REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN -
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Option **: *Equations Différentielles***

Thème

Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires dans des espaces de Banach

Présenté par : **Melle Mama GHEZIEL**

Soutenu le :   / 06 /2015
Devant le Jury :

Mr.Bouguima Sidi Mohammed	***Président***
Mr.Mabkhout Benmiloud	***Examinateur***
Mr.Benchaib Abdelatif	***Examinateur***
Mr.Yebedri Mustafa	***Examinateur***
Mr.Slimani Boualem Attou	***Encadreur***

Année universitaire :
2014-2015

Dédicaces

Je dédie ce travail à :
Mes chers parents qui m'ont toujours soutenue,
Mon frère Mohamed et ma soeur Fatiha,
Mes amies Ahlem, Hanane, Hafsa, Chahrazed, Rahma, Amina, Hadjar et Bendahma Amina,
Et à tout ceux qui m'ont encouragée durant ma carrière d'étude.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma profonde gratitude à Monsieur Slimani Boualem Attou qui m'a, tout au long de ce travail, conseillé, soutenu, le plus souvent dirigé sans jamais rechigner de son temps combien précieux et ce après m'avoir proposée ce judicieux thème de recherche.

Je remercie Monsieur Bouguima Sidi Mohammed, enseignant au département de mathématiques de l'université de Tlemcen de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Messieurs Mebkhout Benmiloud et Benchaib Abdellatif, enseignants au département de mathématiques de l'université de Tlemcen d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

De même que je suis obligée de la disponibilité, de la compétence ainsi que la dévotion avec lesquelles nos professeurs ont exercés leur métier, nous enrichissant sans cesse et nous permettant de valoriser nos efforts durant ces années d'étude.

Table des matières

Introduction

Dans ces dernières années, plusieurs travaux ont fait la mise au point sur l'étude des équations différentielles fractionnaires, divers résultats théoriques ont été obtenus, voir par exemple les références [2, 3, 24, 27].
Ces résultats ont des applications dans plusieurs champs de la science et de l'ingénieurie tel que la physique, la biologie, la chimie, etc, voir [19, 20, 22, 25, 26, 30].
Nous allons nous inspirer des travaux [4, 6, 15] afin d'étudier l'existence de solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire de Caputo dans des espaces de Banach de dimension infinie.
Cette étude se fera principalement à l'aide du théorème de point fixe de Mönch combiné avec la mesure de noncompacité de Kuratowskii, et celui de Darbo avec la mesure de noncompacité de Hausdorff.

Ce mémoire est réparti en quatre chapitres.

Le premier chapitre intitulé "*Préliminaires*", est consacré aux définitions et notations qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

Le deuxième chapitre a pour but l'étude des problèmes fractionnaires suivants :

$$\begin{array}{rcl} {}^cD^r y(t) & = & f(t,y) \qquad ,\forall t \in I = [0,T] \quad ,1 < r < 2 \\ y(0) & = & y_0 \ \ ,y(T) = y_T \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} {}^cD^r y(t) & = & f(t,y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T] \ \ 1 < r < 2 \\ y(0) & = & y_0, \\ y'(0) & = & y_1. \end{array}$$

On s'intéresse particulièrement à l'étude de l'existence de solutions à la base du théorème de point fixe de Mönch avec la mesure de noncompacité de Kuratowskii.

Le troisième chapitre où on va traiter le problème fractionnaire avec conditions intégrales suivant :

$$\begin{aligned}
{}^{c}D^{r}y(t) &= f(t,y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T] \\
y(0) - y'(0) &= \int_0^T g(s,y(s))ds \\
y(T) - y'(T) &= \int_0^T h(s,y(s))ds
\end{aligned}$$

On étudie l'existence de solutions en utilisant l'approche de point fixe via le théorème de Mönch et la mesure de noncompacité de Kuratowskii.

Le quatrième chapitre a pour objet l'étude du problème de Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires :

$$\begin{aligned}
{}^{c}D^{r}u(t) &= f(t,u(t)), \quad t \in I = [0,T] \\
u(0) &= 0.
\end{aligned}$$

On établit le résultat d'existence moyennant le théorème de point fixe de Darbo combiné avec la mesure de noncompacité de Hausdorff.

Enfin, le mémoire sera clôturé par une Bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et définitions

Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons les notations, définitions et préliminaires nécessaires pour cette étude.
Soit $I = [0,T]$,$T > 0$. On note par $C(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions continues y définies de I dans E, muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\| : t \in I\}$$

où $\|.\|$ est une norme sur E.

Définition 1.1. *[33] Une fonction $y : I \to E$ est dite intégrable au sens de Bochner si il existe une suite $\{y_n\}$ de fonctions en escalier qui converge vers y presque partout et telle que :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \|y_n(s) - y(s)\|\, ds = 0,$$

Si y est intégrable au sens de Bochner, on a alors :

$$\int_0^T y(s)ds = \lim_{n\to\infty}\int_0^T y_n(s)ds.$$

On note par $L^1(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \to E$ qui sont Bochner intégrables, muni de la norme :

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T \|y(t)\|\, dt.$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \to E$ qui sont bornées est noté par $L^\infty(I,E)$, il est muni de la norme :

$$\|y\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0, \|y(t)\| \leq c,\ pp\ \ t \in J\}.$$

On note par $AC^1(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : I \to E$ ayant la première dérivée absolument continue.
On note par $\mathbb{R}^+$ l'ensemble $(0,+\infty)$ et par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble $[0,+\infty)$.

Définition 1.2. *[33] L'application $f : I \times E \to E$ est dite de Carathéodory si :*

1. $t \to f(t,u)$ *est mesurable pour tout* $u \in E$,
2. $u \to f(t,u)$ *est continue presque pour tout* $t \in I$;
   De plus, si :
3. $\forall r > 0$, *il existe une fonction* $\phi_r \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ *telle que pour tout* $u \in \mathbb{R}$ *avec* $\|u\| \leq r$:

$$\|f(t,u)\| \leq \phi_r(t)$$

alors l'application f est dite L^1-Carathéodory.

Théorème 1.3. ***(Ascoli-Arzelà)***
Soit A un sous ensemble de $C(I,E)$, A est relativement compact dans $C(I,E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :*

$$\|f(x)\| \leq K \quad \textit{pour tout} \quad x \in I \textit{ et tout } f \in A,$$

2. *L'ensemble A est équicontinu. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \textit{ pour tout } t_1, t_2 \in I \textit{ et tout } f \in A,$$

3. *Pour tout $x \in I$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.*

1.2 Rappel sur le calcul fractionnaire

1.2.1 Un aperçu historique sur la dérivation fractionnaire

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans $\mathbb{Q}$. Il posa la question : et si $n = \frac{1}{2}$? En 1695, dans une lettre à l'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}x$ sera égal à $x\sqrt[2]{dx : x}$, un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ».

Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au XV IIIe siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832 ; 1837) ou Riemann (1847) au XIXe siècle, ainsi que Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés.Voir[27, 18]

1.2.2 Fonctions utiles

La fonction Gamma

Définition 1.4. *On appelle fonction Gamma eulérienne (ou intégrale eulérienne de seconde espèce) la fonction notée* Γ *définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

où x *est un nombre complexe quelconque tel que* $Re(x) > 0$*.*

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), Re(\alpha) > 0$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$$

La fonction Bêta

Définition 1.5. *La fonction* $B(p,q)$*est la fonction Bêta (ou intégrale eulerienne de première espèce), définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx \quad p›0, q›0.$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale eulerienne de première et seconde espèce :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; Re(p) > 0; Re(q) > 0.$$

1.2.3 Intégrale fractionnaire

Définition 1.6. *[30] L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction* $h \in C([a,b])$ *d'ordre* $r \in \mathbb{R}_+$ *; est définie par*

$$I_a^r h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{r-1} h(s) ds,$$

où Γ *est la fonction Gamma. Lorsque* $a = 0$ *nous écrivons* $I^r h(t) = h(t) * \varphi_r(t)$
où $\varphi_r(t) = \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)}$ *pour* $t > 0, \varphi_r(t) = 0$*pour* $t \leq 0$*, et* $\varphi_r \to \delta$*, quand* $r \to 0$*.*

Propriétés 1.7. *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. $I_a^0 h(t) = h(t)$,
2. *l'opérateur intégral* I_0^r *est linéaire.*

Exemple 1.8. *Soit* $h(t) = (t-a)^m$

$$\begin{aligned} I_a^r h(t) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{r-1} h(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{r-1} (s-a)^m ds. \end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ on obtient,

$$\begin{aligned} I_a^r h(t) &= \frac{(t-a)^{m+r}}{\Gamma(r)} \int_a^t (1-x)^{r-1} x^m dx \\ &= \frac{(t-a)^{m+r}}{\Gamma(r)} \beta(r, m+1) \\ &= \frac{(t-a)^{m+r} \Gamma(r) \Gamma(m+1)}{\Gamma(r) \Gamma(r+m+1)} \end{aligned}$$

D'où

$$I_a^r h(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(r+m+1)} (t-a)^{m+r}.$$

1.2.4 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, dans cette partie on va citer celles qui sont les plus utilisées dans les applications.

Approche de Grunwald-Letnikov :

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires, donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier r (si r est positif) et l'intégrale répétée $(-r)$ fois (si r est négatif) d'une fonction f par la formule suivante :

$${}^G D^r f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-r} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{r}{k} f(t-kh), avec \binom{r}{h} = \frac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!}$$

La généralisation de cette formule pour r non entier (avec $0 \leq n-1 < r < n$) et comme

$$\begin{aligned} (-1)^k \binom{r}{k} &= \frac{-r(1-r)...(k-r-1)}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(k-r)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-r)} \end{aligned}$$

on obtient

$${}^G D^r f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-r} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-r)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-r)} f(t-kh)$$

et

$${}^G D^{-r} f(t) = \lim_{h \to 0} h^{r} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k+1)\Gamma(r)} f(t-kh)$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$${}^G D^{-r} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+r}}{\Gamma(k+r+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+r)} \int_a^t (t-\tau)^{n+r-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

aussi

$${}^G D^{r} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r}}{\Gamma(k-r+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-r)} \int_a^t (t-\tau)^{n-r-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

Exemples

1. **La dérivée d'une fonction constante au sens de Grunwald-Letnikov**
   En général la dérivée d'une fonction constante au sens de Grunwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.
   Si $f(t) = c$ et r non entier positif on a :

$$f^{(k)}(t) = 0, \text{ pour } k = 1, 2, ..., n$$

$$\begin{aligned} {}^{G}D^{r} f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-r)}(t-a)^{-r} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r}}{\Gamma(k-r+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-r)} \int_a^t (t-\tau)^{n-r-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-r} \end{aligned}$$

2. **La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Grunwald-Letnikov**
   Si r non entier et $0 \leq n-1 < r < n$ avec $p > n-1$ alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour } k = 1, 2, ..., n-1$$

   et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)}(\tau - a)^{p-n}$$

   d'où

$${}^{G}D^{r} f(t) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(r-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-r-1}(\tau-a)^{-r} d\tau$$

   En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on trouve :

$$\begin{aligned} {}^{G}D^{r}(t-a)^{p} &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-r-1}(\tau-a)^{p-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(r-n+1)}(t-a)^{p-r} \int_0^1 (1-s)^{n-r-1} s^{p-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(r+1)B(n-r, r-n+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(r-n+1)}(t-a)^{p-r} \\ &= \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r)\Gamma(r-n+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(r-n+1)}(t-a)^{p-r} \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)}(t-a)^{p-r} \end{aligned}$$

