

UNIVERSITÉ ABOUBAKR BELKAID - TLEMCEM
FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Option : PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

présenté par :

Moulay Hachemi Rahma Yasmina

Thème :

FILES D'ATTENTE ET APPLICATIONS

Sous la direction de Mr : MOURID .T

Devant le jury composé de : BOUKHARI .F et ALLAM .A.

Année universitaire : 2014/2015

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier Dieu le tout puissant pour son accompagnement tout au long de ce mémoire.

Je tiens d'exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire et mon professeur de statistique Monsieur :Mourid Tahar de m'avoir encadrée orientée aidée et conseillée,et ainsi pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordé, sans oublier ses efforts fournis pendant ces longues années.

Je remercie monsieur Fakhreddine BOUKHARI mon professeur de probabilité pour ses conseils et ainsi d'avoir accepté à examiner ce travail.

Je remercie également monsieur Abdelaziz ALLAM d'avoir juger mon travail. J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs qui m'ont enseignée.

Je remercie ma chère MAMAN " TEHAMI HAFEDA" qui a toujours été là avec moi.

« Vous avez tous sacrifié pour ton enfant ,n'épargnant ni santé ni effort.Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance ,je suis redevable d'une éducation dont je suis fière.»

Je remercie Mon chère grand père Monsieur TEHAMI BOUMEDIENNE pour sa présence et ses encouragements qui sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais,ainsi que ma grande mère Madame "TEHAMI HAMIDA" pour l'amour qu'elle m'a donné à chaque moment de ma vie.

Je remercie mes chers oncles "ZAKI ET AMINE TEHAMI" ainsi que mes tantes "NEDJOIE ET AFAF" sans oublier mon nouveau frère AHMED qui m'ont entouré et motivé sans cesse.

Je remercie Madame BEN YARO RACHIDA pour ses conseils d'or et pour son encouragement à choisir le bon chemin.

Enfin je remercie tous mes amies que j'aime tant :HAKIKI IKRAM pour son amour et pour son aide précieuse,CHAUCHE MERYEM pour son formidable soutien, .

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	iii
0.1 Pourquoi y a-t-il de l'attente?	2
0.2 L'objectif de l'analyse des files d'attentes	3
1 Analyse et terminologie	6
1.1 Introduction	6
1.2 Structure de base	7
1.3 Classification des systèmes d'attentes	7
1.4 Terminologie et notations	8
1.5 Exemples des files d'attentes	8
1.6 Rappels	9
2 Systèmes de files d'attente	12
2.1 Arrivées de Poisson et des temps de service de loi exponentielle	12
2.2 Système M/M/1	13
2.2.1 Introduction	13
2.2.2 Analyse mathématique	13
2.3 Modèle $M/M/\infty$	18
2.3.1 Introduction	18
2.3.2 Analyse mathématique	18
2.4 Système M/M/s	19
2.5 Systèmes M/G/1 et M/G/ ∞	21
2.5.1 Système M/G/1	22
2.5.2 Système M/G/ ∞	27
3 Variations et extensions	31
3.1 Systèmes avec rejet	31
3.2 Systèmes avec retour	32
3.3 Une file d'attente avec deux serveurs	34

3.4	Files d'attente prioritaires de préemption	35
4	Réseaux ouverts de files d'attente acyclique	42
4.1	Théorème de base	42
4.2	Files en tandem	44
4.3	Réseaux ouverts acycliques	45
4.3.1	Exemple	46
4.4	Réseaux ouverts généraux	51
4.4.1	Introduction	51
4.4.2	Exemple	51
4.4.3	Réseau ouvert général	55
5	Application :Traffic routier	57
5.1	Introduction et description du modèle	57
5.2	Cycle des feux, engorgement, contraintes	57
5.2.1	Cycle des feux	57
5.2.2	Engorgement, contraintes	58
5.2.3	Estimation des paramètres	59
5.2.4	Simulation	60
5.2.5	Amélioration du système	63
	Bibliographie	68

Introduction

Il y a plusieurs choses dans la vie pour lesquelles il faut attendre ; par exemple, le temps passé par les vendeurs à discuter avant de prendre une commande ou le temps passé dans une banque.

Un spécialiste de l'analyse de l'attente a déterminé qu'une personne adulte passait au minimum le dixième de son temps à attendre. On attend les autobus, les ascenseurs, dans les banques, les magasins, les cinémas, les stations d'essence, les tribunaux, pour l'obtention du permis de conduire, chez le dentiste, etc.

On pourrait passer toute sa vie à subir ce genre d'attente classique. Cependant, il y a d'autres types d'attente : l'attente intermédiaire, comme attendre que la pluie cesse ou, encore, l'attente plus fébrile, comme attendre que votre bateau rentre à bon port.

Pour ceux qui attendent en file, la solution est très simple : ajouter des ressources ou bien agir, faire quelque chose pour accélérer le service. C'est l'évidence même.

Cependant, ce n'est pas aussi simple, car il faut tenir compte de certaines subtilités.

Premièrement, sur une longue période, la majorité des processus de service ont une capacité de traitement supérieure à celle qui est nécessaire. Par conséquent, le problème des files d'attente ne survient que pendant de courtes périodes.

Deuxièmement, il ne faut pas perdre de vue le fait qu'à certains moments, le système est vide : les employés sont inoccupés et attendent que les clients se présentent. En augmentant la capacité, on ne fait qu'augmenter le temps d'inoccupation des employés. Donc, si on veut concevoir un système de service, il faut comparer le coût associé au niveau de service (capacité) mis en place et le coût associé à l'attente des clients.

La planification et l'analyse de la capacité de service sont des thèmes traités par la théorie des files d'attente.

Cette théorie propose une approche mathématique permettant d'analyser les

files d'attente.

Elle s'est intéressée à l'étude des équipements téléphoniques automatiques réalisée au début du XXe siècle par l'ingénieur danois en télécommunication, A. K. Erlang. L'application de cette théorie n'a été généralisée à divers types de problèmes qu'après la Seconde Guerre mondiale.

Les files d'attentes se forment lorsque les clients arrivent de façon aléatoire pour un service. Les exemples les plus courants de la vie de tous les jours sont les caisses, des supermarchés, les établissements de restauration rapide, les billetteries des aéroports, les cinémas, les bureaux de poste, les banques. Toutefois, lorsqu'on parle d'attente, on pense souvent à des personnes. Or, les « clients » en attente sont aussi des commandes en attente de traitement, des camions en attente de chargement ou de déchargement, des machines en attente de réparation, des programmes d'ordinateur qui attendent d'être exécutés, des avions qui attendent l'autorisation de décoller, des bateaux qui attendent les remorqueurs pour accoster, les voitures aux panneaux d'arrêt, les patients dans les salles d'urgence, etc.

Généralement, les clients voient dans l'attente une activité sans valeur ajoutée et, s'ils attendent trop longtemps, ils associent cette perte de temps à une mauvaise qualité de service. De la même façon, au sein de l'entreprise, des employés inoccupés ou des équipements inutilisés représentent des activités sans valeur ajoutée. Pour éviter ces situations, la majorité des entreprises ont mis en place des processus d'amélioration continue dont le but ultime est l'élimination de toute forme de gaspillage, notamment l'attente. Tous ces exemples révèlent l'importance de l'analyse des files d'attente. Commençons par une question fondamentale : pourquoi y a-t-il de l'attente ?

0.1 Pourquoi y a-t-il de l'attente ?

Il est surprenant d'apprendre que des files d'attente se forment même dans les systèmes non congestionnés. Par exemple, un établissement de restauration rapide qui peut traiter en moyenne 200 commandes à l'heure voit malgré tout se former des files d'attente avec un nombre moyen de 150 commandes à l'heure.

L'expression clé est « en moyenne ». Le problème vient du fait que les arrivées des clients ont lieu à intervalles aléatoires plutôt qu'à intervalles fixes. De plus, certaines commandes requièrent un temps de traitement plus long. En d'autres termes, les processus d'arrivée et de service ont un degré de variabilité élevé. Par conséquent, le système est soit temporairement congestionné, ce qui crée des files d'attente, soit vide, parce qu'aucun client ne se présente. Donc, si le système n'est pas congestionné d'un point de vue macro, il l'est

d'un point de vue micro. Par ailleurs, en cas de variabilité minimale ou inexistante (arrivée selon les rendez-vous et temps de service constant), aucune file d'attente ne se forme.

0.2 L'objectif de l'analyse des files d'attentes

L'objectif de l'analyse des files d'attente est de minimiser le coût total, qui équivaut à la somme de deux coûts : le coût associé à la capacité de service mise en place (coût de service) et le coût associé à l'attente des clients (coût d'attente).

Le coût de service est le coût résultant du maintien d'un certain niveau de service, par exemple le coût associé au nombre de caisses dans un supermarché, au nombre de réparateurs dans un centre de maintenance, au nombre de guichets dans une banque, au nombre de voies d'une autoroute, etc.

En cas de ressources inoccupées, la capacité est une valeur perdue, car elle est non stockable. Les coûts d'attente sont constitués des salaires payés aux employés qui attendent pour effectuer leur travail (mécanicien qui attend un outil, chauffeur qui attend le déchargement du camion, etc.), du coût de l'espace disponible pour l'attente (grandeur de la salle d'attente dans une clinique, longueur d'un portique de lave-auto, kérosène consommé par les avions qui attendent pour atterrir) et, bien sûr, du coût associé à la perte de clients impatients qui vont chez les concurrents.

En pratique, lorsque le client est externe à l'entreprise, le coût d'attente est difficile à évaluer, car il s'agit d'un impact plutôt que d'un coût pouvant être comptabilisé.

Cependant, on peut considérer les temps d'attente comme un critère de mesure du niveau de service. Le gestionnaire décide du temps d'attente acceptable, « tolérable », et il met en place la capacité susceptible de fournir ce niveau de service.

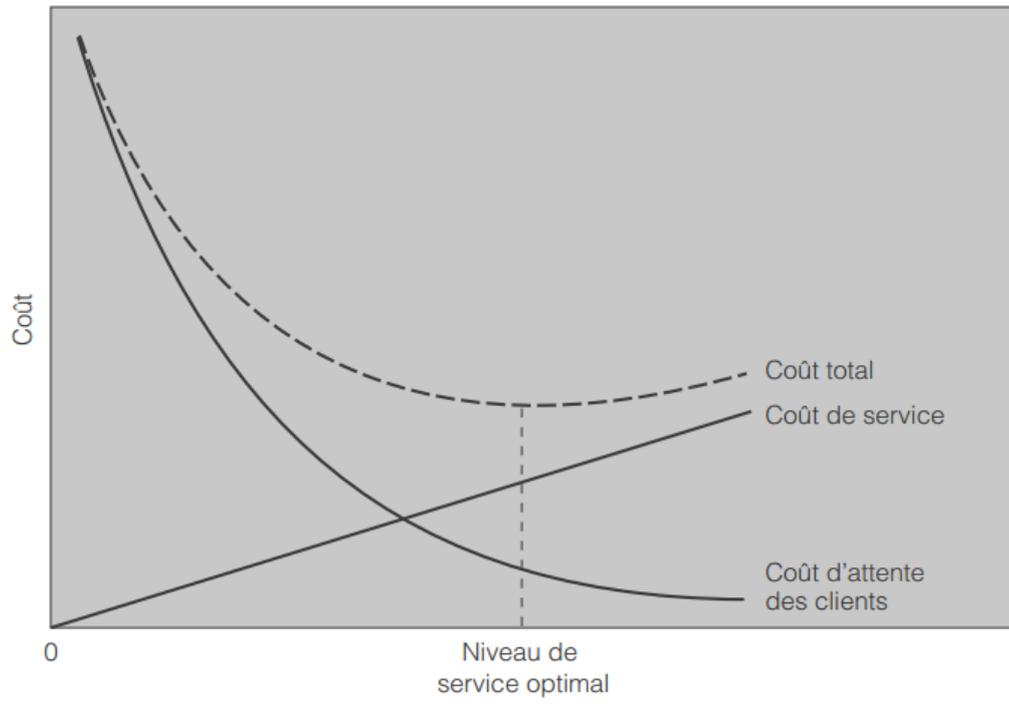
Lorsque le client est interne à l'entreprise — les clients sont les machines et les commis, l'équipe d'entretien —, on peut établir directement certains coûts se rapportant au temps d'attente des clients (machines). Par ailleurs, il ne faut pas conclure trop rapidement que pour l'entreprise, le coût du temps d'attente d'un employé qui attend est égal à son salaire durant le temps d'attente ; cela impliquerait que la baisse nette des gains de l'entreprise, du fait de l'inactivité d'un employé, est égale au salaire de ce dernier, ce qui, a priori, n'est pas évident. L'employé, qu'il travaille ou qu'il attende, reçoit le même salaire.

Par contre, sa contribution aux gains de l'entreprise est réellement perdue, car la productivité baisse. Quand un opérateur de machine est inactif parce

qu'il attend, sa force productive (qui peut comprendre, outre son salaire, une proportion des coûts fixes de l'entreprise) est perdue. En d'autres termes, il faut tenir compte non pas de la ressource physique en attente, mais plutôt de la valeur (coût) de toutes les ressources économiques inactives, et évaluer ensuite la perte de profit à partir de la perte de productivité. L'objectif de l'analyse des files d'attente est de trouver un compromis entre le coût associé à la capacité de service et le coût d'attente des clients. La figure suivante illustre bien ce concept.

Notons que lorsque la capacité de service augmente, le coût de service augmente. Par souci de simplicité, nous avons illustré un coût de service linéaire. Cela n'affecte en rien la démonstration. Lorsque la capacité de service augmente, le nombre de clients en attente et le temps d'attente tendent à diminuer, donc les coûts d'attente diminuent. Le coût total (la somme des coûts de service et d'attente) est représenté sur le graphique par une courbe en forme de U. Graphiquement, il suffit de déterminer le niveau de service se traduisant par le coût total minimum. (Contrairement au modèle de la quantité économique utilisé dans la gestion des stock Dans le cas d'une clientèle externe à l'entreprise, les files d'attente donnent une image négative de la qualité du service offert.

Dans cette situation, les entreprises auront tendance à augmenter la rapidité du service plutôt que d'augmenter le nombre d'employés. Le fait d'abaisser le coût d'attente aura pour effet de déplacer vers le bas la courbe en U, qui représente le coût total.



Chapitre 1

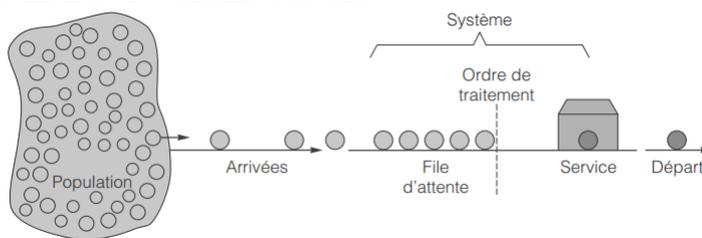
Analyse et terminologie

1.1 Introduction

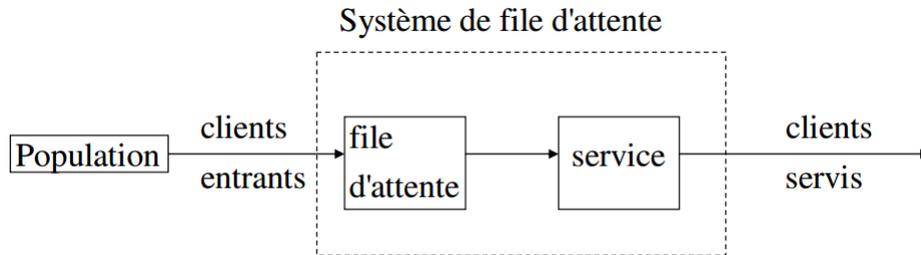
On parle des phénomènes d'attentes chaque fois que certaines unités appelées " *Client* " se présentent d'une manière aléatoire à des stations afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire .

