République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaïd Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Equations différentielles Ordinaires

Présenté par

Aissaoui Moussa

Utilisation de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles fractionnaires et équations intégro-différentielles de type Volterra

Soutenu le : 29/09 /2015 devant la commission d'examen

M. Derhad Mohammed	Prof. U.A.B.B Tlemcen	Encadreur
M. Yebdri Mustapha	Prof. U.A.B.B Tlemcen	Président
M. Messirdi Bachir	M. C. B. U.A.B.B Tlemcen	Examinateur
M. Messirdi Miloud	M. C. A. U.A.B.B Tlemcen	Examinateur

Année universitaire : 2014-2015

Utilisation de la transformée de Laplace

Aissaoui Moussa

Table des Matières

0.1 Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur Derhad Mohammed , qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, ses conseils et son écoute qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur le Professeur Yebdri Mustapha, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées; aussi je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury.

Mes remerciements vont à mes Professeurs Monsieur Messirdi Bachir et Monsieur Messirdi Miloud d'avoir accepté d'évaluer mon mémoire et vous m'avez honoré par vos participations a mon jury de soutenance.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur le Chef de Département de Mathématiques Monsieur Mebkhout Benmiloud qui a été toujours disponible pour nous et nous a vraiment aidé dans tous les domaines.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du Département de Mathématiques, qui m'ont accompagné et aidé à m'améliorer durant mon cursus de formation.

0.2 Dédicace

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux je dédie
ce modeste travail à :
Mes chers parents qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser.
ce travail de recherche dans les meilleures conditions.
A mes chers frères, sœurs.
A tous les membres de ma famille paternelle et maternelle.
A mes amies qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études.
Mes collègues de département, je remercie chacun de vous pour le
soutien et l'aide qu'il m'a apporté.

Introduction

L'objet de ce mémoire est la résolution de quelques problèmes de Cauchy fractionnaires et quelques équations intégro-différentielles fractionnaires du type Volterra en utilisant la transformée de Laplace. On donne aussi la solution explicite de certains problèmes de Cauchy fractionnaires dont l'équation différentielle fractionnaire est avec retard.

La dérivée fractionnaire intevienne dans la modélisation mécanique de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. La dérivée fractionnaire peut être interprétée mécaniquement comme le passage continu de l'état de ressort (exposant nul) à celui d'amortisseur (exposant égal à 1) (voir [10] et [13]).

Ce mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on présente quelques définitions et résultats concernant les intégrales et les dérivées fractionnaires ainsi quelques transformations intégrales.

Dans le deuxième chapitre, on donne la solutions explicite de certains problèmes de Cauchy dont l'équation différentielle fractionnaire ou fractionnaire avec retard en utilisant la transformée de Laplace.

Dans le troisième chapitre en utilisant la transformée de Laplace, on donne la solution explicite de certaines équations intégo-différentielles fractionnaires du type Volterra.

Les résultats de ce mémoire se trouvent dans [11].

Chapitre 1

Sur l'intégrale et la dérivée fractionnaire

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et résultats concernant les intégrales, les dérivées fractionnaires et transformations intégrales.

Les définitions et les résultats de ce chapitre trouvent dans [2], [8] et [11].

1.2 Intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires

Soit f une fonction à valeurs réelles et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Définition 1.2.1 *On appelle intégrale fractionnaire à droite de la fonction f d'ordre α et on la note $I_{a+}^{(\alpha)}$ la fonction définie par*

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \tag{1.1}$$

avec $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ *où* $\mathrm{Re}(\alpha)$ *désigne la partie réelle du nombre complexe* α *et* Γ *est la fonction Gamma d'Euler définie par*

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt,$$

où $z \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Définition 1.2.2 *On appelle intégrale à gauche de la fonction f d'ordre α et on la note $I_{a-}^{(\alpha)}$ la fonction définie par*

$$(I_{a-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^a (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \tag{1.2}$$

où $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Définition 1.2.3 *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite de la fonction f d'ordre α et on la note D_{a+}^{α} la fonction définie par*

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = (\frac{d}{dx})^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x), \tag{1.3}$$

avec $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ *et* $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$, *où* $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ *désigne la partie entière du* $\mathrm{Re}(\alpha)$.

Définition 1.2.4 *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f d'ordre α et on la note D_{a-}^{α} la fonction définie par*

$$(D_{a-}^{\alpha} f)(x) = (-\frac{d}{dx})^n (I_{a-}^{n-\alpha} f)(x), \tag{1.4}$$

avec $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$.

Définition 1.2.5 *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite de la fonction f d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ et de type β $(0 \leq \beta \leq 1)$ et on la note $D_{a+}^{\alpha,\beta}$ la fonction définie par*

$$(D_{a+}^{\alpha,\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f))(x). \tag{1.5}$$

Définition 1.2.6 *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ et de type β $(0 \leq \beta \leq 1)$ et on la note $D_{a-}^{\alpha,\beta}$ la fonction définie par*

$$(D_{a-}^{\alpha,\beta} f)(x) = (I_{a-}^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_{a-}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f))(x). \tag{1.6}$$

Remarque 1.2.7 *1) Si $\beta = 0$ on trouve la définition classique de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, avec $n = 1$.*

2)Si $\beta = 1$ on trouve la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo définie par

$$(D_{a\pm}^{\alpha,1} f)(x) = (I_{a\pm}^{(1-\alpha)} \frac{d}{dx} f)(x), \tag{1.7}$$

où $0 < \alpha < 1$.

Proposition 1.2.8 *Soit f une fonction à valeurs réelles et $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, alors*

$$(D_{a\pm}^{\alpha,\beta} f)(x) = (\pm I_{a\pm}^{\beta(1-\alpha)}(D_{a\pm}^{\alpha+\beta-\alpha\beta} f))(x). \tag{1.8}$$

Démonstration : *Soit f une fonction à valeurs réelles, $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$.*

D'après les relations (1.3) *et* (1.4), *on obtient*

$$\begin{aligned}(D_{a\pm}^{\alpha+\beta-\alpha\beta} f))(x) &= (\pm\frac{d}{dx})^n (I_{a\pm}^{n-\alpha-\beta+\alpha\beta} f)(x) \\ &= (\pm\frac{d}{dx})(I_{a\pm}^{1-\alpha-\beta+\alpha\beta} f)(x) \\ &= (\pm\frac{d}{dx})(I_{a\pm}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f)(x).\end{aligned}$$

Alors

$$(D_{a\pm}^{\alpha,\beta} f)(x) = (\pm I_{a\pm}^{\beta(1-\alpha)}(D_{a\pm}^{\alpha+\beta-\alpha\beta} f))(x).$$

■

1.3 Fonctions de Mittag-Leffler

Définition 1.3.1 *On appelle fonction de Mittag-Leffler à un paramètre la fonction définie par*

$$E_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu n + 1)}, \tag{1.9}$$

où $z \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(\mu) > 0$.

Remarque 1.3.2 *1) La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre a été introduite par Mittag-Leffler [5].*

2) Si $\mu = 1$, on a

$$E_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

3) Si $\mu = 2$, on a

$$E_2(z^2) = \cosh z,$$

et on a de plus

$$E_2(-z^2) = \cos z.$$

Définition 1.3.3 *On appelle fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres la fonction définie par*

$$E_{\mu,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu n + v)}, \tag{1.10}$$

où $z \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}(\mu) > 0$.

Remarque 1.3.4 *1) La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres sous forme de série a été introduite pour la première fois en 1953 par Ratan Prakash Agarwal [1] et Pierre Humbert et Paul Delerue [3].*

2) Si $\mu = v = 1$, *on a*

$$E_{1,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = E_1(z).$$

Définition 1.3.5 *On appelle fonction de Mittag-Leffler à trois paramètres la fonction définie par*

$$E_{\mu,v}^{\lambda}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{\Gamma(\mu n + v)} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.11}$$

avec

$$(\lambda)_v = \frac{\Gamma(\lambda + v)}{\Gamma(\lambda)}. \tag{1.12}$$

où $z \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}(\mu) > 0$.

Remarque 1.3.6 *1) La fonction de Mittag-Leffler à trois paramètres* $E_{\mu,v}^{\lambda}$ *a été introduite pour la première fois par T. R. Prabhakar [4] en 1971.*

2) On a

$$(1)_n = n!.$$

où $n \in \mathbb{N}$.

3) Si $\lambda = 1$ *on a*

$$E_{\mu,v}^{1}(z) = E_{\mu,v}(z).$$

En effet

$$\begin{aligned} E_{\mu,v}^{1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{\Gamma(\mu n + v)} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(\mu n + v)} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu n + v)} = E_{\mu,v}(z). \end{aligned}$$

4) Si $\lambda = 1$ et $v = 1$ on a

$$E^{1}_{\mu,1}(z) = E_{\mu}(z).$$

En effet

$$\begin{aligned} E^{1}_{\mu,1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{\Gamma(\mu n+1)} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(\mu n+1)} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu n+1)} = E_{\mu}(z). \end{aligned}$$

Définition 1.3.7 *Soit φ une fonction intégrable sur un intervalle (a,b) $(b > a)$, on définie la fonction $E^{\lambda}_{\mu,v,w;a+}\varphi$ comme suit*

$$(E^{\lambda}_{\mu,v,w;a+}\varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{v-1} E^{\lambda}_{\mu,v}(w(x-t)^{\mu})\varphi(t)dt, \tag{1.13}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ et $\mathrm{Re}(v) > 0$.

Lemme 1.3.8 *Soient α et β telles que $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$.*
Alors pour $x > a$, on a

$$(D^{\alpha,\beta}_{a+}[(t-a)^{v-1}])(x) = \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v-\alpha)}(x-a)^{v-\alpha-1}. \tag{1.14}$$

Démonstration : Soient α et β telles que $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$.
Pour $x > a$, d'après la relation (1.5), on a

$$(D^{\alpha,\beta}_{a+}[(t-a)^{v-1}])(x) = (I^{\beta(1-\alpha)}_{a+} \frac{d}{dx}(I^{(1-\beta)(1-\alpha)}_{a+}(t-a)^{v-1}))(x).$$

Calculons $(I^{(1-\beta)(1-\alpha)}_{a+}(t-a)^{v-1})(x)$.
On a

$$(I^{(1-\beta)(1-\alpha)}_{a+}(t-a)^{v-1})(x) = \frac{1}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))} \int_a^x (x-t)^{\beta(\alpha-1)-\alpha} (t-a)^{v-1} dt.$$

On pose

$$t = a + (x-a)v.$$

Par suite

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1})(x) &= \frac{(x-a)^{\beta(\alpha-1)-\alpha+v}}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))}\int_0^1 (1-v)^{\beta(\alpha-1)-\alpha}\, v^{v-1}dv \\ &= \frac{(x-a)^{\beta(\alpha-1)-\alpha+v}}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))}\beta((1-\beta)(1-\alpha),v),\end{aligned}$$

où β la fonction Béta d'Euler définie par

$$\beta(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt;\ (z,w\in\mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(z)>0 \text{ et } \operatorname{Re}(w)>0).$$

Comme

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z).\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

on obtient

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1})(x) &= \frac{(x-a)^{\beta(\alpha-1)-\alpha+v}}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))}\frac{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))\Gamma(v)}{\Gamma(v+(1-\beta)(1-\alpha))} \\ &= \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v+(1-\beta)(1-\alpha))}(x-a)^{\beta(\alpha-1)-\alpha+v}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1})(x) &= \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v+(1-\beta)(1-\alpha))}\frac{d}{dx}(x-a)^{\beta(\alpha-1)-\alpha+v} \\ &= \frac{(\beta(\alpha-1)-\alpha+v)\Gamma(v)}{\Gamma(v+(1-\beta)(1-\alpha))}(x-a)^{\beta(\alpha-1)-\alpha+v-1}.\end{aligned}$$

Maintenant on va calculer $(I_{a+}^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1}))(x)$.