Approche de Riemann-Liouville :

Définition 1.9. *[24] Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre r (avec $n-1 \leq r < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{r} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-r-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-r} f(t)) \end{aligned}$$

Propriétés

1. **Composition avec l'intégrale fractionnaire**
   - L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,
   $$^{RL}D^{r}(I^{r}f(t)) = f(t),$$
   en général on a
   $$^{RL}D^{r_1}(I^{r_2}f(t)) = {}^{RL}D^{r_1-r_2}f(t)$$
   et si $r_1 - r_2 < 0$, $^{RL}D^{r_1-r_2}f(t) = I^{r_2-r_1}f(t)$.
   - En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas
   $$^{RL}D^{-r_1}({}_a^{RL}D_t^{r_2}f(t)) ={}^{RL} D^{r_2-r_1}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[{}^{RL}D_t^{r_2-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{r_1-k}}{\Gamma(r_1-k+1)}$$
   avec $m-1 \leq r_2 < m$.
2. **Composition avec les dérivées d'ordre entier**
   La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne comutent que si :
   $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0,1,2,...,n-1$.
   $$\frac{d^n}{dt^n}({}^{RL}D^{r}f(t)) ={}^{RL} D^{n+r}f(t),$$
   mais
   $$^{RL}D^{r}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)) ={}^{RL} D^{n+r}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r-n}}{\Gamma(k-r-n+1)}$$
3. **Composition avec les dérivées fractionnaires**
   Soit $n-1 \leq r_1 < n$ et $m-1 \leq r_2 < m$, alors
   $$^{RL}D^{r_1}({}^{RL}D_t^{r_2}f(t)) ={}^{RL} D^{r_1+r_2}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[{}^{RL}D^{r_2-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-r_1-k}}{\Gamma(r_1-k+1)}$$
   et
   $$^{RL}D^{r_2}({}^{RL}D_t^{r_1}f(t)) ={}^{RL} D^{r_1+r_2}f(t) - \sum_{k=1}^{n}[{}^{RL}D^{r_1-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-r_2-k}}{\Gamma(-r_2-k+1)}$$
   par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{RL}D^{r_1}$ et $^{RL}D^{r_2}(r_1 \neq r_2)$, ne commutent que si $[{}^{RL}D^{r_2-k}f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1,2,...,n$, et $[{}^{RL}D^{r_1-k}f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1,2,...,m$.

Exemples

1. **La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville**
   En général la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :
$$^{RL}D^r C = \frac{C}{\Gamma(1-r)}(t-a)^{-r}$$
2. **La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Riemann-Liouville**
   Soit r non entier et $0 \leq n-1 < r < n$ et $p > -1$, alors on a :
$$^{RL}D^r(t-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-r)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-r-1}(\tau-a)^p d\tau$$
   En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :
$$\begin{aligned} ^{RL}D^r(t-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-r)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+p-r}\int_0^1 (1-s)^{n-r-1}s^p ds \\ &= \frac{\Gamma(n+p-r+1)B(n-r,p+1)}{\Gamma(n-r)}(t-a)^{p-r} \\ &= \frac{\Gamma(n+p-r+1)\Gamma(n-r)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(n-r+1)\Gamma(n+p-r+1)}(t-a)^{p-r} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-r+1)}(t-a)^{p-r} \end{aligned}$$

Dérivées fractionnaires au sens de Caputo :

Définition 1.10. *[24] Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a,b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de f, d'ordre $r > 0$ est définie par*
$$^{c}D^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_a^t (t-s)^{n-r-1}f^{(n)}(s)ds,$$
ici $n = [r]+1$ et $[r]$ désignant la partie entière de r.

Propriétés

1. **La relation avec la dérivée de Riemann-Liouville**
   Soit $r > 0$ avec $n-1 < r < n, (n \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que ${}^{c}_{a}D^r_t f(t)$ et ${}^{RL}_{a}D^r_t f(t)$ existent alors
$$^{c}D^r f(t) = {}^{RL}D^r f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r}}{\Gamma(k-r+1)}$$
   On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0,1,2,...,n-1$, on aura $^{c}D^r f(t) = {}^{RL}D^r f(t)$.
2. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire**
   Si f est une fonction continue on a
$$^{c}D^r I^r_a f = f \quad \text{et} \quad I^r_a \, {}^{c}D^r f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$
   donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemples

1. **La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo**
   La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle
$$^{c}D^{r}C = 0$$

2. **La dérivée de $f(t) = (t-a)^{p}$au sens de Caputo**
   Soit r un entier et $0 \leq n-1 < r < n$ avec $r > n-1$, alors on a :
$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)}(\tau-a)^{p-n},$$
   d'où
$$^{c}D^{r}(t-a)^{p} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(r-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-r-1}(\tau-a)^{r-n}d\tau$$
   effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient
$$\begin{aligned} ^{c}D^{r}(t-a)^{p} &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-r-1}(\tau-a)^{p-n}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-r}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-r-1}s^{p-n}ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)B(n-r,p-n+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-r} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)\Gamma(p-r+1)}(t-a)^{p-r} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-r}. \end{aligned}$$

1.2.5 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

- L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme que pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
- Une autre différence entre la définition de la dérivé de Riemann et celle de Caputo et que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est $\frac{C}{\Gamma(1-r)}(x-a)^{-r}$.
- Du côté graphique, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est exactement l'inverse du chemin suivi pour obtenir celle de Riemann-Liouville, c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre r où $m-1 \leq r \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-r)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre r où $m-1 \leq r \leq m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on intègre d'ordre fractionnaire $(m-r)$.

Propriétés générales des dérivées fractionnaires :

1. **Linéarité**
   La dérivation fractionnaire est une opération linéaire
$$D^r(\lambda f(t)+\mu g(t)) = \lambda D^r f(t)+\mu D^r g(t)$$
2. **La règle de Leibniz**
   Pour n entier on a
$$\frac{d^n}{dt^n(f(t)g(t))} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$$
   La généralisation de cette formule nous donne
$$D^r(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k} f^{(k)}(t)D^{(r-k)}g(t)+R_n^r(t),$$
   où $n \geq r+1$ et
$$R_n^r(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-r)}\int_a^t (t-\tau)^{-r-1}g(\tau)d\tau\int_\tau^t f^{(n+1)}(\zeta)(\tau-\zeta)^n d\zeta,$$
   avec $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^r(t) = 0$.
   Si f et g sont continues dans $[a,t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :
$$D^r(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k} f^{(k)}(t)D^{(r-k)}g(t).$$
   D^r est la dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

1.3 Mesure de non compacité :

1.3.1 Mesure de non compacité de Kuratowskii :

Nous présentons dans cette section quelques propriétés fondamentales des mesure de noncompacité de Kuratowskii et Hausdorff.

Définition 1.11. *[14] La mesure de non compacité de Kuratowskii est l'application α définie sur Ω_E dans $\mathbb{R}^+$ par :*
$$\alpha(B) = \inf\{\varepsilon > 0, B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(B)_i, diam(B_i) < \varepsilon\}$$
avec Ω_E est la famille des sous espaces bornés de E et $B \in \Omega_E$.

Propriétés :
La mesure de non compacité de Kuratowskii satisfait les propriétés suivantes :

1. $\alpha(B) = 0 \Leftrightarrow \overline{B}$ est compact ;
2. $\alpha(B) = \alpha(\overline{B})$;
3. $A \subset B \Rightarrow \alpha(A)+\alpha(B)$;

4. $\alpha(A+B) \leq \alpha(A)+\alpha(B)$;
5. $\alpha(cB) = |c|\,\alpha(B),\ c \in \mathbb{R}$;
6. $\alpha(convB) = \alpha(B)$;
7. $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$;
8. $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

Lemme 1.12. *[31] Soit D un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach $C(I,E)$, soient G une fonction continue sur $I \times I$, et $f : I \times E \to E$ une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory, et il existe $p \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $t \in I$, et tout sous ensemble borné $B \subset E$ on a :*

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B) \quad ,I_{t,h} = [t-h,t] \cap I;$$

Si V est un sous ensemble équicontinu de D, alors :

$$\alpha(\int_I G(s,t) f(s,y(s))ds \quad ,y \in V\}) \leq \int_I \|G(t,s)\| p(s)\alpha(V(s))ds.$$

1.3.2 Mesure de non compacité de Hausdaurff

Définition 1.13. *[14] La mesure de non compacité de Hausdorff d'un sous ensemble borné M d'un espace de Banach est définie par :*

$$\gamma_E(M) = \inf\{\varepsilon > 0, M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, e_i), x_i \in E, e_i < \varepsilon\}, i = 1,2,...,n$$

i.e M est recouvert par la réunion finie des boules ouvertes dans E.

Propriétés :[13]

Soit E un espace de Banach et soient Ω, Ω_1 et $\Omega_2 \subseteq E$ bornés, alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\gamma_E(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \Omega$ est précompact;
2. $\gamma_E(\Omega) = \gamma_E(\overline{\Omega}) = \gamma_E(conv\Omega)$;
3. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow \gamma_E(\Omega_1) \leq \gamma_E(\Omega_2)$;
4. $\gamma_E(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\gamma_E(\Omega_2), \gamma_E(\Omega_2)\}$;
5. $\gamma_E(r\Omega) = |r|\,\gamma_E(\Omega),\ r \in \mathbb{R}$;
6. $\gamma_E(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \gamma_E(\Omega_1) + \gamma_E(\Omega_2)$;
7. Si l'application $T : D(T) \subseteq E \to F$ est continue et k-Lipschitzienne, alors :

$$\gamma_F(TB) \leq k\gamma_E(B), \ \ \forall B \subseteq D(T) \text{ (}B\text{ borné).}$$

8. Si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite décroissante des sous ensembles non vides, fermés et bornés de E, et $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_E(B_n) = 0$, alors $\cap_{n=1}^{\infty} B_n$ est non vide et compact dans E.

1.4 Quelques théorèmes de point fixe

Pour tout ce qui suivra, nous aurons besoin des théorèmes de point fixe suivants :

Définition 1.14. *L'application $T : C \subseteq E \to E$ est dite une γ_E-contraction s'il existe une constante positive $k < 1$ telle que :*

$$\gamma_E(T(W)) \leq k\gamma_E(W), \quad \forall W \subseteq C \text{ (W fermé et borné).}$$

Théoreme 1.15. *[28] **(Mönch)***
Soit D un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach ,tel que $0 \in D$, et soit N une application continue de D dans D.
Si l'implication :

$$V = \overline{conv}N(V) \;\; ou \;\; V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0$$

est vérifiée pour tout sous ensemble V de D, alors N admet un point fixe dans D.

Théoreme 1.16. *[11] **(Darbo-Sadovskii)***
Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E et soit l'application continue $T : C \to C$ une γ_E-contraction, alors T admet au moins un point fixe dans C.

Théoreme 1.17. *[5] **(Darbo généralisé)** Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe*

d'un espace de Banach E et soit l'application continue

$$T : C \to C$$

satisfaisant :

$$\mu(T(W)) \leq \phi(\mu(W)) \qquad ,\forall W \subseteq C$$

où μ est une mesure de non compacité arbitraire et $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction strictement croissante (non nécessairement continue), avec :

$$\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0, \;\; \forall t \in [0,\infty)$$

Alors, T admet au moins un point fixe dans C.

