in [\alpha, 1]} T^*u(t) \geq \mu \|T^*u\|,$$

d'où

$$\theta(T^*u) \geq \mu b$$

Donc (C2) du théorème (2.4.7) est satisfaite.

Soit $u \in K'_a(\mu b) \cap \{u : T^*u = u\}$, alors

$$\|u\| > a > \frac{1}{\mu} \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} \right\} d.$$

Par (ii) du lemme (3.1.1), nous avons

$$u(\alpha) \geq \min_{t \in [\alpha, 1]} u(t) \geq \mu \|u\| > \mu \frac{1}{\mu} \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} \right\} d,$$

d'où

$$u(\alpha) > \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} \right\} d. \quad (3.15)$$

Si $u(1) \geq d$, alors nous avons $u(t) \geq d$ pour tout $t \in [0, 1]$. Supposons que $u(1) < d$. Comme u est concave, alors pour $s \in [\alpha, 1]$ nous avons

$$\frac{1}{1-s} \geq \frac{1-\alpha}{1-s} \geq \frac{u(\alpha) - u(1)}{u(s) - u(1)},$$

ceci implique

$$u(\alpha)(1-s) \leq u(s) - su(1),$$

d'où

$$u(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s) \leq \int_{\alpha}^{\beta} u(s) dg(s) - \int_{\alpha}^{\beta} su(1) dg(s).$$

Par (3.3), nous obtenons

$$u(\alpha) \leq \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} u(1) < \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} d \leq \max \left\{ 1, \frac{1 - \int_{\alpha}^{\beta} s dg(s)}{\int_{\alpha}^{\beta} (1-s) dg(s)} \right\} d,$$

ce qui contredit (3.15). Donc, $u(1) \geq d$. Par conséquent, pour $u \in K'_a(\mu b) \cap \{u : T^*u = u\}$, nous avons

$$d \leq u(t) \leq \|u\| \leq \mu b \leq b.$$

Par (H4), nous obtenons

$$f^+(u(s)) = f(u(s)),$$

ceci implique que

$$Tu = T^*u.$$

D'où les conditions du théorème (2.4.7) sont satisfaites. Donc T admet au moins deux points fixes u_1 et u_2 dans K , tels que

$$0 \leq \|u_1\| < a < \|u_2\|, \theta(u_2) < b.$$

Ce qui achève la preuve. □

3.1.5 Exemple

Dans cette section, nous présentons un exemple pour illustrer notre résultat.

Considérons le problème aux limites d'ordre 2 suivant :

$$u''(t) + q(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.16)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \int_{\alpha}^{\beta} u(s)dg(s), \quad (3.17)$$

où $\alpha = \frac{1}{8}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $q(t) = \frac{1}{2}$,

$$g(s) = \begin{cases} s, & \frac{1}{8} \leq s < \frac{1}{4}, \\ 2 & s = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

et

$$f(u) = \frac{1}{8} \begin{cases} \frac{1}{42}(u+1)(u+2), & 0 < u \leq 5, \\ (u-4)^3 e^{u-5} & 5 \leq u \leq 384, \\ (-u+764)^3 e^{u-5} & u \geq 384. \end{cases}$$

f change de signe.

Soit $\gamma = \frac{1}{8}$, $\mu = \frac{1}{32}$, $d = \frac{1}{11}$, $a = 5$, et $b = 384$. il est facile de voir que

$$f(u) > 0 \quad \text{pour tout } u \in [\frac{1}{11}, 384],$$

$$f(u) < \frac{5}{8} \quad \text{pour tout } u \in [0, 5],$$

$$f(u) \geq 16384 \quad \text{pour tout } u \in [12, 384].$$

Donc les conditions du théorème (3.1.1) sont vérifiées. Alors le problème (3.1)-(3.3) admet au moins deux solutions positives.

3.2 Intervalle non borné

Nous présentons dans la suite un résultat d'existence pour un problème de Sturm-Liouville sur la demi droite (soumis pour publication).

3.2.1 Introduction

L'existence de solutions positives pour les problèmes aux limites de type Sturm-Liouville sur un intervalle borné a focalisé beaucoup d'intérêt, voir, [2], [6], [113]. La plupart des résultats ont été obtenus en utilisant le théorème (2.4.2), dans le cas où le terme non linéaire est tenu d'être non négatif ou au moins borné.

Au cours de ces dernières années, l'étude de l'existence et de la multiplicité de solutions positives pour les problèmes aux limites définis sur un intervalle non borné a connu un essor des plus considérables. Il existe de nombreux documents concernant l'existence et la multiplicité de solutions sur la demi-droite, voir [72], [79], [100], [109], [118]. Pour plus d'informations sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur au livre de Agarwal et O'Regan [3].

Nous présentons dans ce qui suit quelques articles tirés de la littérature traitant de ce sujet.

Anuradha et Hai [6] ont étudié le problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} (p(t)u'(t))' + \lambda f(t, u(t)) = 0, \quad r < t < R, \\ au(r) - bp(r)u'(r) = 0, \\ cu(R) + dp(R)u'(R) = 0. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Sous les conditions

$$(A1) \quad P \in C([r, R], (0, \infty)),$$

$$(A2) \quad \lambda > 0, a, b, c, d \in [0, \infty) \text{ avec } ac + ad + bc > 0,$$

$$(A3) \quad f \in C([r, R](0, \infty), \mathbb{R}) \text{ et il existe une constante } M \text{ telle que } f(t, u) \geq -M \text{ pour tout } t \in [r, R] \text{ et } u > 0.$$

Dans l'article [2], Agarwal et Hong ont montré l'existence de solutions positives pour le problème (3.18), dans le cas où $r = 0$ et $R = 1$, sous les mêmes hypothèses (A1), (A2) et (A3).

En utilisant le théorème de point fixe dans un cône, Lian et Ge [71] ont obtenu un ensemble de conditions techniques et restrictives qui garantissent l'existence, l'unicité, et la multiplicité des solutions positives pour un problème aux limites de type Sturm-Liouville défini sur la demi droite où la non-linéarité f peut changer de signe.

En considérant des conditions différentes de celles de [71] et en appliquant une autre variante du théorème de Krasnoselskii (théorème (2.4.7)), nous établissons de l'existence et de la multiplicité des solutions positives pour un problème aux limites de type Sturm-Liouville défini sur l'intervalle infini,

Il nous paraît essentiel de souligner que la méthodologie adoptée dans notre recherche diffère en tous points de celle dans [71], et par conséquent, nos résultats ne s'en retrouvent que plus originaux. En effet, nous considérons le problème aux limites suivant

$$(P) \quad \begin{cases} (\psi(t)u'(t))' + \phi(t)f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < +\infty, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 \psi(0)u'(0) = 0, \\ \alpha_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) + \beta_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)u'(t) = 0. \end{cases}$$

Où ψ , ϕ et f satisfont les hypothèses suivantes,

$$(H1) \quad (i) \quad \psi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+), \int_0^{+\infty} \frac{1}{\psi(s)} ds < +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} < +\infty,$$

$$(ii) \quad \alpha_i, \beta_i > 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

$$(H2) \quad \phi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+)$$

$$(H3) \quad (i) \quad f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ et continue, et peut changer de signe,}$$

$$(ii) \quad f(t, 0) \geq 0 \text{ et } f \not\equiv 0 \text{ pour tout } t \text{ dans } [0, +\infty).$$

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} f(t, s) < +\infty \text{ pour tout } s \in [0, +\infty).$$

Afin de démontrer l'existence des solutions positives de (P) , nous considérons une suite de problèmes $(P_n)_n$, définie, pour $n \geq 1$, par,

$$(P_n) \quad \begin{cases} (\psi(t)u'(t))' + \phi(t)f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < n, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 \psi(0)u'(0) = 0, \\ \alpha_2 u(n) + \beta_2 \psi(n)u'(n) = 0. \end{cases}$$

D'abord, nous montrons que le problème aux limites (P_n) admet au moins deux solutions positives u_n et v_n . Sous des conditions spécifiées par la suite, nous montrons que les solutions u_n, v_n

du problème (P_n) convergent respectivement vers u, v solutions du problème (P) , quand n tend vers $+\infty$.

3.2.2 Résultats auxiliaires

Nous présentons quelques lemmes importants pour prouver notre résultat principal.

Pour $n \geq 1$, notons I l'intervalle $[0, n]$, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de Banach défini par (1.1), (1.2), et $L^1(I)$ l'espace des fonctions intégrables sur I .

A travers le lemme suivant, nous déterminons la solution du problème linéaire associé à (P_n)

Lemme 3.2.1. *Supposons que la condition (H1) est vérifiée. Alors pour tout $y \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$, le problème aux limites*

$$(P_n1) \quad \begin{cases} (\psi(t)u'(t))' + y(t) = 0, & 0 < t < n, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 \psi(0)u'(0) = 0, \\ \alpha_2 u(n) + \beta_2 \psi(n)u'(n) = 0. \end{cases}$$

admet une unique solution positive

$$u(t) = \int_0^n G_n(t, s)y(s)ds, \quad (3.19)$$

où $G_n(t, s)$ est définie par

$$G_n(t, s) = \frac{1}{\rho_n} \begin{cases} \xi(t)\eta(s), & 0 \leq t \leq s < n, \\ \xi(s)\eta(t), & 0 \leq s \leq t < n, \end{cases} \quad (3.20)$$

avec

$$\xi(t) = \beta_1 + \alpha_1 \int_0^t \frac{1}{\psi(\tau)} d\tau, \quad \eta(t) = \beta_2 + \alpha_2 \int_t^n \frac{1}{\psi(\tau)} d\tau,$$

et

$$\rho_n = \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^n \frac{1}{\psi(s)} ds > 0.$$

Remarque 4. De 3.20, pour $n \geq 1$, G_n satisfait les propriétés suivantes :

1) $0 \leq G_n(t, s) \leq G_n(s, s)$ pour tout $t, s \in I$,

2) Il existe un $\delta \in (0, 1)$ (par exemple, on peut prendre $\delta = \frac{1}{N_0}$) telle que,

$G_n(t, s) \geq \gamma(t)G_n(s, s)$ pour tout $t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$ et $s \in I$, où

$$\gamma(t) = \min \left\{ \frac{\beta_1 + \alpha_1 \int_0^t \frac{1}{\psi(\tau)} d\tau}{\beta_1 + \alpha_1 \int_0^\infty \frac{1}{\psi(\tau)} d\tau}, \frac{\beta_2 + \alpha_2 \int_t^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{\psi(\tau)} d\tau}{\beta_2 + \alpha_2 \int_0^\infty \frac{1}{\psi(\tau)} d\tau} \right\} \quad (3.21)$$

À partir de la remarque ci-dessus, nous avons le résultat suivant,

Lemme 3.2.2. Si $y \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$, alors l'unique solution positive $u(t)$ du problème aux limites (P_n1) satisfait

$$u(t) \geq \mu \|u\|, \quad \text{pour } t \in [\delta, \frac{1}{\delta}],$$

avec

$$0 < \mu = \min_{\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}} \gamma(t) < 1. \quad (3.22)$$

3.2.3 Inversion du problème

Définissons les ensembles K et K' dans E par

$$K = \{u \in E : u(t) \geq 0, t \in I\},$$

et

$$K' = \left\{ u \in K : u(t) \geq \mu \|u\| \text{ pour } \delta \leq t \leq \frac{1}{\delta} \right\}.$$

Il est clair que, K , et K' sont deux cônes de E , avec $K' \subset K$.

Pour tout $u \in K'$, nous définissons

$$\theta(u) = \min_{\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}} u(t),$$

et les opérateurs T , A , T^* par :

$T : K \rightarrow K$, $A : K \rightarrow X$ et $T^* : K' \rightarrow K'$, tels que :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \left[\int_0^n G_n(t, s) \phi(s) f(s, u(s)) ds \right]^+, & \text{pour tout } t \in I, \\ Au(t) &= \int_0^n G_n(t, s) \phi(s) f(s, u(s)) ds, & \text{pour tout } t \in I, \\ T^*u(t) &= \int_0^n G_n(t, s) \phi(s) f^+(s, u(s)) ds, & \text{pour tout } t \in I. \end{aligned}$$

Pour $x \in E$, nous définissons la fonction $\varphi : E \rightarrow K$ telle que :

$$\varphi(x) = x^+ = \max\{x, 0\}. \quad (3.23)$$

De 3.23, nous avons

$$T = \varphi \circ A.$$

Remarque 5. *Par les lemmes (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6) et (3.1.7), nous avons les résultats suivants*

1. $T^* : K' \rightarrow K'$ est complètement continu.
2. Si $A : K \rightarrow E$ est complètement continu, alors $T = \varphi \circ A : K \rightarrow K$ est aussi complètement continu.
3. Si u est point fixe de l'opérateur T alors u est aussi point fixe de l'opérateur A .
4. u est une solution du BVP (P_n) si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur A .

