République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaïd
Faculté des Sciences
Département de Matématique

Mémoire De Master

Sur le Thème

Existence des solutions pour le système d'Euler incompressible multidimensionnelle

Présenté par : MELIANI Benabdallah

Devant le jury composé de :

Président :	Dr. ABDELLAOUI Boumediene	Professeur	U. Tlemcen
Encadrement :	Dr. HOUBED Mekki	Professeur	U. Tlemcen
Examinateur :	Dr.MSIRIDI Miloud	Maître de conférences	U. Tlemcen
Examinateur :	Dr.MSIRIDI Bachir	Maître de conférences	U. Tlemcen

Année universitaire : 2014 – 2015

Remerciement

Mes remerciements vont à mon directeur de Master, Mekki HOUBAD. Merci d'abord pour m'avoir proposer un sujet, ainsi que pour sont aide précieux. Merci pour tout.

Mes seconds remerciement vont au membre du jury, d'avoir accepté cette lourd tâche ainsi que touts mes enseignants le long du parcours universitaire.

C'est un honneur pour moi que vous compter dans mon jury

Merci à ma famille, ma mère, ma grande mère et ma tante et ces enfants avant tout pour laide morale, et leurs encouragement durant tout mes années d'étude ainsi que tout mes amis.

Introdution

Dans ce document on va étudier les équations d'Euler incompressible dans [3]

$$\partial_t u \ + \ (\ u \cdot \nabla \ ) \ u \ \equiv \ 0 \ , \quad \mathrm{div} \ u \ \equiv \ 0 \ . \tag{0.1}$$

Le système précédemment mentionné est un système de Burger multidimensionnelle associée à une condition de divergence nul qui porte sur la solution, tel que $u(\ t, x \ )$ est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$ admet pour composantes des fonctions $u_i(\ t, x \ )$ pour $i = 1 \cdots 3$, tel que

$$\partial_i \ := \ \frac{\partial}{\partial \ x_i} \ , \quad u \cdot \nabla \ := \ \sum_{i=1}^{3} \ u_i \ \partial_i \ , \quad \mathrm{div} \ \ := \ \sum_{i=1}^{3} \ \partial_i \ .$$

Le problème de Cauchy formé par le système (0.1) et une donnée initiale $u(\ 0, x \ )$ de classe C^1 bornée définie sur la boule de centre zéro et de rayon r et un système de type hyperbolique quasi-linéaire il admet une vitesse de propagation finie qui peut être estimer par [1]

$$:= \sup \ \left\{ \ u(\ 0, x \ ) \ : \quad x \in \ \Omega_r^0 \ \right\} \ .$$

et la solution elle propage dans le domaine

$$\Omega_r^T \ := \ \left\{ \ (\ t, x \ ) \ \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \ : \ \ | \ x \ | \ + \ t \ \leq \ r \ \right\} \ .$$

Table des matières

Chapitre 1

Existence des solutions classiques pour le système d'Euler incompressible multidimensionnelle

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier le système de Burger multidimensionnelle à savoir

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i u = 0 \\ \\ u(0,x) = h(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

ainsi que le système d'Euler à savoir

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i u = 0, \quad \operatorname{div}_x u(t,x) = 0 \\ \\ u(0,x) = h(x) \end{cases} \tag{1.2}$$

tel que $u(t,x) = {}^t(u_1(t,x), \cdots, u_n(t,x))$ est une fonction vectoriel de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et $h(x) = {}^t(h_1(x), \cdots, h_n(x))$ est une fonction de classe C^1 sur la boule $\Omega_r^0 \subset \mathbb{R}^n$ de centre zéro et de rayon $r > 0$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Dans la section 1.2 on va donner les Théorèmes et les méthodes utilisés durant ce documents à savoir le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites dans le cas des - espaces vectoriel.

Dans la section 1.3 on va étudier l'existence des solutions locales dans l'espace et dans le temps pour le système du Burger définie comme en (1.1).
Dans la section 1.4 on va étudier l'existence des solution du système d'euler donnée comme en (1.2).