1.5 Lemmes fondamentaux

Maintenant, on va démontrer deux lemmes fondamentaux pour les chapitres suivants :

Lemme 1.18. *[34] Soit $r > 0$, alors l'équation différentielles*

$$^cD^r h(t) = 0$$

admet les solutions $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,...,n-1$, $n = [r]+1$.

Démonstration. *supposons que*

$$^cD^r h(t) = 0,$$

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$I^{n-r}\left(\frac{d}{dt}\right)^n h(t) = 0,$$

c'est à dire
$$\frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_0^t (t-s)^{n-r-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^n h(s)\,ds=0,$$
puisque $\frac{1}{\Gamma(n-r)}\neq 0$, on a
$$\int_0^t (t-s)^{n-r-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^n h(s)\,ds=0,$$
et par suite
$$t^{n-r-1}*h^{(n)}(s)=0.$$
On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité
$$L\left(t^{n-r-1}*h^{(n)}(t)\right)(p)=L(0)(p)=0$$
posant $H(p)=L(h)(p)$ on obtient
$$\frac{\Gamma(n-r)}{p^{n-r}}\left(p^nH(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}h^{(k-1)}(0)\right)=0,$$
alors
$$p^nH(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}h^{(k-1)}(0)=0,$$
donc
$$H(p)=\sum_{k=1}^{n}p^{-k}h^{(k-1)}(0),$$
on applique maintenant la transformée inverse de Laplace :
$$L^{-1}(H(p))(t)=L^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}p^{-k}h^{(k-1)}(0)\right)(t)$$
il s'ensuit que
$$\begin{aligned}h(t)&=\sum_{k=1}^{n}h^{(k-1)}(0)L^{-1}\left(p^{-k}\right)(t)\\&=\sum_{k=1}^{n}h^{(k-1)}(0)\cdot\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)},\end{aligned}$$
en faisant le changement de variable $i=k-1$ on trouve
$$h(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^{(i)}(0)}{i!}t^i$$
pour $c_i=\frac{h_i(0)}{i!}$ on a
$$h(t)=\sum_{i=0}^{n-1}c_it^i.$$

Supposons maintenant que :

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i.$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
{}^cD^r h(t) &= {}^cD^r \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^c D^r t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-r} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^i
\end{aligned}$$

puisque $(0 \leq i \leq n-1 < n)$ on a

$$ {}^cD^r h(t) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Lemme 1.19. *[34] Soit $r > 0$, alors*

$$I^r\, {}^cD^r h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $n = [r] + 1$.

Démonstration. On a par la définition de la dérivée fractionaire de Caputo

$$ {}^cD^r h(t) = I^{n-r} h^{(n)}(t),$$

on applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
I^r\, {}^cD^r h(t) &= I^r I^{n-r} h^{(n)}(t) \\
&= I^{nRL} D^n h(t) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{t \to 0} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-j} I^{n-n} h(t) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{n-j} h(t) \right)(0) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} h^{(n-j)}(0)
\end{aligned}$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^r\, {}^cD^r h(t) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)\, t^k}{k!} \\
&= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c'_k t^k}{k!} \\
&= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^k}{k!}
\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour les problèmes aux limites à équation différentielle fractionnaire suivants :

$$\begin{aligned} {}^cD^r y(t) &= f(t,y) \qquad ,\forall t \in I = [0,T], 1 < r < 2 \qquad (2.1)\\ y(0) &= y_0 \ ,y(T) = y_T \qquad (2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^cD^r y(t) &= f(t,y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T] \ \ 1 < r < 2 \qquad (2.3)\\ y(0) &= y_0, \qquad (2.4)\\ y'(0) &= y_1. \qquad (2.5) \end{aligned}$$

dans lesquel

${}^cD^r$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ;

$f : I \times E \to E$ est une fonction donnée, satisfaisant quelques hypothèses qui seront spécifiées plus tard, et E est un espace de Banach avec la norme $\| \, . \, \|$.
Ce chapitre est basé sur les travaux de R.P.Agarwal et al.[4], la mesure de noncompacité est souvent utilisée dans différentes branches d'analyse non linéaire, spécialement dans l'existence de solutions de différents types d'équations intégrales voir Akhmerov[7] Aliprantis et Border[8], Alvarez[9],Banàs et al.[12], Guo et al.[21],Mönch et al.[28]. Dans ce qui suit, la mesure de noncompacité associée au théorème de point fixe de Mönch vont nous permettre d'établir l'existence de solutions des problèmes (2.1)(2.2)et(2.3)(2.5).

2.1 Problème aux limites pour le cas $r \in]1,2[$

Dans cette partie on va étudier le problème suivant :

$$\begin{aligned} {}^cD^r y(t) &= f(t,y) \qquad ,\forall t \in I = [0,T], 1 < r < 2 \qquad (2.6)\\ y(0) &= y_0 \ ,y(T) = y_T \qquad (2.7) \end{aligned}$$

2.1.1 Existence de solutions

Premièrement, on va définir ce qu'est une solution du problème aux limites (2.1)(2.2).

Définition 2.1. *Une fonction $y \in AC^1(I,E)$ est dite une solution du problème (2.1)(2.2) si y satisfait l'équation*

$$^cD^r y(t) = f(t,y)$$

sur I avec les conditions $y(0) = y_0$ et $y(T) = y_T$.

Lemme 2.2. *Soit $1 < r < 2$ et soit $h : I \to E$ une fonction continue. Une fonction y est dite solution de l'équation intégrale fractionnaire :*

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)h(s)ds \tag{2.8}$$

où

$$g(t) = (1 - \frac{t}{T})y_0 + \frac{t}{T}y_T$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(r)} \begin{cases} (t-s)^{r-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0 \le s \le t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & t \le s \le T \end{cases}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites :

$$^cD^r y(t) = h(t) \quad ,t \in I \tag{2.9}$$

$$y(0) = y_0 \ , \ y(T) = y_T \tag{2.10}$$

Démonstration. En utilisant le lemme 1.19, on réduit le problème(2.9)(2.10) à une équation intégrale équivalente :

$$\begin{aligned} ^cD^r y(t) &= h(t) \\ &\Leftrightarrow I^{rc}D^r y(t) = I^r h(t) \\ &\Leftrightarrow y(t) + c_0 + c_1 t = I^r h(t) \\ &\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t h(s)(t-s)^{r-1}ds + c_0' + c_1' t \end{aligned}$$

avec

$$c_0' = -c_0 \text{ et } c_1' = -c_1.$$

on a :

$$y(0) = c_0' = y_0$$

et

$$y(T) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^T h(s)(T-s)^{r-1}ds + y_0 + c_1' T$$

ce qui implique que :

$$c_1' = \frac{y_T}{T} - \frac{y_0}{T} - \frac{1}{T\Gamma(r)} \int_0^T (T-s)^{r-1}h(s)ds$$

Donc

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^T h(s)(t-s)^{r-1}ds+y_0+\frac{y_T t}{T}-\frac{y_0 t}{T}-\frac{t}{T\Gamma(r)}\int_0^T (T-s)^{r-1}h(s)ds$$

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(r)}\left(\int_0^t h(s)((t-s)^{r-1}-\frac{t}{T}(T-s)^{r-1})ds-\frac{t}{T}\int_t^T (T-s)^{r-1}h(s)ds\right)+(1-\frac{t}{T})y_0+\frac{t}{T}y_T$$

c'est à dire

$$y(t)=\int_0^T G(t,s)h(s)ds+g(t)$$

avec

$$g(t)=(1-\frac{t}{T})y_0+\frac{t}{T}y_T$$

et

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(r)}\begin{cases}(t-s)^{r-1}-\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0\le s\le t\\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1},\ t\le s\le T\end{cases}$$

Inversement, on a :

$$y(t)=g(t)+\int_0^T G(t,s)h(s)ds$$

avec

$$g(t)=(1-\frac{t}{T})y_0+\frac{t}{t}y_T$$

et

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(r)}\begin{cases}(t-s)^{r-1}-\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0\le s\le t\\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & t\le s\le T\end{cases}$$

on a :

$${}^cD^r y(t)={}^cD^r(g(t)+\int_0^T G(t,s)h(s)ds)$$

avec $1<r<2$ et $n=2$

$$\begin{aligned}{}^cD^r y(t) &= {}^cD^r g(t)+{}^cD^r(\int_0^T G(t,s)h(s)ds)\\ &= I^{2-r}(\frac{d}{dt})^2 g(t)+I^{2-r}(\frac{d}{dt})^2(\int_0^T G(t,s)h(s)ds)\\ &= I^{2-r}(\frac{d}{dt})^2(\int_0^T G(t,s)h(s)ds)\end{aligned}$$

(car $g(t)=(1-\frac{t}{T})y_0+\frac{t}{T}y_T$)

$$\begin{aligned}
{}^cD^r y(t) &= I^{2-r}(\frac{d}{dt})^2(\frac{1}{\Gamma(r)}(\int_0^T((t-s)^{r-1}-\frac{t}{T}(T-s)^{r-1})h(s)ds-\frac{t}{T}\int_t^T(T-s)^{r-1}h(s)ds))\\
&= \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^T(t-s)^{r-1}(\frac{d}{ds})^2[\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^s((s-\tau)^{r-1}-\frac{s}{T}(T-\tau)^{r-1})h(\tau)d\tau\\
&\quad -\frac{s}{T\Gamma(r)}\int_0^T(T-\tau)^{r-1}h(\tau)d\tau)]ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^t(t-s)^{1-r}(\frac{d}{ds})^2[\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^s(s-\tau)^{r-1}h(\tau)d\tau\\
&\quad -\frac{s}{T\Gamma(r)}\int_0^s(T-\tau)^{r-1}h(\tau)d\tau-\frac{s}{T\Gamma(r)}\int_s^T(T-\tau)^{r-1}h(\tau)d\tau]ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^t(t-s)^{1-r}(\frac{d}{ds})^2[I^rh(s)-\frac{s}{T}I^rh(T)]ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^t(t-s)^{1-r}I^{r-2}h(s)ds
\end{aligned}$$

(car $(\frac{d}{ds})^2(-\frac{s}{T}I^rh(T))=0$) alors on a :

$$ {}^cD^r y(t)={}^cD^rI^rh(t)=h(t)$$

donc

$$ {}^cD^r y(t)=h(t).$$

□

Comme la fonction $G(t,s)$ est continue sur $[0,T]\times[0,T]$, on note que :

$$G^*=\sup\{\|G(t,s)\|,(t,s)\in I\times I\}$$

La fonction g est continue sur I, donc il existe :

$$g^*=\sup\{\|g(t)\|,t\in I\}$$

Pour établir le résultat principal concernant l'existence des solutions de (2.1)(2.2), considérons les hypothèses suivantes sur f :

(H1) $f:I\times E\to E$ satisfait aux conditions de Carathéodory.

(H2) Il existe $p\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ tel que :

$$\|f(t,y)\|\le p(t)\|y\|,\ \text{ pour tout } t\in I \text{ et tout } y\in E.$$

(H3) $\forall t\in I$ et pour tout ensemble borné $B\subset E$ on a :

$$\lim_{h\to 0^+}\alpha(f(I_{t,h}\times B))\le p(t)\alpha(B),\quad I_{t,h}=[t-h,t]\cap I.$$

Théoreme 2.3. *On suppose les hypothèses (H1)-(H3) vérifiées, et que :*

$$G^*\int_0^T p(s)ds<1.$$

Alors, le problème aux limites (2.1)(2.2) admet au moins une solution.