3.2.4 Résultat principal

Nous montrons l'existence de deux solutions positives pour le problème aux limites (P) . Premièrement, nous définissons,

$$M_1 = \int_0^{+\infty} G_1(s)\phi(s)ds, \quad M_2 = \int_{\delta}^{\frac{1}{\delta}} G_2(s)\phi(s)ds,$$

où

$$G_1(s) = \frac{(\beta_1 + \alpha_1 \int_0^s \frac{1}{\psi(\tau)}d\tau)(\beta_2 + \alpha_2 \int_s^{+\infty} \frac{1}{\psi(\tau)}d\tau)}{\alpha_1\beta_2},$$

et

$$G_2(s) = \frac{(\beta_1 + \alpha_1 \int_0^s \frac{1}{\psi(\tau)}d\tau)(\beta_2 + \alpha_2 \int_s^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{\psi(\tau)}d\tau)}{\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\psi(s)}ds}.$$

Il est clair que

$$0 < M_2 < \int_{\delta}^{\frac{1}{\delta}} G_n(s, s)\phi(s)ds < \int_0^{+\infty} G_n(s, s)\phi(s)ds < M_1 < +\infty.$$

Le résultat principal est donné par le théorème suivant

Théorème 3.2.1. *Supposons que les conditions (H1)-(H3) sont vérifiées et $M_1 < +\infty$. S'il existe des nombres positives a , et b tels que*

$$0 < a < \mu b < b,$$

où μ est défini par (3.22), et f satisfait les conditions suivantes :

(H4) i) $f(t, u) \geq 0$ pour $u \in [0, b]$ et pour tout $t \in [0, +\infty)$.

ii) $f(t, u) < \frac{a}{M_1}$ pour $u \in [0, a]$ et pour tout $t \in [0, +\infty)$.

iii) $f(t, u) > \frac{b}{M_2}$ pour $u \in [\mu b, b]$ et pour tout $t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$.

Alors, (P) admet au moins deux solutions positives

Démonstration. Elle est faite en deux étapes.

Etape 1 :

Soient f , ϕ et ψ vérifient (H1)-(H4). Pour $n \geq 1$, nous considérons les restrictions de f , ϕ et ψ sur I . Alors, pour le problème (P_n) nous énonçons le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.2.2. *Supposons que les conditions (H1)-(H4) sont vérifiées.*

Alors, (P_n) admet au moins deux solutions positives u_n et v_n dans K tels que

$$0 \leq \|u_n\| < a < \|v_n\|, \theta(v_n) < b.$$

Démonstration. Pour $u \in \partial K_a$; i.e., $\|u\| = a$, par (H4) (ii), nous avons, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \left[\int_0^n G_n(t, s) \phi(s) f(s, u(s)) ds \right]^+ \\ &= \max \left\{ \int_0^n G_n(t, s) \phi(s) f(s, u(s)) ds, 0 \right\} \\ &< \frac{a}{M_1} \int_0^{+\infty} G_n(s, s) \phi(s) ds \\ &< \frac{a}{M_1} M_1 = a \end{aligned}$$

D'où

$$\|Tu\| < a.$$

Donc, la condition (C1) du théorème (2.4.7) est satisfaite.

Pour $u \in \partial K'_a$; i.e., $\|u\| = a$, par (H4) (ii), nous avons, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} T^*u(t) &= \int_0^n G_n(t, s) \phi(s) f^+(s, u(s)) ds \\ &\leq \int_0^n G_n(s, s) \phi(s) f^+(s, u(s)) ds \\ &< \frac{a}{M_1} \int_0^{+\infty} G_n(s, s) \phi(s) ds \\ &< \frac{a}{M_1} M_1 = a. \end{aligned}$$

Donc

$$\|Tu^*\| < a.$$

Soit $u \in \partial K'(\mu b)$; i.e., $u \in K'$ et $\theta(u) = \mu b$, nous avons

$$\mu b = \theta(u) = \min_{t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]} u(t) \geq \mu \|u\|,$$

donc

$$\|u\| \leq b.$$

D'autre part

$$u(t) \geq \min_{t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]} u(t) = \theta(u) = \mu b, \quad \text{for } t \in [\delta, \frac{1}{\delta}],$$

D'où

$$\mu b \leq u(t) \leq \|u\| \leq b,$$

et par conséquent, par (H4) (iii)

$$f(s, u(s)) \geq \frac{b}{B_2}, \quad \text{for } s \in [\delta, \frac{1}{\delta}]. \quad (3.24)$$

Par (3.24), nous avons

$$\begin{aligned} \theta(T^*u) &= \min_{t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]} T^*u(t) \\ &= \min_{t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]} \int_0^n G_n(t, s) \phi(s) f^+(s, u(s)) ds \\ &> \frac{b}{M_2} \min_{t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]} \int_{\delta}^{\frac{1}{\delta}} G_n(t, s) \phi(s) ds \\ &> \frac{b}{M_2} \min_{t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]} \int_{\delta}^{\frac{1}{\delta}} \gamma(t) G_n(s, s) \phi(s) ds \\ &> \frac{\mu b}{M_2} \int_{\delta}^{\frac{1}{\delta}} G_n(s, s) \phi(s) ds \\ &> \frac{\mu b}{M_2} M_2 = \mu b, \end{aligned}$$

donc

$$\theta(T^*u) > \mu b,$$

et, (C2) du théorème (2.4.7) est satisfaite.

Finalement, nous montrons que (C3) du théorème (2.4.7) est satisfaite.

Soit $u \in K'_a(\mu b) \cap \{u : T^*u = u\}$, alors, nous avons

$$0 \leq u(t) \leq \|u\| \leq \frac{1}{\mu}\theta(u) < \frac{1}{\mu}\mu b = b.$$

Par (H4) (i),

$$f^+(s, u(s)) = f(s, u(s)).$$

Ceci implique que

$$Tu = T^*u.$$

D'où, les conditions du théorème (2.4.7) sont remplies. Donc T admet deux points fixes u_n et v_n dans K satisfaisant

$$0 \leq \|u_n\| < a < \|v_n\|, \theta(v_n) < b.$$

la preuve du théorème(3.2.2) est terminée. □

Etape 2 :

Pour $n \geq 1$, soit u_n une solution de (P_n) obtenue par le théorème (3.2.2). Nous définissons $U_n \in C^2(\mathbb{R}^+)$ par :

$$U_n(t) = \begin{cases} u_n(t) & t \in I, \\ u_n(n) + u'_n(n)(t-n) + u''_n(n)\frac{(t-n)^2}{2} & t \in [n, +\infty) \end{cases}$$

U_n est définie sur \mathbb{R}^+ et satisfait (P_n) .

Par le théorème (3.2.2), nous obtenons

$$u_n(t) \leq \|u_n\| < a, \quad t \in I \tag{3.25}$$

Pour $n \geq 1$, et pour tout t dans $[n, +\infty)$ nous avons,

$$\begin{aligned} U_n(t) &= u_n(n) + u'_n(n)(t-n) + u''_n(n)\frac{(t-n)^2}{2} \\ &= u_n(n) + u'_n(n)(t-n) - \frac{\psi'(n)}{\psi(n)}u'_n(n)\frac{(t-n)^2}{2} - \frac{\phi(n)}{\psi(n)}f(n, u_n(n))\frac{(t-n)^2}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième condition aux limites du problème (P_n) , nous obtenons

$$u'_n(n) = \frac{-\alpha_2}{\beta_2\psi(n)}u_n(n) \leq 0.$$

Par (H1) et (H3), il existe des constantes positives C_1 et C_2 , telles que

$$\left| \frac{\psi'(n)}{\psi(n)} \right| \leq C_1.$$

$$\left| \frac{\phi(n)}{\psi(n)} f(n, u_n(n)) \right| \leq C_2.$$

Ceci implique que

$$U_n(t) \leq a + C(t - n),$$

pour une certaine constante positive C . Alors, quand n tend vers $+\infty$, il existe une constante $a^* \geq a$ telle que pour tout $t \geq n$

$$U_n(t) < a^*.$$

Par conséquent, pour tout $n > N_0$, nous obtenons :

$$\|U_n\|_{\mathbb{R}^+} = \sup \{U_n(t), t \in \mathbb{R}^+\} < a^*.$$

Alors la suite $(U_n)_{n > N_0}$ satisfait les hypothèses suivantes :

1. Pour tout $n > N_0$, $U_n \in C^2(\mathbb{R}^+)$.
2. Pour tout $n > N_0$, U_n est solution de (P_n) .
3. $(U_n)_{n > N_0}$ est bornée sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $U_n(t)$ est bornée, donc le théorème de Bolzano Weierstrass implique que nous pouvons extraire de $(U_n(t))_{n > N_0}$ une sous suite, que l'on note de même, qui est convergente. Soit u sa limite :

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(t).$$

Nous concluons que u est solution de (P) .

Par le théorème (3.2.2), nous avons

$$\mu \|v_n\| \leq \theta(v_n) < \mu b.$$

Donc

$$\|v_n\| < b,$$

pour tout μ fixé, $0 < \mu < 1$.

Maintenant, nous procédons comme avant pour définir une extension de v_n dans \mathbb{R}^+ , notée V_n , par :

$$V_n(t) = \begin{cases} v_n(t) & t \in I, \\ v_n(n) + v'_n(n)(t - n) + v''_n(n) \frac{(t - n)^2}{2} & t \in [n, +\infty) \end{cases}$$

Par (H1)-(H4), et la définition de V_n , il existe une constante $b^* \geq b$ telle que pour $n \geq 1$ et pour tout $t \geq n$, nous avons,

$$V_n(t) < b^*.$$

Alors la suite $(V_n)_{n>N_0}$ satisfait les conditions (1), (2), et (3). Donc nous pouvons extraire une suite convergente de $(V_n)_{n>N_0}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, nous posons

$$v(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(t).$$

Donc v est solution de (P) .

Nous concluons que (P) admet deux solutions u et v .

□

3.2.5 Exemple

Dans cette section, nous présentons un exemple pour illustrer notre résultat principal.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\psi(t)u'(t))' + \phi(t)f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 \psi(0)u'(0) = 0, \\ \alpha_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) + \beta_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)u'(t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

où $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$, $\psi(t) = e^t$, $\phi(t) = t(e^{-t} - e^{-2t})$, et

$$f(t, u) = \frac{1}{5} \left\{ \begin{array}{ll} e^{u-4}\sqrt{u^2+9}, & 0 < u \leq 16, \\ (17-u)e^{12}\sqrt{265} + \sin(u-16) & u \geq 16. \end{array} \right.$$

f est positive sur $[0, 16]$, et change de signe sur $[16, +\infty)$.

Soit $\delta = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $a = 4$, $b = 16$, $M_1 = 1.59$, et $M_2 = 0.37$. il est facile de voir que

$$f(t, u) \geq 0 \quad \text{pour tout } u \in [0, 16],$$

$$f(t, u) < 2.51 \quad \text{pour tout } u \in [0, 4],$$

$$f(t, u) \geq 43.24 \quad \text{pour tout } u \in [8, 16].$$

Donc les conditions du théorème (3.2.1) sont satisfaites. D'où le problème (3.26) admet au moins deux solutions positives.

Chapitre 4

Non-linéarité singulière

Travail soumis pour publication.

4.1 Introduction

Les questions liées à l'existence de solutions positives pour des problèmes aux limites singuliers conduisent à des problèmes mathématiques riches, intéressants, délicats et qui se rapportent souvent à des modèles concrets (0.3), (0.4), (0.5), (0.6) .

Récemment, les problèmes aux limites singuliers ont fait l'objet de multiples publications (voir les références [37], [73], [33], [116]).