1.2 Théorèmes et méthodes

1.2.1 Théorèmes d'inversion local

Théorème 1 (*d'inversion local) Soit $=^n$ vu comme étant un - espaces vectoriels normées et soit U un ouvert de et φ une fonction de classe $C^1(U,)$ et $a \in U$ si $D\varphi(a)$ est bijective alors il existe un voisinage ouvert V de a dans tel que φ soit un C^1 - difféomorphisme de V dans $\varphi(V)$.*

Preuve. On considère munit de sa base canonique et de la norme $||\cdot||_\infty$

(1). Préparation

(a). On va montrer qu'on peut ce ramené ou cas $D\varphi(a) = \mathrm{Id}$.
On note par $T = D\varphi(a)$ cette application est linéaire bijective donc

$$DT^{-1} = T^{-1}$$

et donc $T^{-1} \circ \varphi$ est de classe C^1 sur U et

$$D(T^{-1} \circ \varphi)(a) = (DT^{-1}(\varphi(a))) \circ (D\varphi(a)) = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id},$$

(b). On peut ce ramené ou cas $a = 0$.
On considère la fonction ψ définie par

$$\psi(h) = \varphi(a+h) - \varphi(a)$$

ainsi ψ est de classe C^1 au voisinage de U_0 tel que

$$U_0 = \{h \in \mathbb{R}^n : \quad a + h \in U\}$$

et en plus $D\psi(0) = D\varphi(a)$ est bijective
Si le théorème est démontrer pour ψ, alors il existe un voisinage ouvert V_0 de 0 dans tel que ψ soit un C^1 - difféomorphisme de V_0 sur $\psi(V_0)$ ce qui donne que φ est un C^1 - difféomorphisme de V sur $\varphi(V)$.

Ceci montre qu'on peut ce ramené au cas

$$a = 0, \quad \varphi(a) = 0, \quad D\varphi(a) = \mathrm{I}.$$

(2). Construction d'une bijection.
L'application g définie par

$$\forall x \in U : \quad g(x) = {}^t(g_1(x), \cdots, g_n(x)) = x - \varphi(x)$$

est de classe C^1 sur U et satisfait $Dg(0) = 0$, donc

$$\exists r > 0 : \quad \begin{cases} B(0,r) \subset U, \\ \\ \forall x \in B(0,r), \quad \forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 : \quad \left| \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq \dfrac{1}{2n} \end{cases}$$

donc g_i est lipschitzienne et on a

$$\forall x \in B(0,r), \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\} : \quad | g_i(x) |=| g_i(x) - g_i(0) | \leq \frac{|| x ||_\infty}{2n} \leq \frac{r}{2}$$

ce qui donne que $|| g ||_\infty \leq r/2$ et donc

$$\forall x \in B(0,r) : \quad g(x) \in B(0,r/2)$$

soit maintenant $y \in B(0,r/2)$ et soit

$$\forall x \in B(0,r) : \quad g_y(x) = y + g(x)$$

on a

$$\begin{aligned} || g_y ||_\infty &= || y + g(x) || \\ &\leq || y ||_\infty + || g(x) ||_\infty \\ &\leq r/2 + r/2 = r \end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \in B(0,r) : \quad g_y(x) \in B(0,r)$$

de plus

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in B(0,r) : \quad || g_y(x_1) - g_y(x_2) ||_\infty &= || g(x_1) - g(x_2) ||_\infty \\ &\leq \frac{1}{2} || x_1 - x_2 ||_\infty \end{aligned}$$

et donc l'application g_y est contractante de $B(0,r)$ dans $B(0,r)$ vu qu'on travaille dans un espace de dimension finie complet le théorème du point fixe garanti l'existence d'un unique point x pour chaque y donné tel que

$$g_y(x) = 0 \Longrightarrow y = \varphi(x)$$

et donc

$$\forall y \in B(0,r/2), \quad \exists ! x \in B(0,r) : \quad \varphi(x) = y$$

ainsi $\varphi^{-1}(B(0,r/2)) \subset B(0,r)$ et l'application φ_1 definie sur l'ensemble $\varphi^{-1}(B(0,r/2))$ à valeur dans $B(0,r/2)$ par $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ est une bijection.