Démonstration. On transforme le problème (2.1)(2.2) en un problème au point fixe en considérant l'opérateur :

$$\begin{aligned} N \quad &: \quad C(I,E) \to C(I,E) \\ y \quad &\to \quad (Ny)(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds \end{aligned}$$

Les points fixes de N sont des solutions pour le problème (2.1)(2.2).
Soit :

$$R \geq \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s)ds}$$

et on considère l'ensemble :

$$D_R = \{y \in C(I,E), \|y\|_\infty \leq R\}$$

D_R est fermé, borné et convexe.
But :
Afin de prouver l'existence des points fixes de N, on doit montrer que N satisfait les hypothèses du théorème 1.15. La preuve se fait en trois étapes :

1. ***Continuité de*** N
   Soit $\{y_n\}$ une suite telle que :

$$y_n \underset{n\to\infty}{\to} y \text{ dans } C(I,E)$$

   Donc :$\forall t \in I$ on a :

$$\begin{aligned} \|(Ny_n)(t) - (Ny)(t)\| &= \left\| \int_0^T G(t,s)[f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))]ds \right\| \\ &\leq \int_0^T \|G(t,s)\| \, \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| \, ds \\ &\leq G^* \int_0^T \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| \, ds \end{aligned}$$

   Comme f est de Carathéodory, on a f mesurable par rapport à y, donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.
   Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|(Ny_n)(t) - (Ny)(t)\| &\leq G^* \int_0^T \lim_{n\to\infty} \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| \, ds \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

   Donc

$$\|(Ny_n)(t) - (Ny)(t)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

   D'où la continiuté de N.

2. N ***applique*** D_R ***dans*** D_R

   Soit $y \in D_R$, pour tout $t \in I$ on a :

$$\begin{aligned}
\|(Ny)(t)\| &= \left\| g(t) + \int_0^T G(t,s) f(s,y(s)) ds \right\| \\
&\leq \|g(t)\| + \int_0^T \|G(t,s)\| \, \|f(s,y(s))\| \, ds \\
&\leq g^* + G^* \int_0^T p(s) \, \|y\| \, ds \ \text{ (par (H2))} \\
&\leq g^* + RG^* \int_0^T p(s) ds \\
&\leq R \ \text{ (car } R \geq \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s)ds})
\end{aligned}$$

   Donc

$$\|(Ny)(t)\| \leq R$$

   c'est à dire

$$(Ny)(t) \in D_R \Rightarrow N(D_R) \subset D_R.$$

3. ***Bornitude et équicontinuité de*** $N(D_R)$:

   Par l'étape 2, ona $N(D_R) = \{N(y), y \in D_R\} \subset D_R$. Donc $\forall y \in D_R$ on a $\|N(y)\|_\infty \leq R$, donc $N(D_R)$ est borné.

   Pour l'équicontinuité de $N(D_R)$, soit $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$ et $y \in D_R$, alors :

$$\begin{aligned}
\|N(y)(t_2) - N(y)(t_1)\| &\leq \|g(t_2) - g(t_1)\| + \int_0^T \|(G(t_2,s) - G(t_1,s)) f(s,y(s))\| \, ds \\
&\leq \|g(t_2) - g(t_1)\| + R \int_0^T p(s) \, \|G(t_2,s) - G(t_1,s)\| \, ds
\end{aligned}$$

   Par continuité de g et G on a :

$$\|N(y)(t_2) - N(y)(t_1)\| \underset{t_1 \to t_2}{\to} 0.$$

   Donc, $N(D_R)$ est équicontinue.

Maintenant, soit V un sous ensemble de D_R tel que :

$$V \subset \overline{conv}(N(V) \cup \{0\}).$$

V est borné et équicontinu.

En plus, la fonction $v \to v(t) = \alpha(V(t))$ est continue sur I.

Puisque g est continue sur I, elle est bornée sur I. Donc l'ensemble $\overline{\{g(t), t \in I\}}$ est compact. En utilisant (H3), le lemme 1.12 et les propriétés de la mesure α on a, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \alpha(V(t)) \\
&< \alpha(N(V)(t) \cup \{0\}) \\
&\leq \alpha(N(V)(t))
\end{aligned}$$

car $\alpha(N(V)\cup\{0\}) = \max\{\alpha(N(V)), \alpha(\{0\})\}$)
on a :

$$N(V)(t) = \{g(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\}$$
$$N(V)(t) = \{g(t), t \in I\} + \{\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\alpha(N(V)(t)) &= \alpha(\{g(t), t \in I\} + \{\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\}) \\
\alpha(N(V)(t)) &\leq \alpha(\{g(t), t \in I\}) + \alpha(\{\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\}) \\
\alpha(N(V)(t)) &\leq \alpha(\{\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\})
\end{aligned}$$

$$\alpha(N(V)(t)) \leq \int_0^T \|G(t,s)\| \, p(s)\alpha(V(s))ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq G^* \int_0^T p(s)v(s)ds \\
&\leq G^* \|v\|_\infty \int_0^T p(s)ds
\end{aligned}$$

donc on a :

$$\|v\|_\infty \leq G^* \|v\|_\infty \int_0^T p(s)ds$$

car $G^* \int_0^T p(s)ds < 1$.
Et alors $\|v\|_\infty = 0$, c'est à dire $v(t) = 0, \forall t \in I$, i.e $\alpha(V(t)) = 0$.

Donc, $V(t)$ est relativement compact dans E.

Par le théorème d'Ascoli-Arzelà 1.3, V est relativement compact dans D_R (car $V \subset D_R$ est borné et équicontinu).

Puisque toutes les hypothèses du théorème 1.15 sont satisfaites, l'application N admet par conséquent un point fixe qui est solution pour notre problème. □

2.2 Problème à valeur initiale pour le cas $r \in]1,2[$

Dans cette partie, on va étudier le problème suivant :

$$\begin{aligned}
{}^cD^r y(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T] \;\; 1 < r < 2 && (2.11) \\
y(0) &= y_0, && (2.12) \\
y'(0) &= y_1. && (2.13)
\end{aligned}$$

2.2.1 Existence de solutions

Définition 2.4. *Une fonction $y \in AC^1(I,E)$ est une solution du problème (2.4)(2.5) si y satisfait l'equation ${}^cD^r y(t) = f(t, y(t))$ sur I, et les conditions $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$.*

Lemme 2.5. *Soit $1 < r < 2$ et soit $h : I \longrightarrow E$ continue. Une fonction y est une solution de l'equation intégrale fractionnaire :*

$$y(t) = y_0 + y_1 t + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} h(s) ds \tag{2.14}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned} {}^cD^r y(t) &= h(t), \quad \forall t \in I = [0,T] && (2.15)\\ y(0) &= y_0, && (2.16)\\ y'(0) &= y_1. && (2.17) \end{aligned}$$

Démonstration. Par le lemme 1.19, on réduit le problème (2.15)(2.16)(2.17) à une equation intégrale équivalente :

$$ {}^cD^r y(t) = h(t) \Leftrightarrow y(t) = I^r h(t) + c_0 + c_1 t$$
$$ y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} h(s) ds + c_0 + c_1 t$$

avec c_0 et c_1 des constantes dans E. Les conditions $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$ donnent :

$$c_0 = y_0,$$
$$c_1 = y_1.$$

donc, on a :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} h(s) ds + y_0 + y_1 t.$$

Inversement, si y satisfait l'equation intégrale, on aura :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} h(s) ds + y_0 + y_1 t$$
$${}^cD^r y(t) = {}^cD^r y_0 + {}^cD^r y_1 t + {}^cD^r I^r h(t)$$

donc

$${}^cD^r y(t) = h(t)$$

et

$$y(0) = y_0,$$
$$y'(0) = y_1.$$

□

Afin d'établir le résultat principal concernant l'existence de solutions de (2.4)(2.5), considérons les conditions suivantes sur la fonction f :
(H1) $f : I \times E \longrightarrow E$ satisfait les conditions de Carathéodory.
(H2) Il existe $p \in L^1(I,\mathbb{R}) \bigcap C(I,\mathbb{R})$ telle que :

$$\| f(t,y) \| \leq p(t) \| y \|, \text{ pour tout } t \in I, \text{ et tout } y \in E$$

(H3) $\forall t \in I$ et pour tout ensemble borné $B \subset E$, on a :

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B), \quad I_{t,h} = [t-h,t] \cap I.$$

Théorème 2.6. *On suppose les hypothèses (H1)-(H3) vérifiées et que :*

$$\frac{p * T^r}{\Gamma(r+1)} < 1 \tag{2.18}$$

avec $p* = \sup_{t \in I} p(t)$*. Alors, le problème (2.4)(2.5) admet au moins une solution.*

Démonstration. On transforme le problème (2.4)(2.5) en un problème au point fixe, en considérant l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} N & : & C(I,E) \longrightarrow C(I,E) \\ y & \longrightarrow & N(y)(t) = y_0 + y_1 t + \dfrac{1}{\Gamma(r)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{r-1} f(s,y(s))ds \end{array}$$

Clairement, les points fixes de l'opérateur N sont des solutions pour le problème (2.4)(2.5).
Soit :

$$r_0 \geq \frac{\| y_0 \| + \| y_1 \| T}{1 - \frac{p*T^r}{\Gamma(r-1)}} \tag{2.19}$$

on considère l'ensemble $D_{r_0} = y \in C(I,E), \| y \|_\infty \leq r_0$ il est clair que l'ensemble D_{r_0} est fermé, borné et convexe.
But
On doit montrer que N satisfait les hypothèses du théorème 1.15.
La preuve se fait en trois étapes :

1. **Continuité de** N
   Soit y_n une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ dans $C(I,E)$. Alors, $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} \| N(y_n)(t) - N(y)(t) \| &= \| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} (f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)))ds \| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} \| f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)) \| ds \end{aligned}$$

   Puisque f est de Carathéodory, et par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on aura :

$$\| N(y_n)(t) - N(y)(t) \|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

2. *N **applique** D_{r_0} **dans** D_{r_0} :*
   $\forall y \in D_{r_0}$ et $\forall t \in I$, par (H2) et (2.19), on a :

$$\begin{aligned}
\| N(y)(t) \| &\leq \| y_0 + y_1 t \| + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} \| f(s,y(s)) \| ds \\
&\leq \| y_0 \| + \| y_1 \| T + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) \| y(s) \| ds \\
&\leq \| y_0 \| + \| y_1 \| T + \frac{r_0}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) ds \\
&\leq \| y_0 \| + \| y_1 \| T + \frac{r_0 p*}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} ds \\
&\leq \| y_0 \| + \| y_1 \| T + \frac{r_0 p * t^r}{\Gamma(r)} \\
&\leq \| y_0 \| + \| y_1 \| T + \frac{r_0 p * T^r}{\Gamma(r)} \\
&\leq r_0 \text{ (par (2.19)).}
\end{aligned}$$

3. ***Bornitude et équicontinuité de** $N(D_{r_0})$*
   Par l'étape 2, il est évident que $N(D_{r_0}) \subset C(I,E)$ est borné.
   Pour l'équicontinuité de $N(D_{r_0})$, soit $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$ et $y \in D_{r_0}$, alors :

$$\begin{aligned}
\| N(y)(t_2) - N(y)(t_1) \| &\leq \| y_1 t_2 - y_1 t_1 \| + \frac{1}{\Gamma(r)} \| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{r-1} f(s,y(s)) ds \\
&\quad - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{r-1} f(s,y(s)) ds \| \\
&\leq \| y_1 \| (t_2 - t_1) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{t_1} ((t_2-s)^{r-1} - (t_1-s)^{r-1}) \| f(s,y(s)) \| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{r-1} \| f(s,y(s)) \| ds \\
&\leq \| y_1 \| (t_2 - t_1) + \frac{r_0}{\Gamma(r)} \int_0^{t_1} ((t_2-s)^{r-1} - (t_1-s)^{r-1}) p(s) ds \\
&\quad + \frac{r_0}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{r-1} p(s) ds
\end{aligned}$$

   Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité tend vers 0.
   D'où l'équicontinuité de $N(D_{r_0})$.