On a

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1}))(x) &= \frac{(\beta(\alpha-1)-\alpha+v)\Gamma(v)}{\Gamma(v+(1-\beta)(1-\alpha)).\Gamma(\beta(1-\alpha))} \\ &\times\int_a^x (x-t)^{\beta(1-\alpha)-1}\,(t-a)^{\beta(\alpha-1)-\alpha+v-1}dt.\end{aligned}$$

On pose

$$t=a+(x-a)v.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
(I_{a+}^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1}))(x) &= \frac{(\beta(\alpha-1)-\alpha+v)\Gamma(v)}{\Gamma(\beta(\alpha-1)-\alpha+v+1).\Gamma(\beta(1-\alpha))}(x-a)^{v-\alpha-1} \\
&\quad \times\int_0^1 (1-v)^{\beta(1-\alpha)-1}\, v^{\beta(\alpha-1)-\alpha+v-1}dv \\
&= \frac{(\beta(\alpha-1)-\alpha+v)\Gamma(v)}{(\beta(\alpha-1)-\alpha+v)\Gamma(\beta(\alpha-1)-\alpha+v).\Gamma(\beta(1-\alpha))} \\
&\quad \times\beta[\beta(1-\alpha),\beta(\alpha-1)-\alpha+v](x-a)^{v-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(v)}{\Gamma[\beta(\alpha-1)-\alpha+v].\Gamma(\beta(1-\alpha))} \\
&\quad \times\frac{\Gamma(\beta(1-\alpha)).\Gamma[\beta(\alpha-1)-\alpha+v]}{\Gamma(v-\alpha)}(x-a)^{v-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v-\alpha)}(x-a)^{v-\alpha-1}.
\end{aligned}
$$

Alors pour $x > a$, on a

$$(D_{a+}^{\alpha,\beta}[(t-a)^{v-1}])(x) = \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v-\alpha)}(x-a)^{v-\alpha-1}.$$

■

Théorème 1 *Soient α et β telles que $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$.*

Alors pour $x > a$, on a

$$(D_{a+}^{\alpha,\beta}[(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]])(x) = (x-a)^{v-\alpha-1}E_{\mu,v-\alpha}^{\lambda}[w(x-a)^{\mu}], \quad (1.15)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, et $v \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ et $\mathrm{Re}(v) > 0$.

Démonstration : Soient α et β telles que $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$.

Pour $x > a$, on a

$$(D_{a+}^{\alpha,\beta}[(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]])(x) = (I_{a+}^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]))(x).$$

Calculons $(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}])(x)$.

On a

$$
\begin{aligned}
(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}])(x) &= \frac{1}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))} \\
&\quad \times\int_a^x (x-t)^{\beta(\alpha-1)-\alpha}\,(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(\mu n+v)}\frac{1}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))} \\
&\quad \times\int_a^x (x-t)^{\beta(\alpha-1)-\alpha}\,(t-a)^{\mu n+v-1}dt.
\end{aligned}
$$

On pose

$$t = a + (x-a)v.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}])(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(\mu n+v)} \frac{(x-a)^{\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha}}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))} \\
&\quad \times \int_0^1 (1-v)^{\beta(\alpha-1)-\alpha}\, v^{\mu n+v-1} dv \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(\mu n+v)} \frac{(x-a)^{\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha}}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))} \\
&\quad \times \beta((1-\beta)(1-\alpha), \mu n+v) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(\mu n+v)} \frac{(x-a)^{\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha}}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))} \\
&\quad \times \frac{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))\Gamma(\mu n+v)}{\Gamma(\mu n+v+(1-\beta)(1-\alpha))} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(n\mu+v+(1-\beta)(1-\alpha))} \\
&\quad \times (x-a)^{\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu})(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(\mu n+v+(1-\beta)(1-\alpha))} \\
&\quad \times \frac{d}{dx}(x-a)^{\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha)(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(\mu n+v+(1-\beta)(1-\alpha))} \\
&\quad \times (x-a)^{\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Calculons $(D_{a+}^{\alpha,\beta}[(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]])(x)$.
On a

$$\begin{aligned}
(D_{a+}^{\alpha,\beta}[(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]])(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha)(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(\mu n+v+(1-\beta)(1-\alpha)).\Gamma(\beta(1-\alpha))} \\
&\quad \times \int_a^x (x-t)^{\beta(1-\alpha)-1}\, (t-a)^{\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha-1} dt.
\end{aligned}$$

On pose

$$t = a + (x-a)v.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(D_{a+}^{\alpha,\beta}[(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]])(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha)(\lambda)_n w^n}{n!\Gamma(\mu n+v+(1-\beta)(1-\alpha))\Gamma(\beta(1-\alpha))}\\
&\quad \times(x-a)^{v-\alpha-1}\int_0^1 (1-v)^{\beta(1-\alpha)-1}\, v^{\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha-1}dv\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n w^n}{n!}(x-a)^{\mu n+v-\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\\
&\quad \times\frac{(\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha)}{(\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha)\Gamma((\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha))}\\
&\quad \times\beta(\beta(1-\alpha),\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha)
\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
(D_{a+}^{\alpha,\beta}[(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]])(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n w^n}{n!}(x-a)^{\mu n+v-\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\mu n+v-\alpha)}\\
&\quad \times\frac{\Gamma(\beta(1-\alpha))\Gamma(\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha)}{\Gamma((\mu n+v+\beta(\alpha-1)-\alpha))\Gamma(\beta(1-\alpha))}\\
&= (x-a)^{v-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{\Gamma(\mu n+v-\alpha)}\frac{(w(x-a)^{\mu})^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Alors pour $x>a$, on obtient

$$(D_{a+}^{\alpha,\beta}[(t-a)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}[w(t-a)^{\mu}]])(x)=(x-a)^{v-\alpha-1}E_{\mu,v-\alpha}^{\lambda}[w(x-a)^{\mu}].$$

■

Théorème 2 *Soient φ une fonction intégrable sur (a,b), et α, β telles que $0<\alpha<1$ et $0\leq\beta\leq 1$.*

Alors pour $x>a$, on a

$$D_{a+}^{\alpha,\beta}(E_{\mu,v,w;a+}^{\lambda}\varphi)(x)=E_{\mu,v-\alpha,w;a+}^{\lambda}\varphi(x), \tag{1.16}$$

où $\lambda\in\mathbb{C}$, $w\in\mathbb{C}$, $\gamma\in\mathbb{C}$, et $v\in\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(\mu)>0$ *et* $\mathrm{Re}(v)>0$.

Démonstration : Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.

D'après la relation (1.13), on obtient

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha,\beta}(E_{\mu,v,w;a+}^{\lambda}\varphi)(x) &= D_{a+}^{\alpha,\beta}\int_a^x (x-t)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}(w(x-t)^{\mu})\varphi(t)dt\\
&= \int_a^x D_{a+}^{\alpha,\beta}(x-t)^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}(w(x-t)^{\mu})\varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

D'après le théorème (1), on obtient

$$D_{a+}^{\alpha,\beta}(E_{\mu,v,w;a+}^{\lambda}\varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{v-\alpha-1} E_{\mu,v-\alpha}^{\lambda}(w(x-t)^{\mu})\varphi(t)dt.$$

Ainsi d'après la relation (1.13), il résulte que

$$D_{a+}^{\alpha,\beta}(E_{\mu,v,w;a+}^{\lambda}\varphi)(x) = E_{\mu,v-\alpha,w;a+}^{\lambda}\varphi(x).$$

■

1.4 Transformée de Laplace

Définition 1.4.1 *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *une fonction localement intégrable.*

Une fonction f *est dite d'ordre exponentiel* α *s'il existe des constantes réelles* $M \geq 0$, $K > 0$ *et* a *telles que*

$$\mid f(x) \mid \leq K \exp(\alpha x) \text{ lorsque } x \geq M.$$

Définition 1.4.2 *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *une fonction localement intégrable sur* $[0, +\infty[$ *et d'ordre exponentiel* α.

La transformée de Laplace de la fonction f *est l'application* $\mathcal{L}$ *définie par*

$$\mathcal{L}[f(x)](p) = \int_0^{\infty} \exp(-px) f(x)dx, \tag{1.17}$$

où $p \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}(p) > \alpha$.

Définition 1.4.3 *Soient* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *et* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$.

Le produit de convolution de deux fonctions f *et* g *qu'on le note* $f * g$ *est défini par*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{1.18}$$

Pour la transformée de Laplace, on a les propriétés suivantes:

1) Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions, telles que f admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}[f(x)](p)$ et g admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}[g(x)](p)$.

Alors

$$\mathcal{L}[(f * g)(x)](p) = \mathcal{L}[f(x)](p).\mathcal{L}[g(x)](p).$$

2) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}[f(x)](p)$.

Alors

$$\mathcal{L}[x^n f(x)](p) = (-1)^n F^{(n)}(p), \tag{1.19}$$

où

$$F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p) \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

3) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}[f(x)](p)$.

Alors

$$\mathcal{L}[f(x)](p) = p\mathcal{L}[f(x)](p) - f(0).$$

4) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}[f(x)](p)$.

Alors

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau](p) = \frac{\mathcal{L}[f(x)](p)}{p}.$$

Théorème 3 *Soit* f *une fonction à valeurs réelles et soit* $0 < \alpha < 1$ *avec* $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$.

Alors on a,

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\beta} f)(x)](p) = p^{\alpha}\mathcal{L}[f(x)](p) - p^{\beta(\alpha-1)}(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f)(0+), \tag{1.20}$$

où

$$(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f)(0+)$$

est la limite de l'intégrale fractionnaire d'ordre $(1-\beta)(1-\alpha)$ *de* f *quand* $t \to 0+$.