(3). Continuité de φ_1.
Soit $x_1, x_2 \in B(0,r)$ on a

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &= \|(\varphi(x_1) + g(x_1)) - (\varphi(x_2) + g(x_2))\| \\ &\leq \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| \\ &\leq \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

ce qui donne que

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|$$

et donc si on pose $y_1 = \varphi_1(x_1)$ et $y_2 = \varphi_1(x_2)$ avec $y_1, y_2 \in B(0, r/2)$ on utilise le fait que φ_1 est bijective on a

$$\left\|\varphi_1^{-1}(y_1) - \varphi_1^{-1}(y_2)\right\| \leq 2\left\|\varphi(\varphi_1^{-1}(y_1)) - \varphi(\varphi_1^{-1}(y_2))\right\| = 2\|y_1 - y_2\|$$

ainsi φ_1^{-1} est lipschitzienne donc elle est continue, ce qui donne que φ_1 est aussi continue.

(4). Différentiabilité de φ_1.
L'application φ est de classe C^1 sur U, l'application $\det D\varphi(x)$ est de classe C^0 sur U vu que $\det D\varphi(0) = 1$ car $D\varphi(0) = I$ on conclus que

$$\exists r_1 > 0, \quad \forall x \in B(0, r_1): \quad \det D\varphi(x) \neq 0$$

on remplace r par $\min(r, r_1)$ on peut considère que $D\varphi(x)$ est inversible pour tout $x \in B(0,r)$, de plus l'application qui associée a chaque matrice inversible son inverse est continue on conclus que l'application qui associée à chaque $x \in B(0,r)$ la matrice $(D_x\varphi)^{-1}$ est continue vu que cette boule est fermée on a alors

$$\exists M > 0, \quad \forall \in B(0,r): \quad \left|\left|\left|(D\varphi)^{-1}\right|\right|\right| = \sup_{x \in \mathbb{R}\backslash 0} \frac{\|(D\varphi)^{-1}(x)\|}{\|x\|} \leq M.$$

soit maintenant $y_0, y \in B(0, r/2)$ on pose $x_0 = \varphi_1^{-1}(y_0)$ et $x = \varphi_1^{-1}(y)$, alors on utilise la différentiabilité de φ et le fait que $\|x - x_0\|_\infty \leq 2\|y - y_0\|_\infty$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_1^{-1}(y) - \varphi_1^{-1}(y_0) - D\varphi_1^{-1}(x_0)(y-y_0)\right\| = \\
&= \left\|x - x_0 - D\varphi_1^{-1}(x_0)(\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0))\right\| \\
&= \left\|D\varphi_1^{-1}(x_0)(D\varphi_1(x_0)(x-x_0) - (\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0))\right\| \\
&\leq M\,\|\varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x-x_0)\| \\
&\leq M\,\|o(\|x-x_0\|_\infty)\| \\
&\leq M\,\|o(\|y-y_0\|_\infty)\|
\end{aligned}$$

ce qui donne que φ_1^{-1} est différentiable sur $B(0, r/2)$.

(5). On contre que φ_1 elle est de classe C^1.
On note par $V = \varphi_1^{-1}(B(0, r/2))$ et soit l'application φ_2 définie sur V à valeur $\varphi(V)$ avec

$$\forall x \in V : \quad \varphi_2(x) = \varphi(x)$$

ainsi φ_2 elle est de classe C^1 sur V ell est bijective, φ_2^{-1} est différentiable sur $\varphi(V) = B(0, r/2)$ et on a

$$\forall x \in V : \quad (D\varphi_2)^{-1}(\varphi(x)) \circ D\varphi(x) = I$$

et donc les coefficient de la matrice $(D\varphi_2)^{-1}$ sont des fonctions de déterminant de la matrice $D\varphi$ qui n'est pas nul et des cofacteur de cette matrices on utilise la continuité du déterminant on en déduit que $D\varphi_2^{-1}$ est continue et donc φ_2 elle est de classe C^1.