Maintenant, soit V un sous ensemble de D_{r_0} tel que $V \subset \overline{conv}(N(V) \bigcup 0)$.
De l'étape 3, le sous ensemble V est borné et équicontinu, par conséquent la fonction $v \longrightarrow v(t) = \alpha(V(t))$ est continue sur I.
Puisque la fonction $t \longrightarrow y_0 + y_1 t$ est continue sur I, l'ensemble $\overline{\{y_0 + y_1 t,\ t \in I\}} \subset E$ est compact.
En utilisant ce fait, l'hypothèse (H3), le lemme 1.12 et les propriétés de la mesure de Kuratowskii, on a pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
v(t) &\leq \alpha(N(V)(t) \cup 0) \\
&\leq \alpha(N(V)(t))\ (\alpha(A \cup B) = max\{\alpha(A), \alpha(B)\} \\
N(V)(t) &= y_0 + y_1 t + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s, y(s)) ds,\ t \in I \\
&= y_0 + y_1 t,\ t \in I + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s, y(s)) ds,\ t \in I \\
\Rightarrow \alpha(N(V)(t)) &\leq \alpha(y_0 + y_1 t,\ t \in I) + \alpha(\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s, y(s)) ds,\ t \in I)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &\leq \alpha(\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s, y(s)) ds,\ t \in I) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) \alpha(V(s)) ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) v(s) ds \\
&\Rightarrow \| v \|_\infty \leq \| v \|_\infty \frac{p * T^r}{\Gamma(r+1)}
\end{aligned}$$

Par (2.18) il se suit que $\| v \|_\infty = 0$, c'est à dire $v(t) = 0$, $\forall t \in I$, alors $V(t)$ est relativement compact dans E.
Par le théorème d'*Ascoli-Arzelà* 1.3, V est relativement compact dans D_{r_0}.
En appliquant le théorème 1.15, on conclue que N admet un point fixe qui est solution du problème (2.4)(2.5).

Chapitre 3

Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires avec des conditions intégrales

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions pour le problème aux limites avec des conditions intégrales :

$$^{c}D^{r}y(t) = f(t,y(t)), \quad \forall t \in I = [0,T] \tag{3.1}$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s,y(s))ds \tag{3.2}$$

$$y(T) - y'(T) = \int_0^T h(s,y(s))ds \tag{3.3}$$

où $^{c}D^{r}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo avec $1 < r \leq 2$, f, g et $h : I \times E \to E$ sont des fonctions données satisfaisant quelques hypothèses qui vont être spécifiées plus tard, et E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$.
Les problèmes aux limites avec conditions intégrales constituent une classe importante de problèmes car elle généralise les problèmes à deux points et trois points ainsi que les problèmes non locaux.
Les conditions intégrales sont recontrées dans plusieurs domaines, en particulier la dynamique de population [16] et les systèmes cellulaires [1].
Dans la litterature beaucoup d'auteurs ont étudié ce type de problèmes en particulier [10],[23],[29], pour ce chapitre nous développons les résultats de [15].

3.1 Existence de solutions

Définition 3.1. *Une fonction $y \in AC^1(I,E)$ est dite une solution du problème (3.1)(3.2)(3.3) si elle satisfait l'équation $^{c}D^{r}y(t) = f(t,y(t))$ et les conditions $y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s,y(s))ds$ et $y(T) - y'(T) = \int_0^T h(s,y(s))ds$.*

Soit $\sigma, \rho_1, \rho_2 : I \to E$ des fonctions continues, dans le problème linéaire aux limites suivant :

$$^{c}D^{r}y(t) = \sigma(t), \quad \forall t \in I = [0,T] \tag{3.4}$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T \rho_1(s)ds \tag{3.5}$$

$$y(T) - y'(T) = \int_0^T \rho_2(s)ds \tag{3.6}$$

Lemme 3.2. *Soit $1 < r \leq 2$, et soient $\sigma, \rho_1, \rho_2 : I \to E$ des fonctions continues. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale :*

$$y(t) = P(t) + \int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds$$

avec,

$$P(t) = \frac{(T+1-t)}{T+2}\int_0^T \rho_1(s)ds + \frac{(t+1)}{T+2}\int_0^T \rho_2(s)ds$$

et,

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(r)}\begin{cases} (t-s)^{r-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0 \leq s \leq t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, \ \ si\ t \leq s \leq T \end{cases}$$

si et seulement si y est une solution du problème fractionnaire (3.4)(3.5)(3.6).

Démonstration.

$$\begin{aligned} {}^cD^r y(t) &= \sigma(t), \quad t \in I \\ &\Rightarrow \ I^r\, {}^cD^r y(t) = I^r\sigma(t) \\ &\Rightarrow \ y(t) = I^r\sigma(t) + c_0 + c_1 t \\ &\Rightarrow \ y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1}\sigma(s)ds + c_0 + c_1 t \end{aligned}$$

On a les conditions (3.5) et (3.6)Donc

$$y(0) = c_0 = y'(0) + \int_0^T \rho_1(s)ds$$

et

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{\Gamma(r)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{r-1}\sigma(s)ds + c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t \frac{d}{dt}(t-s)^{r-1}\sigma(s)ds + c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (r-1)(t-s)^{r-2}\sigma(s)ds + c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(r-1)}\int_0^t (t-s)^{r-2}\sigma(s)ds + c_1 \end{aligned}$$

Donc

$$y'(0) = c_1$$

$$y(T) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^T (T-s)^{r-1}\sigma(s)ds + c_1 T + c_0$$

alors

$$y'(T) = \frac{1}{\Gamma(r-1)}\int_0^T (T-s)^{r-2}\sigma(s)ds + c_1$$

donc

$$\begin{aligned} c_1 = &\frac{-1}{(T+2)\Gamma(r)}\int_0^T (T-s)^{r-1}\sigma(s)ds - \frac{1}{(T+2)}\int_0^T \rho_2(s)ds \\ &- \frac{1}{(T+2)\Gamma(r-1)}\int_0^T (T-s)^{r-2}\sigma(s)ds + \frac{1}{(T+2)}\int_0^T \rho_2(s)ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}c_0 = \frac{-1}{(T+2)\Gamma(r)}\int_0^T (T-s)^{r-1}\sigma(s)ds - \frac{1}{(T+2)}\int_0^T \rho_2(s)ds\\ -\frac{1}{(T+2)\Gamma(r-1)}\int_0^T (T-s)^{r-2}\sigma(s)ds + \frac{1}{(T+2)}\int_0^T \rho_2(s)ds + \int_0^T \rho_1(s)ds\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1}\sigma(s)ds + \frac{-1}{(T+2)\Gamma(r)}\int_0^T (T-s)^{r-1}\sigma(s)ds\\ -\frac{1}{(T+2)}\int_0^T \rho_2(s)ds - \frac{1}{(T+2)\Gamma(r-1)}\int_0^T (T-s)^{r-2}\sigma(s)ds\\ +\frac{1}{(T+2)}\int_0^T \rho_2(s)ds + \int_0^T \rho_1(s)ds + \frac{-t}{(T+2)\Gamma(r)}\int_0^T (T-s)^{r-1}\sigma(s)ds\\ -\frac{t}{(T+2)}\int_0^T \rho_2(s)ds - \frac{t}{(T+2)\Gamma(r-1)}\int_0^T (T-s)^{r-2}\sigma(s)ds + \frac{t}{(T+2)}\int_0^T \rho_2(s)ds\end{aligned}$$

donc

$$y(t) = P(t) + \int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds$$

Inversement On a :

$$\begin{aligned}y(t) &= P(t) + \int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds\\ {}^cD^r\, y(t) &= {}^cD^r(P(t) + \int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds)\\ {}^cD^r\, y(t) &= I^{2-r}(\frac{d}{dt})^2(P(t)) + I^{2-r}(\frac{d}{dt})^2(\int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds)\end{aligned}$$

on a :

$$(\frac{d}{dt})^2(\frac{(T+1-t)}{T+2}\int_0^T \rho_1(s)ds + \frac{(t+1)}{T+2}\int_0^T \rho_2(s)ds) = 0$$

donc :

$$\begin{aligned}{}^cD^r\, y(t) = I^{2-r}(\frac{d}{dt})^2(\int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds) = \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^t (t-s)^{1-r}(\frac{d}{ds})^2(\int_0^T G(t,\tau)\sigma(\tau)d\tau)ds\\ = \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^t (t-s)^{1-r}(\frac{d}{ds})^2[\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^s (s-\tau)^{r-1}\sigma(\tau)d\tau - \frac{(1+s)}{(T+2)\Gamma(r)}\int_0^s (T-\tau)^{r-1}\sigma(\tau)d\tau\\ -\frac{(1+s)}{(T+2)\Gamma(r-1)}\int_0^s (T-\tau)^{r-2}\sigma(\tau)d\tau + \frac{(1+s)}{(T+2)\Gamma(r)}\int_s^T (T-\tau)^{r-1}\sigma(\tau)d\tau\\ -\frac{(1+s)}{(T+2)\Gamma(r-1)}\int_s^T (T-\tau)^{r-2}\sigma(\tau)d\tau]ds\\ = \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^t (t-s)^{1-r}(\frac{d}{ds})^2[I^r\sigma(s) - \frac{(1+s)}{(T+2)}I^r\sigma(T) - \frac{(1+s)}{(T+2)}I^{r-1}\sigma(T)]ds\\ = \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^t (t-s)^{1-r}I^{r-2}\sigma(s)ds\\ = I^{2-r}I^{r-2}\sigma(t) = \sigma(t)\end{aligned}$$

donc :

$$^cD^r\, y(t) = \sigma(t)$$

D'où l'équivalence sus-citée dans le lemme. $\square$

Il est clair que la fonction $\int_0^T |G(t,s)|\,ds$ est continue sur I, donc bornée.
Soit :

$$\widetilde{G} = \sup\{\int_0^T |G(t,s)|\,ds, t \in I\}$$

Pour établir le théorème d'existence, considérons les hypothèses suivantes :
(H1) Les fonctions f, g et $h : I \to E$ satisfont aux conditions de Carathéodory.
(H2) Il existe $p_f, p_g, p_h \in L^\infty(I, \mathbb{R}^+)$ telles que :

$$\begin{aligned} \|f(t,y)\| &\leq p_f(t)\,\|y\| \quad \text{p.p tout } t \in I, \forall y \in E \\ \|g(t,y)\| &\leq p_g(t)\,\|y\| \quad \text{p.p tout } t \in I, \forall y \in E \\ \|h(t,y)\| &\leq p_h(t)\,\|y\| \quad \text{p.p tout } t \in I, \forall y \in E \end{aligned}$$

(H3) Pour tout $t \in I$ et tout $B \subset E$ (B borné). on a :

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0^+} \alpha(f(I_{t,k} \times B)) &\leq p_f(t)\alpha(B) \\ \lim_{k\to 0^+} \alpha(g(I_{t,k} \times B)) &\leq p_g(t)\alpha(B) \\ \lim_{k\to 0^+} \alpha(h(I_{t,k} \times B)) &\leq p_h(t)\alpha(B) \end{aligned}$$

Théoreme 3.3. *On suppose les hypothèses (H1)-(H3) satisfaites, et que :*

$$\frac{T(T+1)}{T+2}(\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}) + \widetilde{G}\|p_f\|_{L^\infty} < 1$$

Alors,le problème aux limites (3.1)(3.2)(3.3) admet au moins une solution.