Si un poste de service est libre ,le client se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi .

Sinon il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant leur ordre d'arrivée . Un système d'attente comprend donc " *Un espace de service* " avec une ou plusieurs stations de service et " *Un espace d'attente*" dans lequel se forme une éventuelle file d'attente .Comme le montre le schéma suivant



1.2 Structure de base



- Population : La population constitue la source de clients potentiels. Elle est caractérisée par son nombre d'éléments (fini ou infini).
- File d'attente : La file d'attente est caractérisée par le nombre maximum permis de clients en attente (fini ou infini)
- Clients : Les clients (issus de la population) se joignent au système avec un taux moyen d'arrivée.
- Service : Le service peut être assuré par un ou plusieurs serveurs. Le temps qui s'écoule entre le début et la fin de service d'un client est dénoté le temps de service suivant une loi de probabilité. Le taux de service est une autre caractéristique du système.
- Stratégie de service : La stratégie de service réfère à l'ordre selon laquelle les clients sont servis : premier arrivé premier servi, au hasard, selon des priorités ...

1.3 Classification des systèmes d'attentes

Les phénomènes d'attentes sont classifiés et identifiés selon quatre critères essentiels :

1. La loi des intervalles séparant deux arrivées consécutives ou inter arrivées ; c'est le processus d'entrée noté A .
2. La loi du service : La loi du temps aléatoire qui met le client à recevoir le service noté B .
3. La discipline du service : Le nombre de stations de service disponible en même temps soit s
4. La capacité totale du système N qui représente le nombre maximum de clients pouvant être présents dans le système.

Remarque : cette dernière est supprimée si elle est infinie.

Le système de file d'attente se décrit alors par la notation de *KENDALL* suivante : $A/B/s/N$ et les cas les plus courants pour les deux premières positions sont :

- G : Pour la loi arbitraire.
- M : Pour symboliser une loi exponentielle .
- Ek : Pour indiquer la loi Gamma d'ordre k.
- D : Pour la loi déterministe.

1.4 Terminologie et notations

En lien avec la loi exponentielle :

λ : Le taux d'arrivée ; le nombre moyen d'arrivées par unité de temps.

$\frac{1}{\lambda}$: L'intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives .

μ : Le taux de service ; le nombre moyen de clients servis par unité de temps.

$\frac{1}{\mu}$: Temps moyen de service d'un client dans le système. L'analyse d'un système de file d'attente dépend de l'état initial et du temps écoulé. C'est la situation transitoire où l'étude est très complexe. Dans la théorie des files d'attente l'étude se fait une fois que le système atteint sa situation d'équilibre ; où les états du système sont essentiellement indépendants de l'état initial et du temps déjà écoulé. On suppose que le système est en opération depuis un très long moment.

En situation d'équilibre on note :

- \mathbb{P}_n : Probabilité qu'il y ait n clients dans le système.
- L : Nombre moyen (espérance mathématique) de client dans le système.
- L_q : Nombre de clients dans la file d'attente excluant ceux qui sont dans le service.
- W : Le temps moyen passé par un client dans le système.
- W_q : Le temps moyen passé par un client dans la file (excluant le temps de service)

1.5 Exemples des files d'attentes

Voici quelques exemples classiques des modèles des files d'attente :

1. Modèle M/M/1

- Les clients se présentent suivant un processus de Poisson.
- Le temps de service suit une loi exponentielle de taux μ , indépendamment d'un client à un autre.
- La file d'attente peut s'étendre à l'infini. Le cas d'un guichet de poste avec un seul serveur.

2. Modèle M/M/ ∞

- Les arrivées suivent une loi de Poisson.

- Les temps de service suivent une loi Exponentielle.
- Le nombre de serveurs est infini : Les clients sont traités simultanément et indépendamment. On les retrouve généralement dans le cas des réseaux téléphoniques.

3. Modèle M/G/1

- Les arrivées suivent une loi de Poisson.
- Les temps de service sont arbitrairement distribués.

1.6 Rappels

Notre étude se base sur le processus de Poisson et sur quelques lois de probabilités importantes que nous allons rappeler .

Définition 1.6.1 LA LOI DE POISSON :

En théorie des probabilités et en statistiques, la loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui décrit le nombre d'événements se produisant dans un laps de temps fixe . donnée par :

$$p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

où $k \in \mathbb{N}$

Définition 1.6.2 La loi exponentielle

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement .

Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$$

et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Définition 1.6.3 LE PROCESSUS DE POISSON

On s'intéresse ici au comptage du nombre d'occurrence d'un événement ; par exemple la naissance d'individus .

On note $N(t)$: Le nombre d'événements survenus dans l'intervalle $[0, t]$. Un tel processus a une trajectoire en escaliers . l'événement d'intérêt survient

aux dates t_1, t_2, \dots à chacune de ces dates le comptage augmente de 1.

$$\begin{aligned} N(t) &= 0 & \text{si } t < t_1 \\ &= 1 & \text{si } t_1 < t \leq t_2 \\ &= . \\ &= . \\ &= . \\ &= k & \text{si } t_k < t \leq t_k + 1 \end{aligned}$$

Proposition 1.6.1 *On dit qu'un tel processus est de **Poisson** s'il vérifie les hypothèses suivantes*

i/ *Le processus est sans mémoire : L'occurrence d'événement avant la date t n'influe pas sur l'occurrence d'événement après t : $\forall t \geq 0 \exists h > 0$*

$$N(t+h) - N(t) \perp N(t) - N(t-h)$$

ii/ *Le processus est homogène dans le temps : La loi de l'accroissement $[N(t+h) - N(t)]$ du processus ne dépend que de h et pas de t :*

$$N(t+h) - N(t) \stackrel{\text{en loi}}{=} N(h) - N(0)$$

Remarque 1.6.1 *L'hypothèse (i) induit que le processus de comptage vérifie : l'hypothèse de Markov : toute information issue du passé du processus qui conditionne la loi de $N(t)$ est résumé par le présent.*

Définition 1.6.4 *Considérons $x \geq 0$ le processus ponctuel $N^x = \{t_n^x\}$ défini par :*

$$\begin{aligned} * \quad t_1^x &= x \\ ** \quad t_{n+1}^x &= t_n^x + \tau_n \quad \text{pour } n \geq 0 \end{aligned}$$

Le processus N^x est le processus de renouvellement associé à la suite (τ_n) où $(\tau_i)_{i \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

Définition 1.6.5 *Une probabilité μ sur \mathbb{R} n'est pas latticielle s'il n'existe pas de $\delta > 0$ tel que $\mu(\delta\mathbb{Z}) = 1$*

Proposition 1.6.2 *Si la variable τ_0 a une loi non latticielle en notant pour $x \geq 0, S_t^x$ est le premier point de N^x après t .*

$$S_t^x = \inf \{u > t/N^x([t, u]) \neq 0\} = \inf \{t_n^x/t_n^x > t\}$$

La variable positive $S_t^x - t$ converge en loi vers la loi de densité

$$x \rightarrow \frac{\mathbb{P}(\tau_0 \geq x)}{\mathbb{E}(\tau_0)}$$

sur \mathbb{R}_+ , quand t tend vers l'infini.

Définition 1.6.6 *Une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans E fini ou dénombrable est une chaîne de Markov si :*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}/X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}/X_n = x_n)$$

théorème 1.6.1 *Soit π une loi stationnaire d'une chaîne de Markov ($\pi P = \pi$)*

Pour une chaîne de Markov irréductible, elle a une loi stationnaire si et seulement si elle est récurrente positive

théorème 1.6.2 1. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente positive de loi stationnaire π et de période d .*

Alors pour tout $x, y \in E, \exists r = r(x, y)$ tel que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^{md+k}(x, y) = \begin{cases} d\pi(y) & \text{si } k = r \\ 0 & \text{si } 0 \leq k < d, k \neq r \end{cases}$$

2. *Si de plus la chaîne de Markov est apériodique ($d=1$), alors pour tout $x, y \in E$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y)$$

Définition 1.6.7 *Le générateur du semi groupe $(P(t))_{t \geq 0}$ est défini par :*

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - I}{t}$$

$$A = (q_{xy})_{x, y \in E}$$

Chapitre 2

Systemes de files d'attente

2.1 Arrivées de Poisson et des temps de service de loi exponentielle

Les modèles de files d'attente les plus simples et les plus fréquents sont ceux qui ont un processus de Poisson pour les arrivées et un temps de service exponentiellement distribué. Dans ce cas la taille de la file d'attente constitue un processus de naissance et de mort car

Une naissance \longleftrightarrow arrivée d'un client

Une mort \longleftrightarrow départ d'un client .

POUR LE PROCESSUS D'ARRIVÉE POISSON NOUS AVONS :

1.

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h) \quad (2.1)$$

avec $N(t)$: est le nombre de clients arrivants à l'instant t .

2.

$$\mathbb{P}(\text{aucune arrivée dans } [t, t+h]) = \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h) \quad (2.2)$$

de même la propriété exponentielle de la distribution exprimée par son taux constant implique que :

3.

$$\mathbb{P}(\text{un service est achevé en } [t, t+h] / \text{le service a commencé à l'instant } t) = \mu h + o(h) \quad (2.3)$$

4. $\mathbb{P}(\text{un service n'est pas achevé en } [t, t+h] / \text{le service a commencé à l'instant } t) =$

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \mu h + o(h) \quad (2.4)$$

2.2 Système M/M/1

2.2.1 Introduction

Une file d'attente M/M/1 peut être définie par le processus stochastique suivant :

$$\{X_t, t \geq 0\}$$

qui compte le nombre de personnes dans la file, il représente ainsi la taille de la file d'attente.

On rappelle que dans ce cas les instants d'arrivées des clients sont distribués selon un processus de Poisson d'intensité λ et que les temps de service sont indépendants (et indépendants du processus d'arrivée) et suivent la loi exponentielle de paramètre μ . L'indépendance des arrivées implique que X_t est une chaîne de Markov homogène en particulier est un processus de naissance et de mort.

2.2.2 Analyse mathématique

$$\mathbb{P}((X(t+h) = k+1/X(t) = k) = \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h) \quad (2.5)$$

Car l'accroissement de la taille de la file d'attente par un client correspond à l'arrivée d'un client dans l'intervalle $[t, t+h]$. De façon similaire le décroissement de la taille de la file d'attente par un client veut dire : un client est servi donc aussi un service est achevé .

$$\mathbb{P}((X(t+h) = k-1/X(t) = k) = \mathbb{P}(\text{Un client est servi}) = \mathbb{P}(\text{Un service est achevé})$$

il s'en suit

$$= \mu h + o(h) \quad (2.6)$$

$(X_t, t \geq 0)$ est un processus de naissance et de mort avec :

- Les paramètres de naissance : λ_k pour $k=0,1,\dots$
- Les paramètres de mort : μ_k pour $k=1,2,\dots$ et $\mu_0 = 0$

La distribution d'équilibre de chaîne de Markov est :

Pour $k=0,1,\dots$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) = k) = \pi_k$$

nous introduisons maintenant les quantités auxiliaires θ_j admises et définies par :

$$\theta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \theta_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_j} \quad (2.7)$$

Pour $j=0,1,\dots$, nous avons pour la loi stationnaire

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_0^\infty \theta_j} \quad (2.8)$$

$$\pi_k = \theta_k \pi_0 = \frac{\theta_k}{\sum_0^\infty \theta_j} \quad (2.9)$$

Quand

$$\sum_0^\infty \theta_j = \infty$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) = k) = 0 \quad \forall k$$

Pour une file M/M/1

$$\theta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \theta_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \quad \text{pour } j=0,1,\dots \quad (2.10)$$

Alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} & \text{si } \lambda < \mu \\ \infty & \text{si } \lambda \geq \mu \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous concluons que la distribution d'équilibre n'existe pas lorsque le taux d'arrivée λ est égal ou supérieur à μ dans ce cas la longueur de la file d'attente augmente sans limite .

Ainsi que dans le cas où $\lambda < \mu$

$$\pi_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.12)$$

• **La distribution d'équilibre dans ce cas est alors donnée par :**

$$\pi_k = \pi_0 \theta_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \quad (2.13)$$

Nous reconnaissons (2.13) une loi géométrique et par suite la taille moyenne de la file est donnée par :

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (2.14)$$

Remarque 2.2.1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\text{le taux d'arrivée}}{\text{le taux de service}} \quad (2.15)$$

Définition 2.2.1 ρ est appelé coefficient d'utilisation du système, ou intensité du trafic.

Comme il exprime le nombre moyen d'arrivées par durée moyenne de service, c'est aussi la probabilité d'occupation de la station de service.

Si $\rho > 1$ cela signifie qu'il y a en moyenne plus d'arrivées que de clients servis, et le système s'engorge (la longueur de la file d'attente augmente). On conservera cette notation dans la suite.

Remarque 2.2.2 Plus que l'intensité du trafic se rapproche de un, plus que la longueur moyenne de la file d'attente L tend vers l'infinie.

Remarque 2.2.3 La probabilité d'être servi immédiatement à l'arrivée est π_0

La distribution du temps d'attente Nous pouvons toujours calculer la distribution du temps d'attente dans le cas où $\lambda < \mu$

Quand un client vient et trouve n clients devant lui alors le temps d'attente total de ce client comprenant le temps de son service est LA SOMME DES TEMPS DE SERVICES DES n CLIENTS PLUS SON TEMPS DE SERVICE. Comme chaque temps de service suit une exponentielle de paramètre μ et les temps de services sont indépendants, par conséquent la somme possède une distribution GAMMA : $\Gamma(\mu, n + 1)$

$$\mathbb{P}(T \leq t/n \text{ clients devant}) = \int_0^t \frac{\mu^{n+1} \tau^n e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} d\tau \quad (2.16)$$

Ainsi en régime stationnaire et pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leq t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T \leq t/n \text{ clients devant}) \mathbb{P}(X(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T \leq t/n \text{ clients devant}) \mathbb{P}(X(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\mu^{n+1} \tau^n e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\tau \\
&= \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \tau^n}{\Gamma(n+1)} d\tau \\
&= \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} e^{\lambda\tau} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\tau \\
&= \int_0^t \mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{-\tau\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} d\tau \\
&= 1 - e^{-t(\mu-\lambda)}
\end{aligned}$$

ON REMARQUE BIEN QUE C'EST LA FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE EXPONENTIELLE DE PARAMÈTRES $(\mu - \lambda)$ DE MOYENNE

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Alors L vérifie bien la relation :

$$L = \lambda W$$

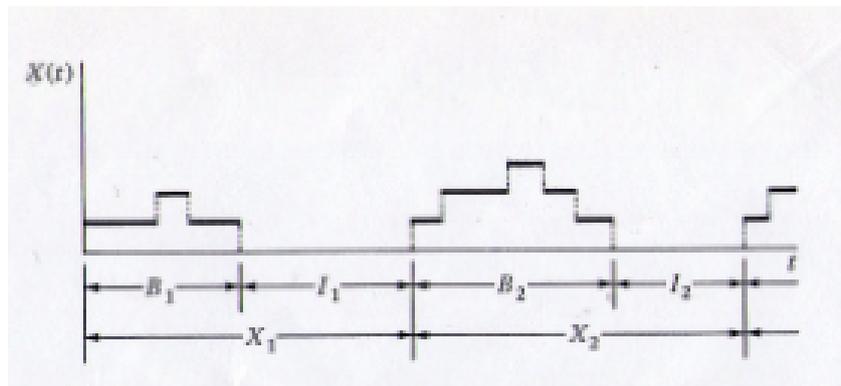
Les périodes d'activités et d'inactivités dans un système de file d'attente : Le système de file d'attente alterne entre les durées où les serveurs sont occupés et où ils sont inactifs.