Démonstration : Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (1.5), on obtient

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\beta} f)(x)](p) = \mathcal{L}[(I_{0\pm}^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f))(x)](p),$$

comme

$$\mathcal{L}[(I_{0+}^{\alpha} f)(x)](p) = \frac{\mathcal{L}[f(x)](p)}{p^{\alpha}}.$$

Alors

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\beta} f)(x)](p) = \frac{\mathcal{L}[(\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f)(x)](p)}{p^{\beta(1-\alpha)}},$$

comme

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{\alpha} f)(x)](p) = p\mathcal{L}[(I_{0+}^{\alpha} f)(x)](p) - (I_{0+}^{\alpha} f)(0+).$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\beta}f)(x)](p) &= \frac{p\mathcal{L}[(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f))(x)](p)}{p^{\beta(1-\alpha)}} - p^{\beta(\alpha-1)}(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(0+)\\ &= \frac{p\mathcal{L}[f(x)](p)}{p^{\beta(1-\alpha)}p^{(1-\beta)(1-\alpha)}} - p^{\beta(\alpha-1)}(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(0+),\end{aligned}$$

par suite, il résulte que

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\beta}f)(x)](p) = p^{\alpha}\mathcal{L}[f(x)](p) - p^{\beta(\alpha-1)}(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(0+).$$

■

Proposition 1.4.4 *Supposons que la fonction $E_{\mu,v}^{\lambda}$ admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}$, alors*

$$\mathcal{L}[x^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}(wx^{\mu})](p) = \frac{p^{\lambda\mu-v}}{(p^{\mu}-w)^{\lambda}}, \tag{1.21}$$

où λ, μ, w, v, $p \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(v) > 0$ et $\mathrm{Re}(p) > 0$, $\mid \frac{w}{p^{\mu}} \mid < 1$.

Démonstration : Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.

En utilisant la relation (1.11), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}(wx^{\mu})](p) &= \mathcal{L}[x^{v-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{\Gamma(\mu n+v)}\frac{(wx^{\mu})^n}{n!}](p)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{\Gamma(\mu n+v)}\frac{w^n}{n!}\mathcal{L}[x^{\mu n+v-1}](p).\end{aligned}$$

Comme

$$\mathcal{L}[x^{\mu n+v-1}](p) = \frac{\Gamma(\mu n+v)}{p^{\mu n+v}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}(wx^{\mu})](p) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{\Gamma(\mu n+v)}\frac{w^n}{n!}\frac{\Gamma(\mu n+v)}{p^{\mu n+v}}\\ &= p^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}(\frac{w}{p^{\mu}})^n.\end{aligned}$$

Comme

$$(1-y)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)_n}{n!}y^n,$$

on obtient

$$\mathcal{L}[x^{v-1}E_{\mu,v}^{\lambda}(wx^{\mu})](p) = \frac{p^{\lambda\mu-v}}{(p^{\mu}-w)^{\lambda}}.$$

■

Chapitre 2

Equations différentielles fractionnaires à coefficients constants et variables

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on résoudre quelques équations différentielles fractionnaires à coefficients constants et variables en utilisant la transformée de Laplace et les fonctions de Mittag-Leffler.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [11]. La partie concernant les équations différentielles fractionnaires aves retard est un travail personnel.

2.2 Equations différentielles fractionnaires à coefficients constants

Proposition 2.2.1 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} (D^{\alpha}_{0+}f)(x) = \lambda f(x) \\ (I^{1-\alpha}_{0+}f)(0+) = c, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions de (2.1) *sont données par*

$$f(x) = cx^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}). \tag{2.2}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.*

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (2.1), *on obtient*

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha}f)(x)](p) = \mathcal{L}[\lambda f(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{1-\alpha}f)(x)](p) = \lambda\mathcal{L}[f(x)](p).$$

C'est-à-dire

$$p\mathcal{L}[(I_{0+}^{1-\alpha}f)(x)](p) - (I_{0+}^{1-\alpha}f)(0+) = \lambda\mathcal{L}[f(x)](p),$$

C'est-à-dire

$$p\frac{F(p)}{p^{1-\alpha}} - c = \lambda F(p),$$

avec

$$F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p) \text{ et } (I_{0+}^{1-\alpha}f)(0+) = c.$$

Par suite, on obtient

$$(p^{\alpha} - \lambda)F(p) = c,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} F(p) &= c\frac{1}{p^{\alpha}-\lambda} \\ &= c\frac{p^{\alpha-\alpha}}{p^{\alpha}-\lambda}. \end{aligned}$$

Alors d'après la relation (1.21), *on obtient*

$$f(x) = cx^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}),$$

où $c \in \mathbb{R}$. ∎

Proposition 2.2.2 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} (D_{0+}^{\alpha,\beta}f)(x) = \lambda f(x) \\ (I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(0+) = c, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions de (2.3) *sont données par*

$$f(x) = cx^{(1-\beta)(\alpha-1)}E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(\lambda x^{\alpha}). \tag{2.4}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.*

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (2.3)*, on obtient*

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\beta}f)(x)](p) = \mathcal{L}[\lambda f(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(x)](p) = \lambda\mathcal{L}[f(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(x)](p)}{p^{\beta(1-\alpha)}} = \lambda\mathcal{L}[f(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\frac{p}{p^{\beta(1-\alpha)}}\mathcal{L}[(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(x)](p) - \frac{(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(0+)}{p^{\beta(1-\alpha)}} = \lambda\mathcal{L}[f(x)](p),$$

par suite, on a

$$\frac{p}{p^{\beta(1-\alpha)}}\frac{F(p)}{p^{(1-\beta)(1-\alpha)}} = \lambda F(p) + \frac{c}{p^{\beta(1-\alpha)}}$$

avec

$$F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p) \text{ et } (I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)(0+) = c.$$

C'est-à-dire

$$(p^\alpha - \lambda)F(p) = c\frac{1}{p^{\beta(1-\alpha)}},$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{p^{\beta(\alpha-1)}}{p^\alpha - \lambda}.$$

Alors d'après la relation (1.21)*, on obtient*

$$f(x) = cx^{(1-\beta)(\alpha-1)}E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(\lambda x^\alpha),$$

où $c \in \mathbb{R}$. ■

Remarque 2.2.3 *Si* $\beta = 1$ *dans la proposition précédente, alors on a*

$$(D_{0+}^{\alpha,1}f)(x) = \lambda f(x), \tag{2.5}$$

Par suite les solutions de (2.5) *sont données par*

$$f(x) = cE_\alpha(\lambda x^\alpha). \tag{2.6}$$

Théorème 4 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} a(D_{0+}^{\alpha_1,\beta_1}y)(x) + b(D_{0+}^{\alpha_2,\beta_2}y)(x) + cy(x) = f(x) \\ (I_{0+}^{(1-\beta_i)(1-\alpha_i)}y)(0+) = c_i, \end{cases} \tag{2.7}$$

où a, b *et* $c \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$, $0 \leq \beta_i \leq 1, f$ *est une fonction donnée et* $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$.

On suppose que la condition suivante est satisfaite

$$(1-\beta_1)(1-\alpha_1) \leq (1-\beta_2)(1-\alpha_2).$$

Alors les solutions de (2.7) *sont données par*

$$\begin{aligned} y(x) \quad = \quad & \frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty}(-\frac{a}{b})^m[ac_1x^{(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_1(1-\alpha_1)-1} \\ & \times E_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_1(1-\alpha_1)}^{m+1}(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2}) \\ & +bc_2x^{(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_2(1-\alpha_2)-1}E_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_2(1-\alpha_2)}^{m+1}(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2}) \\ & +(E_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2,-\frac{c}{b};0+}^{m+1}f)(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2})]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.*

On a

$$a(D_{0+}^{\alpha_1,\beta_1}y)(x) + b(D_{0+}^{\alpha_2,\beta_2}y)(x) + cy(x) = f(x),$$

c'est-à-dire

$$a(I_{0+}^{\beta_1(1-\alpha_1)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha_1)}y))(x)+b(I_{0+}^{\beta_2(1-\alpha_2)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha_2)}y))(x)+cy(x) = f(x).$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[a(I_{0+}^{\beta_1(1-\alpha_1)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha_1)}y))(x)+b(I_{0+}^{\beta_2(1-\alpha_2)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha_2)}y))(x)+cy(x)](p) = \mathcal{L}[f(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$a\frac{\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha_1)}y)(x)](p)}{p^{\beta_1(1-\alpha_1)}}+b\frac{\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha_2)}y)(x)](p)}{p^{\beta_2(1-\alpha_2)}}+c\mathcal{L}[y(x)](p) = \mathcal{L}[f(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$Y(p) = ac_1\frac{p^{\beta_1(\alpha_1-1)}}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+c} + bc_2\frac{p^{\beta_2(\alpha_2-1)}}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+c} + \frac{F(p)}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+c},$$

où

$$Y(p) := \mathcal{L}[y(x)](p) \text{ et } F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p).$$

Par suite pour $i = 1,\ 2,$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{p^{\beta_i(\alpha_i-1)}}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+c} &= \frac{1}{b}(\frac{p^{\beta_i(\alpha_i-1)}}{p^{\alpha_2}+\frac{c}{b}})(\frac{1}{1+\frac{a}{b}(\frac{p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_2}+\frac{c}{b}})}) \\
&= \frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty}(-\frac{a}{b})^m\frac{p^{\alpha_1 m+\beta_i\alpha_i-\beta_i}}{(p^{\alpha_2}+\frac{c}{b})^{m+1}} \\
&= \mathcal{L}[\frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\frac{a}{b})^m x^{(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_i(1-\alpha_i)-1} \\
&\quad \times E^{m+1}_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_i(1-\alpha_i)}(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2})](p),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{F(p)}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+c} &= \frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty}(-\frac{a}{b})^m(\frac{p^{\alpha_1 m}}{(p^{\alpha_2}+\frac{c}{b})^{m+1}}F(p)) \\
&= \mathcal{L}[\frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty}(-\frac{a}{b})^m(x^{(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2-1} \\
&\quad \times E^{m+1}_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2}(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2}) * f(x)](p) \\
&= \mathcal{L}[\frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\frac{a}{b})^m(E^{m+1}_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2,-\frac{c}{b};0+}f)(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2})](p).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty}(-\frac{a}{b})^m[ac_1x^{(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_1(1-\alpha_1)-1}E^{m+1}_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_1(1-\alpha_1)}(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2}) \\
&\quad +bc_2x^{(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_2(1-\alpha_2)-1}E^{m+1}_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2+\beta_2(1-\alpha_2)}(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2}) \\
&\quad +(E^{m+1}_{\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_1)m+\alpha_2,-\frac{c}{b};0+}f)(-\frac{c}{b}x^{\alpha_2})].
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.4 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} a(D^{\alpha,\beta_1}_{0+}y)(x)+b((D^{\alpha,\beta_2}_{0+}y)(x)+cy(x)=f(x), \\ (I^{(1-\beta_i)(1-\alpha)}_{0+}y)(0+)=c_i, \end{cases} \tag{2.9}$$

où a, b et $c \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ et $\beta_1 \neq \beta_2$, f est une fonction donnée et $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\, 2)$.