Démonstration. On transforme le problème (3.1)(3.2)(3.3) en un problème de point fixe, en considérant l'opérateur :

$$\begin{aligned} N &: C(I,E) \to C(I,E) \\ y &\to N(y)(t) = P_y(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds \end{aligned}$$

où

$$P_y(t) = \frac{(T+1-t)}{T+2}\int_0^T g(s,y(s))ds + \frac{(t+1)}{T+2}\int_0^T h(s,y(s))ds$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(r)}\begin{cases} (t-s)^{r-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0 \leq s \leq t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & \text{si } t \leq s \leq T \end{cases}$$

Soit $R > 0$, on considère l'ensemble :

$$D_R = \{y \in C(I,E), \|y\|_\infty \leq R\}$$

D_R est fermé, borné et convexe.

Objectif :

Pour que N admet un point fixe, on doit montrer qu'il satisfait aux hypothèses du théorème 1.15.
La preuve se fait en trois étapes :

1. ***continuité de*** N :
   Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y$ dans $C(I,E)$.
   Alors, $\forall t \in I$:

$$\|N(y_n)(t)-N(y)(t)\| \leq \left\|P_{y_n}(t)-P_y(t)\right\| + \int_0^T \|G(t,s)\| \, \|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|$$

$$\leq \left\| \frac{(T+1-t)}{T+2}\int_0^T (g(s,y_n(s))-g(s,y(s)))ds + \frac{(t+1)}{T+2}\int_0^T (h(s,y_n(s))-h(s,y(s)))ds \right\| + \int_0^T \|G(t,s)\| \, \|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|$$

$$\leq \frac{(T+1-t)}{T+2}\int_0^T \|g(s,y_n(s))-g(s,y(s))\| ds + \frac{(t+1)}{T+2}\int_0^T \|h(s,y_n(s))-h(s,y(s))\| ds + \int_0^T \|G(t,s)\| \, \|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|$$

   Soit $\rho > 0$ tel que :

$$\|y_n\|_\infty \leq \rho, \ \ \|y\|_\infty \leq \rho$$

   Par (H2), on a :

$$\begin{array}{rcl} \|g(s,y_n(s))-g(s,y(s))\| & \leq & \|g(s,y_n(s))\| + \|g(s,y(s))\| \\ & \leq & 2\rho p_g(s) := \sigma_1(s) \\ \|h(s,y_n(s))-h(s,y(s))\| & \leq & \|h(s,y_n(s))\| + \|h(s,y(s))\| \\ & \leq & 2\rho p_h(s) := \sigma_2(s) \\ \|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\| & \leq & \|f(s,y_n(s))\| + \|f(s,y(s))\| \\ & \leq & 2\rho p_f(s) := \sigma_3(s) \end{array}$$

   avec $\sigma_1(s), \sigma_2(s)$ et $\sigma_3(s) \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$.
   Puisque les fonctions f, g et h sont Carathéodory, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. On aura alors :

$$\|N(y_n)-N(y)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

   D'où la continuité de N.

2. N ***applique*** D_R ***dans*** D_R **:**
   $\forall y \in D_R, \forall t \in I$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \|N(y)(t)\| & = & \left\| P_y(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds \right\| \\ & \leq & \left\|P_y(t)\right\| + \int_0^T |G(t,s)| \, \|f(s,y(s))\| ds \\ & \leq & \frac{(T+1-t)}{T+2}\int_0^T \|g(s,y(s))\| ds + \frac{(t+1)}{T+2}\int_0^T \|h(s,y(s))\| ds + \int_0^T |G(t,s)| \, \|f(s,y(s))\| ds \\ & \leq & \frac{(T+1)}{T+2}\left\|p_g\right\|_{L^\infty}\|y\|_\infty \int_0^T ds + \frac{T+1}{T+2}\|p_h\|_{L^\infty}\|y\|_\infty \int_0^T ds + \left\|p_f\right\|_{L^\infty}\|y\|_\infty \int_0^T |G(t,s)| ds \\ & \leq & R(\frac{T(T+1)}{T+2}\left\|p_g\right\|_{L^\infty} + \frac{T(T+1)}{T+2}\|p_h\|_{L^\infty} + \left\|p_f\right\|_{L^\infty}\widetilde{G}) \\ & < & R \end{array}$$

   Donc $N(y) \in D_R$, alors $N(D_R) \subset D_R$.

3. ***Bornitude et équicontinuité de*** $N(D_R)$ On a :

$$N(D_R) \subset D_R$$

Puisque D_R est borné dans $C(I,E)$, alors $N(D_R)$ l'est aussi.
Pour l'équicontinuité de $N(D_R)$:
Soit $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2, \forall y \in D_R$, alors :

$$\begin{aligned}\|N(y)(t_2) - N(y)(t_1)\| &= \left\| \frac{(T+1-t_2)}{T+2} \int_0^T g(s,y(s))ds + \frac{t_2+1}{T+2} \int_0^T h(s,y(s))ds + \int_0^T G(t_2,s) f(s,y(s))ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{(T+1-t_1)}{T+2} \int_0^T g(s,y(s))ds - \frac{(t_1+1)}{T+2} \int_0^T h(s,y(s))ds - \int_0^T G(t_1,s) f(s,y(s))ds \right\| \\ &\le \frac{t_1-t_2}{T+2} \int_0^T \|g(s,y(s))\| ds + \frac{t_2-t_1}{T+2} \int_0^T \|h(s,y(s))\| ds + \|f(s,y(s))\| \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)| ds\end{aligned}$$

Puisque $G(.,s)$ est continue alors le côté droit de l'inégalité tend vers 0 quand $t_1 \to t_2$. Donc $N(D_R)$ est équicontinu.

Maintenant, soit V un sous ensemble de D_R tel que :

$$V \subset \overline{conv}(N(V) \cup \{0\}).$$

V est borné et équicontinu, en plus $v \to \alpha(V(t))$ est continue sur $I.\forall t \in I$ on a :

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha(V(t)) \\ &\le \alpha(N(V(t)) \cup \{0\}) \\ &\le \alpha(N(V(t))) \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} N(V(t)) &= \{P_y(t) + \int_0^T G(t,s) f(s,y(s))ds, y \in V\} \\ &= \{P_y(t), y \in V\} + \{\int_0^T G(t,s) f(s,y(s))ds, y \in V\} \\ &\Rightarrow \alpha(N(V(t))) \le \alpha(\{P_y(t), y \in V\}) + \alpha(\{\int_0^T G(t,s) f(s,y(s))ds, y \in V\}) \\ &\le \alpha(\{\frac{(T+1-t)}{T+2} \int_0^T g(s,y(s))ds, y \in V\}) + \alpha(\{\frac{(t+1)}{T+2} \int_0^T h(s,y(s))ds, y \in V\}) \\ +\alpha(\{\int_0^T G(t,s) f(s,y(s))ds, y &\in V\} \end{aligned}$$

Par le lemme 1.12, on a :

$$\begin{aligned} \alpha(N(V(t))) &\le \int_0^T \left| \frac{(T+1-t)}{T+2} \right| p_g(s) \alpha(V(s)) ds + \int_0^T \left| \frac{(t+1)}{T+2} \right| p_h(s) \alpha(V(s)) ds \\ &\quad + \int_0^T |G(t,s)| \, p_f(s) \alpha(V(s)) ds \\ &\le \frac{(T+1)T}{T+2} \|p_g\|_{L^\infty} \|v(s)\|_\infty + \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_h\|_{L^\infty} \|v(s)\|_\infty + \widetilde{G} \|p_f\|_{L^\infty} \|v(s)\|_\infty \\ &\Rightarrow \|v\|_\infty \le \|v\|_\infty \left(\frac{(T+1)T}{T+2} \|p_g\|_{L^\infty} + \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_h\|_{L^\infty} + \widetilde{G} \|p_f\|_{L^\infty} \right) \end{aligned}$$

Puisque :

$$\frac{(T+1)T}{T+2}\|p_g\|_{L^\infty}+\frac{T(T+1)}{T+2}\|p_h\|_{L^\infty}+\widetilde{G}\|p_f\|_{L^\infty}<1$$

On a forcément :

$$\begin{aligned}\|v\|_\infty &= 0 \Leftrightarrow v(t)=0\\ &\Leftrightarrow \alpha(V(t))=0\end{aligned}$$

Donc $V(t)$ est relativement compact.

Et d'après le théorème d'*Ascoli-Arzélà* 1.3, V est relativement compact.

Et donc l'opérateur N admet au moins un point fixe qui est solution pour notre problème. □

3.2 Exemple

On présente un exemple afin d'illustrer l'utilité du résultat principal.

On considère le problème fractionnaire aux limites, suivant :

$$\begin{aligned} {}^cD^r y(t) &= \frac{2}{19+e^t}|y(t)| \qquad ,t\in I=[0,1],\quad 1<r\le 2\\ y(0)-y'(0) &= \int_0^1 \frac{1}{5+e^{5s}}|y(s)|\,ds,\\ y(1)-y'(1) &= \int_0^1 \frac{1}{3+e^{3s}}|y(s)|\,ds.\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{2}{19+e^t}x, \qquad (t,x)\in I\times[0,\infty)\\ g(t,x) &= \frac{1}{5+e^{5t}}x, \qquad (t,x)\in I\times[0,\infty)\\ h(t,x) &= \frac{1}{3+e^{3t}}x, \qquad (t,x)\in I\times[0,\infty)\end{aligned}$$

(H1) $f(t,x)=\frac{2}{19+e^t}x$, est mesurable par rapport à t, et continue par rapport à x presque partout sur $[0,\infty)$, de même pour $g(t,x)$ et $h(t,x)$.

Donc les trois fonctions vérifient les conditions de Carathéodory.