□

1.2.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 2 (*des fonctions implicites) Soit U un ouvert de ${}^p\times{}^n$ et $f(x, y)$ une application de U dans ^{n} de classe C^k avec $k \geq 1$. On suppose que $f(a, b) = 0$ avec $(a, b) \in U$ et $D_y f(a, b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans ^{p} et un voisinage $\mathcal{W}$ de b dans ^{n} et une fonction Φ de classe C^k définie sur $\mathcal{V}$ à valeur dans $\mathcal{W}$ tel que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset U$ et*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \forall y \in \mathcal{W} : \quad f(x, y) = 0 \Longrightarrow y = \Phi(x).$$

De plus on peut choisir $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de tel sorte que $D_y f(x, y)$ soit inversible sur $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ et

$$D_x\Phi(x) = -D_y f(x, \Phi(x))^{-1} \circ D_x f(x, \Phi(x)). \tag{1.3}$$

Preuve. On pose $g(x,y) = (x, f(x,y))$ ce qui définie une fonction de classe C^k sur U, de plus

$$\det Dg(a,b) = \begin{vmatrix} I & 0 \\ D_x f(a,b) & D_y f(a,b) \end{vmatrix} = \det D_y f(a,b) \neq 0$$

on applique le théorème d'inversion local on a l'existence d'un voisinage U de (a,b) dans U tel que g soit un C^k difféomorphismes de U sur $g(U)$. De plus vu que $g(a,b) = 0$ donc $(a,0) \in g(U)$. Soit mainenant V un voisinage de a et W un voisinage de b contient 0 tel que $V \times W \subset U$. Vu que g est un difféomorphisme alors pour chaque $(x,0)$ donné on existence d'un unique (x,y) tel que $(x,0) = g(x,y)$ ce qui définie une application ce classe C^k notée Φ et vérifiée $y = \Phi(x)$. On utilise l'expression de g on obtient que $f(x,\Phi(x)) = 0$, et si on calcule la jacobienne de cette application on obtient (1.3). □

1.2.3 Matrice nilpotent et théorème de Cayley - Hamilton

Définition 1 *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on dit que la matrice $\mathcal{A}$ est nilpotente si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A}^p = 0$.*

Théorème 3 *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ est annulateur de $\mathcal{A}$ dans le sens ou*

$$P_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0.$$

Corollaire 1 *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors*

1. *$\mathcal{A}$ est nilpotente si et seulement si toute les valeur propres de $\mathcal{A}$ sont nuls.*
2. *$\mathcal{A}$ est nilpotente si et seulement si $\mathcal{A}^n = 0$.*

1.3 Existence local des solutions pour le système du Burger multidimensionnelle

On va présenter la méthode des caractéristique pour les système quasi linéaire de type hyperbolique de la forme (1.1).

Théorème 4 *Localement le système (1.1) admet une solution unique sur des demaine de la forme*

$$\Omega_r^T = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n : \|x\| + t \leq r\}, \quad = \sup_{x \in \Omega_r^0} \|h(x)\|. \tag{1.4}$$

De plus cette solution satisfait les deux relations suivantes

$$\forall (t,x) \in \Omega_r^T : \quad u(t, x + h(x)t) = h(x), \quad u(t,x) = h(x - u(t,x)t). \tag{1.5}$$

Preuve.

1. On suppose que u est une solution du système (1.1), on considère dans $\mathbb{R}^{n+1}$ la courbe paramétrée

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial_t y_1 \\ \vdots \\ \partial_t y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

le long de cette courbe on a

$$\begin{aligned} \partial_t \left(u(t, y_1(t), \cdots, y_n(t)) \right) &= \partial_t u(t,y) + \sum_{i=1}^{n} \partial_t y_i \partial_i u(t,y) \\ &= \partial_t u(t,y) + \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i u(t,y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc u est constante le long de cette courbe ce qui donne que cette courbe est une droite ce qui donne