Dans ce chapitre nous établissons l'existence des solutions positives pour le problème aux limites à m-points suivant

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4.1)$$

$$u'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), \quad (4.2)$$

où f est une non-linéarité continue, sur $[0, 1] \times]0, +\infty[$ et présente une singularité en $u = 0$ (i.e $\lim_{u \rightarrow 0^+} f(t, u) = \pm\infty$ pour tout $t \in [0, 1]$) et $\xi_i \in (0, 1)$ où $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1$, et les a_i, b_i , vérifient :

$$(A1) \quad a_i, b_i \in [0, \infty) \text{ tel que } 0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1, \quad 0 < \sum_{i=1}^{m-2} b_i < 1.$$

Il'm et Moviseev [52], [53] ont été parmi les premiers à aborder L'étude des problèmes aux limites à multi-points associés à des équations différentielles ordinaires non linéaires du second

ordre. Par la suite, Gupta [48] a considéré les problèmes aux limites non linéaires à trois points. S'en suivirent plusieurs travaux sur l'existence de solutions positives pour des problèmes aux limites à multi-points [67]. Les méthodes utilisées sont en général topologiques : l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, l'indice de point fixe, la théorie du degré topologique et le théorème de point fixe dans les cônes.

Dans le cas où f est positive, R. Ma dans [81] a prouvé que le problème (4.1)-(4.2) a au moins une solution positive, en appliquant le théorème de point fixe de Krasnoselskii dans un cône approprié, où f est une fonction régulière.

Lorsque la non-linéarité est régulière et change de signe, en utilisant le théorème (2.4.7), Guo dans [45] a montré l'existence de solutions positives pour un problème aux limites du second ordre à trois points et Xu [24] a étudié l'existence de solutions positives pour le problème aux limites associé à l'équation différentielle (4.1) sous les conditions aux limites

$$\beta u(0) - \gamma u'(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i).$$

G. Infante dans [55], par application de l'indice de point fixe, a prouvé l'existence de solutions positives pour un problème aux limites non local, où le terme non linéaire f est positif et présente une singularité par rapport à la seconde variable.

En 2013, D. Yan [111] a considéré le problème aux limites singulier à trois points suivant

$$u''(t) + m^2 u(t) = f(t, u(t)) + e(t), \quad 0 < t < 1$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) + u'(\eta) = 0,$$

où $m \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\eta \in [0, 1)$, $e \in C[0, 1]$ et la non-linéarité $f(t, u)$ est **positive** et présente une singularité en $u = 0$. En utilisant le théorème de Krasnoselskii et par une technique de troncature, l'auteur a prouvé un résultat d'existence.

La littérature mathématique est riche en études traitant les problèmes aux limites singuliers avec des conditions à multi-points. Par ce présent travail, nous obtenons un nouveau résultat sur l'étude de la solvabilité d'un problème aux limites nonlocal singulier dans le cas où la non-linéarité change de signe en utilisant le théorème (2.4.7) et la méthode de troncature.

4.2 Résultats auxiliaires

Nous présentons quelques lemmes nécessaires à la démonstration du résultat principal. Soient I l'intervalle $[0, 1]$, et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de Banach défini par (1.1), (1.2).

Notation.

Notons $\xi_0 = 0$, $\xi_{m-1} = 1$, $a_0 = a_{m-1} = b_0 = b_{m-1} = 0$, et $\rho = (1 - \sum_{i=0}^{m-1} b_i)(1 - \sum_{i=0}^{m-1} a_i) \neq 0$.

Dans le résultat suivant, nous déterminons la solution du problème linéaire associé à 4.1-4.2.

Lemme 4.2.1. *Soit le problème linéaire*

$$u''(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4.3)$$

$$u'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), \quad (4.4)$$

Alors pour tout $y \in C(I, [0, +\infty))$, le problème 4.3-4.4 admet une unique solution $u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds$, telle que

$$G(t, s) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \sum_{k=i}^{m-1} b_k \left[(s-t) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k(t-s) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k(t-\xi_k) \right] \\ + (1 - \sum_{k=0}^{i-1} b_k) \left[(1-s) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k(s-\xi_k) \right], & t \leq s, \\ (1 - \sum_{k=0}^{i-1} b_k) \left[(1-t) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k(t-s) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k(t-\xi_k) \right] \\ + \sum_{k=i}^{m-1} b_k \sum_{k=0}^{i-1} a_k(s-\xi_k), & t \geq s, \end{cases}$$

pour $0 \leq t \leq 1$ et $\xi_{i-1} < s < \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Démonstration. Soit $\bar{G}(t, s)$ la fonction de Green du problème (4.3)-(4.4), donc, pour tout $0 \leq t \leq 1$ et $\xi_{i-1} < s < \xi_i$, ($i = 1, 2, \dots, m-1$), nous avons

$$\bar{G}(t, s) = \begin{cases} A + Bt, & t \leq s, \\ C + Dt, & t \geq s. \end{cases}$$

tels que $A = A(s)$, $B = B(s)$, $C = C(s)$, et $D = D(s)$.

En considérant la définition et les propriétés de la fonction de Green, nous obtenons les égalités suivantes

$$\begin{cases} A + Bs = C + Ds, \\ B - D = -1, \\ B = \sum_{k=0}^{i-1} b_k B + \sum_{k=i}^{m-1} b_k D, \\ C + D = \sum_{k=0}^{i-1} a_k(A + B\xi_k) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k(C + D\xi_k). \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
A(s) &= \frac{1}{\rho} \left[\sum_{k=i}^{m-1} b_k \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k \xi_k - 1 \right) + \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} b_k \right) \left(s - 1 + \sum_{k=i}^{m-1} a_k (\xi_k - s) \right) \right], \\
B(s) &= \frac{\sum_{k=i}^{m-1} b_k}{1 - \sum_{k=0}^{m-1} b_k} = \text{constante}, \\
C(s) &= \frac{1}{\rho} \left[\left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} b_k \right) \left(\sum_{k=0}^{i-1} a_k s + \sum_{k=i}^{m-1} a_k \xi_k - 1 \right) - \sum_{k=i}^{m-1} b_k \sum_{k=0}^{i-1} a_k (s - \xi_k) \right], \\
D(s) &= \frac{1 - \sum_{k=0}^{i-1} b_k}{1 - \sum_{k=0}^{m-1} b_k} = \text{constante}.
\end{aligned}$$

Donc la fonction \bar{G} est donnée par

$$\bar{G}(t, s) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \sum_{k=i}^{m-1} b_k \left[(t - s) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k (s - t) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k (\xi_k - t) \right] \\ \quad + \left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} b_k \right) \left[(s - 1) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k (\xi_k - s) \right] & t \leq s \\ \left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} b_k \right) \left[(t - 1) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k (s - t) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k (\xi_k - t) \right] \\ \quad + \sum_{k=i}^{m-1} b_k \sum_{k=0}^{i-1} a_k (\xi_k - s) & t \geq s. \end{cases}$$

Soit $G(t, s) = -\bar{G}(t, s)$, la solution du problème aux limites (4.3)-(4.4), donnée par

$$u(t) = \int_0^1 \bar{G}(t, s) (-y(s)) ds = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds.$$

□

La positivité de la solution u est déduit par le lemme suivant

Lemme 4.2.2. *Si la condition (A1) est vérifiée, alors pour tout $t, s \in I$, $G(t, s) \geq 0$.*

Démonstration. Pour $\xi_{i-1} \leq s \leq \xi_i$, $i = 1, \dots, m-1$, posons

$$\nu := (s - t) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k (t - s) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k (t - \xi_k),$$

$$\mu := (1 - s) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k (s - \xi_k),$$

$$\eta := (1 - t) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k (t - s) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k (t - \xi_k).$$

1. Si $t \leq s$, nous avons

$$\nu \geq \sum_{k=0}^{m-1} a_k(s-t) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k(t-s) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k(t-\xi_k) = \sum_{k=0}^{i-1} a_k(s-\xi_k) \geq 0,$$

et

$$\mu \geq \sum_{k=0}^{m-1} a_k(1-s) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k(s-\xi_k) \geq \sum_{k=i}^{m-1} a_k(1-\xi_k) \geq 0,$$

d'où

$$\sum_{k=i}^{m-1} b_k \nu + (1 - \sum_{k=0}^{i-1} b_k) \mu \geq 0.$$

2. Si $t \geq s$, alors

$$\begin{aligned} \eta &\geq \sum_{k=0}^{m-1} a_k(1-t) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k(t-s) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k(t-\xi_k) \\ &\geq \sum_{k=0}^{i-1} a_k(1-s) + \sum_{k=i}^{m-1} a_k(1-\xi_k) \geq 0, \end{aligned}$$

Par suite

$$(1 - \sum_{k=0}^{i-1} b_k) \eta + \sum_{k=i}^{m-1} b_k \sum_{k=0}^{i-1} a_k(s-\xi_k) \geq 0.$$

Donc

$$G(t, s) \geq 0, \text{ pour tout } t, s \in I.$$

□

En utilisant la preuve du lemme (4.2.2), nous obtenons

$$\int_0^1 G(\xi_j, s) ds > M_1,$$

tel que

$$M_1 = \frac{1}{\rho} \left(\sum_{k=j}^{m-1} b_k \sum_{k=0}^{m-1} a_k(1-\xi_k) \right) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-2.$$

Le lemme suivant est utilisé pour démontrer notre résultat principal

Lemme 4.2.3. *Si la condition (A1) est satisfaite. Alors pour tout $y \in C(I, [0, +\infty))$, le problème 4.3-4.4 admet une solution positive u vérifiant*

$$\inf_{t \in [0,1]} u(t) \geq \gamma \|u\|,$$

où

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1 - \xi_i)}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i}. \quad (4.5)$$

Notons que, $0 < \gamma < 1$.

Démonstration. Puisque $u''(t) = -y(t) \leq 0$, alors $u(t)$ est une fonction concave sur $(0, 1)$ et $u'(t)$ est décroissante sur $[0, 1]$. En combinant ceci avec l'hypothèse $\sum_{i=1}^{m-2} b_i < 1$ et la condition aux limites $u'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u'(\xi_i)$, nous obtenons

$$u'(0) \leq 0.$$

On procède par absurde, supposons que $u'(0) > 0$, puisque u' est une fonction décroissante, alors nous avons

$$0 = u'(0) - u'(0) = u'(0) - \sum_{i=1}^{m-2} b_i u'(\xi_i) > \sum_{i=1}^{m-2} b_i (u'(0) - u'(\xi_i)) > 0,$$

ce qui donne une contradiction.

D'autre part, $u'(t)$ est décroissante sur $[0, 1]$, et $u'(0) \leq 0$, ceci implique que

$$\|u\| = \max_{t \in [0,1]} u(t) = u(0), \quad \min_{t \in [0,1]} u(t) = u(1).$$

La concavité de u , entraîne que

$$\xi_i(u(1) - u(0)) \leq u(\xi_i) - u(0) \quad (i \in 1, \dots, m-2).$$

Multiplions les deux côtés de l'inégalité par a_i , de 4.4, nous obtenons

$$u(1) \geq \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1 - \xi_i)}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} u(0).$$

Donc

$$\min_{t \in [0,1]} u(t) \geq \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1 - \xi_i)}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \|u\|. \quad (4.6)$$

(4.6) entraîne alors

$$\min_{t \in [0,1]} u(t) \geq \gamma \|u\|,$$

où γ est donnée par (4.5). □

4.3 Existence de solutions positives

Dans cette section, nous montrons l'existence des solutions positives du problème (4.1)-(4.2) en appliquant le théorème (2.4.7).

Soit M_2 une constante positive définie par :

$$M_2 = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) ds.$$

Définissons les ensembles K et K' dans E par

$$K = \{u \in E : u(t) \geq 0, t \in I\},$$

et

$$K' = \left\{ u \in E : \min_{0 \leq t \leq 1} u(t) \geq \gamma \|u\| \right\},$$

où γ est donnée par (4.5).

Il est clair que, K et K' sont deux cônes de E avec $K' \subset K$.

Remarque 6. Soit α, β deux constantes positives telles que $\alpha < \beta$. Si f est une fonction continue sur $I \times [\alpha, +\infty[$, alors f est bornée sur $I \times [\alpha, \beta]$; i.e il existe une constante $C_{\alpha, \beta}$ telle que

$$C_{\alpha, \beta} = \max_{0 \leq t \leq 1} \left(\max_{\alpha \leq u \leq \beta} |f(t, u)| \right).$$

Le résultat principal de ce chapitre est donné par le théorème suivant

Théorème 4.3.1. *S'il existe des nombres a, b , et d tels que*

$$0 < \frac{1}{\gamma} d < a < \gamma b < b, \quad (4.7)$$

et

$$a > M_2 C_{d, a}, \quad (4.8)$$

où γ est définie par (4.5), et f présente une singularité en $u = 0$ (i.e $\lim_{u \rightarrow 0^+} f(t, u) = \pm \infty$ pour tout $t \in [0, 1]$), et satisfait en plus de (A1), les conditions suivantes

(A2) $f(t, u) \geq 0$ pour tout $u \in [d, b]$ et tout $t \in I$, et $f(t, d) \not\equiv 0$ sur un certain sous-intervalle de I ,

(A3) $f(t, u) \geq \frac{b}{M_1}$ pour tout $u \in [\gamma b, b]$ et tout $t \in I$.