Definition 2.2.2.1 Une période d'inactivité I commence à l'instant où le dernier client quitte le serveur et dure jusqu'au l'arrivée du prochain client. Lorsque le processus d'arrivée suit une Poisson, alors une période d'inactivité ou (temps d'inter-arrivé) suit une loi exponentielle, de moyenne

$$\mathbb{E}(I) = \frac{1}{\lambda}$$

Definition 2.2.2.2 *une période occupée est une durée dans laquelle le système n'est pas vide, Quand les arrivées à une file d'attente forment un processus de Poisson , alors les durées successives X_k du commencement de la k ième période occupée au début de la période occupée suivante forment un processus de renouvellement.*

Chaque X_k est formé d'une partie occupée B_k et une partie inoccupée I_k . comme le montre le schéma suivant :



soit :

$$p_0(t) = \mathbb{P}(\text{la probabilité que le système soit vide à l'instant } t)$$

. Référence au théorème des renouvellement [1]page 294

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \frac{\mathbb{E}(I_1)}{\mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(B_1)}$$

Par suite nous substituons les quantités connues :

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(I_1) = \frac{1}{\lambda}$$

pour obtenir :

$$1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}(B_1)}$$

$$\mathbb{E}(B_1) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Pour la longueur moyenne d'une période occupée(animée).

2.3 Modèle $M/M/\infty$

2.3.1 Introduction

Cette file d'attente à une infinité de serveurs et joue un rôle crucial dans la plupart des études probabilistes des réseaux de télécommunication.

2.3.2 Analyse mathématique

Quand un nombre infini de serveurs est toujours disponible, alors tous les clients dans le système sont simultanément servis.

Le taux de départ d'un seul client étant μ alors le taux de départ pour k clients est $k\mu$. Nous obtenons les paramètres de naissance et de mort suivants :

$$\begin{aligned}\mu_k &= k\mu \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots \\ \lambda_k &= \lambda \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Les quantités auxiliaires de (2.7) sont :

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots$$

Ainsi que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k = e^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

Donc :

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

La loi stationnaire est donc :

$$\pi_k = \theta_k \pi_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k e^{-\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)}}{k!} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

C'est une loi de poisson avec longueur de file d'attente moyenne

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

Remarque 2.3.2.1 Dans ce cas le service commence dès qu'un client arrive dans le système.

Le temps d'attente d'un client consiste seulement du temps de service distribué de façon exponentielle et le temps moyen d'attente est :

$$W = \frac{1}{\mu}$$

2.4 Système M/M/s

Quand un nombre fixe s de serveurs est disponible avec la supposition qu'un serveur n'est jamais inoccupé si les clients attendent. Donc les paramètres de naissance et de mort sont :

$$\lambda_k = \lambda \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{pour } k = 0, 1, \dots, s \\ s\mu & \text{pour } k > s \end{cases}$$

Considérons : $X(t)$ = Le nombre de clients à l'instant t .

Donc le nombre de serveurs en cours est : $\min(X(t), s)$

Le nombre de clients en attente du service est : $\max(X(t) - s, 0)$ Les quantités auxiliaires sont donc données par :

$$\theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{si } k = 0, 1, \dots, s \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} & \text{si } k > s \end{cases}$$

Pour le premier cas c'est clair, alors le résultat du second cas est :

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{\lambda^k}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s \mu_{s+1} \dots \mu_k} \\ &= \frac{\lambda^k}{(1) \cdot \mu \cdot (2) \cdot \mu \dots (s-1) \cdot \mu \cdot (s) \cdot \mu \mu_{s+1} \dots \mu_k} \\ &= \frac{\lambda^s \lambda^{k-s}}{s! \mu^s (s\mu)^{k-s}} \\ &= \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Regardons maintenant à la loi stationnaire dans le cas où $\lambda < s\mu$

Commençons d'abord par calculer :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j &= \sum_{j=0}^s \theta_j + \sum_{j=s+1}^{\infty} \theta_j \\
&= \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=s+1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{j-s} \\
&= \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{j=s+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{j-s} \\
&= \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k \\
&= \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)}
\end{aligned}$$

Ce résultat nous donne la formule de π_0 :

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)}} \quad \text{Dans le cas où } \lambda < s\mu \quad (2.18)$$

enfin on aboutit à la formule de la distribution stationnaire :

$$\pi_k = \theta_k \pi_0 = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 & \text{si } k = 0, 1, \dots, s \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} \pi_0 & \text{si } k > s \end{cases} \quad (2.19)$$

Remarque 2.4.0.2 *L'intensité du trafic dans un système M/M/s est donné par :*

$$\frac{\lambda}{s\mu}$$

à nouveau quand ce taux s'approche de 1 alors la longueur moyenne de la file d'attente devient illimitée.

Dans le paragraphe suivant on va s'intéresser à trouver l'expression de L_0 bien sûr dans le cas où : $\lambda < s\mu$

Calcul de L_0 Rappelons d'abord que L_0 est Le nombre moyen de clients dans le système attendant et ne subissant pas service.

$$\begin{aligned}
 L_0 &= \sum_{j=s}^{\infty} (j-s) \mathbb{P}(X(t) = j) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X(t) = s+k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_{s+k} \\
 \left[\text{vu que } \pi_{s+k} = \pi_0 \theta_{s+k} = \pi_0 \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k+s-s} \right] &= \frac{\pi_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k \\
 &= \frac{\pi_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right) \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{\pi_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\frac{\lambda}{s\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Finalement

$$L_0 = \frac{\pi_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\frac{\lambda}{s\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} \quad (2.20)$$

Donc

$$W_0 = \frac{L_0}{\lambda}$$

Comme

$$W = W_0 + \frac{1}{\mu}$$

Par conséquent :

$$L = \lambda W = \lambda \left(W_0 + \frac{1}{\mu} \right) = L_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

2.5 Systèmes M/G/1 et M/G/∞

Introduction : Nous continuons à supposer que les arrivées suivent un processus de Poisson de taux λ mais les temps de service des client successifs

suivent une loi arbitraire.

$$G(y) = \mathbb{P}(Y_k \leq y)$$

ayant un temps de service moyen (fini).

$$\nu = \mathbb{E}(Y_k)$$

2.5.1 Système M/G/1

Nous considérons ici un système mono-serveur ,avec les arrivées de Poisson de taux λ et une loi de temps de service générale .Ainsi que les durées successives X_k à partir du commencement de la kième période d'activité au début de la prochaine période d'activité .

Chaque X_k est compris d'une partie active B_k et une partie inactive I_k ,alors d'après la proposition (1.6.2) :

$p_0(t)$:la probabilité que le système soit vide à l'instant t converge vers :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \pi_0 = \frac{\mathbb{E}(I_1)}{\mathbb{E}(X_1)} \quad (2.21)$$

$$= \frac{\mathbb{E}(I_1)}{\mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(B_1)} \quad (2.22)$$

A' cause de la propriété de sans mémoire qui caractérise les temps d'inter arrivés dans un processus de Poisson on a : chaque période inoccupée suit une loi exponentielle de moyenne

$$\mathbb{E}(I_1) = \frac{1}{\lambda}$$

Une période occupée B est comprise du premier temps de service plus les périodes occupées produites par tous les clients qui arrivent pendant ce premier temps de service et soit A :le nombre aléatoire de nouveaux arrivants . Nous allons évaluer la période occupée moyenne conditionnelle :

D'abord pour $A= 0$:

$$\mathbb{E}[B_1/A = 0, Y_1 = y] = y$$

parce que quand les clients n'arrivent pas,la période d'occupation B_1 est constituée seulement du service du premier client

Ensuite pour $A =1$

$$\mathbb{E}[B_1/A = 1, Y_1 = y] = y + \mathbb{E}(B_1)$$

car ; sur l'achèvement de service pour le client initial ,la nouvelle arrivée fait commencer une nouvelle période occupée qui est statistiquement identique à la première .

Nous continuons par le même raisonnement jusqu'au l'ordre n ,nous déduisons :

$$\mathbb{E}(B_1/A = n, Y_1 = y) = y + n\mathbb{E}(B_1)$$

Par la formule des causes totales :

$$\mathbb{P}(B_1/Y_1 = y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_1/A = n, Y_1 = y)\mathbb{P}(A = n/Y_1 = y)$$

D'où à l'espérance

$$\mathbb{E}[B_1/Y_1 = y] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[B_1/A = n, Y_1 = y]\mathbb{P}(A = n/Y_1 = y) \quad (2.23)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \{y + n\mathbb{E}[B_1]\} \frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} \quad (2.24)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y \frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[B_1] \frac{(\lambda y)^n e^{-\lambda y}}{n!} \quad (2.25)$$

$$= y + \lambda y \mathbb{E}[B_1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^{n-1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} \quad (2.26)$$

$$= y + \lambda y \mathbb{E}[B_1] \quad (2.27)$$

Finalement

$$\mathbb{E}[B_1] = \int_0^{\infty} \mathbb{E}[B_1/Y_1 = y] dG(y) \quad (2.28)$$

$$= \int_0^{\infty} [\lambda y \mathbb{E}[B_1] + y] dG(y) \quad (2.29)$$

$$= \int_0^{\infty} y dG(y) + \lambda \mathbb{E}[B_1] \int_0^{\infty} y dG(y) \quad (2.30)$$

$$= \nu [1 + \lambda \mathbb{E}[B_1]] \quad (2.31)$$

car $\mathbb{E}[Y_1] = \nu$

Après la résolution de l'équation nous obtenons

$$\mathbb{E}[B_1] = \frac{\nu}{1 - \lambda \nu} \quad (2.32)$$

Pour calculer la fraction de temps d'inactivité de long terme nous utilisons

$$\pi_0 = \frac{\mathbb{E}(I_1)}{\mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(B_1)} \quad (2.33)$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\nu}{1-\lambda\nu}} \quad (2.34)$$

$$= 1 - \lambda\nu \quad \text{pour} \quad \lambda\nu < 1 \quad (2.35)$$

CHAÎNE DE MARKOV INTÉGRÉE Le nombre $X(t)$ des clients dans le système à l'instant t n'est pas un processus de Markov pour un système M/G/1 car ; si on est de prédire le comportement futur du système ,il faut savoir en outre le temps dépassé en service(c'est la propriété de sans mémoire de la loi exponentielle du temps de service qui rend cette information supplémentaire inutile)

Considérons :

X_n : Le nombre de clients dans le système après le départ du nième client

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} - 1 + A_n & \text{si } X_{n-1} > 0 \\ A_n & \text{si } X_{n-1} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Donc

$$X_n = (X_{n-1} - 1)^+ + A_n$$

comme A_n est le nombre de clients qui arrivent pendant le service du nième client et $x^+ = \max(0, x)$.Ainsi que le processus d'arrivée est Poisson alors le nombre A_n est indépendant des arrivées plus tôt.

Nous calculons :

$$\alpha_k = \mathbb{P}\{A_n = k\} = \int_0^\infty \mathbb{P}(A_n = k/Y_n = y) dG(y) \quad (2.37)$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda y)^k e^{-\lambda y}}{k!} dG(y) \quad (2.38)$$

Pour $j=0,1,\dots$

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j/X_{n-1} = i) = \mathbb{P}(A_n = j - i + 1) \quad \text{si} \quad -(i - 1) > 0 \quad (2.39)$$

$$= \mathbb{P}(A_n = j - (i - 1)^+) \quad (2.40)$$

Et donc

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha_{j-i+1} & \text{pour } i \geq 1 \quad j \geq i + 1 \\ \alpha_j & \text{pour } i = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

X_n est appelée chaîne de Markov intégrée

LONGUEUR DE LA FILE D'ATTENTE À L'ÉQUILIBRE La chaîne de Markov intégrée a un intérêt particulier dans la file d'attente M/G/1, car dans ce cas particulier la loi stationnaire de la chaîne de Markov X_n est égale à la loi limite pour le procédé de longueur de file d'attente $X(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) = j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = j)$$

Nous utiliserons ce fait utile pour évaluer la longueur de la file d'attente moyenne .

l'équivalence entre la loi stationnaire de la chaîne de Markov X_n et le processus non Markovien $X(t)$ est assez subtil . Ce n'est pas la conséquence d'un principe général et ne devrait pas être assumé pour se tenir dans d'autres circonstances sans justification prudente, la démonstration est esquissée en annexe à cette section.

Nous allons calculer la longueur de la file d'attente prévue à l'équilibre

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X(t))$$

en calculant la quantité correspondante de la chaîne de Markov intégrée

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n)$$

Si

$X = X_\infty$ = le nombre de clients dans le système après qu'un client quitte
et

X' = le nombre de clients après le prochain départ

Donc

$$X' = X - \delta + N \quad (2.42)$$

avec

N = le nombre d'arrivée au cours de la période du service .

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

à l'équivalence X a la même loi que X' et en particulier

$$L = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X')$$

Par la relation (2.42) et (2.35)

$$\mathbb{E}[X'] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\delta] + \mathbb{E}[N] \Rightarrow \mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\delta] = 1 - \pi_0 = \lambda\nu \quad (2.43)$$

on a :

$$(X')^2 = X^2 + \delta^2 + N^2 - 2\delta X + 2N(X - \delta)$$

et comme $\delta^2 = \delta$ et $\delta X = X$ Alors :

$$(X')^2 = X^2 + \delta + N^2 - 2X + 2N(X - \delta) \quad (2.44)$$

Maintenant N : le nombre de clients arrivants durant la période du service est indépendant de X et par conséquent de δ

C'est donc pour ça que :

$$\mathbb{E}[N(X - \delta)] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X - \delta] \quad (2.45)$$

et comme X et X' ont la même loi ,alors :

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[(X')^2] \quad (2.46)$$

prenons l'espérance dans l'équation (2.44) :

$$\mathbb{E}[(X')^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[\delta] + \mathbb{E}[N^2] - 2\mathbb{E}[X] + 2\mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X - \delta]$$

Par (2.43)et (2.46),Nous obtenons :

$$0 = \lambda\nu + \mathbb{E}[N^2] - 2L + 2\lambda\nu \{L - \lambda\nu\}$$

Par suite

$$L = \frac{\lambda\nu + \mathbb{E}[N^2] - 2(\lambda\nu)^2}{2(1 - \lambda\nu)} \quad (2.47)$$

Il nous reste à évaluer $\mathbb{E}[N^2]$ où N est le nombre de clients arrivants durant le temps de service y.

En conditionnant par $Y=y$,la variable aléatoire N aura toujours une loi de poisson mais de moyenne

$$\mathbb{E}[N/Y = y] = \lambda y$$

D'où :

$$\mathbb{E}[N^2/Y = y] = \lambda y + (\lambda y)^2$$

En utilisant la formule suivante :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/Y]]$$

nous obtenons :

$$\mathbb{E}[N^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N^2/Y = y]] = \lambda \int_0^\infty y dG(y) + \lambda^2 \int_0^\infty y^2 dG(y) \quad (2.48)$$

$$= \lambda\nu + \lambda^2(\tau^2 + \nu^2) \quad (2.49)$$

Où τ est la variance de la loi du temps de service.