(H2)

$$\begin{aligned}\|f(t,x)\| &= \left\|\frac{2}{19+e^t}x\right\| \le \|x\|\left\|\frac{2}{19+e^t}\right\|\\ &\le \frac{2}{19+e^t}\|x\| = p_f(t)\|x\|\\ \|g(t,x)\| &= \left\|\frac{1}{5+e^{5t}}x\right\| \le \|x\|\left\|\frac{1}{5+e^{5t}}\right\|\\ &\le \frac{1}{5+e^{5t}}\|x\| \le p_g(t)\|x\|\\ \|h(t,x)\| &= \left\|\frac{1}{3+e^{3t}}x\right\| \le \|x\|\left\|\frac{1}{3+e^{3t}}\right\|\\ &\le \frac{1}{3+e^{3t}}\|x\| \le p_h(t)\|x\|\end{aligned}$$

La fonction $G(t,s)$ est donné par :

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(r)}\begin{cases}(t-s)^{r-1}-\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0\leq s\leq t\\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1},\ \text{si} & 0\leq s\leq t\end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(t,s)ds=\int_0^t G(t,s)ds+\int_t^1 G(t,s)ds\\ =\int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}ds-\int_0^t \frac{(t+1)(1-s)^{r-1}}{3\Gamma(r)}ds-\int_0^t \frac{(1+t)(1-s)^{r-2}}{3\Gamma(r-1)}ds\\ -\int_t^1 \frac{(t+1)(1-s)^{r-1}}{3\Gamma(r)}ds-\int_t^1 \frac{(1+t)(1-s)^{r-2}}{3\Gamma(r-1)}ds\\ =\frac{t^r}{\Gamma(r+1)}+\frac{(t+1)(1-t)^r}{3\Gamma(r+1)}-\frac{(t+1)}{3\Gamma(r+1)}+\frac{(t+1)(1-t)^{r-1}}{3\Gamma(r)}-\frac{(t+1)}{3\Gamma(r)}\\ -\frac{(t+1)(1-t)^{r-1}}{3\Gamma(r+1)}-\frac{(t+1)(1-t)^{r-1}}{3\Gamma(r)}\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |G(t,s)\,|ds\leq \frac{|t^r\,|}{\Gamma(r+1)}+\frac{|(t+1)\,||(1-t)^r\,|}{3\Gamma(r+1)}+\frac{|t+1\,|}{3\Gamma(r+1)}+\frac{|t+1\,|\left|(1-t)^{r-1}\,\right|}{3\Gamma(r)}+\frac{|t+1\,|}{3\Gamma(r)}\\ +\frac{|t+1\,|\left|(1-t)^{r-1}\,\right|}{3\Gamma(r+1)}+\frac{|t+1\,|\left|(1-t)^{r-1}\,\right|}{3\Gamma(r)}\\ <\frac{1}{\Gamma(r+1)}+\frac{2}{3\Gamma(r+1)}+\frac{2}{3\Gamma(r+1)}+\frac{2}{3\Gamma(r)}+\frac{2}{3\Gamma(r)}+\frac{2}{3\Gamma(r+1)}+\frac{2}{3\Gamma(r)}\\ <\frac{3}{\Gamma(r+1)}+\frac{2}{\Gamma(r)}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\widetilde{G}<\frac{3}{\Gamma(r+1)}+\frac{2}{\Gamma(r)}\frac{T(T+1)}{T+2}(\left\|p_g\,\right\|_{L^\infty}+\left\|p_h\,\right\|_{L^\infty})+\widetilde{G}\left\|p_f\,\right\|_{L^\infty}\\ \leq\frac{2}{3}(\left\|p_g\,\right\|_{L^\infty}+\left\|p_h\,\right\|_{L^\infty})+(\frac{3}{\Gamma(r+1)}+\frac{2}{\Gamma(r)})\left\|p_f\,\right\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

on a :

$$\left\|p_g\,\right\|_{L^\infty}=\inf\{c>0,\left\|p_g(t)\right\|\leq c$$

$$\left\|\frac{1}{5+e^{5s}}\right\|\leq\frac{1}{6}$$

$$\left\|p_f\,\right\|_{L^\infty}\leq\frac{1}{10}$$

$$\left\|p_h\,\right\|_{L^\infty}\leq\frac{1}{4}$$

donc

$$\frac{T(T+1)}{T+2}(\|p_g\|_{L^\infty}+\|p_h\|_{L^\infty})+\widetilde{G}\|p_f\|_{L^\infty}\leq\frac{2}{3}(\frac{1}{6}+\frac{1}{4})+(\frac{3}{10\Gamma(r+1)}+\frac{1}{5\Gamma(r)})<1$$

Puisque toutes les hypothèses sont satisfaites, notre problème admet donc une solution dans $[0,1]$.

Chapitre 4

Problème de Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires

L'objectif de ce chapitre est d'aborder l'existence des solutions du problème de Cauchy pour équation différentielle fractionnaire :

$$\begin{aligned} {}^cD^r u(t) &= f(t,u(t)), \quad t \in I = [0,T] \qquad (4.1)\\ u(0) &= 0. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

où ${}^cD^r$ représente la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $r \in]0,1[$ avec $a = 0$. E est un espace de Banach muni de la norme$\|.\|$ et $f : I \times E \to E$ satisfait à ceraines conditions qui seront spécifiées plus tard.
Les résultats de ce chapitre s'inspirent des travaux de A.Aghajani et al.[6].
L'existence des solutions du problème de Cauchy (4.1)(4.2) est obtenue en utilisant une généralisation du théorème de point fixe de Darbo[5] associée à la mesure de noncompacité de Hausdorff.

4.1 Existence de solutions

Afin de montrer le résultat principal, on considère les hypothèses suivantes :
(C1) f satisfait aux conditions de Carathéodory.
(C2) Il existe une fonction $g \in L^{\frac{1}{q}}(I,\mathbb{R}_+)$, $q \in [0,r)$ et une fonction continue non décroissante $\Omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\|f(t,x)\| \leq g(t)\Omega(\|x\|), \qquad \forall x \in E \text{ et } pp\ t \in I.$$

(C3) Il existe une fonction $L \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ et $\phi \in \Phi$ telles que :
$\forall B \subseteq E$ (sous ensemble borné) :

$$\gamma(f(t,B)) \leq L(t)\phi(\gamma(B)), \quad pp\ t \in I$$

(C4) Il existe au moins une solution $p(t) \in C(I,\mathbb{R}_+)$ de l'inégalité :

$$\frac{\Omega(\|p\|_0)}{\Gamma(r)}\left(\int_0^t (t-s)^{r-1} g(s)ds\right) \leq p(t), \quad t \in I$$

où $\|.\|_0$ est la norme de sup dans $C(I,\mathbb{R}_+)$.
Les outils principaux dans cette recherche sont basés sur les lemmes suivants :

Lemme 4.1. *[13] Si $W \subseteq C(I,E)$ est borné et équicontinu, l'ensemble $\gamma(W(t))$ est donc continu sur I et :*

$$\begin{aligned} \gamma(W) &= \sup_{t\in I}\gamma(W(t)), \\ \gamma(\int_0^t W(s)ds) &\leq \int_0^t \gamma(W(s))ds \end{aligned}$$

Lemme 4.2. *[17] Si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^1(I,\mathbb{R}_+)$ satisfait :*

$$\|u_n(t)\| \leq K(t), \ \ pp \ sur \ I, \forall n \geq 1$$

avec $K \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$, alors la fonction $\gamma(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}) \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ et :

$$\gamma(\{\int_0^t u_n(s)ds, n \geq 1\}) \leq 2\int_0^t \gamma(\{u_n(s), n \geq 1\})ds$$

Lemme 4.3. *[17] Si W est borné, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq W$ tq :*

$$\gamma(W) \leq 2\gamma(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}) + \varepsilon$$

Le lemme suivant est fondamental dans la démonstration du théorème principal :

Lemme 4.4. *[32] Une fonction $u \in C(I,E)$ est une solution de l'équation intégrale :*

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1} f(s,u(s))ds$$

si et seulement si :

u est une solution de l'équation (4.1)(4.2).

Proposition 4.5. *On suppose que $p(t)$ est une fonction qui satisfait (C4), et on pose :*

$$W_p = \{u \in C(I,E), \|u(t)\| \leq p(t), t \in I\} \subseteq C(I,E)$$

Alors, $C_p = \overline{conv}FW_p$ est équicontinue.

où $\overline{conv}$ est la fermeture de l'enveloppe convexe dans $C(I,E)$ et F l'opérateur qui va de $C(I,E)$ vers $C(I,E)$ donné par :

$$Fu(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1} f(s,u(s))ds, \quad t \in I$$

F est continu sur $C(I,E)$ et $F : W_p \to W_p$ est borné.

Démonstration. En se basant sur une propriété qui dit que si $W \subseteq C(I,E)$ est borné et équicontinu alors, $\overline{conv}W \subseteq C(I,E)$ est aussi borné et équicontinu, il suffit donc de montrer que $FW_p \subseteq C(I,E)$ est équicontinu.

Pour prouver cela : soit $u \in W_p$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, on a :

$$\|(Fu)(t_2)-(Fu)(t_1)\| = \frac{1}{\Gamma(r)}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{r-1}f(s,u(s))ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{r-1}f(s,u(s))ds\right\|$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\left\|\int_0^{t_1}(t_2-s)^{r-1}f(s,u(s))ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{r-1}f(s,u(s))ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{r-1}f(s,u(s))ds\right\|$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{t_1}((t_2-s)^{r-1}-(t_1-s)^{r-1})\,\|f(s,u(s))\|\,ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{r-1}\,\|f(s,u(s))\|\,ds$$
$$\leq \frac{\Omega(\|u\|)}{\Gamma(r)}(\int_0^{t_1}|g(s)|\,((t_2-s)^{r-1}-(t_1-s)^{r-1})ds + \int_{t_1}^{t_2}|g(s)|\,(t_2-s)^{r-1}ds)$$
$$\leq \frac{\Omega(\|p\|_0)}{\Gamma(r)}(\int_0^{t_1}|g(s)|\,((t_2-s)^{r-1}-(t_1-s)^{r-1})ds + \int_{t_1}^{t_2}|g(s)|\,(t_2-s)^{r-1}ds)$$
$$\leq \frac{\Omega(\|p\|_0)}{\Gamma(r)}\,\|g\|_{L^{\frac{1}{q}}(I,\mathbb{R}_+)}[(\int_0^{t_1}((t_2-s)^{r-1}-(t_1-s)^{r-1})^{\frac{1}{1-q}}ds)^{1-q}$$
$$+(\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\frac{r-1}{1-q}}ds)^{1-q}]$$

(Par l'inégalité de Holder)
Donc, $\|(Fu)(t_2)-(Fu)(t_1)\| \underset{t_1\to t_2}{\to} 0.$

D'où l'équicontinuité de FW_p qui entraine l'équicontinuité de $\overline{conv}FW_p$.

Maintenant, on va montrer que $F : C(I,E) \to C(I,E)$ est continu.

D'abord, F est bien défini d'après les hypothèses (C1) et (C2).

Soit $\{u_n\}$ une suite de fonctions dans $C(I,E)$ qui converge vers $u \in C(I,E)$. On doit montrer que $|||Fu_n - Fu||| \underset{n\to\infty}{\to} 0$:

$$\begin{aligned}\|(Fu_n)(t)-(Fu)(t)\| &= \left\|\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t(t-s)^{r-1}(f(s,u_n(s))-f(s,u(s)))ds\right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t(t-s)^{r-1}\,\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\|\,ds\end{aligned}$$

par la Carathéodory de f, on a f continue presque partout par rapport à u, donc :

$$\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

En appliquant l'hypothèse (C2), on obtient :

$$\begin{aligned}\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\| &\leq \|f(s,u_n(s))\|+\|f(s,u(s))\| \\ &\leq g(s)\Omega(\|u_n(s)\|)+g(s)\Omega(\|u(s)\|) \\ &\leq g(s)(\Omega(\|u_n(s)\|)+\Omega(\|u(s)\|))\end{aligned}$$

puisque $s \to g(s)\Omega(\|u(s)\|)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,t]$, la fonction $s \to (t-s)^{r-1}g(s)\Omega(\|u(s)\|)$ l'est aussi.

En utilisant ce fait et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on aura :

$$\begin{aligned}\|(Fu_n)(t)-(Fu)(t)\| &\leq (\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t(t-s)^{r-1}\,\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\|\,ds\,) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \forall t \in I \\ i.e\ Fu_n &\rightrightarrows Fu \text{ donc } |||Fu_n - Fu||| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ sur } I.\end{aligned}$$

D'où la continuité de F.

Il reste à montrer que $F : W_p \to W_p$ est borné.