Alors, le problème (4.1)-(4.2) admet au moins une solution positive u dans K telle que $\|u\| > a$, et $\theta(u) < \gamma b$.

Preuve du théorème (4.3.1)

Nous considérons la fonction de troncature $\tilde{f} : [0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\tilde{f}(t, u) = \begin{cases} f(t, d), & 0 \leq u \leq d, \\ f(t, u) & u \geq d. \end{cases} \quad (4.9)$$

De (4.7), nous avons

$$0 < d < \gamma a < a < \gamma b < b. \quad (4.10)$$

Donc, \tilde{f} est une fonction régulière satisfaisant les hypothèses (A2), et (A3).

Considérons le problème aux limites suivant :

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} u''(t) + \tilde{f}(t, u) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ u'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i). \end{cases}$$

Pour tout $u \in K$, nous définissons

$$\theta(u) = \min_{0 \leq t \leq 1} u(t),$$

et les opérateurs $\tilde{T} : K \rightarrow K$, $\tilde{A} : K \rightarrow E$ et $\tilde{T}^* : K' \rightarrow K'$, tels que :

$$\tilde{T}u(t) = \left[\int_0^1 G(t, s) \tilde{f}(s, u(s)) ds \right]^+, \quad \text{pour } t \in [0, 1],$$

$$\tilde{A}u(t) = \int_0^1 G(t, s) \tilde{f}(s, u(s)) ds, \quad \text{pour } t \in [0, 1],$$

$$\tilde{T}^*u(t) = \int_0^1 G(t, s) \tilde{f}^+(s, u(s)) ds, \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

De 3.12, nous avons :

$$\tilde{T} = \psi \circ \tilde{A}.$$

Remarque 7. Par les lemmes (3.1.4), (3.1.5) et (3.1.6), nous avons les résultats suivants

1. \tilde{T}^* est complètement continu.
2. Si $\tilde{A} : K \rightarrow E$ est complètement continu, alors $\tilde{T} = \psi \circ \tilde{A} : K \rightarrow K$ est aussi complètement continu.

3. u est une solution du BVP (\tilde{P}) si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur \tilde{A} .

Lemme 4.3.1. Si u_1 est un point fixe de l'opérateur \tilde{T} , alors u_1 est un point fixe de l'opérateur \tilde{A} .

Démonstration. Soit u_1 le point fixe de \tilde{T} . Nous montrons que u_1 est un point fixe de l'opérateur \tilde{A} . Supposons le contraire, qu'il existe un $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$\tilde{A}u_1(t_0) \neq u_1(t_0) = \tilde{T}u_1(t_0) = \max \left\{ \tilde{A}u_1(t_0), 0 \right\},$$

et donc

$$\tilde{A}u_1(t_0) < 0 = u_1(t_0).$$

Soit (t_1, t_2) l'intervalle maximal contenant t_0 et tel que $\tilde{A}u_1(t) < 0$, pour tout $t \in (t_1, t_2)$. Notons que $u_1(t) = \tilde{T}u_1(t) = \max \left\{ \tilde{A}u_1(t), 0 \right\} = 0$ pour tout $t \in (t_1, t_2)$. Il suit que $[t_1, t_2] \neq [0, 1]$ par (A2).

- Si $t_2 < 1$, nous avons $u_1(t) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, $\tilde{A}u_1(t) < 0$ pour $t \in (t_1, t_2)$ et $\tilde{A}u_1(t_2) = 0$. Donc $(\tilde{A}u_1)'(t_2) \geq 0$. Par (A2) nous avons $(\tilde{A}u_1)''(t) = -\tilde{f}(t, 0) \leq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, donc $(\tilde{A}u_1)'(t) \geq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. nous obtenons $t_1 = 0$. D'autre part, l'hypothèse $\sum_{i=1}^{m-2} b_i < 1$ et la condition $(\tilde{A}u_1)'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i (\tilde{A}u_1)'(\xi_i)$ implique que $(\tilde{A}u_1)'(0) \leq 0$ (voir la preuve du lemme (5.3.3)), nous arrivons à une contradiction.
- Si $t_1 > 0$, nous avons $u_1(t) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, $\tilde{A}u_1(t) < 0$ pour $t \in (t_1, t_2)$ et $(\tilde{A}u_1)(t_1) = 0$. Donc $(\tilde{A}u_1)'(t_1) \leq 0$. Par (A2) nous avons $(\tilde{A}u_1)''(t) = -\tilde{f}(t, 0) \leq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Donc $t_2 = 1$. Par $\tilde{A}u_1(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \tilde{A}u_1(\xi_i) < 0$, il existe un $i_0 \in \{1, 2, \dots, m-2\}$ tel que $\tilde{A}u_1(\xi_j) < 0$ pour $i_0 \leq j \leq m-2$ et $\tilde{A}u_1(\xi_j) \geq 0$ pour $0 \leq j \leq i_0 - 1$. Donc $\xi_j \in (t_1, 1)$ pour $i_0 \leq j \leq m-2$. En utilisant la concavité de $\tilde{A}u_1(t)$ sur $[t_1, 1]$, nous obtenons

$$\left| \frac{\tilde{A}u_1(\xi_j)}{\xi_j - t_1} \right| \leq \left| \frac{\tilde{A}u_1(1)}{1 - t_1} \right| \quad \text{pour } i_0 \leq j \leq m-2,$$

i.e.,

$$\left| \tilde{A}u_1(\xi_j) \right| \leq \frac{\xi_j - t_1}{1 - t_1} \left| \tilde{A}u_1(1) \right| < \xi_j \left| \tilde{A}u_1(1) \right| \quad \text{pour } i_0 \leq j \leq m-2.$$

Les inégalités ci-dessus, conduisent à

$$\sum_{j=i_0}^{m-2} a_j \left| \tilde{A}u_1(\xi_j) \right| \leq \sum_{j=i_0}^{m-2} a_j \xi_j \left| \tilde{A}u_1(1) \right| < \left| \tilde{A}u_1(1) \right|. \quad (4.11)$$

D'autre part,

$$\left| \tilde{A}u_1(1) \right| = \left| \sum_{j=1}^{m-2} a_j \tilde{A}u_1(\xi_j) \right| \leq \sum_{j=i_0}^{m-2} a_j \left| \tilde{A}u_1(\xi_j) \right|,$$

ce qui contredit (5.11). □

De (4.8), pour tout $u \in \partial K_a$; i.e., $\|u\| = a$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}u\| &= \max_{t \in I} \left[\int_0^1 G(t, s) \tilde{f}(s, u(s)) ds \right]^+ \\ &\leq \max_{t \in I} \max \left\{ \int_0^1 G(t, s) \tilde{f}(s, u(s)) ds, 0 \right\} \\ &\leq C_{d,a} \max_{t \in I} \int_0^1 G(t, s) ds \\ &< \frac{a}{M_2} M_2 = a. \end{aligned}$$

Donc, la condition (C1) du Théorème (2.4.7) est satisfaite.

De (4.8), pour tout $u \in \partial K_a$; i.e., $\|u\| = a$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}^*u\| &= \max_{t \in I} \int_0^1 G(t, s) \tilde{f}^+(s, u(s)) ds \\ &\leq C_{d,a} \max_{t \in I} \int_0^1 G(t, s) ds \\ &< \frac{a}{M_2} M_2 = a \end{aligned}$$

Soit $u \in \partial K'(\gamma b)$; i.e., $u \in K'$ et $\theta(u) = \gamma b$, nous avons

$$\gamma b = \theta(u) = \min_{t \in [0,1]} u(t) \geq \gamma \|u\|,$$

ceci entraîne

$$\|u\| \leq b.$$

D'autre part

$$u(t) \geq \min_{t \in [0,1]} u(t) = \theta(u) = \gamma b, \quad \text{pour tout } t \in [0, 1],$$

d'où

$$\gamma b \leq u(t) \leq \|u\| \leq b.$$

Par (A3),

$$\tilde{f}(s, u(s)) \geq \frac{b}{M_1}, \quad \text{for } s \in [0, 1]. \quad (4.12)$$

(5.12) implique

$$\tilde{T}^*u(\xi_j) = \int_0^1 G(\xi_j, s) \tilde{f}^+(s, u(s)) ds \quad (0 < \xi_j < 1, \quad j = 1, \dots, m-2),$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{T}^*u(\xi_j) &\geq \frac{b}{M_1} \int_0^1 G(\xi_j, s) ds \\ &> \frac{b}{M_1} M_1 = b. \end{aligned}$$

D'où

$$b < \tilde{T}^*u(\xi_j) \leq \|\tilde{T}^*u\|.$$

D'autre part

$$(\theta \tilde{T}^*u) \geq \gamma \|\tilde{T}^*u\| > \gamma b.$$

Donc, (C2) du théorème (2.4.7) est satisfaite.

Soit $u \in K'_a(\gamma b) \cap \{u : T^*u = u\}$, alors

$$\|u\| > a > \frac{1}{\gamma} d,$$

et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$u(t) \geq \min_{t \in [0, 1]} u(t) \geq \gamma \|u\| > \gamma \frac{1}{\gamma} d = d.$$

Par conséquent, pour $u \in K'_a(\gamma b) \cap \{u : \tilde{T}^*u = u\}$, nous avons

$$d \leq u(t) \leq \|u\| \leq b.$$

Par (A2),

$$\tilde{f}^+(s, u(s)) = \tilde{f}(s, u(s)).$$

Ceci implique que

$$\tilde{T}u = \tilde{T}^*u.$$

Alors, les conditions du Théorème (2.4.7) sont satisfaites et, \tilde{T} admet deux points fixes u_1 et u_2 dans K satisfaisant

$$0 \leq \|u_1\| < a < \|u_2\|, \quad \theta(u_2) < \gamma b. \quad (4.13)$$

Par le lemme (3.1.6), nous concluons que \tilde{A} admet deux points fixes dans K satisfaisant (4.13).

u_2 est le point fixe de \tilde{T} dans $K' \subset K$ tel que $a < \|u_2\|$, $\theta(u_2) < \gamma b$ (voir la preuve du théorème (2.4.7)).

Pour $t \in [0, 1]$, nous avons

$$u_2(t) \geq \min_{t \in [0,1]} u_2(t) \geq \gamma \|u_2\| > \gamma a > d.$$

Donc par (4.9)

$$u_2(t) = \tilde{A}u_2(t) = \int_0^1 G(t, s) \tilde{f}(s, u_2(s)) ds = \int_0^1 G(t, s) f(s, u_2(s)) ds.$$

Conclusion

Le problème aux limites (4.1)-(4.2) admet au moins une solution positive u tels que $\|u\| > a$, $\theta(u) < \gamma b$.

Ce qui achève la preuve du théorème (2.4.7).

4.4 Exemples

Dans cette section, nous présentons deux exemples pour illustrer nos résultats.

Exemple 1.

Considérons le problème aux limites d'ordre 2 à trois points :

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4.14)$$

$$u'(0) = \frac{1}{2}u'(\frac{1}{2}), \quad u(1) = \frac{1}{2}u(\frac{1}{2}), \quad (4.15)$$

où $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, $m = 3$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$, et

$$f(t, u) = \begin{cases} \frac{1}{13}(t^2 + 1)e^2 \ln u, & 0 < u \leq e^2, \\ \frac{2}{13}(t^2 + 1)e(175\sqrt{u} - 174e) & e^2 \leq u \leq 81 e^2, \\ \frac{2}{13}(t^2 + 1)e(-\sqrt{u} + 1410e) & u \geq 81 e^2. \end{cases}$$

Il est clair que f change de signe sur $[0, 1] \times]0, +\infty[$, et $\lim_{u \rightarrow 0^+} f(t, u) = -\infty$.