Nous remplaçons ce résultat dans l'équation (2.48) pour obtenir la formule finale de L :

$$L = \frac{2\lambda\nu + \lambda^2\tau^2 - (\lambda\nu)^2}{2(1 - \lambda\nu)} \quad (2.50)$$

$$= \rho + \frac{\lambda^2\tau^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)} \quad (2.51)$$

Ce dernier résultat est obtenue par retrancher et rajouter un ρ^2 où

$$\rho = \lambda\nu$$

est l'intensité du trafic .

Finalement,

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda} = \frac{2\lambda\nu + \lambda^2\tau^2 - \lambda^2\nu^2}{2\lambda(1 - \lambda\nu)} \\ &= \frac{2\lambda\nu(1 - \lambda\nu) + \lambda(\lambda\tau + \lambda\nu)}{2\lambda(1 - \lambda\nu)} \\ &= \nu + \frac{\lambda(\tau^2 + \nu^2)}{2(1 - \rho)} \end{aligned}$$

Les résultats expriment des faits surprenants ; ils affirment que pour un taux moyen d'arrivée λ et une moyenne du temps de service ν on peut diminuer la taille de la file d'attente L et le temps d'attente moyen en diminuant la variance du temps de service.

Le meilleur cas à cet égard correspond à un temps de service constant (variance nulle).

2.5.2 Système M/G/∞

Introduction

Des résultats complets sont disponibles lorsque chaque client reçoit son service dès son arrivée , indépendamment à des autres clients dans le système. Telle situation peut se produire lors de la modélisation des systèmes de libre service.

Soient W_1, W_2, \dots les temps d'arrivées successives des clients, et soient V_1, V_2, \dots les temps de services correspondants.

Analyse mathématique

Avec cette notation le k ième client est dans le système à l'instant t si et seulement si $W_k < t$ (le client arrive avant l'instant t) et $W_k + V_k > t$ le service va au-delà de t .

La suite des paires $(W_1, V_1), (W_2, V_2), \dots$ est appelée un processus de Poisson marqué.

Pour pouvoir terminer cette étude ; Nous allons énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.5.2.1 soient $(W_1, V_1), (W_2, V_2), \dots$ Un processus de Poisson marqué où W_1, W_2, \dots sont les temps d'attentes dans un processus de Poisson de taux λ

et V_1, V_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de densité $g(y)$.

Alors $(W_1, V_1), (W_2, V_2), \dots$ forment un processus de point de Poisson non homogène à deux dimensions dans le plan (t, y) , où le nombre moyen de points dans une région (A) est donnée par

$$\mu(A) = \int \int_A \lambda g(y) dy dt$$

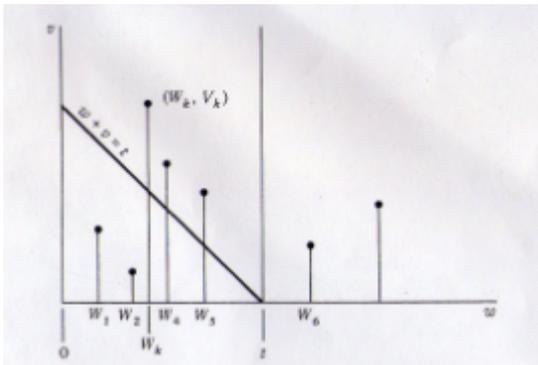
On va utiliser l'illustration suivante afin d'obtenir quelques résultats.

La figure suivante illustre le processus de Poisson marqué et $X(t)$ est le nombre de client à l'instant t i.e le nombre des paires (W_k, V_k) vérifiant

$$W_k < t$$

et

$$W_k + V_k > t$$



Nous définissons :

$$A_t : \{(w, v) : 0 \leq w \leq t \quad \text{et} \quad v > t - w\}$$

D'après le théorème : le nombre de points dans A_t suit une distribution de Poisson de moyenne

$$\begin{aligned}\mu(A_t) &= \int \int_{A_t} \lambda \, dw \, dG(v) \\ &= \lambda \int_0^t \left\{ \int_{t-w}^{\infty} dG(v) \right\} dw \\ &= \lambda \int_0^t (1 - G(t-w)) \, dw\end{aligned}$$

$$\text{Par le changement de variable } t-w=x : \quad = \lambda \int_0^t (1 - G(x)) \, dx$$

En résumé,

$$\begin{aligned}p_k(t) &= \mathbb{P} \{X(t) = k\} \\ &= \frac{\mu(A_t)^k e^{-\mu(A_t)}}{k!} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Ainsi que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(A_t) = \lambda \int_0^{\infty} [1 - G(x)] \, dx = \lambda \nu$$

Où ν le temps moyen de service. Par suite nous obtenons notre trésor !!

$$\pi_k = \frac{(\lambda \nu)^k e^{-\lambda \nu}}{k!} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots$$

APPENDICE Nous esquissons une preuve de l'équivalence entre la loi limite pour la chaîne de Markov intégrée dans un modèle M/G/1 premièrement commençant à $t = 0$, soit η_n désigne ces instants où la taille de la file d'attente $X(t)$ augmente par un (une arrivée) et ξ_n représente ces instants où $X(t)$ diminue d'une unité (un départ)

Soit

$$Y_n = X(\eta_n -)$$

: La longueur de la file d'attente immédiatement avant une arrivée et soit

$$X_n = X(\xi_n +)$$

: La longueur de la file d'attente immédiatement après un départ.

Pour n'importe quelle longueur de file d'attente i et n'importe quel temps t ,

le nombre de visites de Y_n à i jusqu'à l'instant t diffère du nombre de visites de X_n à i d'au plus une unité donc dans le long terme, les visites en moyenne par unité de temps de Y_n à i doit être égal au nombre moyen de visites de X_n à i ; qui est la loi stationnaire π_i de la chaîne de Markov X_n , ainsi il suffit de démontrer que la loi limite de $X(t)$ est la même que celle de Y_n ; qui est X_t juste avant une arrivée, mais parce que les arrivées sont poisson et les arrivées dans des intervalles de temps disjoints sont indépendantes d'une arrivée qui se produit à l'instant t , il suit que $X(t)$ et Y_n ont la même loi limite et donc X_t et la chaîne de Markov intégrée ont la même loi limite.

Chapitre 3

Variations et extensions

Dans cette section nous considérons quelques variantes des modèles simples étudiés jusqu'à présent ,Nous nous limitons à des arrivées de Poisson et des temps de service exponentielles.

3.1 Systèmes avec rejet

Supposons qu'un client qui arrive quand il y a n clients dans le système entre avec une probabilité p_n et part avec la probabilité $q_n = 1 - p_n$

Si une longue file d'attente décourage les clients,alors p_n est une fonction décroissante de n .

Comme un cas particulier s'il y a une salle d'attente fini de capacité C nous pouvons supposer que :

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n < C \\ 0 & \text{pour } n \geq C \end{cases} \quad (3.1)$$

Indiquant que,une fois la salle d'attente est remplie de capacité C , aucun plus de clients ne peuvent entrer dans le système .

Soit à présent, $X(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Nous admettons que si le processus d'arrivées est Poisson de taux λ et les clients qui arrivent quand il y a n clients dans le système entrent avec la probabilité p_n ,alors les paramètres de naissances sont :

$$\lambda_n = \lambda p_n \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots$$

Dans le cas d'un seul serveur ,

$$\mu_n = \mu \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

Nous pouvons évaluer la loi stationnaire π_k de la longueur de la file d'attente par les moyens habituels.

Dans des systèmes avec rejet, pas tous les clients arrivants entrent dans le système et certains sont perdus .

Alors le taux d'entrée est le taux au quel les clients entrent effectivement au système à l'état stationnaire et est donné par

$$\lambda_I = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n p_n$$

le taux au quel les clients sont perdus est : $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n q_n$

Examinons en détail le cas d'un système M/M/s dans lequel le client arrivant entre dans le système si et seulement si un serveur est libre, alors

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{pour } k = 0, 1, \dots, s-1 \\ 0 & \text{pour } k = s \end{cases}$$

et

$$\mu_k = k\mu \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, s$$

Pour déterminer la distribution stationnaire on a :

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \\ &= \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, s \end{aligned}$$

et comme :

$$\pi_k = \frac{\theta_k}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k}$$

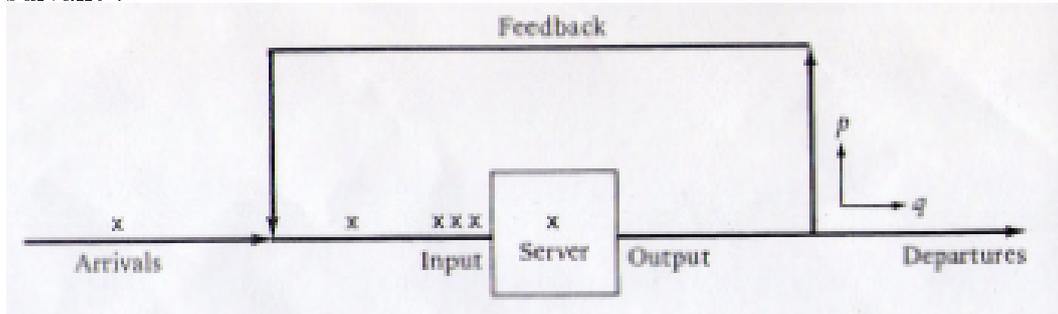
Alors,

$$\pi_k = \frac{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, s \quad (3.2)$$

3.2 Systèmes avec retour

Considérons un système avec un seul serveur avec des arrivées de Poisson et des temps de service exponentiels mais supposons qu'un certain client en départ du serveur retourne à la fin de la file d'attente pour un service supplémentaire. Supposons en particulier qu'un client quittant le serveur s'écarte

du système avec la probabilité q et retourne à la file d'attente pour un service supplémentaire avec la probabilité $p = 1 - q$. Comme le montre le schéma suivant :



Ainsi que toutes telles décisions sont statistiquement indépendantes et que les demandes d'un client retournant au service sont statistiquement les mêmes que ceux d'un client arrivant de l'extérieur le système.

Soient,

- λ : le taux d'arrivée au système.
- μ : le taux de service.
- $X(t)$: le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Il s'en suit que $X(t)$ est bien un processus de naissance et de mort. Avec ;

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = q\mu \quad \text{pour } n = 1, \dots$$

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \\ &= \left(\frac{\lambda}{q\mu} \right)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{q\mu} \right)^k} \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{q\mu} \right) \end{aligned}$$

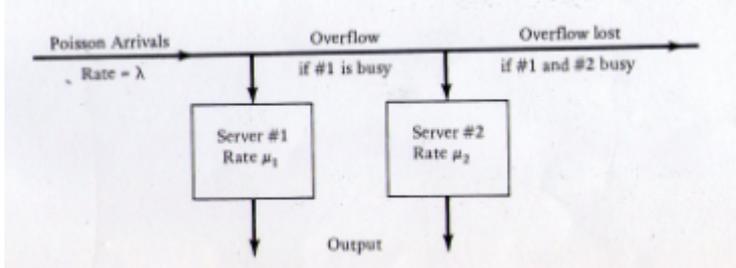
Donc, quand $\lambda < k\mu$

$$\pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{q\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{q\mu} \right)^k \quad (3.3)$$

3.3 Une file d'attente avec deux serveurs

Considérons un système à deux serveurs où le serveur i a le taux μ_i pour $i=1, 2$. Les arrivées dans le système suivent un processus de Poisson de taux λ . Un client qui arrive au système quand il est vide va directement au premier serveur.

Si un client arrive au système quand le premier serveur est occupé s'oriente au deuxième serveur. comme le montre le schéma suivant



Et si les deux serveurs sont occupés, le client est perdu.

Le système est décrit par la paire $(X(t), Y(t))$ où,

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si le serveur 1 est occupé} \\ 0 & \text{si le serveur 1 est inoccupé} \end{cases}$$

et

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si le serveur 2 est occupé} \\ 0 & \text{si le serveur 2 est inoccupé} \end{cases}$$

Les quatre états du système sont : $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ et les transitions entre ces états sont données dans le tableau suivant :

De l'état	à l'état	taux de transition	Description
(0, 0)	(1, 0)	λ	arrivée lorsque le système est vide
(1, 0)	(0, 0)	μ_1	la fin du service 1 quand le service 2 est libre
(1, 0)	(1, 1)	λ	arrivée lorsque le service 1 est occupé
(1, 1)	(1, 0)	μ_2	la fin du service 2 quand 1 est occupé
(1, 1)	(0, 1)	μ_1	la fin du service 1 lorsque 2 est occupé
(0, 1)	(1, 1)	λ	arrivée quand 2 est occupé et 1 libre
(0, 1)	(0, 0)	μ_2	la fin du service 2 quand 1 est libre

Le processus $(X(t), Y(t))$ à états finis, est une chaîne de Markov continue et les taux de transitions donnent la matrice infinitésimal de la chaîne de Markov

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \mu_2 & -(\lambda + \mu_2) & 0 & \lambda \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_2) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

On trouve la loi stationnaire

$$\pi = (\pi_{(0,0)}, \pi_{(0,1)}, \pi_{(1,0)}, \pi_{(1,1)})$$

par résolvant l'équation :

$$\pi A = 0$$

qui donne naissance au système d'équation :

$$\begin{array}{rcccc} -\lambda\pi_{(0,0)} & +\mu_2\pi_{(0,1)} & & +\mu_1\pi_{(1,0)} & = 0 \\ & -(\lambda + \mu_2)\pi_{(0,1)} & & & +\mu_1\pi_{(1,1)} = 0 \\ \lambda\pi_{(0,0)} & & -(\lambda + \mu_1)\pi_{(1,0)} & & +\mu_2\pi_{(1,1)} = 0 \\ & \lambda\pi_{(0,1)} & +\lambda\pi_{(1,0)} & -(\mu_1 + \mu_2)\pi_{(1,1)} & = 0 \end{array}$$

Avec

$$\pi_{(0,0)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,0)} + \pi_{(1,1)} = 1$$

Par un calcul d'algèbre élémentaire nous obtenons la solution :

$$\begin{aligned} \pi_{(0,0)} &= \frac{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{D} \\ \pi_{(0,1)} &= \frac{\lambda^2\mu_1}{D} \\ \pi_{(1,0)} &= \frac{\lambda\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{D} \\ \pi_{(1,1)} &= \frac{\lambda^2(\lambda + \mu_2)}{D} \end{aligned} \quad (3.5)$$

où

$$D = \mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^2\mu_1 + \lambda\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^2(\lambda + \mu_2)$$

3.4 Files d'attente prioritaires de préemption

Envisageons un processus de file d'attente de serveur unique qui a deux catégories de clients ; prioritaires et non prioritaires ,formant un processus d'arrivée de Poisson, indépendantes avec des taux α et β respectivement .

Les temps de services sont indépendantes et exponentiellement distribués avec les paramètres γ et δ respectivement.

Dans cette étude la discipline du système est la suivante :

- Premier arrivé premier servi pour les clients non prioritaires .
- Le service des clients prioritaires n'est jamais interrompu .
- Si un client prioritaire arrive lors d'un service d'un client non prioritaire ,alors le service de ce dernier est immédiatement arrêté en faveur au client prioritaire .
- Le service interrompu du client est repris quand il n'y a pas de clients prioritaires actuels.

Pour notre étude nous introduisons les outils suivants :

1. Le taux d'arrivée du système est :

$$\lambda = \alpha + \beta$$

2. La fraction

$$p = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Dont sont les clients prioritaires dans le système .