On suppose que la condition suivante est satisfaite

$$\beta_2 < \beta_1.$$

Alors les solutions de (2.9) sont données par

$$\begin{aligned} y(x) &= (\frac{ac_1}{a+b})x^{\beta_1+\alpha(1-\beta_1)-1}E_{\alpha,\beta_1+\alpha(1-\beta_1)}(-\frac{c}{a+b}x^{\alpha}) \\ &\quad +(\frac{bc_2}{a+b})x^{\beta_2+\alpha(1-\beta_2)-1}E_{\alpha,\beta_2+\alpha(1-\beta_2)}(-\frac{c}{a+b}x^{\alpha}) \\ &\quad +(\frac{1}{a+b})(E_{\alpha,\alpha,-\frac{c}{a+b};0+}f)(x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du corollaire sont satisfaites.*

On a

$$a(D_{0+}^{\alpha,\beta_1}y)(x) + b((D_{0+}^{\alpha,\beta_2}y)(x) + cy(x) = f(x),$$

c'est-à-dire

$$a(I_{0+}^{\beta_1(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha)}y))(x)+b(I_{0+}^{\beta_2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha)}y))(x)+cy(x) = f(x).$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[a(I_{0+}^{\beta_1(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha)}y))(x)+b(I_{0+}^{\beta_2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha)}y))(x)+cy(x)](p) = \mathcal{L}[f(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$a\frac{\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha)}y)(x)](p)}{p^{\beta_1(1-\alpha)}}+b\frac{\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha)}y)(x)](p)}{p^{\beta_2(1-\alpha)}}+c\mathcal{L}[y(x)](p) = \mathcal{L}[f(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$Y(p) = ac_1\frac{p^{\beta_1(\alpha-1)}}{p^{\alpha}(a+b)+c} + bc_2\frac{p^{\beta_2(\alpha-1)}}{p^{\alpha}(a+b)+c} + \frac{F(p)}{p^{\alpha}(a+b)+c},$$

où

$$Y(p) := \mathcal{L}[y(x)](p) \text{ et } F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p).$$

Par suite pour $i = 1,\, 2$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{p^{\beta_i(\alpha-1)}}{p^{\alpha}(a+b)+c} &= \frac{1}{a+b}(\frac{p^{\beta_i(\alpha-1)}}{p^{\alpha}+\frac{c}{a+b}}) \\ &= \mathcal{L}[x^{\beta_i+\alpha(1-\beta_i)-1}E_{\alpha,\beta_i+\alpha(1-\beta_i)}(-\frac{c}{a+b}x^{\alpha})](p), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{F(p)}{p^{\alpha}(a+b)+c} &= \frac{1}{a+b}\left(\frac{p^{\alpha-\alpha}}{p^{\alpha}+\frac{c}{a+b}}\right)F(p) \\
&= \mathcal{L}[x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\frac{c}{a+b}x^{\alpha}) * f(x)](p) \\
&= \mathcal{L}[E^{1}_{\alpha,\alpha,-\frac{c}{a+b};0+}f)(x)](p).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
y(x) &= (\frac{ac_1}{a+b})x^{\beta_1+\alpha(1-\beta_1)-1}E_{\alpha,\beta_1+\alpha(1-\beta_1)}(-\frac{c}{a+b}x^{\alpha}) \\
&+(\frac{bc_2}{a+b})x^{\beta_2+\alpha(1-\beta_2)-1}E_{\alpha,\beta_2+\alpha(1-\beta_2)}(-\frac{c}{a+b}x^{\alpha}) \\
&+(\frac{1}{a+b})(E_{\alpha,\alpha,-\frac{c}{a+b};0+}f)(x).
\end{aligned}$$

■

Théorème 5 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} a(D^{\alpha_1,\beta_1}_{0+}y)(x)+b(D^{\alpha_2,\beta_2}_{0+}y)(x)+c(D^{\alpha_3,\beta_3}_{0+}y)(x)+ey(x)=f(x) \\ (I^{(1-\beta_i)(1-\alpha_i)}_{0+}y)(0+)=c_i, \end{cases} \tag{2.11}$$

où a, b *et* $c \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 < 1$, $0 \leq \beta_i \leq 1$, f *est une fonction donnée et* $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

On suppose que la condition suivante est satisfaite

$$(1-\beta_1)(1-\alpha_1) \leq (1-\beta_2)(1-\alpha_2) \leq (1-\beta_3)(1-\alpha_3).$$

Alors les solutions de (2.11) *sont données par*

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}a^k b^{m-k}x^{(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3-1} \\
&\times[ac_1x^{\beta_1(1-\alpha_1)}E_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3+\beta_1(1-\alpha_1)}(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}) \\
&+bc_2x^{\beta_2(1-\alpha_2)}E_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3+\beta_2(1-\alpha_2)}(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}) \\
&+cc_3x^{\beta_3(1-\alpha_3)}E_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3+\beta_3(1-\alpha_3)}(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}) \\
&+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}a^k b^{m-k} \\
&\times(E^{m+1}_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3}f)(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.*
On a

$$a(D_{0+}^{\alpha_1,\beta_1}y)(x) + b(D_{0+}^{\alpha_2,\beta_2}y)(x) + c(D_{0+}^{\alpha_3,\beta_3}y)(x) + ey(x) = f(x),$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} Y(p) &= ac_1\frac{p^{\beta_1(\alpha_1-1)}}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+cp^{\alpha_3}+e} + bc_2\frac{p^{\beta_2(\alpha_2-1)}}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+cp^{\alpha_3}+e} \\ &\quad +cc_3\frac{p^{\beta_3(\alpha_3-1)}}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+cp^{\alpha_3}+e} + \frac{F(p)}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+cp^{\alpha_3}+e}, \end{aligned}$$

Par suite pour $i = 1, 2, 3$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{p^{\beta_i(\alpha_i-1)}}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+cp^{\alpha_3}+e} &= \left(\frac{p^{\beta_i(\alpha_i-1)}}{cp^{\alpha_3}+e}\right)\left(\frac{1}{1+(\frac{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}}{cp^{\alpha_3}+e})}\right) \\ &= \frac{p^{\beta_i(\alpha_i-1)}}{cp^{\alpha_3}+e}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2})^m}{(cp^{\alpha_3}+e)^m} \\ &= p^{\beta_i(\alpha_i-1)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\frac{C_m^k a^k p^{k\alpha_1} b^{m-k} p^{\alpha_2(m-k)}}{(cp^{\alpha_3}+e)^{m+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k}\frac{p^{k\alpha_1+\alpha_2(m-k)+\beta_i(\alpha_i-1)}}{(p^{\alpha_3}+\frac{e}{c})^{m+1}} \\ &= \mathcal{L}[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k} x^{(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3+\beta_i(1-\alpha_i)-1} \\ &\quad \times E^{m+1}_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3+\beta_i(1-\alpha_i)}(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3})](p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{F(p)}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+cp^{\alpha_3}+e} &= \left(\frac{1}{cp^{\alpha_3}+e}\right)\left(\frac{1}{1+(\frac{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}}{cp^{\alpha_3}+e})}\right)F(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k}\frac{p^{k\alpha_1+\alpha_2(m-k)}}{(p^{\alpha_3}+\frac{e}{c})^{m+1}}F(p), \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\frac{F(p)}{ap^{\alpha_1}+bp^{\alpha_2}+cp^{\alpha_3}+e} &= \mathcal{L}[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k}(x^{(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3-1} \\
&\quad \times E^{m+1}_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3}(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}) * f(x)](p) \\
&= \mathcal{L}[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k} \\
&\quad \times (E^{m+1}_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3}f)(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3})](p).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a^k b^{m-k} x^{(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3-1} \\
&\quad \times [ac_1 x^{\beta_1(1-\alpha_1)}E_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3+\beta_1(1-\alpha_1)}(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}) \\
&\quad + bc_2 x^{\beta_2(1-\alpha_2)}E_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3+\beta_2(1-\alpha_2)}(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}) \\
&\quad + cc_3 x^{\beta_3(1-\alpha_3)}E_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3+\beta_3(1-\alpha_3)}(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}) \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{c^{m+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a^k b^{m-k} \\
&\quad \times (E^{m+1}_{\alpha_3,(\alpha_3-\alpha_2)m+(\alpha_2-\alpha_1)k+\alpha_3}f)(-\frac{e}{c}x^{\alpha_3}).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.5 *On considère le problème suivant*

$$\left\{\begin{array}{c} a(D_{0+}^{\alpha,\beta_1}y)(x)+b(D_{0+}^{\alpha,\beta_2}y)(x)+c(D_{0+}^{\alpha,\beta_3}y)(x)+ey(x)=f(x) \\ (I_{0+}^{(1-\beta_i)(1-\alpha)}y)(0+)=c_i, \end{array}\right. \tag{2.13}$$

où a, b *et* $c \in \mathbb{R}$, $0<\alpha<1$, $0 \leq \beta_i \leq 1$, f *est une fonction donnée et* $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

On suppose que la condition suivante est satisfaite

$$\beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1.$$

Alors les solutions de (2.13) *sont données par*

$$\begin{aligned}
y(x) &= (\frac{ac_1}{a+b+c})x^{\beta_1+\alpha(1-\beta_1)-1}E_{\alpha,\beta_1+\alpha(1-\beta_1)}(-\frac{e}{a+b+c}x^{\alpha}) \qquad (2.14) \\
&\quad + (\frac{ac_2}{a+b+c})x^{\beta_2+\alpha(1-\beta_2)-1}E_{\alpha,\beta_2+\alpha(1-\beta_2)}(-\frac{e}{a+b+c}x^{\alpha}) \\
&\quad + (E_{\alpha,\alpha,-\frac{e}{a+b+c};0+}f)(x).
\end{aligned}$$

Démonstration : Supposons que les hypothèses du corollaire sont satisfaites.