Soient $u \in W_p, t \in I$, tels que :

$$\begin{aligned} \|(Fu)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} \|f(s,u(s))\| ds \\ &\leq \frac{\Omega(\|p\|_0)}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} g(s) ds \\ &\leq p(t) \quad \text{(par l'hypothèse (C4))} \end{aligned}$$

Donc, $F : W_p \to W_p$ est borné. □

Remarque 4.6. *Le lemme présenté par Bothe 4.3 est l'ingrédient essentiel dans la preuve du théorème principal*

Maintenant, on peut formuler notre résultat d'éxistence.

Théoreme 4.7. *On suppose que les conditions (C1)-(C4) sont satisfaites. Alors le problème de Cauchy (4.1)(4.2) admet au moins une solution $u \in C(I,E)$.*

Démonstration. On considère l'opérateur :

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad C(I,E) \to C(I,E) \\ u \quad &\to \quad (Fu)(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s,u(s)) ds, \quad t \in I \end{aligned}$$

Par le lemme 4.4, les points fixes de F sont des solutions pour le problème (4.1)(4.2).

But :

On doit vérifier les hypothèses du théorème 1.17 pour montrer que F admet un point fixe.

Soient $W_p = \{u \in C(I,E), \|u(t)\| \leq p(t), \forall t \in I\} \subseteq C(I,E)$ et $C_p = \overline{conv} F W_p$.

$W_p \subseteq C(I,E)$ est fermé, borné et convexe.

Puisque $FW_p \subseteq W_p$, on a :

$$C_p = \overline{conv}(FW_p) \subseteq \overline{conv}(W_p) = W_p$$
$$\Rightarrow \quad FC_p \subseteq FW_p \subseteq C_p$$

$F : C_p \to C_p$ est bien défini et continu.

D'autre part, $\forall C \subseteq C_p, C$ est borné, et par le lemme 4.2, $\forall \varepsilon > 0, \exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ tel que :

$$\begin{aligned} \gamma((FC)(t)) &= \gamma(\{\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s,u(s)) ds, \ u \in C\}) \\ &\leq 2\gamma(\{\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s,\{u_n\}_{n=1}^{\infty}) ds\}) + \varepsilon \end{aligned}$$

par le lemme 4.2, le lemme 4.3 et la condition (C3), on a :

$$\begin{aligned} \gamma((FC)(t)) &\leq \frac{4}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} \gamma(f(s,\{u_n\}_{n=1}^{\infty})) ds + \varepsilon \\ &\leq \frac{4}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} \gamma(\{f(s,u_n), n \geq 1\})) ds + \varepsilon \\ &\leq \frac{4}{\Gamma(r)} \phi(\gamma(\{u_n\}_{n=1}^{\infty})) \int_0^t (t-s)^{r-1} L(s) ds + \varepsilon \\ &\quad \text{(par la condition(C3))} \end{aligned}$$

on pose :

$$\widetilde{L} = \int_0^t L(s)ds, \quad (0 \leq \widetilde{L} < \infty)$$

on a aussi :

$$\phi(\gamma(\{u_n\}_{n=1}^{\infty})) \leq \phi(\gamma(C)), \quad \phi \in \Phi$$

Donc,

$$\gamma((FC)(t)) \leq \frac{4\phi(\gamma(C))\widetilde{L}T^{r-1}}{\Gamma(r)} + \varepsilon$$

on pose :

$$\psi(s) = \frac{4\widetilde{L}T^{r-1}}{\Gamma(r)}\phi(s)$$

Donc $\psi(s) \in \Phi$, ça veut dire que $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est croissante et que :

$$\lim_{n\to\infty} \psi^n(s) = \lim_{n\to\infty} (\frac{4\widetilde{L}T^{r-1}}{\Gamma(r)})^n \phi^n(s) = 0$$

Conclusion :

On a montré que : $F : C_p \to C_p$ est une application continue, où C_p est un ensemble fermé, borné et convexe ;
et l'inégalité :

$$\gamma F(C) \leq \psi(\gamma(C)), \ \ \psi \in \Phi$$

Puisque toutes les hypothèses du théorème 1.17 sont satisfaites, F admet donc au moins un point fixe $u \in C_p \subseteq C(I,E)$ qui est une solution pour notre problème (4.1)(4.2). □

Conclusion

L'objectif de ce travail consiste à présenter plusieurs résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire dans des espaces de Banach de dimension infinie. Ces résultats ont été obtenus en utilisant des théorèmes de point fixe de Mönch et de Darbo combinés avec la mesure de noncompacité de Kuratowskii et celle de Hausdorff.

Bibliographie

[1] G.Adomian and G.E.Adomian, *Cellular systems and aging models*, Computers and Mathematics with Applications, vol.11,no.1-3,pp.283-291, **1985**.

[2] R.P. Agarwal, M. Benchohra and S. Hamani, *Boundary value problems for fractional differential inclusions*, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, **16** (2) (**2008**), 181-196.

[3] R.P. Agarwal, M. Benchohra and S. Hamani, *Boundary value problems for fractional differential equations*, *Georgian. Math. J.*, (to appear).

[4] R.P Agarwal, M.Benchohra and D.Seba, *On the Application of Measure of Noncompactness to the Existence of Solutions for Fractional Differential Equations*, Results Math.55, **2009.**

[5] A.Aghajani, J.Banàs, N.Sabzali, *Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications*. Bull.Belg.Math.Soc.simon Stevin, 20,No 2(**2013**), 345-358.

[6] A.Aghajani, E.Pouhadi and J.J Trujillo, *Application of Measure of Noncompactness to a Cauchy Problem for Fractional Differential Equations in Banach Spaces*, Fractional Calculus and Applied Analysis, An International Journal for Theory and Applications, vol.16, no 4, **2013**.

[7] R.R.Akhmerov,M.I.Kamenskii,A.S.Patapov,A.E.Rodkina,B.N.Sadovskii, *Measure of Noncompactness and Condensing Operators*. Translated from the 1986 Russian original by A.Iacob. Operator theory :Advances and Applications, 55.Birkhauser Verlag, Bassel,**1992**.

[8] C.D.Aliprantis and K.C.Border, *Infinite Dimensional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, **1994**.

[9] J.C.Alvàrez, *Measure of Noncompactness and Fixed Point of Nonexpansive Condensing Mapping in Locally Convex Spaces*.Rev.Real.Acad.Cienc.Exact.Fis.Natur. Madrid 79(**1985**),53-66.

[10] A.Arara and M.Benchohra, *Fuzzy solutions for boundary value problems with integral boundary conditions*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae,vol.75, no.1,pp.119-126, **2006**.

[11] J.M Ayerbe Toledano, T.D Benavides and G.L Acedo, *Measure of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Universidad de Sevilla, Spain, **1991**.

[12] J.Banàs,*Applications of measure of weak noncopactness and some classes of operators in the theory of functional equations in the Lebesgue space*. Nonlinear Anal.30(**1997**),3283-3293.

[13] J.Banàs,K.Goebel,*Measure of noncompactness in Banach spaces*, In Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Volume 60,Marcel Dekker, New York, **1980**.

[14] J.Banas and M.Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential Equations*. Springer, New Delhi, **2014**.

[15] M.Benchohra, A.Cabada and D.Seba, *An Existence Result for Non Linear Fractional Differential Equations on Banach Spaces*. Bound. Val. Probl.**2009**, Art.ID 628916, 11pp.
Í

[16] K.W.Blayneh, *Analysis of age-stuctured host-parasitoid model*, Far East Journal of Dynamical Systems, vol.4,no.1-3,pp.125-145,**2002**.

[17] D.Bothe, *Multivalued perturbations of m-accretive differntial inclusions*. Isreal J.Math.108(**1998**), 109-138.

[18] S.Dugowson, *Les Différentielles Métaphysiques : Histoire et Philosophie de la Généralisation de l'Ordre de Dérivation*. PHD thesis, Université de Paris XIII, Villetaneuse, France, **1994**.

[19] L.Gaul,P.Klein,S.Kempfle,*Damping description involving fractional operators*.Mech.Systems Signal Processing 5(**1991**),81-88.

[20] W.G.Glockle,T.F.Nonenmacher,*A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics*.Biophys.J.68(**1995**),46-53.

[21] D.Guo,V.Lakshmikantham,X.Liu, *Non linear integral equations in abstract spaces*.Mathematics and its applications,373.Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht,**1996**.

[22] R.Hilfer,*Applications of fractional calculus in physics*.World scientific,Singapore,**2008**.

[23] G.Infante, *Eigenvalues and positive solutions of ODEs involving integral boundary conditions*, Discrete and Continuos Dynamical Systems,pp.436-442, **2005**.

[24] A.A Kilbas, H.M Srivastava and J.J Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*.Jan Val Mill, Faculteit Der Exacte Witenschappen, Amsterdam, **2006**.

[25] F.Mainardi,*Fractional calculus : Some basic problems in continium and statisticul mechanics,in : Fractals and Fractional calculus in continium mechanics*(A.Carpenteri,F.Maindari Eds.), Springer-Verlag,Wien,(**1997**),291-348.

[26] F.Metzler,W.Schick,H.G.Kilian,T.F.Nonnenmacher,*Relaxation in filled polymers :A fractional calculus aproach*.J.Chem.Phys.103(**1995**),7180-7186.

[27] K.S Miller and B.Ross, *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York **1993**.

[28] H.Monch, *Boundary Value Problems for Nonlinear Ordinary Differential Equations of Second Order in Banach Spaces, Non Linear Analysis : Theory, Methods and Applications*, vol.4, no.5,pp.985-999, **1980**.

[29] S.Peciulyte, O.Stikoniene, and A.Stikonas, *Sturm-Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition*, Mathematical Modelling and Analysis,vol.10,no.4,pp.377-392, **2005**.

[30] I.Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol.198, Academic Press, San Diego, **1999**.

[31] S.Szufla, *On the Application of Measure of Noncompactness to Existence Theorems*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol.75,pp.1-14,**1986**.

[32] J.R.Wang, Y.Zhou, M.Feckan, *Abstract Cauchy problem for fractional differential equations*. Nonlinear Dynam. 71, No 4(**2013**), 685-700 ; DOI10.1007/s11071-012-0452-9.

[33] K.Yosida, *Functional Analysis, 6 th edn*. Springer-Verlag, Berlin, **1980**.

[34] S.Zhang,*Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations*.Electron.J.Differential Equations36(**2006**),1-12.

Résumé

Le principe de point fixe est très important dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires, en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.

Dans ce mémoire, on va aborder plusieurs problèmes fractionnaires en démontrant l'existence de solutions via les théorèmes de point fixe de Mönch et de Darbo combinés avec les mesures de non compacité de Kuratowskii et de Hausdorff.

Abstract

The fixed point principle is so important in the study of several non linear differential equations, particulary, problems of existence and uniqeness.

In this memory, we consider different fractional problems. We prove the existence of solutions by using Mönch's fixed point theorem with Kuratowskii measure of non compactness, and Darbo's fixed point theorem with Hausdorff measure of non compactness.

ملخص

يعتبر مبدأ النقطة الثابتة ذا أهمية كبيرة في حل مختلف المعادلات التفاضلية الغير خطية، خاصة في دراسة وجود و وحدانية الحلول.

في هذه المذكرة، سنتطرق لدراسة بعض المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة عن طريق إثبات وجود حلول و ذلك باستعمال نظرية النقطة الثابتة لمونك مقترنة بقياس كوراتوفسكي، و نظرية النقطة الثابتة لداربو مع قياس هوسدورف.