Soit $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, $d = \frac{3}{2}$, $a = e^2$, $C_{\frac{3}{2}, e^2} = \frac{4}{13}e^2$, $b = 27e^2$. Par le lemme (4.2.1) nous avons $\rho = \frac{1}{4}$ et

$$G(t, s) = 4 \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, s \leq t \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}s & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, t \leq s \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}s & 0 \leq t \leq 1, \frac{1}{2} \leq s \leq 1, s \leq t \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s & 0 \leq t \leq 1, \frac{1}{2} \leq s \leq 1, t \leq s \end{cases}$$

Pour $0 \leq t \leq 1$, en intégrant G entre 0 et 1, nous obtenons

$$\int_0^1 G(t, s) ds = \frac{13}{8} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2.$$

Donc, $M_1 = \frac{1}{2}$ et $M_2 = \frac{13}{8}$. il est facile de voir que

$$f(t, u) \geq 0 \quad \text{pour tout } u \in [\frac{3}{2}, 27e^2] \text{ et pour tout } t \in [0, 1],$$

$$f(t, u) \geq 54e^2 \quad \text{pour tout } u \in [9e^2, 27e^2] \text{ et pour tout } t \in [0, 1].$$

Donc les conditions du théorème (4.3.1) sont vérifiées. Alors (4.14)-(4.15) admet au moins une solutions positive u telle que $\|u\| > e^2$, $\theta(u) < 9e^2$.

Exemple 2.

Considérons le problème aux limites (4.14)-(4.15), où $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, $m = 3$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$, et

$$f(t, u) = \begin{cases} \frac{1}{13}(t^2 + 1)(\frac{1}{u} - u), & 0 < u \leq 1, \\ \frac{1}{13}(t^2 + 1)\sqrt{u}(u - 1), & 1 \leq u \leq 9. \\ \frac{1}{13}(t^2 + 1)\sqrt{u}(45u - 397), & 9 \leq u \leq 48, \\ \frac{1}{13}(t^2 + 1)\sqrt{u}(-u + 1811) & u \geq 48. \end{cases}$$

f change de signe sur $[0, 1] \times]0, +\infty[$, et $\lim_{u \rightarrow 0^+} f(t, u) = +\infty$.

Soit $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, $d = \frac{3}{2}$, $a = 9$, $C_{\frac{3}{2}, 9} = \frac{48}{13}$, $b = 48$, $M_1 = \frac{1}{2}$, $M_2 = \frac{13}{8}$. il est facile de voir que

$$f(t, u) \geq 0 \text{ pour tout } u \in [\frac{3}{2}, 48] \text{ et pour tout } t \in [0, 1],$$

$$f(t, u) \geq 96 \text{ pour tout } u \in [16, 48] \text{ et pour tout } t \in [0, 1].$$

Donc les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées. Alors (4.14)-(4.15) admet au moins une solution positive u telle que $\|u\| > 9$, $\theta(u) < 16$.

Chapitre 5

Généralisation

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré au développement du résultat soumis pour publication.

Il faudra souligner le fait qu'au cours des dernières années, l'existence de solutions positives pour des problèmes aux limites à multi-points a focalisé l'attention de nombreux auteurs, voir [3, 14, 58]. Aussi, certains se sont intéressés aux résultats d'existence pour des problèmes aux limites associés à des équations différentielles d'ordre pair [65, 66, 87, 58, 42, 44, 58, 59] permettant de transformer un problème d'ordre supérieur à un problème d'ordre deux. Nous présentons dans ce qui suit une petite revue bibliographique sur le sujet.

En appliquant le théorème de Leggett-Williams, Y. Wang[72] a prouvé l'existence et la multiplicité de solutions positives pour le problème suivant

$$x^{(2n)}(t) = f(t, x(t), x''(t), \dots, x^{(2(n-1))}(t)), \quad 0 < t < 1, \quad (5.1)$$

$$x^{(2i)}(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{i,j} x^{(2i)}(\xi_j), \quad x^{(2i)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{i,j} x^{(2i)}(\xi_j), \quad (5.2)$$

où $(-1)^n f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue.

En utilisant le théorème (2.4.7), Guo Yanping [87] a étudié l'existence de solutions positives pour le problème aux limites à m-points associé à l'équation différentielle (5.1) sous les conditions aux limites

$$x^{(2i)}(0) - \beta_i x^{(2i+1)}(0) = 0, \quad x^{(2i)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2} k_{i,j} x^{(2i)}(\xi_j). \quad (5.3)$$

Et pour $n = 1$, en utilisant l'indice de point fixe, Wing-Sum Cheung, dans [10], a prouvé l'existence de solutions positives pour un problème aux limites à multi-points où le terme non linéaire change de signe.

Motivées par les travaux [10], et [87], nous étudions dans ce chapitre, l'existence de solutions positives pour un problème aux limites à m -points d'ordre $2n$ (5.4) lorsque le terme non linéaire f change de signe tout en utilisant la théorie de l'indice de point fixe.

$$\begin{cases} x^{(2n)}(t) = f(t, x(t), x''(t), \dots, x^{(2(n-1))}(t)), & 0 < t < 1, \\ x^{(2i+1)}(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{i,j} x^{(2i+1)}(\xi_j), \quad x^{(2i)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{i,j} x^{(2i)}(\xi_j), \end{cases} \quad (5.4)$$

(5.4) est considéré sous les conditions suivantes

(A1) $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue,

(A2) $(-1)^n f(t, 0, 0, \dots, 0) \geq 0 (\neq 0)$ pour $t \in [0, 1]$,

(A3) $a_{i,j}, b_{i,j} \in [0, +\infty)$ pour $0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-2, \sum_{j=1}^{m-2} a_{i,j}, \sum_{j=1}^{m-2} b_{i,j} \in (0, 1), 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1$.

5.2 Préliminaires

Soit $g_i(t, s)$ la fonction de Green associée au problème (P_i) , définie pour $0 \leq i \leq n-1$, par

$$(P_i) \begin{cases} u''(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ u'(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{i,j} u'(\xi_j), \quad u(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{i,j} u(\xi_j), \quad 0 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Lemme 5.2.1. *Supposons que (A3) est vérifiée. Alors $g_i(t, s) \leq 0$ pour $0 \leq i \leq n-1$.*

Démonstration. En utilisant la preuve du lemme (4.2.2), nous avons $g_i(t, s) \leq 0$ pour $0 \leq i \leq n-1$. □

Soit $G_1(t, s) = g_{n-2}(t, s) \leq 0$, par récurrence, nous définissons G_j pour $2 \leq j \leq n-1$ par

$$G_j(t, s) = \int_0^1 g_{n-j-1}(t, r) G_{j-1}(r, s) dr.$$

Dans le lemme suivant, nous déterminons la fonction de Green associée au problème (5.6).

Lemme 5.2.2. *Supposons que (A3) est vérifiée. Si $y(t) \in E$, alors le problème aux limites*

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(2l)}(t) = y(t), \quad 0 < t < 1, \\ u^{(2i+1)}(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{n-l+i-1,j} u^{(2i+1)}(\xi_j), \\ u^{(2i)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{n-l+i-1,j} u^{(2i)}(\xi_j), \quad 0 \leq i \leq l-1 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

admet une unique solution pour tout $1 \leq l \leq n-1$, $u(t) = \int_0^1 G_l(t,s)y(s)ds$, où $G_l(t,s)$ est la fonction de Green associée au problème (5.6).

Démonstration. Nous montrons le résultat en utilisant le raisonnement par récurrence.

Pour $l=1$, Le résultat est vérifié en utilisant le lemme (5.2.1).

Maintenant, supposons que le résultat est vérifié pour $l-1$, et montrons le pour l .

Soit $u''(t) = v(t)$, alors (5.6) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(t) = v(t), \quad 0 < t < 1, \\ u'(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{n-l-1,j} u'(\xi_j), \\ u(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{n-l-1,j} u(\xi_j), \end{array} \right. \quad (5.7)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} v^{(2(l-1))}(t) = y(t), \quad 0 < t < 1, \\ v^{(2i+1)}(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{n-l+i,j} v^{(2i+1)}(\xi_j), \\ v^{(2i)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{n-l+i,j} v^{(2i)}(\xi_j), \quad 0 \leq i \leq l-2 \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Le lemme (5.2.1) implique que (5.7) admet une unique solution $u(t) = \int_0^1 g_{n-l-1}(t,r)v(r)dr$, et (5.8) admet aussi une unique solution $v(t) = \int_0^1 G_{l-1}(t,s)y(s)ds$. Donc, (5.6) admet une unique solution

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 g_{n-l-1}(t,r) \int_0^1 G_{l-1}(r,s)y(s)dsdr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 g_{n-l-1}(t,r)G_{l-1}(r,s) \right) y(s)ds \\ &= \int_0^1 G_l(t,s)y(s)ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, le résultat est vérifié pour l . La preuve du Lemme (5.2.2) est terminée. \square

Pour chaque $1 \leq l \leq n-1$, nous définissons $A_l : E \rightarrow E$ par

$$A_l v(t) = \int_0^1 G_l(t, \tau) v(\tau) d\tau.$$

En utilisant le lemme (5.2.2), pour chaque $1 \leq l \leq n-1$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_l v)^{(2l)}(t) = v(t), \quad 0 < t < 1, \\ (A_l v)^{(2i+1)}(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{n-l+i-1,j} (A_l v)^{(2i+1)}(\xi_j), \\ (A_l v)^{(2i)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{n-l+i-1,j} (A_l v)^{(2i)}(\xi_j), \quad 0 \leq i \leq l-2 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Par conséquent (5.4) admet une solution si et seulement si le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} v''(t) = f(t, A_{n-1}v(t), A_{n-2}v(t), \dots, A_1v(t), v(t)), \quad 0 < t < 1, \\ v'(0) = \sum_{j=1}^{m-2} b_{n-1,j} v'(\xi_j), \quad v(1) = \sum_{j=1}^{m-2} a_{n-1,j} v(\xi_j), \end{array} \right. \quad (5.10)$$

admet une solution. Si x est solution de (5.4), alors

$$v = x^{(2(n-1))} \quad (5.11)$$

est solution de (5.10). Inversement, si v est une solution de (5.10), alors

$$x = A_{n-1}v \quad (5.12)$$

est solution (5.4).

Proposition 5.2.1. *Définissons $A : E \rightarrow E$, pour tout v dans E , par*

$$Av(t) = \int_0^1 g_{n-1}(t, s) f(s, A_{n-1}v(s), A_{n-2}v(s), \dots, A_1v(s), v(s)) ds.$$

Alors, le problème aux limites (5.4) admet une solution, si et seulement si, A admet un point fixe continu.

5.3 Résultat principal

Nous montrons l'existence des solutions positives pour le problème aux limites (5.4) en appliquant le lemme (2.4.1).

Pour chaque $t \in I$, $0 \leq i \leq n-1$, il existe un nombre fini de points s tel que $g_i(t, s) = 0$. Soit

$$M_i = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |g_i(t, s)| ds, \quad m_i = \min_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |g_i(t, s)| ds.$$

Et pour $1 \leq j \leq n-1$, nous posons

$$I_j^1 = [\beta_j d, \delta_j b],$$

$$I_j^2 = [0, \delta_j a],$$

$$I_j^3 = [\beta_j \gamma b, \delta_j b],$$

où

$$\beta_j = \prod_{i=2}^{j+1} m_{n-i},$$

et

$$\delta_j = \prod_{i=2}^{j+1} M_{n-i}.$$

Définissons les ensembles K et K' de E

$$K = \{x \in E : (-1)^{n-1} x(t) \geq 0, t \in I\},$$

et

$$K' = \left\{ x \in E : \min_{0 \leq t \leq 1} (-1)^{n-1} x(t) \geq \gamma \|x\| \right\},$$

où γ est donnée par (4.5).

Il est clair que, K et K' sont deux cônes de E tels que $K' \subset K$.

Pour tout $x \in K$, nous définissons les opérateurs T , A , T^* par :

$T : K \rightarrow K$, $A : K \rightarrow X$ et $T^* : K' \rightarrow K'$, tels que :

$$Tx(t) = \left[\int_0^1 g_{n-1}(t, s) f(s, A_{n-1}x(s), \dots, A_1x(s), x(s)) ds \right]^+, \quad \text{pour tout } t \in I,$$

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_0^1 g_{n-1}(t, s) f(s, A_{n-1}x(s), \dots, A_1x(s), x(s)) ds, & \text{pour tout } t \in I, \\ T^*x(t) &= \int_0^1 g_{n-1}(t, s) f^+(s, A_{n-1}x(s), \dots, A_1x(s), x(s)) ds, & \text{pour tout } t \in I, \end{aligned}$$

où $f^+(s, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1, u_0) = (-1)^n \max((-1)^n f(s, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1, u_0), 0)$.

Pour $x \in E$, nous définissons la fonction $\Psi : E \rightarrow K$ telle que :

$$\Psi(x) = (-1)^{n-1} \max \{(-1)^{n-1}x, 0\}.$$

Par la notation ci-dessus nous avons :

$$T = \psi \circ A.$$

Les lemmes suivants sont utilisés pour montrer notre résultat principal.

Lemme 5.3.1. $T^* : K' \rightarrow K'$ est complètement continu.