3. La fraction

$$q = \frac{\beta}{\lambda}$$

Dont sont les clients non prioritaire dans le système.

4. Dans le système le temps moyen de service est donnée par les moyens pondérées de manière appropriée :

$$\frac{1}{\gamma}$$

Pour les clients prioritaire et

$$\frac{1}{\delta}$$

Pour les clients non prioritaires . et pour la somme est :

$$\frac{1}{\mu} = p \left(\frac{1}{\gamma} \right) + q \left(\frac{1}{\delta} \right) \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} \right) \quad (3.7)$$

Où μ est le taux du service du système Finalement nous introduisons

5. l'intensité du trafic pour le système :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

6. pour les clients prioritaires :

$$\sigma = \frac{\alpha}{\gamma}$$

7. pour les clients non prioritaires :

$$\tau = \frac{\beta}{\delta}$$

Par la formule (3.7) On remarque que :

$$\rho = \sigma + \tau$$

L'état du système est décrit par la paire $((X(t), Y(t)))$ où $X(t)$ est le nombre de clients prioritaires dans le système et $Y(t)$ le nombre de clients non prioritaires dans le système.

Observant à présent que les clients prioritaires regardent le système comme une simple file d'attente $M/M/1$; Par conséquent on a la distribution stationnaire donnée par la l'équation (2.12)

$$\pi_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) = m) \tag{3.8}$$

$$= (1 - \sigma)\sigma^m \tag{3.9}$$

Ainsi que pour la longueur de la file :

$$L_p = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \tag{3.10}$$

Le temps moyen de service

$$W = \frac{L_p}{\alpha} = \frac{1}{\gamma - \alpha} \tag{3.11}$$

Mais ce n'est pas le cas pour les clients non prioritaire et n'est pas aussi facile d'obtenir des informations puisque ces arrivées sont fortement affectés par les clients prioritaires. Cependant $(X(t), Y(t))$ est un état discret ,alors la chaine de Markov en temps continu et ses techniques nous permettra de décrire la distribution limite quand elle existe .

Les transitions sont décrites dans la table suivante :

De l'état	à l'état	taux de transition	Description
(m, n)	$(m+1, n)$	α	arrivée d'un prioritaire
(m, n)	$(m, n+1)$	β	arrivée d'un non prioritaire
$(0, n) n \geq 1$	$(0, n - 1)$	δ	service d'un non prioritaire est complet
$(m, n) m \geq 1$	$(m-1, n)$	γ	service d'un prioritaire est complet

Considérons

$$\pi_{m,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) = m, Y(t) = n)$$

La loi stationnaire du processus.

Par un raisonnement analogue

$$(\alpha + \beta)\pi_{0,0} = \gamma\pi_{1,0} + \delta\pi_{0,1} \tag{1}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\pi_{m,0} = \gamma\pi_{m+1,0} + \alpha\pi_{m-1,0} \tag{2}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\pi_{0,n} = \gamma\pi_{1,n} + \delta\pi_{0,n+1} + \beta\pi_{0,n-1} \tag{3}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\pi_{m,n} = \gamma\pi_{m+1,n} + \beta\pi_{m,n-1} + \alpha\pi_{m-1,n} \tag{4}$$

Nous allons nous contenter de déterminer le nombre moyen L_n des clients non prioritaires dans le système à l'état d'équilibre donné par :

$$L_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{m,n} \quad (3.12)$$

Nous introduisons la notation :

$$M_m = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_{m,n} \quad (3.13)$$

et donc :

$$L_n = M_0 + M_1 + \dots \quad (3.14)$$

Par (3.9) nous obtenons :

$$p_m = \mathbb{P}\{X(t) = m\} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{m,n} = (1 - \sigma) \sigma^m \quad (3.15)$$

et

$$\pi_n = \mathbb{P}\{Y(t) = n\} = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{m,n} \quad (3.16)$$

Nous commençons par additionner les deux cotés de (1) et (2) pour $m=0,1,\dots$
Pour obtenir :

$$(\alpha + \beta) \pi_{0,0} + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,0} = \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,0} + \delta \pi_{0,1} + \alpha \pi_0$$

Après simplification ;

$$\beta \pi_0 = \delta \pi_{0,1} \quad (3.17)$$

Maintenant nous sommions (3) et (4) sur $m=0,1,\dots$

Pour obtenir :

$$(\alpha + \beta + \delta) \pi_{0,n} + (\alpha + \beta + \gamma) \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,n} = \gamma \pi_{1,n} + \delta \pi_{0,n+1} + \beta \pi_{0,n-1} + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m+1,n} + \beta \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,n-1} + \alpha \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m-1,n}$$

Par suite :

$$(\alpha + \beta) \pi_n + \delta \pi_{0,n} + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,n} = \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{m,n} + \delta \pi_{0,n+1} + \beta \pi_{n-1} + \alpha \pi_n$$

Par suite ;

$$\beta \pi_n + \delta \pi_{0,n} = \beta \pi_{n-1} + \delta \pi_{0,n+1}$$

Par induction avec (3.17), nous obtenons :

$$\beta\pi_n = \delta\pi_{0,n+1} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$

Sommant (3.18) et utilisant le fait que $\sum_n \pi_n = 1$

Nous avons

$$\beta = \delta \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n+1} = \delta \mathbb{P} \{X(t) = 0, Y(t) > 0\}$$

Or

$$\mathbb{P} \{X(t) = 0, Y(t) > 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{0,n} = \frac{\beta}{\delta} = \tau \quad (3.19)$$

Comme (3.9) affirme que

$$\mathbb{P} \{X(t) = 0\} = 1 - \frac{\alpha}{\gamma} = 1 - \sigma$$

On a :

$$\begin{aligned} \pi_{0,0} &= \mathbb{P} \{X(t) = 0, Y(t) = 0\} = \mathbb{P} \{X(t) = 0\} \mathbb{P} \{X(t) = 0, Y(t) > 0\} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta} = 1 - \sigma - \tau \end{aligned}$$

où $\sigma + \tau < 1$

Avec les résultats préliminaires, nous nous tournons vers la détermination de

$$M_m = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{m,n}$$

et ceci en multipliant (3) par n et en sommant, nous tirons :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \delta) M_0 &= \gamma M_1 + \delta \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{0,n+1} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{0,n-1} \\ &= \gamma M_1 + \delta M_0 - \delta \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{0,n+1} + \beta M_0 + \beta \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_{0,n-1} \\ &= \gamma M_1 + \delta M_0 - \delta \left(\frac{\beta}{\delta} \right) + \beta M_0 + \beta (1 - \sigma) \end{aligned}$$

où la dernière ligne est un résultat de (3.15) et (3.19).

Après simplification et réarrangement, le résultat est :

$$M_1 = \sigma M_0 + \frac{\beta}{\gamma} \sigma \quad (3.20)$$

Par suite nous multiplions (4) par n et nous sommes ;
Alors

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \gamma) M_m &= \gamma M_1 + \beta \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_{m,n-1} + \alpha M_{m-1} \\ &= \gamma M_{m+1} + \beta M_m + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{m,n-1} + \alpha M_{m-1} \end{aligned}$$

Nous nous référons à (3.15) et nous simplifions la formule ;

$$(\alpha + \gamma) M_m = \gamma M_{m+1} + \alpha M_{m-1} + \beta (1 - \sigma) \sigma^m \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Après quelques calculs, nous arrivons à la résolution des équation (3.20) et (3.21) qui donnent :

$$M_m = M_0 \sigma^m + \frac{\beta}{\gamma} m \sigma^m \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots$$

nous sommes sur m pour obtenir le résultat que nous désirons :

$$L_n = \sum_{m=0}^{\infty} M_m = \frac{1}{1 - \sigma} \left[M_0 + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sigma}{(1 - \sigma)} \right] \quad (3.22)$$

Ce résultat détermine L_n en fonction de M_0

Pour obtenir la seconde relation, nous multiplions (3.18) par n et nous sommes :

$$\begin{aligned} \beta \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{0,n+1} &= \beta L_n = \delta \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{0,n+1} \\ &= \delta M_0 - \delta \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n+1} \\ &= \delta M_0 - \delta \left(\frac{\beta}{\delta} \right) \end{aligned}$$

Du coup :

$$M_0 = \frac{\beta}{\delta} (L_n + 1) = \tau (L_n + 1) \quad (3.23)$$

Nous remplaçons (3.23) dans (3.22) :

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{1-\sigma} \left[M_0 + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] \\
&= \frac{1}{1-\sigma} \left[\tau(L_n + 1) + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] \\
L_n - \frac{\tau}{1-\sigma} L_n &= \frac{1}{1-\sigma} \left[\tau + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] \\
\left(1 - \frac{\tau}{1-\sigma} \right) L_n &= \frac{1}{1-\sigma} \left[\tau + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] \\
L_n &= \frac{\tau}{1-\sigma-\tau} \left[1 + \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Donc la condition pour que L_n soit fini (et la loi stationnaire existe) est

$$\rho = \sigma + \tau < 1$$

Autrement dit, l'intensité du trafic du système doit être inférieure à 1.

Chapitre 4

Réseaux ouverts de files d'attente acyclique

Un réseau des files d'attente est constitué de systèmes de files d'attente inter connectés. Les clients circulent entre les différents systèmes de files. Les réseaux des files d'attente sont bien adaptés pour la modélisation des interactions entre les différentes ressources d'un système de production, de stockage, de communication ou d'information. Les réseaux des files d'attente sont principalement classés en trois types : réseaux ouverts, réseaux fermés et réseaux mixtes.

Dans les réseaux de files d'attente ouverts, les clients qui entrent dans le réseau peuvent en sortir. Si un réseau ouvert est acyclique, les clients peuvent visiter un système de file d'attente seulement une fois avant de sortir du réseau.

Par exemple les réseaux de files d'attente composés de groupes de stations-service avec les départs de certaines stations formant les arrivées des autres. Ceci se pose dans les systèmes informatiques de traitement de l'information, des boutiques d'emploi de fabrication, industries de services, tels que les hôpitaux et les terminaux de l'aéroport, et dans de nombreux autres contextes. Un résultat remarquable permet de décrire le comportement stable de ces cas complexes.

4.1 Théorème de base

Les résultats évoqués dans les paragraphes précédents affirment que les départs forment pour un nouveau service une file d'attente avec des arrivées Poisson muni des temps de service exponentielles. Nous donnons le théorème suivant .

Théorème 4.1.1 Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de naissance et de mort avec les paramètres de naissance constants .

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \dots$$

et les paramètres de mort arbitraires

$$\mu_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

Supposons qu'il existe une distribution stationnaire :

$$\pi_k \geq 0$$

où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$$

et que

$$\mathbb{P}(X(0) = k) = \pi_k \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \dots$$

Et soit $D(t)$: Le nombre de décès dans $[0, t]$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t) = k, D(t) = j) &= \mathbb{P}(X(t) = k) \mathbb{P}(D(t) = j) \\ &= \pi_k \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} \end{aligned}$$

Remarque 4.1.1 Les conditions prévues sont satisfaites ,par exemple lorsque $X(t)$ est le nombre de client dans un système de file d'attente de type $M/M/s$ qui est à l'état d'équilibre et dans lequel $\mathbb{P}(X(0) = j) = \pi_j$ est la distribution stationnaire du processus .

Dans ce cas ,une distribution de stationnarité existe à condition que $\lambda < s\mu$ où μ est le taux de service individuel.

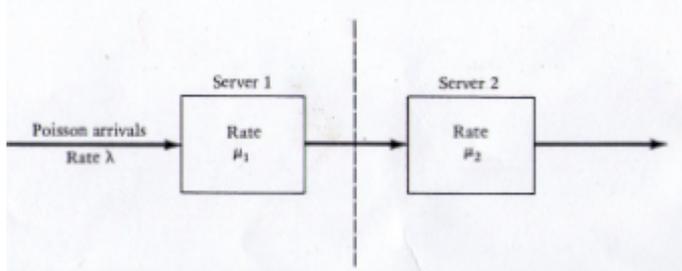
Pour voir l'importance de ce théorème ; supposons que $X(t)$ représente le nombre de client dans le système de file d'attente à l'instant t ,alors

Le théorème affirme que les clients forment un processus de poisson de taux λ , encore plus le nombre de départ $D(t)$ jusqu'à l'instant t est indépendant du nombre $X(t)$ des clients restants dans le système à l'instant t .

Nous remarquons que l'analyse qui précédente s'applique que si les processus sont en équilibre .Par contre sous la condition que $X(0)=0$ alors ni les départs forment un processus de Poisson ni $D(t)$ serait indépendant de $X(t)$.

4.2 Files en tandem

Nous allons faire appel au théorème précédent afin d'analyser un réseau de file d'attente simple qui est composé de deux files possédant un serveur unique connectée en série comme le montre le schéma suivant :



Soit $X_k(t)$ le nombre de clients dans la k ème file d'attente à l'instant t . Supposons le régime stationnaire. Tout d'abord commençons par un premier serveur .

La distribution stationnaire est donc :

$$\mathbb{P}(X_1(t) = n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots$$

Les départs de la première file forment les arrivées au deuxième serveur et donc le deuxième système a des arrivées de Poisson ; c'est une nouvelle file d'attente de type M/M/1.

Ainsi

$$\mathbb{P}(X_2(t) = m) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots$$

En outre comme les départs $D_1(t)$ du premier serveur sont indépendantes de $X_1(t)$ il s'en suit que $X_2(t)$ est indépendante de $X_1(t)$

Nous obtenons ainsi la distribution conjointe

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1(t) = n, X_2(t) = m) &= \mathbb{P}(X_1(t) = n) \mathbb{P}(X_2(t) = m) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \quad \text{pour } n, m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

De nouveau l'analyse précédente s'applique uniquement lorsque le réseau est en régime stationnaire. En revanche si les deux files d'attentes sont vides à $t=0$, alors les départs ne forment pas un processus de Poisson et l'indépendance n'aura pas lieu .

4.3 Réseaux ouverts acycliques

Dans un réseau ouvert acyclique, les clients peuvent visiter un système de file d'attente seulement une fois avant de sortir du réseau.

Considérons un réseau ouvert à k stations services et soit $X_k(t)$ le nombre de clients dans la k ème file à l'instant t , supposons que :

1. Les arrivées en provenance de l'extérieure du système à des serveurs distincts forment un processus de Poisson indépendant.
2. Les départs à partir de serveurs distincts voyagent indépendamment et instantanément vers d'autres serveurs ou quittent le système avec des probabilités fixes.
3. Les temps de services pour les différents serveurs sont sans mémoire en ce sens que :

$$\mathbb{P}(\text{serveur } k \text{ accomplit son service dans } [t, t+\Delta t] / X_k(t) = n) = \mu_{kn}(\Delta t) + o(\Delta t)$$

autrement dit ne dépend pas du passé .

4. Le système est à l'état d'équilibre .
5. Le réseau est acyclique dans cela un client peut rendre visite à n'importe quel serveur particulier au maximum une fois

Alors

A- $X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)$ sont des processus indépendants où

$$\mathbb{P}(X_1(t) = n_1, X_2(t) = n_2, \dots, X_k(t) = n_k) = \mathbb{P}(X_1(t) = n_1) \mathbb{P}(X_2(t) = n_2) \dots \mathbb{P}(X_k(t) = n_k) \quad (4.1)$$

B- Le processus de départ $D_k(t)$ associé au k ème serveur est un processus de Poisson avec $D_k(t)$ et $X_k(t)$ sont indépendantes .