$$u(t, y(t)) = u(0, y(0)) = h(y(0))$$

vu que cette courbe est une droite donc

$$y(t) = ut + y(0)$$

alors

$$u(t, ut + y(0)) = h(y(0)), \quad u(t, y(t)) = h(y(t) - ut)$$

ou encore si on pose $x = y(0)$ quelconque ou encore $x = y(t)$ quelconque on a

$$u(t, h(x)t + x) = h(x), \quad u(t,x) = h(x - u(t,x)t)$$

2. Maintenant on va montrer l'existence de la solution et son unicité locale en utilisant le théorème des fonctions implicites. On considère l'application

$$F(y,u) = u - h(x - tu), \quad y = (t,x)$$

on a $F(0,h(0)) = 0$ et $D_u F(0,h(0)) = I$ donc inversible, on applique le théorème des fonctions implicites (Théorème 2 page 5), on a l'existence d'une unique fonction $\Phi(y)$ de classe C^1 en y au voisinage de $y = 0$ tel que

$$\Phi(t,x) = h(x - t\Phi(t,x)).$$

pour assurer que la fonction Φ est différentiable en y il faut que $D_u F$ soit inverssible or

$$D_u F(y,u) = I + tD_x h(x - tu)$$

elle a un déterminant non nul pour $y = 0$ donc en utilise la continuité du déterminant on a l'existence de certain $T > 0$ tel que cette matrice soit inversible pour tout $t \in [0,T]$.

3. Pour que la condition (1.5) soit satisfait il faut et il suffit que

$$x - u(t,x)t \in \Omega_r^0,$$

ainsi on a

$$\begin{aligned} \|x - u(t,x)t\| &\leq \|x\| + \|u(t,x)\|\, t \\ &\leq \|x\| + \|h(t, x - u(t,x)t)\|\, t \\ &\leq \|x\| + \sup_{y \in \Omega_r^0} \|h(y)\|\, t \\ &\leq \|x\| + t \end{aligned}$$

alors il suffit de prendre $\|x\| + t \leq r$ ce qui donne la définition (1.4).

□

1.4 Existence local des solutions pour le système d'Euler multidimensionnelle

Lemme 1 *Soit* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$*, alors*

$$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}\left(\mathrm{I}+t\mathcal{A}\right)^{-1}\right)=\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}'(t)}{\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)},\quad \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)=\det\left(\mathrm{I}+t\mathcal{A}\right).$$

de plus le polynôme $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ est constant si et seulement si la matrice $\mathcal{A}$ est nilpotente et dans ce cas $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}=1$.

Preuve. Soit $\lambda_1,\cdots,\lambda_d$ les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$, vu que la matrice $\mathcal{A}$ est complexe donc son polynôme caractéristique est scindé, alors elle est trigonalisable. Ce qui permet de conclure l'existence d'une matrice inversible P tel que

$$\mathcal{A}=P\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \star\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{=T}P^{-1}$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\mathrm{I}+t\mathcal{A}\right)^{-1}&=PTP^{-1}\left(PP^{-1}+tPTP^{-1}\right)^{-1}\\&=PT\left(\mathrm{I}+tT\right)^{-1}P^{-1}\end{aligned}$$

on utilise le fait que la trace d'une matrice est invariante par changement de base on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}\left(\mathrm{I}+t\mathcal{A}\right)^{-1}\right)&=\mathrm{Tr}\left(T\left(\mathrm{I}+tT\right)^{-1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{d}\frac{\lambda_k}{1+t\lambda_k}\\&=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\prod_{j=1,\,j\neq k}^{n}(1+t\lambda_j)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{d}(1+t\lambda_k)}\end{aligned}\tag{1.6}$$

dans la suite on pose

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)=\prod_{k=1}^{d}(1+t\lambda_k)$$

on utilise cette notation et la relation (1.6) on a

$$\operatorname{Tr}\left(\mathcal{A}\left(\mathrm{I}+t\mathcal{A}\right)^{-1}\right)=\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}'(t)}{\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)},$$

de plus on remarque que

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)=\det\begin{pmatrix}1+t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+t\lambda_n\end{pmatrix}=\det(I+tT)$$

on utilise la relation $I+t\mathcal{A}=P(I+tT)P^{-1}$ et le fait que le déterminant est invariant par changement des bases on en déduit que