Lemme 5.3.2. Si $A : K \rightarrow E$ est complètement continu, alors $T = \psi \circ A : K \rightarrow K$ est complètement continu.

Remarque 8. Pour les preuves des lemmes 5.3.1 et 5.3.2 voir l'article [114].

Lemme 5.3.3. Si x_1 est un point fixe de l'opérateur T , alors x_1 est aussi un point fixe de l'opérateur A .

Démonstration. Soit x_1 un point fixe de l'opérateur T . Nous montrons que x_1 est un point fixe de A dans K_a . Supposons le contraire, qu'il existe un $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$Ax_1(t_0) \neq x_1(t_0) = Tx_1(t_0) = (-1)^{n-1} \max \{(-1)^{n-1}Ax_1(t_0), 0\},$$

et donc

$$(-1)^{n-1}Ax_1(t_0) < 0 = x_1(t_0).$$

Soit (t_1, t_2) l'intervalle maximal qui contient t_0 et tel que $(-1)^{n-1}Ax_1(t) < 0$, pour tout $t \in (t_1, t_2)$. Il suit que $[t_1, t_2] \neq [0, 1]$ par (A2).

- Si $t_2 < 1$, nous avons $x_1(t) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, $(-1)^{n-1}Ax_1(t) < 0$ pour $t \in (t_1, t_2)$ et $Au_1(t_2) = 0$. Donc $(-1)^{n-1}(Ax_1)'(t_2) \geq 0$. Par (A2) nous avons $(-1)^{n-1}(Ax_1)''(t) = (-1)^{n-1}f(t, 0, \dots, 0) \leq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, donc $(-1)^{n-1}(Ax_1)'(t) \geq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. nous obtenons $t_1 = 0$. D'autre part, l'hypothèse $\sum_{i=1}^{m-2} b_{n-1,j} < 1$ et la condition $(Ax_1)'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} b_{n-1,j}(Ax_1)'(\xi_i)$ implique $(-1)^{n-1}(Ax_1)'(0) \leq 0$ (voir la preuve du lemme (5.3.3)), nous arrivons à une contradiction.

- Si $t_1 > 0$, nous avons $x_1(t) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, $(-1)^{n-1}Ax_1(t) < 0$ pour $t \in (t_1, t_2)$ et $(Ax_1)(t_1) = 0$. Donc $(-1)^{n-1}(Ax_1)'(t_1) \leq 0$. Par (A2) nous avons $(-1)^{n-1}(Ax_1)''(t) = (-1)^{n-1}f(t, 0, 0, \dots, 0) \leq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Donc $t_2 = 1$. Par $Ax_1(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_{n-1,j}Ax_1(\xi_i) < 0$, il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, m-2\}$ tel que $(-1)^{n-1}Ax_1(\xi_j) < 0$ pour $i_0 \leq j \leq m-2$ et $(-1)^{n-1}Ax_1(\xi_j) \geq 0$ pour $0 \leq j \leq i_0 - 1$. D'où $\xi_j \in (t_1, 1)$ pour $i_0 \leq j \leq m-2$. Par la concavité de $(-1)^{n-1}Ax_1(t)$ sur $[t_1, 1]$, nous avons

$$\frac{|Ax_1(\xi_j)|}{\xi_j - t_1} \leq \frac{|Ax_1(1)|}{1 - t_1} \quad \text{pour } i_0 \leq j \leq m-2,$$

i.e.,

$$|Ax_1(\xi_j)| \leq \frac{\xi_j - t_1}{1 - t_1} |Ax_1(1)| < \xi_j |Ax_1(1)| \quad \text{pour } i_0 \leq j \leq m-2.$$

Les inégalités ci-dessus, mènent à

$$\sum_{j=i_0}^{m-2} a_{n-1,j} |Ax_1(\xi_j)| \leq \sum_{j=i_0}^{m-2} a_{n-1,j} \xi_j |Ax_1(1)| < |Ax_1(1)|. \quad (5.13)$$

D'autre part,

$$|Ax_1(1)| = \left| \sum_{j=1}^{m-2} a_{n-1,j} Ax_1(\xi_j) \right| \leq \sum_{j=i_0}^{m-2} a_{n-1,j} |Ax_1(\xi_j)|,$$

contradiction avec (5.13).

Nous concluons que x_1 est un point fixe de A . □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème suivant

Théorème 5.3.1. *Supposons que les conditions (A1)-(A3) sont satisfaites, S'il existe des nombres positifs a , b , et d tels que*

$$0 < \frac{1}{\gamma}d < a < \gamma b < b, \quad (5.14)$$

où γ est définie par (4.5), et f satisfait les hypothèses suivantes :

$$(A4) \quad (-1)^n f(t, u_{n-1}, \dots, u_0) \geq 0 \quad \text{pour } (t, |u_{n-1}|, \dots, |u_0|) \in I \times \prod_{j=n-1}^1 I_j^1 \times [d, b]$$

$$(A5) \quad (-1)^n f(t, u_{n-1}, \dots, u_0) < \frac{a}{M_{n-1}} \quad \text{pour } (t, |u_{n-1}|, \dots, |u_0|) \in I \times \prod_{j=n-1}^1 I_j^2 \times [0, a]$$

$$(A6) \quad (-1)^n f(t, u_{n-1}, \dots, u_0) \geq \frac{b}{m_{n-1}} \quad \text{pour } (t, |u_{n-1}|, \dots, |u_0|) \in I \times \prod_{j=n-1}^1 I_j^3 \times [\gamma b, b].$$

Alors, le problème (5.4) admet au moins deux solutions positives x_1 et x_2 telles que $0 < \|x_1^{(2(n-1))}\| < a < \|x_2^{(2(n-1))}\| < b$.

Démonstration. Tout d'abord nous montrons que T admet un point fixe $x_1 \in K$ avec $0 < \|x_1\| < a$.

Pour $x \in \partial K'_a$, nous avons $\|x\| = a$. Pour $1 \leq j \leq n-1$,

$$\|A_j x\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 G_j(t,s)x(s)ds \right| \leq \delta_j \|x\| = \delta_j a.$$

Par (A5), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \max_{t \in I} \left[\int_0^1 g_{n-1}(t,s)f(s, A_{n-1}x(s), A_{n-2}x(s), \dots, A_1x(s), x(s))ds \right]^+, \\ &= \max_{t \in I} \max \left\{ \int_0^1 g_{n-1}(t,s)f(s, A_{n-1}x(s), A_{n-2}x(s), \dots, A_1x(s), x(s))ds, 0 \right\}, \\ &< \max_{t \in I} \frac{a}{M_{n-1}} \int_0^1 |g_{n-1}(t,s)| ds = a. \end{aligned}$$

Par le Lemma (2.4.1), il suit que

$$i(T, K_a, K) = 1,$$

et donc T admet un point fixe x_1 in K_a . Par le lemme (5.3.3) nous concluons que x_1 est un point fixe de A .

Maintenant nous montrons l'existence d'un autre point fixe de A . Pour $x \in \partial K'_a$, par (A5) nous avons

$$\begin{aligned} \|T^*x\| &= \max_{t \in I} \left| \int_0^1 g_{n-1}(t,s)f^+(s, A_{n-1}x(s), A_{n-2}x(s), \dots, A_1x(s), x(s))ds \right|, \\ &< \frac{a}{M_{n-1}} \max_{t \in I} \int_0^1 |g_{n-1}(t,s)| ds = a. \end{aligned}$$

□

Pour $x \in \partial K'_b$, nous avons $\|x\| = b$. Pour $0 \leq t \leq 1$, $1 \leq j \leq n-1$,

$$\delta b \leq \min_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq |x(t)| \leq \|x\| = b,$$

$$|A_j x(t)| \leq \delta_j b,$$

et

$$|A_j x(t)| = \left| \int_0^1 G_j(t,s)x(s)ds \right| \geq \gamma b \int_0^1 |G_j(t,s)| ds \geq \beta_j \gamma b.$$

Par (A6), nous obtenons

$$\|T^*x\| \geq \min_{t \in I} \left| \int_0^1 g_{n-1}(t,s)f^+(s, A_{n-1}x(s), A_{n-2}x(s), \dots, A_1x(s), x(s))ds \right|,$$

$$> \frac{b}{m_{n-1}} \min_{t \in I} \int_0^1 |g_{n-1}(t, s)| ds = b.$$

Par le lemme (2.4.1), il suit que

$$i(T^*, K'_a, K') = 1, \quad i(T^*, K'_b, K') = 0.$$

Donc T^* admet un point fixe x_2 dans $K'_b \setminus \overline{K'_a}$. Nous montrons que $Ax = T^*x$ pour $x \in K'_b \setminus \overline{K'_a} \cap \{u : T^*u = u\}$.

Soit $x_2 \in K'_b \setminus \overline{K'_a} \cap \{u : T^*u = u\}$, alors

$$\|x_2\| > a > \frac{1}{\gamma}d,$$

et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$x_2(t) \geq \min_{t \in [0, 1]} x_2(t) \geq \gamma \|x_2\| > \gamma \frac{1}{\gamma}d = d.$$

Par conséquent, pour $x_2 \in K'_b \setminus \overline{K'_a} \cap \{u : \tilde{T}^*u = u\}$, nous avons

$$d \leq x_2(t) \leq \|x_2\| = b.$$

Pour $1 \leq j \leq n-1$, $0 \leq t \leq 1$, nous avons $\beta_j d \leq |A_j x(t)| \leq \delta_j b$. Par (A4)

$$f^+(s, A_{n-1}x(s), \dots, A_1x(s), x(s)) = f(s, A_{n-1}x(s), \dots, A_1x(s), x(s)).$$

Ceci implique que $Ax_2(t) = T^*x_2(t)$ pour $x_2 \in K'_b \setminus \overline{K'_a} \cap \{u : \tilde{T}^*u = u\}$. Donc x_2 est un point fixe de A dans K' .

5.4 Exemple

Dans cette section, nous présentons un exemple pour illustrer notre résultat.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$x^{(4)}(t) = f(t, x(t), x''(t)), \quad 0 < t < 1, \quad (5.15)$$

$$x'(0) = \frac{1}{2}x'(\frac{1}{2}), \quad x(1) = \frac{1}{2}x(\frac{1}{2}), \quad (5.16)$$

$$x^{(3)}(0) = \frac{1}{4}x^{(3)}(\frac{1}{2}), \quad x''(1) = \frac{3}{4}x''(\frac{1}{2}), \quad (5.17)$$

où $n = 2$, $m = 3$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $a_{0,1} = b_{0,1} = \frac{1}{2}$, $a_{1,1} = \frac{3}{4}$, $b_{1,1} = \frac{1}{4}$ et

$$f(t, x, y) = \frac{1}{1800} \left\{ \begin{array}{ll} t + x + y^2 + 8500, & x \in (-\infty, 0] \\ t + (x + 4)^2 + y^2 + 8484, & x \in [0, 13] \\ t + (x - 13)^2 \exp(x) + y^2 + 8773 & x \in [13, 117], \\ (t + y^2 + 10816 \exp(117) + 8773)(118 - x) & x \in [117, +\infty). \end{array} \right.$$

f change de signe.

Par le lemme (4.2.1) nous avons

$$|g_0(t, s)| = 4 \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, s \leq t \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}s & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, t \leq s \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}s & 0 \leq t \leq 1, \frac{1}{2} \leq s \leq 1, s \leq t \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s & 0 \leq t \leq 1, \frac{1}{2} \leq s \leq 1, t \leq s \end{array} \right.$$

$$|g_1(t, s)| = 4 \left\{ \begin{array}{ll} \frac{5}{8} - \frac{1}{4}t & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, s \leq t \\ \frac{5}{8} - \frac{1}{16}t - \frac{3}{16}s & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, t \leq s \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{16}t - \frac{9}{16}s & 0 \leq t \leq 1, \frac{1}{2} \leq s \leq 1, s \leq t \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}s & 0 \leq t \leq 1, \frac{1}{2} \leq s \leq 1, t \leq s \end{array} \right.$$

Nous considérons tout d'abord la condition $i = 0$.

Pour $0 \leq t \leq 1$ nous avons

$$\int_0^1 |g_0(t, s)| ds = \frac{13}{8} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2.$$

Donc, $M_0 = \frac{13}{8}$ and $m_0 = \frac{5}{8}$.

Ensuite, nous considérons la condition $i = 1$.

Pour $0 \leq t \leq 1$ nous avons

$$\int_0^1 |g_1(t, s)| ds = \frac{49}{32} - \frac{1}{8}t - \frac{3}{8}t^2.$$

Donc, $M_1 = \frac{49}{32}$ et $m_1 = \frac{33}{32}$.