C- Les arrivées à la k ème station forment un processus de Poisson de taux λ_k

D- Le taux de départ au k ème serveur égale le taux d'arrivée à ce serveur

Nous ajoutons quelques notations pour pouvoir exprimer ces résultats plus explicitement.

Soit : λ_{0k} :Le taux d'arrivée à la station k de l'extérieure du système.

λ_k :Le taux d'arrivée totale à la station k .

P_{kj} :La probabilité qu'un client quitte la station k et visite ensuite la station j .

Comme les arrivées à la station k proviennent de l'extérieur du système ou d'une autre station j et le taux de départs de la station j est égal au taux d'arrivée à la station j , et P_{jk} est la probabilité dont les clients vont à la

station k.

Alors :

$$\lambda_k = \lambda_{0k} + \sum_{j \neq k} \lambda_j P_{jk} \quad (4.2)$$

Puisque le réseau est acyclique ,alors l'équation précédente peut être résolue par récurrence en commençant par les stations qui ont seulement des arrivées de l'extérieur .

L'exemple simple qui suit rendra la procédure simple.

les arrivées à la station k forment un processus de Poisson de taux λ_k Soit

$$\Psi_k(n) = \pi_{k0} \frac{\lambda_k^n}{\mu_{k1}\mu_{k2}\dots\mu_{kn}} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

où

$$\Psi_k(0) = \pi_{k0} = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^n}{\mu_{k1}\mu_{k2}\dots\mu_{kn}} \right) \right\}^{-1} \quad (4.4)$$

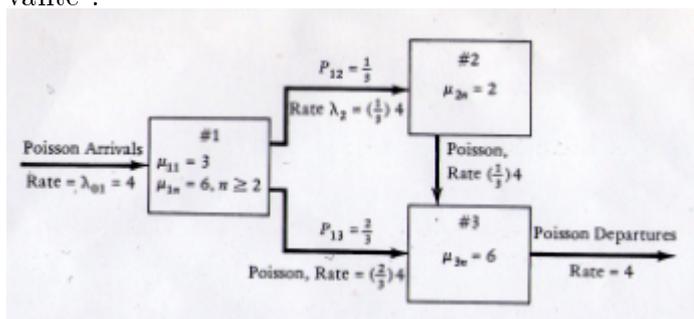
D'après ce qui précède c'est une distribution stationnaire ayant des arrivées de Poisson de taux λ_k et de temps de service de taux μ_{kn} pour $n=1,2,..$

En conséquence nous pouvons exprimer (4.1) explicitement :

$$\mathbb{P}(X_1(t) = n_1, X_2(t) = n_2, \dots, X_k(t) = n_k) = \Psi(n_1)\Psi(n_2)\dots\Psi(n_k) \quad (4.5)$$

4.3.1 Exemple

Considérons un réseau de trois stations comme indiqué dans la figure suivante :



Dans la première étape nous devons déterminer le taux d'arrivée pour chacune des trois stations. D'abord décrivons le système ! Un réseau acyclique à trois stations,avec deux serveurs dans la première station chacun de taux 3 qui donnent naissance au taux de station $\mu_{11} = 3$ et $\mu_{1n} = 3$ pour $n \geq 2$ chacune des stations 2 et 3 possèdent un seul serveur de taux 2 et 6 respectivement

les clients arrivent de l'extérieure du système avec le taux $\lambda_1 = 4$, et puisque les départs vont indépendamment vers la station 2 et 3 avec des probabilités respectives $P_{1,2} = \frac{1}{3}$ et $P_{1,3} = \frac{2}{3}$

Nous déterminons le taux d'arrivée pour la 2 ème station : $\lambda_2 = \lambda_1 P_{1,2} = \frac{4}{3}$ à la station 3 les arrivées incluent ceux de la station 2 et la station 1 ainsi : $\lambda_3 = \frac{2}{3}4 + \frac{1}{3}4 = 4$

Ayant déterminé les taux d'arrivés pour chaque station, nous nous tournons vers la détermination des probabilités d'équilibre.

→ La station 1 c'est un système M/M/2 avec $\lambda = 4$ et $\mu = 3$ D'après (2.18) et (2.19) Nous obtenons

$$\mathbb{P}(X_1(t) = 0) = \pi_0 = \left\{ 1 + \left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{3}} \right\}^{-1} = 0,2$$

Et

$$\mathbb{P}(X_1(t) = n) = \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)(0,2) & \text{pour } n = 1 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^n(0,2) & \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Pour La station 2 : c'est un système M/M/1 avec $\lambda = \frac{4}{3}$ et $\mu = 2$ donc d'après (2.11) et (2.12) nous obtenons :

$$\mathbb{P}(X_2(t) = n) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots$$

D'une façon similaire la station 3 est aussi un système de type M/M/1, nous aurons donc :

$$\mathbb{P}(X_3(t) = n) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots$$

Finalement : selon la propriété A, les longueurs de la file d'attente

$$X_1(t), X_2(t), X_3(t)$$

sont indépendantes

$$\mathbb{P}(X_1(t) = n_1, X_2(t) = n_2, X_3(t) = n_3) = \mathbb{P}(X_1(t) = n_1) \mathbb{P}(X_2(t) = n_2) \mathbb{P}(X_3(t) = n_3)$$

APPENDICE : RÉVERSIBILITÉ DE TEMPS Soit $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ une chaîne de Markov dénombrable ayant une distribution stationnaire $\pi_j = \mathbb{P}(X(t) = j)$ pour tout les états j et les temps t . Notons que l'indice de temps mis est \mathbb{R} .

Nous voyons le processus comme ayant commencé indéfiniment loin dans le passé, donc il se développe **maintenant** dans une façon stationnaire. Soit

$Y(t) = X(-t)$ un même processus mais avec le temps renversé .

Le processus stationnaire $X(t)$ dit : être à temps réversible si $X(t)$ et $Y(t)$ ont même lois de probabilités.

Clairement on a :

$$\mathbb{P}(X(0) = j) = \mathbb{P}(Y(0) = j) = \pi_j$$

N'oublions pas que les deux processus sont de Markov .

AFIN DE MONTRER QU'ILS POSSÈDENT LES MÊMES LOIS DE PROBABILITÉS soient :

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t) = j/X(0) = i)$$

et

$$Q_{ij}(t) = \mathbb{P}(Y(t) = j/Y(0) = i)$$

Alors par cette notation le processus $X(t)$ est réversible si

$$P_{ij}(t) = Q_{ij}(t) \tag{4.6}$$

$\forall i, j \text{ et } \forall t$. Nous évaluons $Q_{ij}(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{ij}(t) &= \mathbb{P}(Y(t) = j/Y(0) = i) \\ &= \mathbb{P}(X(-t) = j/X(0) = i) \\ \text{par la stationarité} &= \mathbb{P}(X(0) = j/X(t) = i) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X(0) = j, X(t) = i)}{\mathbb{P}(X(t) = i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X(0) = j) \mathbb{P}(X(t) = i/X(0) = j)}{\mathbb{P}(X(t) = i)} = \frac{\pi_j P_{ji}(t)}{\pi_i} \end{aligned}$$

Conjointement avec (4.6) on voit que le processus $X(t)$ est réversible si

$$P_{ij}(t) = Q_{ij}(t) = \frac{\pi_j P_{ji}(t)}{\pi_i}$$

où

$$\pi_i P_{ij}(t) = \pi_j P_{ji}(t) \quad \forall i, j \forall t \tag{4.7}$$

Dans la dernière étape nous déterminons le critère de réversibilité en termes de paramètres infinitésimaux .

$$a_{ij} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P} \{X(t) = j/X(0) = i\} \quad i \neq j$$

Alors au voisinage de 0

$$P_{ij}(t) = a_{ij}t + o(t) \quad (4.8)$$

Remplaçons cette dernière dans (4.7), nous obtenons :

$$\pi_i [a_{ij}t + o(t)] = \pi_j [a_{ji}t + o(t)]$$

après la division par t

$$\pi_i a_{ij} = \pi_j a_{ji} \quad \forall i \neq j \quad (4.9)$$

Puisque les probabilités sont déterminées par les paramètres infinitésimaux, nous déduisons que le processus $X(t)$ est à temps réversible quand (4.9) est vérifiée.

Tous les processus de naissance et de mort possédant une loi stationnaire sont réversibles.

Soient

$$\begin{cases} a_{ii+1} = \lambda_i \\ a_{ii-1} = \mu_i \end{cases}$$

et $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$ à vérifier (4.9) il suffit de vérifier que

$$\pi_i a_{ii+1} = \pi_{i+1} a_{i+1i}$$

Or

$$\pi_i \lambda_i = \pi_{i+1} \mu_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots \quad (4.10)$$

Par récurrence nous obtenons

$$\pi_i = \pi_0 \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \right) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

D'où (4.10) devient

$$\pi_0 \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \right) \lambda_i = \pi_0 \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{i+1}} \right) \mu_{i+1}$$

Ce qui termine les résultats.

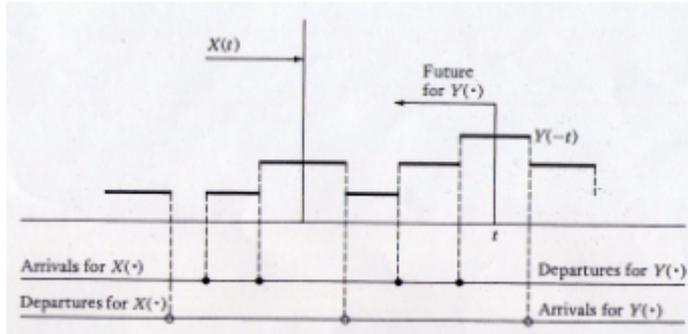
APPENDICE : PREUVE DU THÉORÈME DE BASE Considérons un processus de naissance et de mort ayant les paramètres de naissances constants

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots$$

et les paramètres de mort arbitraires

$$\mu_k > 0 \quad \text{pour } k = 1, \dots$$

Ce processus correspond à une file d'attente de serveur sans mémoire ayant des arrivées de Poisson (évolution typique que celle illustrée dans la figure suivante)



Le processus d'arrivée $X(t)$ est un processus de Poisson de taux λ ; Le processus de temps renversé $Y(t) = X(-t)$ a les mêmes lois probabilistes que fait $X(t)$.

De sorte que le processus de l'arrivée de $Y(t)$ doit aussi être un processus de Poisson de taux λ . mais le processus d'arrivée pour $Y(t)$ est le processus de départ pour $X(t)$.

Ainsi il faut que ces instants de départ forment également un processus de Poisson de taux λ . En particulier si $D(t)$ compte les départs dans les $X(\cdot)$ processus sur la durée $(0, t]$, Alors

$$\mathbb{P}\{D(t) = j\} = \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} \quad (4.11)$$

Par ailleurs, en regardant le processus inverse $Y(-t) = X(t)$, les futures arrivées pour $Y(-t)$ de la durée $Y[-t, 0)$ sont indépendants de $Y(-t) = X(t)$ ces futures arrivées pour $Y(-t)$ sont les départs pour $X(\cdot)$ dans l'intervalle $(0, t]$. Par conséquent, ces départs et $X(t) = Y(-t)$ doivent être indépendantes. Puisque

$$\mathbb{P}\{X(t) = k\} = \pi_k$$

Par la supposition de la stationnarité. L'indépendance de $D(t)$ et $X(t)$ et (4.6) donnent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(t) = k, D(t) = j\} &= \mathbb{P}\{X(t) = k\} \mathbb{P}\{D(t) = j\} \\ &= \frac{\pi_k e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} \end{aligned}$$

4.4 Réseaux ouverts généraux

4.4.1 Introduction

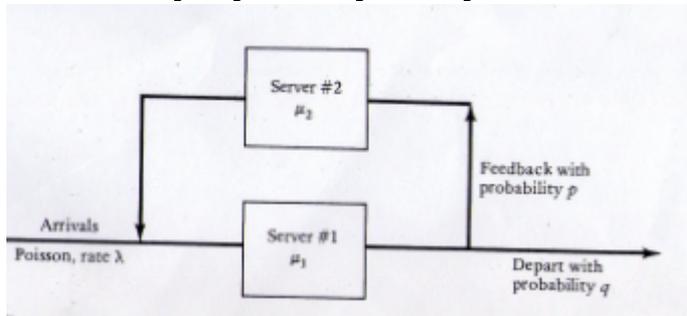
La section précédente couvre certains réseaux sans mémoire de file d'attente dans laquelle un client peut visiter un serveur donné au plus une fois. Avec cette hypothèse, les départs à partir de toute station-service forment un processus de poisson qui est indépendant du nombre de clients à ce poste à l'état stationnaire.

En conséquence les nombres $X_1(t), X_2(t), \dots, X_K(t)$ des clients dans les K stations sont des variables aléatoires indépendantes .

la situation où un client peut visiter un serveur plus qu'une fois est plus subtile. D'une part, de nombreux flux dans le réseau ne sont plus Poisson .Cependant le plus surprenant, la solution de la forme du produit de (4.1) reste valable !

4.4.2 Exemple

Nous vérifions la solution de la forme du produit dans le réseau de deux serveurs un peu plus complexe représenté dans la figure suivante.



Considérons un système avec rétroaction de deux serveurs .par exemple le serveur 2 dans ce système pourrait être un inspecteur retournant une fraction p de la sortie pour retravailler. si $X_i(t)$ est le nombre de clients dans la station i à l'instant t ,pour $i=1,2$;avec $X(t) = [X_1(t), X_2(t)]$ est une chaîne de Markov où les taux de transitions sont donnés dans le tableau suivant :

De l'état	à l'état	Taux de transition	Description
(m,n)	$(m+1,n)$	λ	arrivée d'un nouveau client
(m,n)	$(m+1,n-1)$	μ_2	retour d'un client à la première station
$n \geq 1$			
(m,n)	$(m-1,n)$	$q\mu_1$	départ d'un client
$m \geq 1$			
(m,n)	$(m-1,n+1)$	$p\mu_1$	retour au serveur 2

soit

$$\pi_{m,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{X_1(t) = m, X_2(t) = n\}$$

La loi stationnaire du processus, et par un raisonnement analogue de celui qui précède vérifie les équations suivantes :

$$\lambda \pi_{0,0} = q \mu_1 \pi_{1,0} \quad (4.12')$$

$$(\lambda + \mu_2) \pi_{0,n} = p \mu_1 \pi_{1,n-1} + q \mu_1 \pi_{1,n} \quad (4.13')$$

$$n \geq 1$$

$$(\lambda + \mu_1) \pi_{m,0} = \lambda \pi_{m-1,0} + q \mu_1 \pi_{m+1,0} + \mu_2 \pi_{m-1,1} \quad (4.14')$$

$$m \geq 1$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi_{m,n} = \lambda \pi_{m-1,n} + p \mu_1 \pi_{m+1,n-1} + q \mu_1 \pi_{m+1,n} + \mu_2 \pi_{m-1,n+1} \quad (4.15')$$

$$m, n \geq 1$$

par exemple dans l'équation (4.12) ; mesurer le côté gauche du débit total hors d'état (00) et est conjointement proportionnelle à $\pi_{0,0}$, la fraction du temps de long terme le processus est dans l'état (0,0) et λ est le taux de transition conditionnelle sur de (0,0) . les mesures du côté droit, le taux total de flux dans l'état (0,0).