On a

$$a(D_{0+}^{\alpha,\beta_1}y)(x)+b(D_{0+}^{\alpha,\beta_2}y)(x)+c(D_{0+}^{\alpha,\beta_3}y)(x)+ey(x)=f(x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f(x) &= a(I_{0+}^{\beta_1(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha)}y))(x)+b(I_{0+}^{\beta_2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha)}y))(x) \\ &\quad +c(I_{0+}^{\beta_3(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_3)(1-\alpha)}y))(x)+ey(x). \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}[a(I_{0+}^{\beta_1(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha)}y))(x) \\ &+b(I_{0+}^{\beta_2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha)}y))(x) \\ &+c(I_{0+}^{\beta_3(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_3)(1-\alpha)}y))(x)+ey(x)](p)=\mathcal{L}[f(x)](p), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &a\frac{\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_1)(1-\alpha)}y)(x)](p)}{p^{\beta_1(1-\alpha)}} \\ &+b\frac{\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_2)(1-\alpha)}y)(x)](p)}{p^{\beta_2(1-\alpha)}} \\ &+c\frac{\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{(1-\beta_3)(1-\alpha)}y)(x)](p)}{p^{\beta_3(1-\alpha)}}+e\mathcal{L}[y(x)](p)=\mathcal{L}[f(x)](p), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Y(p) &= ac_1\frac{p^{\beta_1(\alpha-1)}}{p^\alpha(a+b+c)+e}+bc_2\frac{p^{\beta_2(\alpha-1)}}{p^\alpha(a+b+c)+e} \\ &\quad +cc_3\frac{p^{\beta_3(\alpha-1)}}{p^\alpha(a+b+c)+e}+\frac{F(p)}{p^\alpha(a+b+c)+e}, \end{aligned}$$

où

$$Y(p):=\mathcal{L}[y(x)](p) \text{ et } F(p):=\mathcal{L}[f(x)](p).$$

Par suite pour $i=1,\,2,\,3$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{p^{\beta_i(\alpha-1)}}{p^\alpha(a+b+c)+e} &= \frac{1}{a+b+c}(\frac{p^{\beta_i(\alpha-1)}}{p^\alpha+\frac{e}{a+b+c}}) \\ &= \frac{1}{a+b+c}\mathcal{L}[x^{\beta_i+\alpha(1-\beta_i)-1}E_{\alpha,\beta_i+\alpha(1-\beta_i)}(-\frac{e}{a+b+c}x^\alpha)](p), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{F(p)}{p^\alpha(a+b+c)+e} &= \frac{1}{a+b+c}\left(\frac{p^{\alpha-\alpha}}{p^\alpha+\frac{e}{a+b+c}}\right)F(p)\\
&= \frac{1}{a+b+c}\mathcal{L}[x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\frac{e}{a+b+c}x^\alpha) * f(x)](p)\\
&= \mathcal{L}[E_{\alpha,\alpha,-\frac{e}{a+b+c};0+}f)(x)](p).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
y(x) &= (\frac{ac_1}{a+b+c})x^{\beta_1+\alpha(1-\beta_1)-1}E_{\alpha,\beta_1+\alpha(1-\beta_1)}(-\frac{e}{a+b+c}x^\alpha)\\
&+(\frac{ac_2}{a+b+c})x^{\beta_2+\alpha(1-\beta_2)-1}E_{\alpha,\beta_2+\alpha(1-\beta_2)}(-\frac{e}{a+b+c}x^\alpha)\\
&+(E_{\alpha,\alpha,-\frac{e}{a+b+c};0+}f)(x).
\end{aligned}$$

■

2.3 Equations différentielles fractionnaires à coefficients variables

Proposition 2.3.1 *On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante*

$$x(D_{0+}^\alpha y)(x) = \lambda y(x), \tag{2.15}$$

où $0 < \alpha < 1$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions de (2.15) *sont données par*

$$y(x) = cx^{\alpha-1}\phi(\alpha-1,\ \alpha;\ \ -\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{\alpha-1}), \tag{2.16}$$

où $c \in \mathbb{R}$, *avec*

$$\phi(\alpha,\ \beta;\ z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!},$$

où $\alpha,\ \beta,\ z \in \mathbb{C}$.

Démonstration : Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (2.15), on a

$$\mathcal{L}[x(D_{0+}^\alpha y)(x)](p) = \mathcal{L}[\lambda y(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$-\frac{d}{dp}\mathcal{L}[\frac{d}{dx}(I_{0+}^{1-\alpha}y)(x)](p) = \lambda\mathcal{L}[y(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$-\frac{d}{dp}[p^{\alpha}Y(p) - (I_{0+}^{1-\alpha}y)(0+) = \lambda Y(p),$$

où

$$Y(p) := \mathcal{L}[y(x)](p).$$

Par suite, on obtient

$$Y'(p) + (\frac{\alpha}{p} + \frac{\lambda}{p^{\alpha}})Y(p) = 0$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{dY}{Y} = -\int (\frac{\alpha}{p} + \frac{\lambda}{p^{\alpha}})dp,$$

c'est-à-dire

$$Y(p) = cp^{-\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}),$$

où $c \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} Y(p) &= cp^{-\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}) \\ &= c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{\lambda}{1-\alpha})^n}{n!}p^{(1-\alpha)n-\alpha}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} y(x) &= cx^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma((\alpha-1)n+\alpha)}\frac{(-\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{\alpha-1})^n}{n!} \\ &= cx^{\alpha-1}\phi(\alpha-1,\alpha;-\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

■

Théorème 6 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} x(D_{0+}^{\alpha,\beta}y)(x) = \lambda y(x) \\ (I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}y)(0+) = c_1, \end{cases} \tag{2.17}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $c_1 \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions de (2.17) *sont données par*

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\beta x^{(\alpha-1)(1-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{(\alpha-1)})^n}{n!(\beta-n)} \\ &\quad\times\phi(\alpha-1,(\beta-n)(1-\alpha)+\alpha,\frac{\lambda}{\alpha-1}x^{\alpha-1}) \\ &\quad+c_2x^{(\alpha-1)}\phi(\alpha-1,\ \alpha;\ -\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{\alpha-1}). \end{aligned} \tag{2.18}$$

où $c_2\in\mathbb{R}$.

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.*

On a

$$x(D_{0+}^{\alpha,\beta}y)(x)=\lambda y(x)$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on a

$$\mathcal{L}[x(D_{0+}^{\alpha,\beta}y)(x)](p)=\mathcal{L}[\lambda y(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$-\frac{d}{dp}\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\beta}y)(x)](p)=\lambda\mathcal{L}[y(x)](p),$$

d'après la relation (1.20)*, on a*

$$\frac{d}{dp}(p^{\alpha}Y(p)-c_1p^{\beta(\alpha-1)})=-\lambda Y(p),$$

ce qui donne

$$Y'(p)+(\frac{\alpha}{p}+\frac{\lambda}{p^{\alpha}})Y(p)=c_1\beta(\alpha-1)p^{\beta(\alpha-1)-\alpha-1}. \tag{2.19}$$

(2.19) *est une équation différentielle linéaire avec second membre.*

La résolution de cette équation différentielle se fait en deux étapes.

1ère étape: La résolution de l'équation différentielle sans second membre.

On a

$$Y'(p)+(\frac{\alpha}{p}+\frac{\lambda}{p^{\alpha}})Y(p)=0,$$

d'après la preuve de la proposition précédent on a

$$Y(p)=c_2p^{-\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}),$$

où $c_2\in\mathbb{R}$.

$2^{éme}$ *étape: La résolution de l'équation différentielle avec second membre.*
On a

$$Y'(p) + (\frac{\alpha}{p} + \frac{\lambda}{p^{\alpha}})Y(p) = c_1\beta(\alpha-1)p^{\beta(\alpha-1)-\alpha-1}.$$

Appliquons la méthode de la variation de la constante.
On a

$$Y(p) = c_2(p)p^{-\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Y'(p) &= c_2'(p)p^{-\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}) \\ &\quad -c_2(p)\alpha p^{-\alpha-1}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}) - c_2(p)\lambda p^{-2\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}). \end{aligned}$$

En remplace dans l'équation (2.19), *on obtient*

$$c_2'(p)p^{-\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}) = c_1\beta(\alpha-1)p^{\beta(\alpha-1)-\alpha-1}.$$

Par suite

$$c_2(p) = c_2 + c_1\beta(\alpha-1)\int_0^p x^{\beta(\alpha-1)-1}\exp(-\frac{\lambda}{\alpha-1}x^{1-\alpha})dx.$$

Alors la solution est donnée par

$$Y(p) = \frac{1}{p^{\alpha}}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha})[c_2+c_1\beta(\alpha-1)\int_0^p x^{\beta(\alpha-1)-1}\exp(-\frac{\lambda}{\alpha-1}x^{1-\alpha})dx],$$

où $c_1 \in \mathbb{R}$ *et* $c_2 \in \mathbb{R}$.
En conclusion, la solution de (2.19) *est donnée par*

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p),$$

où

$$Y_1(p) = \frac{c_1\beta(\alpha-1)}{p^{\alpha}}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha})\int_0^p x^{\beta(\alpha-1)-1}\exp(-\frac{\lambda}{\alpha-1}x^{1-\alpha})dx,$$

et

$$Y_2(p) = \frac{c_2}{p^{\alpha}}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}).$$

Comme

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= \frac{c_1\beta(\alpha-1)}{p^\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha})\int_0^p x^{\beta(\alpha-1)-1}\exp(-\frac{\lambda}{\alpha-1}x^{1-\alpha})dx \\ &= c_1\beta(\alpha-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{\alpha-1})^n}{n!}p^{(1-\alpha)n-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{\lambda}{\alpha-1})^n}{n!}\int_0^p x^{(1-\alpha)n+\beta(\alpha-1)-1}dx \\ &= c_1\beta(\alpha-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{\alpha-1})^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{\lambda}{\alpha-1})^n}{n!}\frac{1}{(1-\alpha)n+\beta(\alpha-1)}p^{2(1-\alpha)n+\beta(\alpha-1)-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1\beta(\alpha-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{\alpha-1})^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{\lambda}{\alpha-1})^n}{n!}\frac{x^{2(\alpha-1)n(\alpha-1)(1-\beta)}}{(\alpha-1)(\beta-n)\Gamma((\alpha-1)n+(\beta-n)(1-\alpha)+\alpha)} \\ &= c_1\beta x^{(\alpha-1)(1-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{(\alpha-1)})^n}{n!(\beta-n)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma((\alpha-1)n+(\beta-n)(1-\alpha)+\alpha)}\frac{(\frac{\lambda}{\alpha-1}x^{\alpha-1})^n}{n!} \\ &= c_1\beta x^{(\alpha-1)(1-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{(\alpha-1)})^n}{n!(\beta-n)}\phi(\alpha-1,\ (\beta-n)(1-\alpha)+\alpha,\ \frac{\lambda}{\alpha-1}x^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= \frac{c_2}{p^\alpha}\exp(\frac{\lambda}{\alpha-1}p^{1-\alpha}) \\ &= c_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{\alpha-1})^n}{n!}p^{(1-\alpha)n-\alpha}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} y_2(x) &= c_2x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma((\alpha-1)n+\alpha)}\frac{(\frac{\lambda}{\alpha-1}x^{\alpha-1})^n}{n!} \\ &= c_2x^{(\alpha-1)}\phi(\alpha-1,\ \alpha;\ \frac{\lambda}{\alpha-1}x^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

En conclusion

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\beta x^{(\alpha-1)(1-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{(\alpha-1)})^n}{n!(\beta-n)} \\ &\quad\times\phi(\alpha-1,(\beta-n)(1-\alpha)+\alpha,\frac{\lambda}{\alpha-1}x^{\alpha-1}) \\ &\quad+c_2x^{(\alpha-1)}\phi(\alpha-1,\ \alpha;\ -\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

■

2.4 Equations différentielles fractionnaires avec retard

Proposition 2.4.1 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} (D_{0+}^{\alpha,\beta} y)(x) = \lambda y(x-1) \\ (I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} y)(0+) = c, \end{cases} \tag{2.20}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions du problème (2.20) *sont données par*

$$y(x) = c \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \frac{(x-k)^{\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha))}. \tag{2.21}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.*