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)=\det(I+t\mathcal{A}).$$

On suppose maintenant que $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)$ est constant donc

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)=\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(0)=1 \tag{1.7}$$

or si on note par $P_{\mathcal{A}}$ le polynôme caractéristque de la matrice $\mathcal{A}$ on a

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(t)=(-t)^n\det\left(\mathcal{A}-\frac{1}{t}\mathrm{I}\right)=(-t)^n\,P_{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{t}\right),$$

on combine ceci avec la relation (1.7) on en déduit que

$$P_{\mathcal{A}}\left(\lambda\right)=(-\lambda)^n,\quad \lambda=\frac{1}{t}.$$

ainsi le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ vaut $(-\lambda)^n$ on applique le théorème de Cayley - Hamilton on a $\mathcal{A}^n=0$ donc $\mathcal{A}$ est nilpotente. □

Théorème 5 *Soit $h\in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ et u une solution du système (1.1) sur Ω_r^T. Alors on fait diminuer T si nécessaire, les propriétés suivante sont équivalentes*

1) $\operatorname{div}_x u=0$ *sur* Ω_r^T.

2) $D_x h$ est nilpotente sur Ω_r^T.

3) $D_x u$ est nilpotente sur Ω_r^T.

Preuve. En utilise le Théorème 4 , la solution u satisfait

$$u\left(t,x+th(x)\right)=h(x)$$

ce qui donne

$$D_x u(t,y)\,(\mathrm{I}+tD_xh(x)) = D_xh(x), \quad (t,y)=X(t,x).$$

la matrice $\mathrm{I}+tD_xh(x)$ est inverssible sur Ω_r^0 donc elle est inversible sur Ω_r^T pour certain $T>0$, ce qui permet d'écrire la relation suivante

$$D_xu(t,y) = D_xh(x)\,(\mathrm{I}+tD_xh(x))^{-1} \tag{1.8}$$

on remarque que

$$\mathrm{div}_x u(t,y) = \mathrm{Tr} D_xu(t,y) = \mathrm{Tr}\left[D_xh(x)\,(\mathrm{I}+tD_xh(x))^{-1}\right] \tag{1.9}$$

1. $\boxed{1)\Longrightarrow 2)}$ On suppose 1), on applique le Lemme 1 on a

$$\mathrm{Tr}\left(D_xh(x)\,(\mathrm{I}+tD_xh(x))^{-1}\right) = \frac{\mathcal{Q}'_{D_xh(x)}(t)}{\mathcal{Q}_{D_xh(x)}(t)},$$

$$\mathcal{Q}_{D_xh(x)}(t) = \det\left(\mathrm{I}+tD_xh(x)\right).$$

   vu que $\mathrm{div}_x u(t,y) = 0$ donc $\mathcal{Q}'_{D_xh(x)}(t) = 0$ alors ce polynôme est constant, on applique du nouveau le Lemme 1 on a la matrice $D_xh(x)$ est nilpotente sur Ω_r^0 ce qui donne le point 3).

2. $\boxed{2)\Longrightarrow 3)}$ On suppose 3), l'utilisation de l'équation (1.8) permet de conclure que

$$\mathrm{Sp}\left(D_xu(t,x)\right) = \left\{\frac{\lambda}{1+t\lambda} : \quad \lambda\in \mathrm{Sp}\left(D_xh(x)\right)\right\}.$$

   vu que $\mathrm{Sp}\left(D_xh(x)\right)=\{0\}$ car $D_xh(x)$ est nilpotente donc $\mathrm{Sp}\left(D_xu(t,x)\right) = \{0\}$ ce qui donne que $D_xu(t,x)$ est aussi nilpotente alors on a le point 2).

3. $\boxed{3)\Longrightarrow 1)}$ On suppose 2), dans ce cas la matrice $D_xu(t,x)$ est nilpotente donc toutes ces valeurs propres sont nul ce qui donne que $\mathrm{Tr}D_xu(t,x)=0$, on utilise la relation (1.9) on obtient 1).