En utilisant la solution de la forme du produit dans le cas acyclique, nous allons "deviner" une solution, puis vérifier que notre estimation vérifie (4.12') à (4.15'). Nous devons d'abord déterminer le taux d'entrée, noté λ_1 au serveur 1 en équilibre, le taux de sortie doit être égal au taux d'entrée et de cette sortie la fraction p est retournée à rejoindre les nouveaux arrivants après avoir visité serveur 2 .nous avons :

Le taux d'entrée = le taux des nouveaux arrivant + le taux des clients
retournant

Qui se traduit par :

$$\lambda_1 = \lambda + p \lambda_1$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-p} = \frac{\lambda}{q} \quad (4.12)$$

Le taux d'entrée au second serveur est :

$$\lambda_2 = p \lambda_1 = \frac{p \lambda}{q} \quad (4.13)$$

La solution que nous devinons est de traiter le serveur 1 et le serveur 2 comme étant des systèmes M/M/1 indépendants ayant les taux d'entrée λ_1 et λ_2 respectivement (même si nous savons d'après notre discussion antérieure que

le processus d'entrée au serveur 2 et 1 n'est pas un Poisson) que l'on tente est une solution de la forme :

$$\begin{aligned}\pi_{mn} &= \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{q\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right)^m \left(1 - \frac{p\lambda}{q\mu_2}\right) \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^n \quad \text{pour } m, n \geq 1\end{aligned}$$

il est immédiat que :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{mn} = 1$$

à condition que

1.

$$\lambda_1 = (\lambda/q) < \mu_1$$

2.

$$\lambda_2 = p(\lambda/q) < \mu_2$$

Nous nous tournons vers la vérification (4.12') à (4.15').

Soit

$$\theta_{mn} = (\lambda/q\mu_1)^m \times (p\lambda/q\mu_2)^n$$

il suffit de vérifier que θ_{mn} satisfasse aux équations (4.12') à (4.15), comme π_{mn} et θ_{mn} ne diffèrent que par le multiple constant $\pi_{00} = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) \times \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)$. Ainsi, nous procédons à substituer θ_{mn} en (4.12') à (4.15') et de vérifier que l'égalité est obtenue.

Commençons par vérifier (4.12') i.e :

$$\lambda\theta_{00} \stackrel{?}{=} q\mu_1\theta_{10}$$

On a $\theta_{00} = 1$ et $\theta_{10} = \frac{\lambda}{q\mu_1}$

Du coup :

$$\lambda = q\mu_1 \frac{\lambda}{q\mu_1} = \lambda$$

Passons ensuite à l'équation (4.13') i.e :

$$(\lambda + \mu_2)\theta_{0n} \stackrel{?}{=} p\mu_1\theta_{1n-1} + q\mu_1\theta_{1n}$$

On a

1.
$$\theta_{1n-1} = \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right) \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^{n-1}$$

2.
$$\theta_{0n} = \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^n$$

3.
$$\theta_{1n} = \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right) \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^n$$

en remplaçant dans l'égalité nous obtenons :

$$(\lambda + \mu_2) \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^n = p\mu_1 \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right) \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^{n-1} + q\mu_1 \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right) \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^n$$

nous divisons par $\left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^n$ et nous simplifions pour avoir :

$$\lambda + \mu_2 = \left(\frac{p\lambda}{q}\right) \left(\frac{q\mu_2}{p\lambda}\right) + \lambda = \lambda + \mu_2$$

Pour l'équation (4.14') ; nous avons à vérifier que :

$$(\lambda + \mu_1) \theta_{m0} \stackrel{?}{=} \lambda \theta_{m-10} + q\mu_1 \theta_{m+10} + \mu_2 \theta_{m-11}$$

On a :

1.
$$\theta_{m0} = \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right)^m$$

2.
$$\theta_{m-10} = \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right)^{m-1}$$

3.
$$\theta_{m+10} = \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right)^{m+1}$$

4.
$$\theta_{m-11} = \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right)^{m-1} \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)$$

donc nous aurons par suite :

$$(\lambda + \mu_1) \left(\frac{\lambda}{q\mu_1} \right)^m = \lambda \left(\frac{\lambda}{q\mu_1} \right)^{m-1} + q\mu_1 \left(\frac{\lambda}{q\mu_1} \right)^{m+1} + \mu_2 \left(\frac{\lambda}{q\mu_1} \right)^{m-1} \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2} \right)$$

après la division par $\left(\frac{\lambda}{q\mu_1} \right)^m$ ça deviens :

$$(\lambda + \mu_1) = \lambda \left(\frac{q\mu_1}{\lambda} \right) + q\mu_1 \left(\frac{\lambda}{q\mu_1} \right) + \mu_2 \left(\frac{q\mu_1}{\lambda} \right) \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2} \right)$$

Il s'en suit :

$$\lambda + \mu_1 = q\mu_1 + \lambda + p\mu_1 = \lambda + \mu_1$$

Nous laissons le soin au lecteur pour vérifier l'équation (4.15') Vu que θ_{mn} vérifie bien les équations donc elle est bien une solution.

4.4.3 Réseau ouvert général

Envisageons un réseau de files d'attente ouvert ayant k stations-service , et laissons X_k pour désigner le nombre de clients à la station k au temps t supposer que nous avons :

1. Les arrivées en provenance de l'extérieur du réseau à des serveurs distincts sont des processus de Poisson indépendants où les arrivées en dehors de la station k se produisent au λ_{0k} de taux
2. Les départs à partir de serveurs distincts voyagent indépendamment et instantanément vers d'autres serveurs, ou quittent le système, avec des probabilités fixes, où la probabilité qu'un départ de la station j se déplace vers la station k est P_{jk} .
3. les temps de service sont sans mémoire ou de Markov en ce sens que :

$$\mathbb{P}(\text{Le serveur } k \text{ accomplit son service dans } [t, t+h] / X_k(t) = n) = \mu_{kn}(\Delta t) + o(\Delta t) \quad (4.14)$$

4. Le système est en équilibre statistique.
5. Le système est complètement ouvert en ce que tous les clients dans le système finiront par quitter

Soit λ_k le taux d'entrée à la station k.

Le taux d'entrée à la station k est comprend des clients entrant de l'extérieur du système plus les clients en provenance d'autres stations.

L'entrée provenant de la station j vers la station k se produit par le taux

$\lambda_j P_{jk}$

et donc :

$$\lambda_k = \lambda_{0k} + \sum_{j=1, j \neq k}^K \lambda_j P_{jk} \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.15)$$

La condition 5 que tous les clients qui entrent finissent par quitter, assure l'existence d'une solution unique de (4.15) :

$$\mathbb{P} \{X_1(t) = n_1, X_2(t) = n_2, \dots, X_k(t) = n_K\} = \Psi_1(n_1) \Psi_2(n_2) \dots \Psi_K(n_K) \quad (4.16)$$

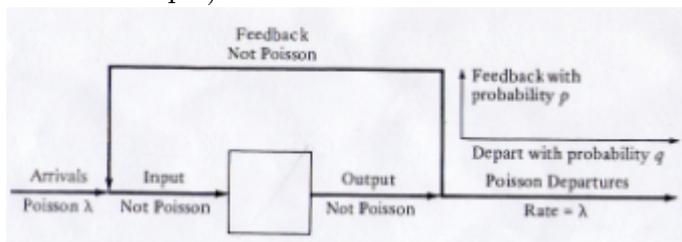
où

$$\Psi_k(n) = \frac{\pi_{k0} \lambda_k^n}{\mu_{k1} \mu_{k2} \dots \mu_{kn}} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

et

$$\Psi_k(0) = \pi_{k0} = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^n}{\mu_{k1} \mu_{k2} \dots \mu_{kn}} \right\}^{-1} \quad (4.18)$$

Exemple l'exemple de la figure suivante correspond à $k = 1$ (un poste de serveur unique)



dans lequel $P_{11} = p < 1$

les arrivées extérieures sont au taux $\lambda_{01} = \lambda$ alors 4.15 devient :

$$\lambda_1 = \lambda_{01} + \lambda_1 P_{11}$$

Comme $\lambda_1 = \lambda + \lambda_1 p$ qui donne :

$$\lambda_1 + \frac{\lambda}{1-p} = \frac{\lambda}{q}$$

Puisque l'exemple concerne le cas d'un seul serveur alors $\mu_{1n} = \mu \quad \forall n$ et par suite 4.17 devient :

$$\Psi_1(n) = \pi_{10} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^n = \pi_{10} \left(\frac{\lambda}{q\mu} \right)^n$$

Où

$$\pi_{10} = \left(1 - \frac{\lambda}{q\mu} \right)$$

Chapitre 5

Application : Traffic routier

5.1 Introduction et description du modèle

Nous avons travaillé sur un document réalisé par Daniel FLIPO (en 2013) qui traite une situation routière basique se rapprochant des systèmes M/M/1. Le modèle est le suivant :

- i- La route est une voie à deux directions en ligne droite
- ii- Un entrepreneur souhaite effectuer des réparations sur une des voies, il va devoir faire un chantier qui bloquera la voie concernée sur une certaine longueur
- iii- il installe des feux tricolores de part et d'autre du chantier, permettant à chaque file de passer alternativement le chantier sur la file restante

Les paramètres du modèle sont :

- L : La longueur du chantier (en m)
- λ_1, λ_2 : Les paramètres des processus de Poisson modélisant les arrivées de véhicules dans un sens et dans l'autre
- v : La vitesse des véhicules (en m/s)
- d_1, d_2 : La durée durant laquelle chaque feu est au vert / au rouge (en s)
- K_1, K_2 : Le nombre de voitures que l'on veut laisser passer dans chaque sens
- a : Le temps qu'une voiture met pour démarrer (en s)

5.2 Cycle des feux, engorgement, contraintes

5.2.1 Cycle des feux

Un cycle des feux se déroule de la façon suivante :

- à l'instant 0 le feu 1 passe au vert.

- à l’instant d_1 il passe au rouge.
- à l’instant $d_1 + \frac{L}{v}$ (le temps qu’il faut pour évacuer la dernière voiture passée au feu vert de la zone du chantier) le feu 2 passe au vert.
- à l’instant $d_1 + \frac{L}{v} + d_2$ le feu 2 passe au rouge.
- à l’instant $d_1 + \frac{L}{v} + d_2 + \frac{L}{v}$ le cycle est fini, on revient à l’instant zéro.

5.2.2 Engorgement, contraintes

Si on veut faire passer K véhicules dans un sens, on doit laisser le feu au vert pendant un laps de temps au moins égal à $a.K$, ce qui donne ici :

$$\begin{cases} d_1 \geq aK_1 \\ d_2 \geq aK_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

Le risque principal d’un mauvais ajustement des paramètres des feux est la situation où la longueur de la file d’attente d’un des feux augmente plus qu’elle ne réduit ; sa longueur augmente sans borne et le système s’engorge. Dans ce modèle M. Flipo suggère que l’engorgement peut s’éviter en respectant ces inégalités :

$$\begin{cases} d_1 \geq a\lambda_1 \left(d_1 + d_2 + 2\frac{L}{v} \right) \\ d_2 \geq a\lambda_2 \left(d_1 + d_2 + 2\frac{L}{v} \right) \end{cases} \quad (5.2)$$

Il considère ici que la durée pendant laquelle un feu est au vert doit être au moins égale à la durée laissant passer le nombre moyen de véhicules arrivés pendant un cycle. Il n’y a donc théoriquement que très peu de chance que le système s’engorge, il faudrait que le flux d’arrivée se comporte pendant longtemps largement au dessus sa moyenne.

On peut discuter le fait que ces différentes minoration de d_1 et d_2 ne prennent pas en compte la distance entre le feu et le véhicule qui démarre, l’auteur considérant que chaque voiture démarre directement du feu.

Ceci est contrebalancé par le fait que le coefficient appliqué à a est la durée totale d’un cycle (le feu reste au vert assez longtemps pour laisser passer le nombre théorique moyen d’arrivants pendant la durée qu’il passe au rouge ET au vert). Néanmoins dans certaines simulations on a rencontré des (rares) cas où ces inégalités s’avèrent insuffisantes.

On pourra aussi (par exemple) influencer le fonctionnement du système dans l’autre sens en augmentant artificiellement le temps a de réaction d’un automobiliste avant de démarrer afin de prendre en compte la distance moyenne qui le sépare du feu dans la file d’attente.

5.2.3 Estimation des paramètres

On se pose la question de l'estimation des paramètres du trafic à partir de données réelles. On peut demander aux enquêteurs sur le terrain de :

- relever les intervalles de temps séparant les passages de deux véhicules consécutifs ou bien,
- compter à intervalles réguliers (une minute par exemple) le nombre de véhicules qui passent dans l'intervalle.

Dans le premier cas on sait que les instants d'arrivée suivent une loi exponentielle de paramètre λ , il s'agit donc d'estimer ce paramètre. Pour cela on utilise la méthode du maximum de vraisemblance :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} \quad (5.3)$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \quad (5.4)$$

Ainsi

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda) = \ln \left(\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \right) \quad (5.5)$$

$$= n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \quad (5.6)$$

Résolvons l'équation suivante :

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (5.7)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{X_n} \quad (5.8)$$

Cet estimateur est biaisé.

Dans le second cas, le nombre de voitures passées à intervalles réguliers suit une loi de Poisson, dont l'estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance est sans biais.

nous calculons :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \quad (5.9)$$

$$= e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \quad (5.10)$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
 \ln L(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda) &= \ln \left(e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right) \\
 &= -\lambda n + \sum_{i=1}^n \ln \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
 &= -\lambda n + \ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i!
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = 0 &\Leftrightarrow -n + \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n} = \bar{X}_n^{**}
 \end{aligned}$$

Cet estimateur n'est pas biaisé ce qui est un avantage par rapport au première . Néanmoins on fait essentiellement la même chose, deux méthodes se valent.

5.2.4 Simulation

La fonction suivante permet de présenter la trajectoire du nombre de voitures présents au feu 1 à chaque début de cycle (au moment où le feu passe au vert pour eux). Le modèle est symétrique pour le feu 2.

function X = traj (l,lambda,d1,d2,vit,a,n,ci)

// n nombre de pas

// ci condition initiale

// l longueur du chantier en km

//lambda nb voitures/min moyen

//d1 duré du feu vert 1 en min

//d2 durée du feu vert 2 en min

//vit vitesse des véhicules en km/min

//a temps moyen de démarrage d'une voiture en min



FIGURE 5.1 –

Deux exemples de trajectoires données avec ce modèle. (1) ($l = 3/5$; $\lambda = 4$; $d1 = 6/5$; $d2 = 9/10$; $vit = 1/2$; $a = 1/15$; $n = 500$; $ci = 80$) Il est sensé de se poser la question de l'influence des différents paramètres sur ce modèle :

que se passe-t-il si on modifie la vitesse des voitures? La durée d'un des feux? Le temps de réaction des automobilistes? La longueur du chantier? On va changer un paramètre à la fois à partir de la paramétrisation donnée ci-dessus. La vitesse des voitures a une grande influence sur la stabilité du système : si elles roulent suffisamment vite la file d'attente n'a pas le temps de s'allonger. Contrairement à la paramétrisation précédente où l'on voit que deux trajectoires peuvent avoir des allures tout à fait différentes, ici elles ont toutes la forme de celle représentée ci-dessus.