On a

$$(D_{0+}^{\alpha,\beta} y)(x) = \lambda y(x-1).$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\beta} y)(x)](p) = \mathcal{L}[\lambda y(x-1)](p).$$

Comme

$$\mathcal{L}[f(t-a)](p) = \exp(-ap)\mathcal{L}[f(t)](p), \;\; a > 0.$$

Par suite, on obtient

$$p^\alpha Y(p) - cp^{\beta(\alpha-1)} = \lambda \exp(-p) Y(p),$$

où

$$Y(p) := \mathcal{L}[y(x)](p).$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{cp^{\beta(\alpha-1)}}{p^\alpha - \lambda\exp(-p)} = \frac{c}{p^{\alpha(1-\beta)+\beta}(1-\lambda\frac{\exp(-p)}{p^\alpha})} \\ &= \frac{c}{p^{\alpha(1-\beta)+\beta}} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda \frac{\exp(-p)}{p^\alpha})^k = c \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \frac{\exp(-kp)}{p^{\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha)}}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(x-k)^{\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha)-1}](p) &= \exp(-kp)\mathcal{L}[x^{\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha)-1}](p) \\ &= \exp(-kp)\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha))}{p^{\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha)}}, \end{aligned}$$

on obtient

$$y(x) = c\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k \frac{(x-k)^{\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta(1-\alpha))}.$$

■

Remarque 2.4.2 *Si $\beta = 1$ dans la proposition précédente, alors on a*

$$\begin{cases} (D_0^{\alpha,1}y)(x) = \lambda y(x-1) \\ y(0) = c, \end{cases} \tag{2.22}$$

et par suite les solutions de (2.22) *sont données par*

$$y(x) = c\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k \frac{(x-k)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}. \tag{2.23}$$

Proposition 2.4.3 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} (D_0^{\alpha,1}y)(x) = \lambda y(x-1) \\ y(x) = \varphi(x) = 1 \ si \ -1 \leq x < 0, \end{cases} \tag{2.24}$$

où $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions du problème (2.24) *sont données par*

$$y(x) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{k+1} \frac{(x-k)^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \tag{2.25}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.*

On a

$$(D_0^{\alpha,1}y)(x) = \lambda y(x-1).$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D_0^{\alpha,1}y)(x)](p) = \mathcal{L}[\lambda y(x-1)](p),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} p^\alpha Y(p) - p^{\alpha-1} &= \lambda \int_0^{+\infty} \exp(-pt) y(x-1)dx \\ &= \lambda \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \exp(-pt) y(x-1)dx, \end{aligned}$$

on pose

$$\tau = x - 1.$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned}
p^{\alpha}Y(p)-p^{\alpha-1} &= \lambda \lim_{R\to+\infty}\int_{-1}^{R-1}\exp(-p(\tau+1))y(\tau)d\tau \\
&= \lambda\exp(-p)[\int_{-1}^{0}\exp(-p\tau)y(\tau)d\tau+\lim_{R\to+\infty}\int_{0}^{R-1}\exp(-p\tau)y(\tau)d\tau] \\
&= \lambda\exp(-p)[\int_{-1}^{0}\exp(-p\tau)d\tau+\int_{0}^{+\infty}\exp(-p\tau)y(\tau)d\tau] \\
&= \lambda\exp(-p)[\frac{\exp(p)-1}{p}+Y(p)] \\
&= \lambda\frac{1-\exp(-p)}{p}+\lambda\exp(-p)Y(p),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
Y(p) &= \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}-\lambda\exp(-p)}+\lambda\frac{1-\exp(-p)}{p(p^{\alpha}-\lambda\exp(-p))} \\
&= \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}(1-\lambda\frac{\exp(-p)}{p^{\alpha}})}+\lambda\frac{1-\exp(-p)}{p^{\alpha+1}}\frac{1}{1-\lambda\frac{\exp(-p)}{p^{\alpha}}} \\
&= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda\frac{\exp(-p)}{p^{\alpha}})^{k}+\lambda\frac{1-\exp(-p)}{p^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda\frac{\exp(-p)}{p^{\alpha}})^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{k}\frac{\exp(-kp)}{p^{\alpha k+1}}+\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{k+1}\frac{\exp(-kp)}{p^{\alpha(k+1)+1}}-\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{k+1}\frac{\exp(-(k+1)p)}{p^{\alpha(k+1)+1}},
\end{aligned}$$

on pose

$$l=k+1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
Y(p) &= \frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda^{k}\frac{\exp(-kp)}{p^{\alpha k+1}}+\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{k+1}\frac{\exp(-kp)}{p^{\alpha(k+1)+1}}-\sum_{l=1}^{+\infty}\lambda^{l}\frac{\exp(-lp)}{p^{\alpha l+1}} \\
&= \frac{1}{p}+\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{k+1}\frac{\exp(-kp)}{p^{\alpha(k+1)+1}}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(x-k)^{\alpha(k+1)}](p) &= \exp(-kp)\mathcal{L}[x^{\alpha(k+1)}](p) \\
&= \exp(-kp)\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{p^{\alpha(k+1)+1}},
\end{aligned}$$

on obtient

$$y(x) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} \frac{(x-k)^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}.$$

■

Proposition 2.4.4 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} (D_0^{\alpha,1} y)(x) = \lambda y(x-1) + f(x) \\ y(0) = c, \end{cases} \tag{2.26}$$

où $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ *et* f *est une fonction donnée.*

Alors les solutions du problème (2.26) *sont données par*

$$y(x) = c \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} (x-k)^{\alpha k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha(k+1))} \int_0^t f(t-s) s^{\alpha(k+1)-1} ds]. \tag{2.27}$$

Démonstration : Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.

On a

$$(D_0^{\alpha,1} y)(x) = \lambda y(x-1) + f(x).$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D_0^{\alpha,1} y)(x)](p) = \mathcal{L}[\lambda y(x-1) + f(x)](p).$$

Comme

$$\mathcal{L}[f(t-a)](p) = \exp(-ap)\mathcal{L}[f(t)](p), \ a > 0.$$

Par suite, on obtient

$$p^\alpha Y(p) - cp^{\alpha-1} = \lambda \exp(-p) Y(p) + F(p),$$

où

$$Y(p) := \mathcal{L}[y(x)](p), \ F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p).$$

Par suite

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{cp^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda \exp(-p)} + \frac{F(p)}{p^\alpha - \lambda \exp(-p)} \\ &= c \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \frac{\exp(-kp)}{p^{\alpha k+1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \frac{\exp(-kp)}{p^{\alpha(k+1)}} F(p). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(x-k)^{\alpha k}](p) &= \exp(-kp)\mathcal{L}[x^{\alpha k}](p) \\
&= \exp(-kp)\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{p^{\alpha k+1}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(x-k)^{\alpha(k+1)-1}](p) &= \exp(-kp)\mathcal{L}[x^{\alpha(k+1)-1}](p) \\
&= \exp(-kp)\frac{\Gamma(\alpha(k+1))}{p^{\alpha(k+1)}},
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
y(x) &= c\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)}(x-k)^{\alpha k}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha(k+1))}(x-k)^{\alpha(k+1)-1}*f(x) \\
&= c\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)}(x-k)^{\alpha k}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha(k+1))}\int_0^t f(t-s)s^{\alpha(k+1)-1}ds].
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Equations intégro-différentielles fractionnaires du type Volterra

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on résoudre quelques problèmes d'équations intégro-différentielle fractionnaires du type Volterra.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [section 4, 6].

3.2 Une généralisation des équations intégro-différentielles fractionnaires du type Volterra

Théorème 7 *On considère le problème d'équation intégro-différentielle fractionnaire du type Volterra suivant*

$$\begin{cases} (D^{\alpha}_{0+}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt = g(x) \\ (I^{(1-\alpha)}_{0+}f)(0+) = c, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $0 < \alpha < 1$, *avec* $\mathrm{Re}(v) > 0$, $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ *et* g *est une fonction donnée.*

Alors les solutions du problème (3.1) *sont données par*

$$f(x) = cx^{\alpha-1}E_{\alpha+v,\alpha}(-ax^{\alpha+v}) + (E_{\alpha+v,\alpha,-a;0+}g)(x). \tag{3.2}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.*

On a

$$(D^{\alpha}_{0+}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt = g(x).$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D^{\alpha}_{0+}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D^{\alpha}_{0+}f)(x)](p) + \frac{a}{\Gamma(v)}\mathcal{L}[\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$p^{\alpha}\mathcal{L}[f(x)](p) - (I^{(1-\alpha)}_{0+}f)(0+) + \frac{a}{\Gamma(v)}\mathcal{L}[(t^{v-1} * f)(t)](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$p^{\alpha}F(p) - c + \frac{a}{p^{v}}F(p) = G(p),$$

où

$$F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p) \text{ et } G(p) := \mathcal{L}[g(x)](p).$$

Par suite

$$\frac{p^{\alpha+v}+a}{p^{v}}F(p) = c + G(p),$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{p^{v}}{p^{\alpha+v}+a} + \frac{p^{v}}{p^{\alpha+v}+a}G(p).$$

Alors d'après la relation (**??**), *on obtient*

$$F(p) = c\mathcal{L}[x^{\alpha-1}E_{\alpha+v,\alpha}(-ax^{\alpha+v})](p) + \mathcal{L}[(x^{\alpha+v-1}E_{\alpha+v,\alpha}(-ax^{\alpha+v})) * g(x)](p).$$

Par suite, on a

$$f(x) = cx^{\alpha-1}E_{\alpha+v,\alpha}(-ax^{\alpha+v}) + \int_0^x (x-t)^{\alpha+v-1}E_{\alpha+v,\alpha}(-a(x-t)^{\alpha+v})g(t)dt.$$

Alors d'après la relation (1.14), *on obtient*

$$f(x) = cx^{\alpha-1}E_{\alpha+v,\alpha}(-ax^{\alpha+v}) + (E_{\alpha+v,\alpha,-a;0+}g)(x).$$

■

Théorème 8 *On considère le problème d'équation intégro-différentielle fractionnaire du type Volterra suivant*

$$\begin{cases} (D_{0+}^{\alpha,\mu} f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt = g(x) \\ (I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)} f)(0+) = c, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ *avec* $\mathrm{Re}(v) > 0$, $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ *et* g *est une fonction donnée.*

Alors les solutions du problème (3.3) *sont données par*

$$f(x) = cx^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1} E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v}) + (E_{\alpha+v,\alpha,-a;0+}g)(x). \tag{3.4}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.*

On a

$$(D_{0+}^{\alpha,\mu} f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt = g(x).$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu} f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu} f)(x)](p) + \frac{a}{\Gamma(v)} \mathcal{L}[\int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)dt](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu} f)(x)](p) + \frac{a}{\Gamma(v)} \mathcal{L}[(t^{v-1} * f)(t)](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

par suite

$$p^\alpha \mathcal{L}[f(x)](p) - p^{\mu(\alpha-1)} (I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)} f)(0+) + \frac{a}{p^v} \mathcal{L}[f(x)](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\frac{p^{\alpha+v} + a}{p^v} F(p) = cp^{\mu(\alpha-1)} + G(p),$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{p^{\mu(\alpha-1)+v}}{p^{\alpha+v} + a} + \frac{p^v}{p^{\alpha+v} + a} G(p),$$

où

$$F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p) \text{ et } G(p) := \mathcal{L}[g(x)](p).$$

Alors d'après la relation (**??**), *on obtient*

$$F(p) = c\mathcal{L}[x^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v})](p)+\mathcal{L}[(x^{\alpha-1}E_{\alpha+v,\alpha}(-ax^{\alpha+v}))*g(x)](p).$$

Par suite, on a

$$f(x) = cx^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v})+\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha+v,\alpha}(-a(x-t)^{\alpha+v})g(t)dt.$$

Alors d'après la relation (1.14), *on obtient*

$$f(x) = cx^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v}) + (E_{\alpha+v,\alpha,-a;0+}g)(x).$$

■

Corollaire 3.2.1 *On considère le problème d'équation intégro-différentielle fractionnaire du type Volterra suivant*

$$\begin{cases} (D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt = x^{\mu-1} \\ (I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f)(0+) = c, \end{cases} \tag{3.5}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ *avec* $\mathrm{Re}(v) > 0$, $a \in \mathbb{C}$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions du problème (3.5) *sont données par*

$$f(x) = x^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}[cE_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v}) + \Gamma(\mu)x^{\alpha\mu}E_{\alpha+v,\alpha+\mu}(-ax^{\alpha+v})].$$

Démonstration : Supposons que les hypothèses du corollaire sont satisfaites.