$\square$

Chapitre 2

Étude du système d'Euler incompressible tridimensionnelle

Dans ce chapitre on considère $\varepsilon \in]\ 0,1\ ]$ et on cherche des solutions du problème

$$\partial_t u^\varepsilon \ + \ (\ u^\varepsilon \cdot \ \nabla\ )\ u^\varepsilon \ \equiv \ 0\ ; \quad \operatorname{div}\ u^\varepsilon \ \equiv \ 0\ . \tag{2.1}$$

associé à la donnée initiale

$$u^\varepsilon(\ 0,x\ ) \ := \ h^\varepsilon(\ x\ ) \ = \ w\left(\ x, \frac{\varphi(\ x\ )}{\varepsilon}\ \right)\ , \tag{2.2}$$

tel que h^ε est définie sur Ω_r^0 et formée par la phase $\varphi \in C_b^1(\ \Omega_0^r; \mathbb{R}\ )$ et le profil $w \in C_b^1(\ \Omega_0^r \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^d\ )$ tel que w périodique par rapport à $\theta \in \mathbb{T}$ (ou $\mathbb{T} = [0,1]$ représente le tord).
On considère le cas ou la phase φ et le profil w vérifiants les conditions suivantes

$$\begin{cases} \forall\ x \ \in \ \Omega_r^0 \ : \ \nabla\varphi(\ x\ ) \ \neq \ 0\ , \\ \exists\ (\ x,\theta\ ) \ \in \ \Omega_r^0 \times \mathbb{T} \ : \ \partial_\theta w(\ x,\theta\ ) \ \neq \ 0\ . \end{cases} \tag{2.3}$$

Vu le Théorème 4, le problème de Cauchy (2.1) - (2.2) admet une unique solution sur un domaine de la forme

$$\Omega_r^{T^\varepsilon} = \left\{(t,x) \in [0,T^\varepsilon] \times \mathbb{R}^3 : \quad ||\ x\ || + t\mathbf{V} \leq r\right\}.$$

avec un temps d'existence $T^\varepsilon \ > \ 0$, mais rien ne garantie que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} T^\varepsilon \ = \ \tilde{T} \ > \ 0\ , \tag{2.4}$$

le bute est de déterminer les données initiale qui permet d'avoir (2.4).

2.1 Notion des couples compatibles

Vu le Théorème 5, la condition du divergence nul qui figure au niveau du système (2.1) est satisfaite si et seulement si la donnée initiale exprimée par (2.2) est à matrice jacobienne nilpotente, dans notre cas la dimension de l'espace vaut trois en utilise le Corollaire 1 ce la est équivalent à écrire

$$\big(D_x \, h^\varepsilon(\, x \,) \big)^3 \; \equiv \; 0 \, . \tag{2.5}$$

Définition 2 (*Couples Copmpatibles) Soit* $\varphi \in^1 (\Omega_r^0; \mathbb{R})$ *et* $w \in^1 (\Omega_r^0 \times; \mathbb{R}^3)$ *deux fonction satisfait les conditions (2.3), le couple* (φ, w) *est dit compatible sur* $\Omega_r^0 \times$ *si la famille* $\{h^\varepsilon\}_\varepsilon$ *définie par (2.2) vérifiée la condition (2.5)*

dans la suite on considère deux vecteurs

$$u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \quad v = {}^t(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3,$$

et les notations de produit scalaire, produit torssoriele et le produit vectoriele suivante

$$u \cdot v \, := \, u_1 \, v_1 + u_2 \, v_2 + u_3 \, v_3 \, ,$$
$$u \otimes v := \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix},$$
$$u \wedge v := \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1 *Soit* $\varphi \in C^1(\Omega_r^0; \mathbb{R})$ *et* $w \in C^1(\Omega_r^0 \times; \mathbb{R}^3)$ *satisfait les conditions (2.3). Le couple* (φ, w) *est compatible sur* $\Omega_r^0 \times$ *si et seulement si il est solution sur* $\Omega_r^0 \times$ *du système* $\mathcal{S}$ *formé par*

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta w \equiv 0 \, , \tag{2.6}$$
$$\nabla\varphi \cdot (D_x w \; \partial_\theta w) \equiv 0 \, , \tag{2.7}$$
$$(D_x w)^3 \equiv 0 \, , \tag{2.8}$$
$$M \, (D_x w)^2 + D_x w \, M \, D_x w + (D_x w)^2 \, M \equiv 0 \, , \tag{2.9}$$

avec $M = \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi = \partial_\theta w^t \nabla\varphi$.