Comme $\gamma = \frac{1}{3}$, posons $a = 8$, $d = 2$, $b = 72$, alors

$$f(t, x, y) \geq 0 \text{ pour } (t, |x|, |y|) \in [0, 1] \times [\frac{5}{4}, 117] \times [2, 72],$$

$$f(t, x, y) < \frac{256}{49} \text{ pour } (t, |x|, |y|) \in [0, 1] \times [0, 13] \times [0, 8],$$

$$f(t, x, y) \geq \frac{2304}{33} \text{ pour } (t, |x|, |y|) \in [0, 1] \times [15, 117] \times [24, 72].$$

D'où les conditions du théorème (5.3.1) sont vérifiées. Donc (5.15)-(5.17) admet au moins deux solutions positives.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressées aux questions d'existence et de multiplicité de solutions positives pour des problèmes aux limites non locaux associés à des équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre supérieur ou égal à 2 considérées sur des intervalles bornés ou non bornés, et ceci dans le cas où les non-linéarités changent de signe.

Deux types de problèmes ont été étudiés. Le premier concerne les problèmes aux limites avec non-linéarité régulière, tandis que le second traite les problèmes avec une non-linéarité singulière.

Notre approche a été basée sur l'application d'une des variantes du théorème de Krasnoselskii (théorème de point fixe dans double cônes) et la théorie de l'indice de point fixe.

Ces types de problèmes sont largement utilisés pour la modélisation des différents phénomènes de la physique, de la chimie ou de la biologie. Trouver une solution, qui est de plus positive, à ces problèmes se ramène à entrevoir de nombreuses perspectives à notre travail. Il serait prétentieux d'affirmer que nous avons touché au but, mais il n'en reste pas moins que nous avons mis au point une approche assez remarquable dont nous pourrions tirer profit, prochainement, pour :

1. Projet (en cours de réalisation) d'étude de solvabilité d'un problème aux limites avec des impulsions associé à une équation différentielle de type :

$$u''(t) + \phi(t)f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, t \neq t_k,$$

sous les différentes conditions

$$\Delta u'|_{t=t_k} = -I_k(u(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad u(0) = u(1) = \int_0^1 u(s)g(s)ds,$$

$$\Delta u'|_{t=t_k} = -I_k(u(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u(\xi_i),$$

$$\Delta u'|_{t=t_k} = -I_k(u(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad u(0) = \int_0^1 u(s)dg(s), \quad u'(1) = 0.$$

2. Un autre projet d'étude de l'existence et de la multiplicité des solutions positives pour des problèmes aux limites non-locaux singuliers définis sur un intervalle non-borné, en particulier pour l'équation de Fisher Like

$$-x''(t) + cx' + \lambda x = f(t, x(t)), \quad 0 < t < +\infty,$$

sous les différentes conditions

$$\alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad u'(+\infty) = 0,$$

$$u(0) = \sum_{i=1}^n k_i u(\xi_i), \quad u'(+\infty) = 0,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(+\infty) = \int_0^{+\infty} u(s)g(s)ds.$$

Puis d'essayer de trouver d'éventuelles utilisations pratiques à cette étude notamment dans les domaines de l'épidémiologie et de la combustion.

Nous avons établi dans notre étude l'existence et la multiplicité de solutions positives sans les déterminer explicitement.

Dans le but de donner une étude numérique (solutions explicites) aux problèmes précités j'ai effectué un stage fort intéressant, au Laboratoire de Mathématiques, Informatique, Applications (LMIA) en France (Mulhouse), qui m'a permis l'utilisation de "shooting method" appliquée pour des problèmes aux limites "simples et assez basiques" (voir [22], [91]).

Le travail que nous avons envisagé dans ce sens est d'utiliser cette méthode pour déterminer les solutions numériques des problèmes non-locaux développés dans cette thèse. Alors, il nous serait possible de comparer les résultats théoriques à ceux obtenus numériquement et d'estimer la marge d'erreur.

Bibliographie

- [1] R.P. Agarwal et D. O'Regan, "Singular problems modelling phenomena in the theory of pseudoplastic fluids", *ANZIAM J.*, 45(2003), p. 167-179
- [2] R. P. Agarwal, H. L. Hong, C. C. Yeh, "The existence of positive solutions for Sturm-Liouville boundary value problems", *Comp. Math. Appl.*, 35(9)(1998), p. 89-96.
- [3] R. P. Agarwal, D. O'Regan, "Infinite interval problems for differential, difference and integral equations", *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 2001.
- [4] R. P. Agarwal, D. O'Regan, "Singular differential and integral equations with applications", *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 2001.
- [5] H. Amann, "Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces", *SIAM. Rev.*, 18 (1976), p. 620-709.
- [6] V. Anuradha, D.D. Hai, R. Shivaji, "Existence results for superlinear semipositone boundary value problems", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(1996), p. 757-763.
- [7] O. R. Aris, "The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts", *Clarendon, Oxford* (1975).
- [8] R. I. Avery and A. C. Peterson, "Three fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces", *Comput. Math. Appl.*, 42 (2001), p. 313-322.
- [9] Z. Bai, H. Wang, "On positive solutions of some nonlinear fourth-order beam equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 270 (2002), p. 357-368.
- [10] C. S. Barroso, "Krasnoselskii's fixed point theorem for weakly continuous maps", *Nonlinear Anal.*, 55(2003), p. 25-31.
- [11] C. S. Barroso, E. V. Teixeira, "topological and geometric approach to fixed points, results for sum of operators and applications", *Nonlinear Anal.*, 60 (2005), p. 625-650.
- [12] V. Baxley, "Existence and uniqueness for nonlinear boundary value problems on infinite intervals", *J. math. Anal. Appl.*, 147(1990), p. 127-133.
- [13] A. V. Bitsadze, "On the theory of nonlocal boundary value problems", *Soviet Math. Dock* 30 (1964), p. 8-10.

-
- [14] A. Boucherif, "Second order boundary value problems with integral conditions", *Appl. Math. Lett.*, 11 (1998), p. 85-88.
- [15] A. Boucherif, J. Henderson, "Positive solutions of second order boundary value problems with sign changing Caratheodory nonlinearities", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 7(2006), p. 1-14.
- [16] N.F. Britton, "Reaction-Diffusion Equations and their Applications to Biology", *Academic Press*, New York (1986).
- [17] T. Burton, "A fixed-point theorem of Krasnoselskii", *Appl. Math. Lett.*, 70(2009), p. 364-371.
- [18] N. P. Cac, A. M. Fink, J. A. Gatica, "Nonnegative solutions of quasilinear elliptic boundary value problems with nonnegative coefficients", *J. Math. Anal. Appl.*, 206 (1997), p. 1-9.
- [19] G.L. Cain, M. Z. Nashed, "Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces", *Pacif. J. Math.*, 39 (1971), p. 581-592.
- [20] A. Callegari, A. Nachman, "A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids", *SIAM J. Appl. Math.*, 38 (1980), p. 275-282.
- [21] J. R. Cannon, "The solution of the heat equation subject to the specification of energy", *Quart. Appl. Math.*, 21 (2) (1963), p. 155-160.
- [22] E. V. Castelani, T. F. Ma, "Numerical solutions for a second order three-point boundary value problem", *Communications in Applied Analysis*, 11 (2007), p. 87-95.
- [23] R. Y. Chegis, "Numerical solution of a heat conduction problem with an integral boundary condition", *Litovsk. Mat. Sb.*, 24 (1984), p. 209-215.
- [24] Z. Chen, F. Xu, "Multiple positive solutions for nonlinear second-order m-point boundary-value problems with sign changing nonlinearities", *Electronic Journal of Differential Equation*, 45(2008), p. 1-12.
- [25] J. M. Davis, P. W. Eloe, J. Henderson, "Triple positive solutions and dependence on higher order derivatives", *J. Math. Anal. Appl.*, 237(1999), p. 710-720.
- [26] K., Deimling, "Nonlinear Functional Analysis", *Springer, Berlin*, 1985.
- [27] S. Djebali, O. Kavian, T. Moussaoui, "Qualitative properties and existence of solutions for a generalized Fisher-like equation", *Int. J. Pure Appl. Math. Sci.*, 4(2)(2009), p. 65-81.
- [28] S. Djebali, K. Mebarki, "On the singular generalized Fisher-like equation with derivative depending nonlinearity", *Appl. Math. Comput.*, 205(2008), p.336-351.
- [29] S. Djebali, "Travelling wave solutions to a reaction-diffusion system arising in epidemiology". *Nonlinear Anal. Ser. B, Real World Appl.*, 2(4) (2001), p.417-442.

-
- [30] S. Djebali, "Traveling wave solutions to a reaction-diffusion system from combustion theory", *Nonlinear Stud.* 11(4)(2004), p. 603-626.
- [31] S. Djebali et L. Saifi, "Positive solutions for singular BVPs on the positive half-line arising from epidemiology and combustion theory", *Acta Mathematica Scientia*, 32B(2)(2012), p.672-694
- [32] S. Djebali et K. Mebarki, "Multiple positive solutions for singular BVPs on the positive half-line", *Computers and Mathematics with Applications*, 55(2008), p. 2940-2952.
- [33] X. Du, Z. Zhao, "A necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions to singular sublinear three-point boundary value problems", *Applied Mathematics and Computation*, 186 (2007), p. 404-413.
- [34] J. Dugundji, "An extension of Tietze theorem", *Pacific J. Math.*, 1(1951), p. 353-367.
- [35] W. Eloea, B. Ahmad, "Positive solutions of a nonlinear nth order boundary value problem with nonlocal conditions", *Applied Mathematics Letters*, 18(2005), p. 521-527.
- [36] P.W. Eloe, J. Henderson, "Positive solutions for higher order ordinary differential equations", *Electron. J. Differential*, 3(1995), p. 1-8.
- [37] M. Fenga, W. Ge, "Positive solutions for a class of m-point singular boundary value problems", *Math. Comput. Modelling*, 46(2006), p. 375-383.
- [38] E. Fermi, "Un methodo statistico par la determinazione di alcune propriet a dell'atome", *Rend. Accad. Naz. del Lincei. CL. sci. fis., mat. e nat.*, 6(1927), p.602-607.
- [39] D. G. Figueiredo, P.L. Lions, R.D. Nussbaum, "A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations", *J. Math. Pures Appl.*, 61 (1982), p. 41-63.
- [40] R. Fisher, "The wave of advance of advantageous genes", *Ann. Eugen.*, 7(1937), p. 335-369.
- [41] P. M. Fitzpatrick, W. V. Petryshyn, "Fixed point Theorems and the fixed Point Index for multivalued mappings in Cones", *Journ. of the London Math. Soc.*, 12(1975), p. 75-85.
- [42] W.G. Ge, J. L. Ren, "Fixed point theorems in double cones and their applications to nonlinear boundary value problems", *Chinese Annals of Mathematics*, 27(2006), p. 155-168.
- [43] J.R. Graef, C. Qian, B. Yang, "A three point boundary value problem for nonlinear fourth order differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 287 (2003), p. 217-233.
- [44] Y. Guo, "Multiple positive solutions for higher order boundary value problems with sign changing nonlinearities", *Applied Mathematics Letters*, 17(2004), p. 329-336.
- [45] Y. Guo, W. Ge, S. Dong, "Two positive solutions for second order three point boundary value problems with sign change nonlinearities", *Acta. Math. Appl. Sinica*, 27(2004), p. 522-529.