On a

$$(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt = x^{\mu-1}.$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt](p) = \mathcal{L}[x^{\mu-1}](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x)](p) + \frac{a}{\Gamma(v)}\mathcal{L}[\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt](p) = \frac{\Gamma(\mu)}{p^{\mu}},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha;\mu}f)(x)](p) + \frac{a}{\Gamma(v)}\mathcal{L}[(t^{v-1} * f)(t)](p) = \frac{\Gamma(\mu)}{p^{\mu}},$$

par suite

$$p^{\alpha}\mathcal{L}[f(x)](p) - p^{\mu(\alpha-1)}(I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f)(0+) + \frac{a}{p^{v}}\mathcal{L}[f(x)](p) = \frac{\Gamma(\mu)}{p^{\mu}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p^{\alpha+v}+a}{p^{v}}F(p) = cp^{\mu(\alpha-1)} + \frac{\Gamma(\mu)}{p^{\mu}},$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{p^{\mu(\alpha-1)+v}}{p^{\alpha+v}+a} + \Gamma(\mu)\frac{p^{v-\mu}}{p^{\alpha+v}+a},$$

où

$$F(p) := \mathcal{L}[f(x)](p).$$

Par suite d'après la relation (**??**), on obtient

$$F(p) = c\mathcal{L}[x^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v})](p) + \Gamma(\mu)\mathcal{L}[x^{\alpha+\mu-1}E_{\alpha+v,\alpha+\mu}(-ax^{\alpha+v})](p).$$

Alors

$$f(x) = x^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}[cE_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v}) + \Gamma(\mu)x^{\alpha\mu}E_{\alpha+v,\alpha+\mu}(-ax^{\alpha+v})].$$

■

Corollaire 3.2.2 *On considère le problème d'équation intégro-différentielle fractionnaire du type Volterra suivant*

$$\begin{cases} (D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt = x^{\mu-1}E_{\alpha+v,\mu}(-ax^{\alpha+v}) \\ (I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f)(0+) = c, \end{cases} \tag{3.6}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ *avec* $\mathrm{Re}(v) > 0$, $a \in \mathbb{C}$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions du problème (3.6) *sont données par*

$$f(x) = x^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}[cE_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v}) + x^{\alpha\mu}E^{2}_{\alpha+v,\alpha+\mu}(-ax^{\alpha+v})]. \tag{3.7}$$

Démonstration : Supposons que les hypothèses du corollaire sont satisfaites.

On a

$$(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt = x^{\mu-1}E_{\alpha+v,\mu}(-ax^{\alpha+v})$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x)+\frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x(x-t)^{v-1}f(t)dt](p)=\mathcal{L}[x^{\mu-1}E_{\alpha+v,\mu}(-ax^{\alpha+v})](p),$$

d'après la relation (**??**), on obtient

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x)](p)+\frac{a}{\Gamma(v)}\mathcal{L}[\int_0^x(x-t)^{v-1}f(t)dt](p)=\frac{p^{\alpha+v-\mu}}{p^{\alpha+v}+a},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x)](p)+\frac{a}{\Gamma(v)}\mathcal{L}[(t^{v-1}*f)(t)](p)=\frac{p^{\alpha+v-\mu}}{p^{\alpha+v}+a},$$

par suite

$$p^{\alpha}\mathcal{L}[f(x)](p)-p^{\mu(\alpha-1)}(I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f)(0+)+\frac{a}{p^{v}}\mathcal{L}[f(x)](p)=\frac{p^{\alpha+v-\mu}}{p^{\alpha+v}+a},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p^{\alpha+v}+a}{p^{v}}F(p)=cp^{\mu(\alpha-1)}+\frac{p^{\alpha+v-\mu}}{p^{\alpha+v}+a},$$

c'est-à-dire

$$F(p)=c\frac{p^{\mu(\alpha-1)+v}}{p^{\alpha+v}+a}+\frac{p^{\alpha+2v-\mu}}{(p^{\alpha+v}+a)^2},$$

Par suite, on a

$$F(p)=c\mathcal{L}[x^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v})](p)+\mathcal{L}[x^{\alpha+\mu-1}E^2_{\alpha+v,\alpha+\mu}(-ax^{\alpha+v})](p).$$

Alors

$$f(x)=x^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}[cE_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v})+x^{\alpha\mu}E^2_{\alpha+v,\alpha+\mu}(-ax^{\alpha+v})].$$

■

Corollaire 3.2.3 *On considère le problème d'équation intégro-différentielle fractionnaire du type Volterra suivant*

$$\begin{cases}(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x)+\frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x(x-t)^{v-1}f(t)dt=x^{\beta+v-1}E_{\alpha+v,\beta+v}(-bx^{\alpha+v})\\ (I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f)(0+)=c,\end{cases}\tag{3.8}$$

où $0<\alpha<1$, $0\leq\mu\leq1$ *avec* $\mathrm{Re}(v)>0$, $a\in\mathbb{C}$, $b\in\mathbb{C}$ *avec* $a\neq b$ *et* $c\in\mathbb{R}$.

Alors les solutions du problème (3.8) *sont données par*

$$f(x)=cx^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v})+\frac{E_{\alpha+v,\beta}(-bx^{\alpha+v})-E_{\alpha+v,\beta}(-ax^{\alpha+v})}{a-b}x^{\beta-1}.\tag{3.9}$$

Démonstration : Supposons que les hypothèses du corollaire sont satisfaites.

On a

$$(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x) + \frac{a}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}f(t)dt = x^{\beta+v-1}E_{\alpha+v,\beta+v}(-bx^{\alpha+v})$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de 'équation, on obtient

$$\frac{p^{\alpha+v}+a}{p^v}F(p) = cp^{\mu(\alpha-1)} + \mathcal{L}[x^{\beta+v-1}E_{\alpha+v,\beta+v}(-bx^{\alpha+v})](p),$$

d'après la relation (**??**), on obtient

$$\frac{p^{\alpha+v}+a}{p^v}F(p) = cp^{\mu(\alpha-1)} + \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha+v}+b},$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{p^{\mu(\alpha-1)+v}}{p^{\alpha+v}+a} + \frac{p^{\alpha-\beta+v}}{(p^{\alpha+v}+a)(p^{\alpha+v}+b)},$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{p^{\mu(\alpha-1)+v}}{p^{\alpha+v}+a} + \frac{1}{a-b}(\frac{p^{\alpha-\beta+v}}{p^{\alpha+v}+b} - \frac{p^{\alpha-\beta+v}}{p^{\alpha+v}+a}),$$

Par suite

$$\begin{aligned} F(p) &= c\mathcal{L}[x^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v})](p) \\ &\quad + \frac{1}{a-b}\mathcal{L}[x^{\beta-1}(E_{\alpha+v,\beta}(-bx^{\alpha+v}) - E_{\alpha+v,\beta}(-ax^{\alpha+v}))](p). \end{aligned}$$

Alors pour $a \neq b$, on a

$$f(x) = cx^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1}E_{\alpha+v,\alpha-\mu(\alpha-1)}(-ax^{\alpha+v}) + \frac{E_{\alpha+v,\beta}(-bx^{\alpha+v}) - E_{\alpha+v,\beta}(-ax^{\alpha+v})}{a-b}x^{\beta-1}.$$

■

3.3 Le problème de Cauchy pour les équations intégro-différentielles fractionnaires

Proposition 3.3.1 *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} (D_{0+}^{\alpha}f)(x) = \lambda(E_{\rho,\alpha,v;a+}^{\gamma}f)(x) + g(x) \\ (I_{0+}^{1-\alpha}f)(0+) = c, \end{cases} \tag{3.10}$$

où $0 < \alpha < 1$ *avec* $\mathrm{Re}(v) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ *et* g *est une fonction donnée.*

Alors les solutions du problème (3.10) *sont données par*

$$f(x) = c\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x^{2\alpha k+\alpha-1} E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}(vx^\rho) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha,v;0+} g)(x). \tag{3.11}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.*

On a

$$(D^\alpha_{0+} f)(x) = \lambda (E^\gamma_{\rho,\alpha,v;a+} f)(x) + g(x),$$

c'est-à-dire

$$(D^\alpha_{0+} f)(x) = \lambda \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E^\gamma_{\rho,\alpha}(v(x-t)^\rho) f(t)dt + g(x),$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D^\alpha_{0+} f)(x) - \lambda \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E^\gamma_{\rho,\alpha}(v(x-t)^\rho) f(t)dt](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D^\alpha_{0+} f)(x)](p) - \lambda \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E^\gamma_{\rho,\alpha}(vt^\rho) * f(t)dt](p) = \mathcal{L}[g(x)](p),$$

par suite, on obtient

$$p^\alpha F(p) - c - \lambda \frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^\rho - v)^\gamma} F(p) = G(p),$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{1}{p^\alpha - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^\rho-v)^\gamma}]} + \frac{G(p)}{p^\alpha - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^\rho-v)^\gamma}]}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^\alpha - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^\rho-v)^\gamma}]} &= \frac{p^{-\alpha}}{1 - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-2\alpha}}{(p^\rho-v)^\gamma}]} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{p^{-\alpha+\rho\gamma k-2\alpha k}}{(p^\rho - v)^{\gamma k}} \\
&= \mathcal{L}[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x^{2\alpha k+\alpha-1} E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha}(vx^\rho)](p),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{G(p)}{p^{\alpha}-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} &= \frac{p^{-\alpha}}{1-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-2\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]}G(p) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{p^{-\alpha+\rho\gamma k-2\alpha k}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma k}}G(p) \\
&= \mathcal{L}[(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha-1}(E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha}(vx^{\rho}))*g(x)](p).
\end{aligned}$$