Il est intéressant de constater que doubler la vitesse des voitures a exactement le même effet sur le système que diviser par deux la longueur du chantier. En effet parcourir une distance à une vitesse équivaut en temps à parcourir la moitié de cette distance à la moitié de la vitesse. Les effets de la vitesse et de la longueur du chantier sont donc liés. Cela est représenté mathématiquement

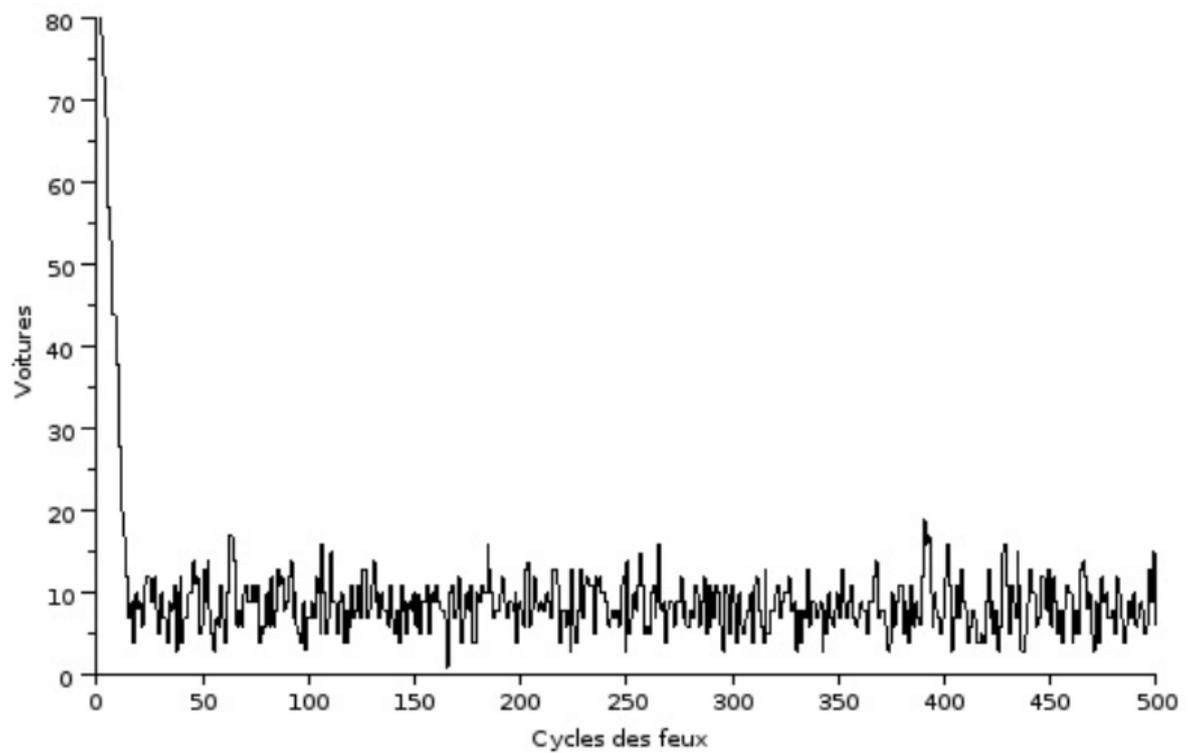


FIGURE 5.2 –

Une trajectoire avec les mêmes paramètres ci dessus, et la vitesse des voitures est doublée. ($l = 3/5$; $\lambda = 4$; $d1 = 6/5$; $d2 = 9/10$; $vit = 1$; $a = 1/15$; $n = 500$; $ci = 80$;) (2)

par la présence d'un coefficient $\frac{L}{vit}$ dans le modèle.

Les trajectoires ont également cette allure si :

- On double la durée du feu 1 (la file qu'on modélise a donc beaucoup plus de temps pour s'écouler)
- On divise par deux la durée du feu 2 (la file qu'on modélise passe moins de temps à accumuler des voitures sans pouvoir les évacuer)
- On divise par deux lambda : deux fois moins de voitures arrivent à la file par minute en moyenne
- On divise par deux le temps de démarrage des automobilistes.

Pour faire l'analogie avec les systèmes M/M/1, on peut dire que la figure (1) représente le régime critique du système : il n'y a pas d'engorgement systématique, mais les trajectoires sont très différentes entre elles. La figure (2) représente le régime stationnaire : le système revient vite depuis ses conditions initiales à un état où le nombre de voitures à la file est stable et suffisamment proche de zéro.

Si l'on fait l'inverse des actions ci-dessus (i.e si on divise par deux la vitesse, ou la durée du feu 1, etc) on obtient la troisième allure de trajectoires qu'on peut rencontrer avec ce système : la file du feu augmente sans arrêt, le système est complètement instable.

5.2.5 Amélioration du système

Dans les simulations précédentes, le nombre moyen d'arrivées par minute reste fixe (c'est le paramètre λ). Évidemment, ce modèle n'est pas réaliste ! C'est pourquoi on a décidé de faire des simulations en utilisant le même modèle que précédemment sauf que l'on fait varier le paramètre lambda au cours du temps. Voici un exemple de fonction qui représente le nombre d'arrivées par minute en fonction du temps en heure : On peut encore améliorer cette fonction en construisant une spline qui passe par les points où la fonction en escalier change de valeur. La spline (courbe) nous permet de simuler le nombre de véhicules présents au début de chaque cycle durant toute une journée.

Nous observons maintenant des courbes du type :

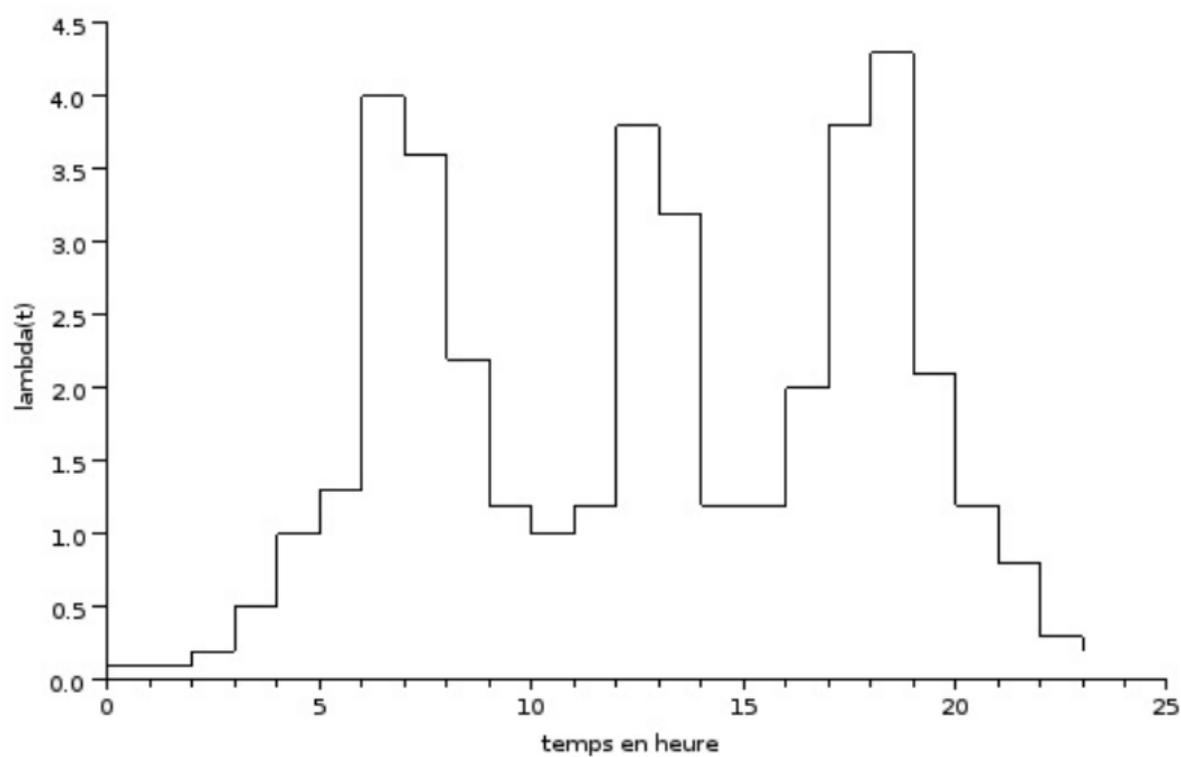


FIGURE 5.3 –

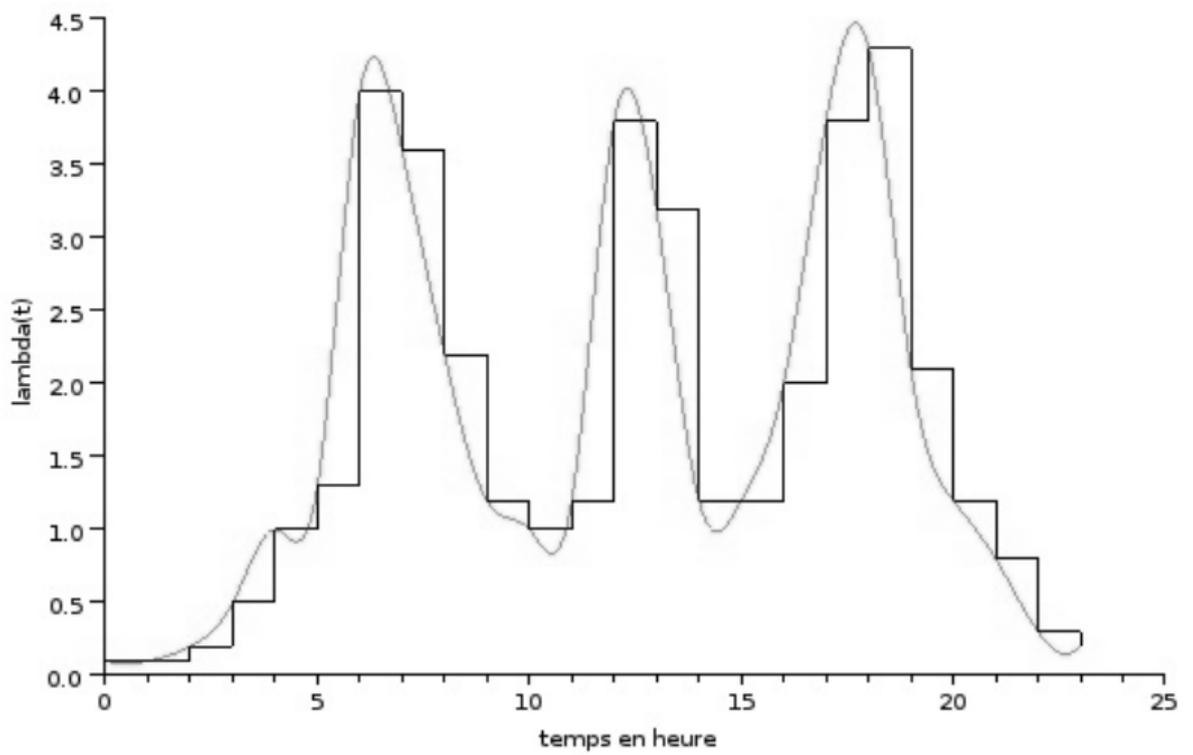


FIGURE 5.4 –

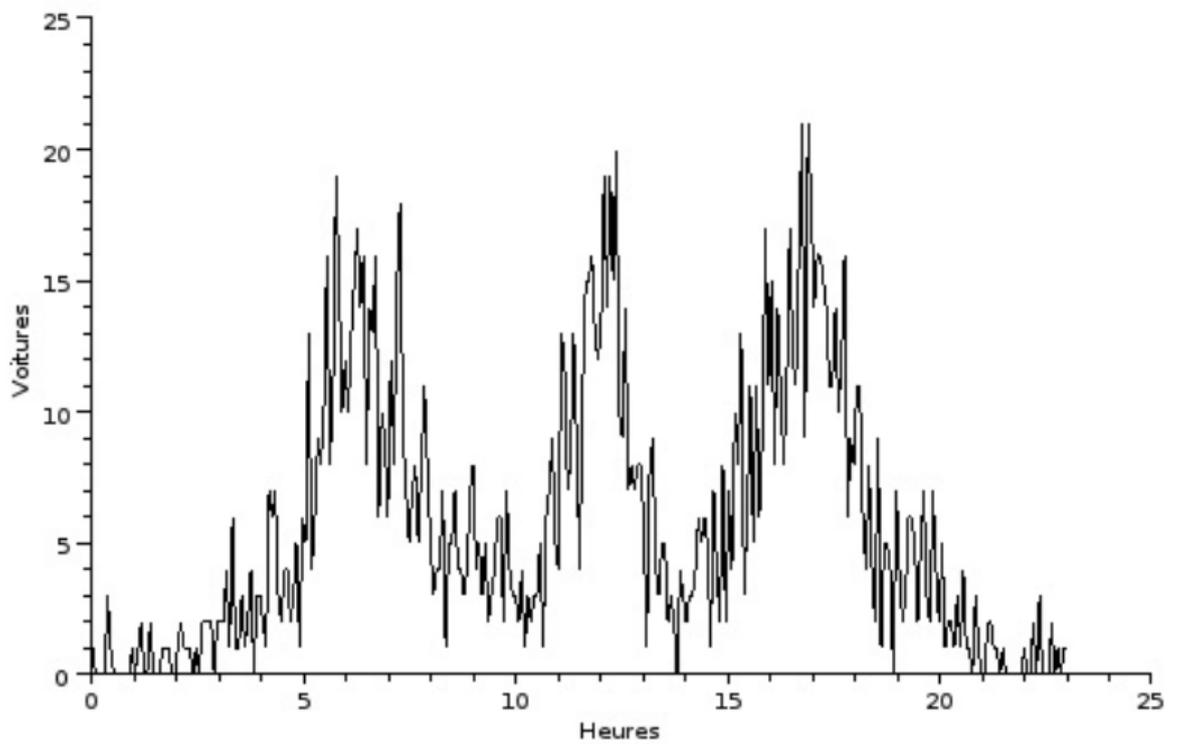


FIGURE 5.5 –

Ce graphique montre le nombre de voitures dans la file d'attente en fonction des heures de la journée

Ce modèle représente plus fidèlement la réalité, avec des pics de fréquentation et des heures creuses.

Conclusion

Dans ce mémoire nous illustrons l'utilité de la théorie des files d'attente .
Ce travail nous a également permis de montrer l'importance de cette étude qui s'agit de prédire le comportement des systèmes d'attente.
Comme nous venons de voir ;les phénomènes d'attente sont retrouvés dans certains systèmes tels les réseaux téléphoniques, les systèmes informatiques,dans les banques ,dans la route ,etc...
Si jamais vous avez vu une caricature dans votre journal local ,vous savez ce que vous avez regardé n'est pas la photo d'une personne particulière,mais malgré cela vous reconnaissez de qui il s'agit ;parce que l'artiste pour renseigner le lecteur a représenter par quelques coups de crayons bien choisis les traits caractéristiques de son visage .
C'est exactement ce que fait un bon modèle des files d'attente .

Bibliographie

- [1] HIDAKI TAKAGI , *QUEUEING ANALYSIS*, Tokyo Research Laboratory, North HOLLAND, Volume 1 -(1991).
- [2] KARLIN *QUEUEING SYSTEMS* ,John Wiley and Sons (1990),346-386
- [3] LEONARD KLEINROCK , *QUEUEING SYSTEMS* ,Volume J :Theory,John Wiley and Sons -(1975) ,89-106.
- [4] PERRUT, THIRARD COLIN , AUGER VINCENT, Mémoire en Phénomènes d'attente et application à la gestion des feux de circulation-(2013).
- [5] PHILIPPE ROBERT, *Réseaux et files d'attente* ,Mathématique et Applications ,Springer (1983),25-39.
- [6] VLADIMIR ANISIMOV, *Switching Processes in Queueing Models* ,Mathematical models 2,John Wiley-(1988) , chapitre 12.