- [46] D. Guo, V. Lakshmikantham, "Nonlinear problems in abstract cones", *Academic press, San Diego, CA*, 1988.
- [47] Y. Guo, X. Liu, J. Qiu, "Three positive solutions for higher order m-point boundary value problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 289(2004), p. 545-553.
- [48] C. P. Gupta, "Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation", *J. Math. Anal. Appl.*, 168 (1992), p. 540-551.
- [49] D. Hai, K. Schmitt, "On radial solutions of quasilinear boundary value problems", *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl*, 35(1999), p. 349-361.
- [50] J. D. Hamilton, "Noncompact Mapping and Cones in banach Sapces", *Arch. rat. mech. Anal*, 48 (1972), p. 153-162.
- [51] X. Han, "Positive solutions for a three point boundary value problem at resonance", *J. Math. Anal. Appl.*, 336(2007), p. 556-568.
- [52] V. A. Il'in, E.I.Moiseev, "A nonlocal boundary value problem of the first kind for the Sturm-Liouville operator in differential and difference interpretations", *differential Equations*, 23 (1987), p. 803-810.
- [53] V. A. Il'in, E.I. Moiseev, "Nonlocal boundary value problem of the second kind for the Sturm-Liouville operator", *Differential Equations*, 23 (1987), p. 979-987.
- [54] G. Infante, M. Zima, "Positive solutions of multi-point boundary value problems at resonance", *Nonlinear Anal.* 69(2008), p. 2458-2465.
- [55] G. Infante, "Positive solutions of nonlocal boundary value problems with singularities", *Discrete and continuous dynamical systems*, 1(2009), p. 377-384.
- [56] G. Infante, J. R. L Webb, "Nonlinear nonlocal boundary value problems and perturbed Hammerstein integral equations", *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 49(2006), p. 637-656.
- [57] M. Jia, S. Liu, Y. Tian, "existence of positive solutions for boundary-value problems with integral boundary conditions and sign changing nonlinearities", *Electronic Journal of Differential Equations*, 163 (2010), p. 1-12.
- [58] M. Jia, S. Xi, "Positive solutions of boundary-value problems for systems of second order differential equations with integral boundary condition on the half line", *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 31(2009), p. 1-13.
- [59] Y. Karaca, F. Tokmak, " Existence of positive solutions for third order boundary value problems with integral boundary conditions on time scales", *Journal of Inequalities and Applications*, 498(2013), p. 1-12.
- [60] L. Karakostas, P. Tsamatos, "Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem", *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 19 (2002) p. 109-121.

-
- [61] G. L. Karakostas et P. Ch. Tsamatos, "Multiple positive solutions of some Fredholm integral equations arisen from nonlocal boundary-value problems", *Electron. J. Differential Equations*, 30(2002), p. 17.
- [62] E. R. Kaufmann, "Multiple positive solutions for higher order boundary value problems", *Rocky Mtn. J. Math.*, 28(1998), p. 1017-1028.
- [63] W.O. Kermack, A.G. McKendric, "Contributions to the mathematical theory of epidemics", *Proc. R. Soc.A*, 115(1927), P. 700-721.
- [64] H. J. Kiper, "On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems", *Rend. Circ. Mat. Palermo Serie II, Tomo XX*, (1971), p. 113-138.
- [65] M.A. Krasnoselskii, "Some problems of nonlinear analysis", *Amer. Math. Soc. Transl.*, 10(2)(1958), p. 345-409.
- [66] M.A. Krasnoselskii, "Translation Along Trajectories of Differential Equations", *Amer. Math. Soc, Providence.*, 1968.
- [67] M. A. Krasnoseleskii, "Positive Solutions of Operator Equations", *Noordhoff, Groningen, The Netherland*, 1964.
- [68] M.A. Krasnoselskii, "Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators", *Soviet Math. Dokl.*, 1 (1960), p. 1285-1288.
- [69] M. K. Kwong, On Krasnoselskii's Cone Fixed Point Theorem, *Fixed Point Theory and Applications*, 2008(2008), p. 1-18.
- [70] K.Q., Lan, "Multiple positive solutions of semilinear differential equations with singularities", *J. Lond. Math. Soc*, Vol. 63, pp.690-704, 2001.
- [71] H. Lian, W. Ge, "Existence of positive solutions for Sturm-Liouville boundary value problems on the half-line", *J. math. Anal. Appl.*, 321(2006), p. 781-792.
- [72] H. Lian, W. Ge, "Solvability for second order three point boundary value problems on a half line", *Appl. Math. Lett.*, 19(2006), p. 1000-1006.
- [73] X. Liu, "Nontrivial solutions of singular nonlinear m-point boundary value problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 284(2003), p. 576-590.
- [74] H. Liu, Z. Ouyang, "Existence of solutions for second-order three-point integral boundary value problems at resonance", *Boundary Value Problems*, 197(2013), p. 1-11.
- [75] B. Liu, "Solvability of multi-point boundary value problems at resonance", *Appl. Math. Comput.*, 143(2003), p.275-299.
- [76] J. Liu, Z. Zhao, "Multiple positive solutions for second order three point boundary value problems with sign changing nonlinearities", *Electronic Journal of Differential Equations*, 152(2012), p. 1-7.

- [77] N. I. Ionkin, "Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions", *Differential Equations* 13(1977), p. 294-304.
- [78] R. Ma, "Multiplicity results for a three-point boundary value problem at resonance", *Nonlinear Anal.*, 53(6)(2003), p. 777-789.
- [79] R. Ma, "Existence of positive solutions for second order boundary value problems on infinity intervals", *Applied Math. Comput.*, 16(2003), p. 33-39.
- [80] R. Ma, "Positive solutions for second order functional differential equations", *Dynam. Systems Appl.* 10 (2001), p. 215-23.
- [81] R. Ma, "Existence of Solutions of Nonlinear m-Point Boundary-Value Problems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 256(2001), p. 556-567.
- [82] R. Ma, "A survey on nonlocal boundary value problems", *Appl. Math. E-Notes*, 7 (2001), p. 257-279.
- [83] N. Merzagui, Y. Tabet, "Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem with sign changing nonlinearities", *Filomat*, Vo27(3)(2013), p. 487-499.
- [84] M. Moshinsky, "Sobre los problemas de condiciones a la frontera en una dimension de caracteristicas discontinuas", *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 7(1950), p. 1-25.
- [85] J.D. Murray, "Mathematical Biology", Biomathematics Texts, *Springer-Verlag*, 19(1989).
- [86] S. K. Ntouyas, "Nonlocal initial and boundary value problems : a survey, Handbook of differential equations : ordinary differential equations", *Elsevier B. V., Amsterdam*, 2(2005), 461-557.
- [87] D. O'Regan, "Fixed point theory for the sum of two operators", *Appl. Math. Lett.*, 9(1996), p. 1-8.
- [88] D. O'Regan, "Theory of Singular Boundary Value Problems", *World Scientific*, Singapore, 1994.
- [89] S. Park, "Generalizations of the Krasnoselskii fixed point theorem", *Nonlinear Anal.*, 67 (2007), p. 3401-3410.
- [90] M. Picone, "Su un problema al contorno nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 10 (1908), p. 1-95.
- [91] C. Pozrikidis, "Numerical Computations in Science and Engineering", *Oxford University Press*, 1998.
- [92] A.k. Rao, S. N. Rao, "On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Even Order Differential Equations", *Int. Journal of Math. Analysis*, 4(2010), p. 259-272.
- [93] G. Shi, S. Chen, "Positive Solutions of Even Higher-Order Singular Superlinear Boundary Value Problems", *Computers and Mathematics with Applications*, 45(2003), p. 593-603.

-
- [94] J. Tan, "The radial solutions of second-order semilinear elliptic equations ", *Acta Math. Appl. Sinica*, 19(1996), p. 57-64.
- [95] J. Tan, "The radial solutions of second-order semilinear elliptic equations ", *Acta Math. Appl. Sinica*, 19(1996), p. 57-64.
- [96] J. Tariboon, T. Sitthiwirattam, "Positive solutions of a nonlinear three-point integral boundary value problem", *Bound. Value Probl.*, 519210 (2010).
- [97] L. H. Thomas, "The calculation of atomic fields", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 23 (1927), p. 542-548.
- [98] S. Timoshenko, "Theory of Elastic Stability", *McGraw-Hill*, 1961.
- [99] Y. Tian, W. Ge, "Twin positive solutions for fourth-order two-point boundary value problems with sign changing nonlinearities", *Electronic Journal of Differential Equations*, 143(2004), p. 1-8.
- [100] B. Wang, "Positive Solutions for Boundary Value Problems on a Half Line", *Int. Journal of Math. Analysis*, 3(2009), p. 221-229.
- [101] Y. Wang, W. Ge, "Multiple Positive Solutions for a Nonlinear Even-Order m -Point Boundary Value Problem. II", *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 22(2006), p. 143-158.
- [102] Y. Wang, Y. Tang, M. Zhao, "Multiple positive solutions for a nonlinear $2n$ -th order m -point boundary value problems", *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 39(2010), p. 1-13.
- [103] J.R. L. Webb, "Multiple positive solutions of some nonlinear heat flow problems", *discrete and continuous dynamical systems*, supplement volume (2005), p. 895-903.
- [104] J. R. L Webb, G. Infante, "Positive solutions of nonlocal boundary value problems : a unified approach", *J. London Math. Soc.*, 74(2006), p. 673-693.
- [105] J. R. L Webb, G. Infante, "Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions", *NoDEA Nonlinear differential equations Appl*, 15(2008), p. 45-67.
- [106] J. R. L. Webb, G. Infante, D. Franco, "Positive solutions of nonlinear fourth order boundary value problems with local and nonlocal boundary conditions", *Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. A*, 138 (2008), p. 427-446.
- [107] W. M. Whyburn, "Differential equations with general boundary conditions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), p. 692-704.
- [108] T. Xiang, R. Yuan, "A class of expansive-type Krasnoselskii fixed point theorems", *Nonlinear. Anal.*, 71 (2009), p. 3229-3239.

-
- [109] S. Xi, M. Jia, H. Ji, "Positive solutions of boundary value problems for systems of second order differential equations with integral boundary condition on the half line", *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.*, 31(2009), p. 1-13.
- [110] J. Xu, Z. Yang, "Triple positive solutions for singular integral boundary value problems", *Int. J. open problems compt. Math.*, 3(2010), p. 456-467.
- [111] D. Yan, "On the existence of positive solutions for singular second order three point boundary value problems", *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1(2013), p. 1-8.
- [112] Z. Yang, "Positive solutions of second order integral boundary value problem", *J. math. Anal. Appl.*, 321(2006), p. 751-765.
- [113] Z. Yang, "Existence of nontrivial solutions for a nonlinear Sturm Liouville problem with integral boundary conditions", *Nonlinear Anal. Appl.*, 68(2008), p. 216-225.
- [114] G. Yanping, G. Weigao, G. Ying, "Twin positive solutions for higher order m-point boundary value problems with sign changing nonlinearities", *Applied Mathematics and Computation*, 146(2003), p. 299-311.
- [115] Q. Yao, "Positive solutions for eigenvalue problems of fourth-order elastic beam equations", *Appl. Math. Lett.*, 17 (2004), p. 237-243.
- [116] X. Zhang, H. Zou, l .Liu, "Positive solutions of second-order m-point boundary value problems with changing sign singular nonlinearity", *Applied Mathematics Letters*, 20 (2007), p. 629-636.
- [117] D.G. Zill, M.R. Cullen, "Differential Equations with Boundary-value Problems", *fifth ed.*, Brooks, Cole, 2001.
- [118] M. Zima, "On positive solutions of boundary value problems on the half line", *J. math. Anal. Appl.*, 259 (2001), p. 127-136.

Résumé

Cette thèse aborde les questions d'existence et de multiplicité de solutions positives pour des problèmes aux limites non locaux, associés à des équations différentielles d'ordre pair, considérés sur des intervalles bornés ou non bornés avec des nonlinéarités changeant de signe.

La méthode utilisée est topologique : théorème de Krasnoselskii (théorème de point fixe dans doubles cônes) et la théorie de l'indice de point fixe sur les cônes.

Mots clés

Théorème de point fixe de Krasnoselskii, cône, solution positive, indice de point fixe, fonction de Green, problème aux limites non local, singularité, condition intégrale, condition à multipoints, ordre pair.

Abstract

In this thesis, we study the questions of existence and multiplicity of positive solutions for a nonlocal boundary value problems associated to a nonlinear even order differential equations, considered on bounded or unbounded intervals, when the nonlinearities are allowed to change sign.

We use topological methods: Krasnoselskii theorem (fixed point theorem in double cones) and fixed point index theory in cones.

Key words

Krasnoselskii fixed point theorem, cone, positive solution, fixed point index, Green function, non-local boundary value problem, singularity, integral condition, multi-point condition, even order.

ملخص

ناقشنا في هذه الأطروحة إشكالية وجود وتعدد الحلول الموجبة لصنف من المسائل الحدية اللاموقعية والمرتبطة بمعادلات تفاضلية من رتبة زوجية، معرفة على مجالات محدودة أو غير محدودة، حين تكون الدالة الغير خطية f متغيرة الإشارة وذلك باستعمال طرق طوبولوجية: مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوساسكي (مبرهنة النقطة الثابتة داخل مخروطين) ونظرية دليل النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية

مبرهنة النقطة الثابتة لكراسنوساسكي، مخروط، حل موجب، دليل النقطة الثابتة، دالة غير، مسائل حدية لاموقعية شرط تكاملي، شرط متعدد النقاط، رتبة زوجية.