Alors

$$f(x)=c\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha-1}E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}(E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha,v;0+}g)(x),$$

où $c\in\mathbb{R}$. ■

Théorème 9 *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} (D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)=\lambda(E^{\gamma}_{\rho,\alpha,v;0+}f)(x)+g(x) \\ (I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{0+}f)(0+)=c, \end{cases} \tag{3.12}$$

où $0<\alpha<1$, $0\leq\mu\leq1$ *avec* $\mathrm{Re}(v)>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ *et* g *est une fonction donnée.*

Alors les solutions du problème (3.12) *sont données par*

$$f(x)=c\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha-1}E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}(E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha,v;0+}g)(x). \tag{3.13}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites.*

On a

$$(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)=\lambda(E^{\gamma}_{\rho,\alpha,v;0+}f)(x)+g(x),$$

c'est-à-dire

$$(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)=\lambda\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}E^{\gamma}_{\rho,\alpha}(v(x-t)^{\rho})f(t)dt+g(x),$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)-\lambda\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}E^{\gamma}_{\rho,\alpha}(v(x-t)^{\rho})f(t)dt](p)=\mathcal{L}[g(x)](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x)](p)-\lambda\mathcal{L}[t^{\alpha-1}E_{\rho,\alpha}^{\gamma}(vt^{\rho})*f(t)dt](p)=\mathcal{L}[g(x)](p),$$

par suite, on obtient

$$p^{\alpha}F(p)-cp^{\mu(\alpha-1)}-\lambda\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}F(p)=G(p),$$

c'est-à-dire

$$F(p)=c\frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\alpha}-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]}+\frac{G(p)}{p^{\alpha}-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\alpha}-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} &= \frac{p^{\mu(\alpha-1)-\alpha}}{1-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-2\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{p^{\mu(\alpha-1)-\alpha+\rho\gamma k-2\alpha k}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma k}}\\ &= \mathcal{L}[\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}^{\gamma k}(vx^{\rho})](p),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{G(p)}{p^{\alpha}-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} &= \frac{p^{-\alpha}}{1-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-2\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]}G(p)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{p^{-\alpha+\rho\gamma k-2\alpha k}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma k}}G(p)\\ &= \mathcal{L}[(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha-1}(E_{\rho,2\alpha k+\alpha}^{\gamma k}(vx^{\rho}))*g(x)](p).\end{aligned}$$

Alors

$$f(x)=c\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}^{\gamma k}(vx^{\rho})+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}(E_{\rho,2\alpha k+\alpha,v;0+}^{\gamma k}g)(x),$$

où $c\in\mathbb{R}$. ■

Corollaire 3.3.2 *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases}(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x)=\lambda(E_{\rho,\alpha,v;0+}^{\gamma}f)(x)+x^{\mu-1}\\ (I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f)(0+)=c,\end{cases}\tag{3.14}$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ *avec* $\mathrm{Re}(v) > 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions du problème (3.14) *sont données par*

$$f(x) = x^{\alpha+\mu-\mu\alpha-1}[c\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda x^{2\alpha})^k E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})+\Gamma(\mu)x^{\mu\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda x^{2\alpha})^k E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu}(vx^{\rho})]. \tag{3.15}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du corollaire sont satisfaites.*

On a

$$(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x) = \lambda(E^{\gamma}_{\rho,\alpha,v;0+}f)(x) + x^{\mu-1},$$

c'est-à-dire

$$(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x) = \lambda\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E^{\gamma}_{\rho,\alpha}(v(x-t)^{\rho})f(t)dt + x^{\mu-1},$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x) - \lambda\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E^{\gamma}_{\rho,\alpha}(v(x-t)^{\rho})f(t)dt](p) = \mathcal{L}[x^{\mu-1}](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)](p) - \lambda\mathcal{L}[t^{\alpha-1}E^{\gamma}_{\rho,\alpha}(vt^{\rho}) * f(t)dt](p) = \frac{\Gamma(\mu)}{p^{\mu}},$$

par suite, on obtient

$$p^{\alpha}F(p) - cp^{\mu(\alpha-1)} - \lambda\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}F(p) = \frac{\Gamma(\mu)}{p^{\mu}},$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\alpha} - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} + \Gamma(\mu)\frac{p^{-\mu}}{p^{\alpha} - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\alpha} - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} &= \frac{p^{\mu(\alpha-1)-\alpha}}{1 - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-2\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{p^{\mu(\alpha-1)-\alpha+\rho\gamma k-2\alpha k}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma k}}\\ &= \mathcal{L}[\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x^{2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha-1}E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})](p),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{p^{-\mu}}{p^{\alpha}-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} &= \frac{p^{-\mu-\alpha}}{1-\lambda[\frac{p^{\rho\gamma-2\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{p^{-\mu-\alpha+\rho\gamma k-2\alpha k}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma k}}\\
&= \mathcal{L}[(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha+\mu-1}E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu}(vx^{\rho})](p).
\end{aligned}$$

Alors

$$f(x)=x^{\alpha+\mu-\mu\alpha-1}[c\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda x^{2\alpha})^{k}E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})+\Gamma(\mu)x^{\mu\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda x^{2\alpha})^{k}E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu}(vx^{\rho})],$$

où $c\in\mathbb{R}$. ■

Corollaire 3.3.3 *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases}(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)=\lambda(E^{\gamma}_{\rho,\alpha,v;0+}f)(x)+cx^{\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})\\ (I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{0+}f)(0+)=c,\end{cases}\tag{3.16}$$

où $0<\alpha<1$, $0\leq\mu\leq 1$ *avec* $\mathrm{Re}(v)>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ *et* $c\in\mathbb{R}$.

Alors les solutions du problème (3.16) *sont données par*

$$f(x)=c\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha-1}[E^{\gamma k}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})+E^{\gamma k+1}_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})].\tag{3.17}$$

Démonstration : *Supposons que les hypothèses du corollaire sont satisfaites.*

On a

$$(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)=\lambda(E^{\gamma}_{\rho,\alpha,v;0+}f)(x)+cx^{\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho}),$$

c'est-à-dire

$$(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)=\lambda\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}E^{\gamma}_{\rho,\alpha}(v(x-t)^{\rho})f(t)dt+cx^{\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho}),$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}[(D^{\alpha,\mu}_{0+}f)(x)-\lambda\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}E^{\gamma}_{\rho,\alpha}(v(x-t)^{\rho})f(t)dt](p)=\mathcal{L}[cx^{\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})](p),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[(D_{0+}^{\alpha,\mu}f)(x)](p) - \lambda\mathcal{L}[t^{\alpha-1}E_{\rho,\alpha}^{\gamma}(vt^{\rho}) * f(t)dt](p) = c\mathcal{L}[x^{\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,\mu-\mu\alpha}(vx^{\rho})](p),$$

par suite, on obtient

$$p^{\alpha}F(p) - cp^{\mu(\alpha-1)} - \lambda\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}F(p) = c\frac{p^{\rho-\mu+\mu\alpha}}{(p^{\rho}-v)},$$

c'est-à-dire

$$F(p) = c\frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\alpha} - \lambda[\frac{p^{\rho\gamma-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} + c\frac{p^{\rho-\mu+\mu\alpha-\alpha}}{(1-\lambda[\frac{p^{\rho\mu-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}])(p^{\rho}-v)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\alpha} - \lambda[\frac{p^{\rho\mu-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} &= \frac{p^{\mu(\alpha-1)-\alpha}}{1 - \lambda[\frac{p^{\rho\mu-2\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}]} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{p^{\mu(\alpha-1)-\alpha+\rho\mu k-2\alpha k}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma k}} \\
&= \mathcal{L}[\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}^{\gamma k}(vx^{\rho})](p),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{p^{\rho-\mu+\mu\alpha-\alpha}}{(1-\lambda[\frac{p^{\rho\mu-\alpha}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma}}])(p^{\rho}-v)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{p^{\rho-\mu+\mu\alpha-\alpha+\rho\mu k-2\alpha k}}{(p^{\rho}-v)^{\gamma k+1}} \\
&= \mathcal{L}[(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha-1}E_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}^{\gamma k+1}(vx^{\rho})](p).
\end{aligned}$$

Alors

$$f(x) = c\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}x^{2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha-1}[E_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}^{\gamma k}(vx^{\rho}) + E_{\rho,2\alpha k+\alpha+\mu-\mu\alpha}^{\gamma k+1}(vx^{\rho})],$$

où $c \in \mathbb{R}$. ■

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, A propos d'une note de M. Pierre Humbert, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 2031-2031.

[2] R. Hilfer , Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London and Hong Kong, 2000.

[3] P. Humbert and P. Delerue, Sur une extension à deux variables de la fonction de Mittag-Leffler, C. R. Acad. Sci. Paris 237 (1953), 1059-1060.

[4] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J .J . Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North Holland Mathematical Studies Vol. 204, Elscvier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, 2006.

[5] M. G. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$, C. R. Acad. Sci. Paris 137 (1903), 554-558.

[6] P. Lévy, Sur une application de la dérivée d'ordre non entier au calcul des probabilités, C. R. Acad. Sci. Paris 176 (1923), 1118-1120.

[7] I. Podlubny, The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order, Inst. Exper. Phys. Slovak Acad. Sci. 2 (1994), 1-35.

[8] T. R. Prabhakar, A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, Yokohama Math. J. 19 (1971), 7-15.

[9] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Y verdon (Switzerland), 1993.

[10] M. Soula and Y. Chevalier, La dérivée fractionnaire en rhéologie des polymères- Application aux comportements élastiques et viscoélastiques

linéaires et non linéaires des élastomères, ESAIM: Proceedings Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications 5 (1998), 193-204.

[11] Z. Tomovski, R. Hilfer and H. Srivastava, Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions, Integral Transform. Spec. Funct. 21 (2010), 797-814.

[12] R. Veysseyre and T. Vinh, Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire en viscoélasticité, C. R. Acad. Sci. Paris 266 (1968), 1059-1060.

[13] N. P. T. Vinh, Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique, Memorial de l'Artillerie Française 3 (1967), 725-776.

ملخص

في هذا العمل نقدم بعض نتائج حلول لمشاكل كسور كوشي بعض المعادلات التفاضلية الكسرية التكاملية من نوع فولتيرا و بعض المعادلات التفاضلية الكسرية مع التأخير باستخدام تحويل لا بلاس.

Résumé

Dans ce travail, nous présentons plusieurs résultats pour résoudre quelques problèmes de Cauchy fractionnaires, quelques équations intégro-différentielles fractionnaires du type Volterra et les équations différentielles fractionnaires aves retard en utilisant la transformée de Laplace.

Abstract

In this work, we present several results to solve some problems of fractional Cauchy,some fractional integro-differential equations of Volterra type and differential equations fractional with delay using the Laplace transform.