Preuve. On calcule $D_x h^\varepsilon$ en utilisant la forme (2.2) on a

$$D_x h^\varepsilon(x) = (D_x w)\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) + \frac{1}{\varepsilon} \, \partial_\theta w\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) \otimes \nabla\varphi(x) \, .$$

La contrainte (2.5) donne

$$\sum_{j=0}^{3} \varepsilon^{-j}\, \Xi_j\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) \equiv 0\,, \qquad \Xi_j(x,\theta) \in C^0\big(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}^3)\big)$$

tel que

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= (D_x w)^3\,, \\ \Xi_1 &= (D_x w)^2 M + D_x w\, M\, D_x w + M\,(D_x w)^2\,, \\ \Xi_3 &= M^3 \\ \Xi_2 &= M^2\, D_x w + D_x w\, M^2 + M\, D_x w\, M\,. \end{aligned}$$

Vu la périodicité de w par rapport à θ, pour avoir (2.2) pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ il est nécessaire et suffisant d'imposer

$$\Xi_j \equiv 0\,, \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times\,, \qquad \forall\, j \in \{0,1,2,3\}\,. \tag{2.10}$$

On va résoudre l'équation (2.10) pour certain $r \in^*_+$, la condition $\Xi_0 \equiv 0$ et $\Xi_1 \equiv 0$ sont une répétition de (2.8) et (2.9), et $\Xi_3 \equiv 0$ conduit à

$$M^3 = (\nabla\varphi \cdot \partial_\theta w)^2\; \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi \;=\; 0\,,$$

on utilise (2.3) on en déduit que $\partial_\theta w \otimes \nabla\varphi \not\equiv 0$, ainsi la contrainte précédente donne (2.6). Cette derrière condition permet aussi de conclure que $M^2 \equiv 0$, donc la condition $\Xi_2 \equiv 0$ ce réduit en $M\, D_x w\, M \equiv 0$ d'où (2.7). □

2.2 Traitement du Système $\mathcal{S}$.

Vu le système $\mathcal{S}$, la contrainte (2.8) affirme que le rang de la matrice jacobienne de la fonction w ni pas maximal, il est donc soit zéro qui est un cas trivial, soit un soit deux, on s'intéresse plutôt à ce dernier cas, et on suppose que

$$\text{rg}\ D_x w \;\equiv\; 2\,, \quad \forall\,(\,x,\theta\,) \;\in\; \Omega_r^0\,. \tag{2.11}$$

Le théorème du rang constant [5] donne l'existence de deux fonctions $\psi \in^1 (\Omega_r^0 \times ;)$, $\tilde{\psi} \in^1 (\Omega_r^0 \times ;)$ et une fonction $\in^1 (^2 \times ;^3)$ tel que

$$\nabla\psi \wedge \nabla\tilde{\psi} \not\equiv 0\,, \quad \partial_\psi \wedge \partial_{\tilde{\psi}} \not\equiv 0. \tag{2.12}$$

et w elle seras définie par

$$w(x,\theta) = \big(\tilde{\psi}(x,\theta), \psi(x,\theta), \theta\big), \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times\,. \tag{2.13}$$

2.2.1 Traitement locale du système $\mathcal{S}$.

Soit (φ, w) un couple compatible, par un changement de la valeur de la fonction $w(x,\theta)$ par une translation de sa dernière variable en $w(x,\theta-\tilde{\theta})$, cela donne la possibilité de travailler localement au voisinage du point $\theta = 0$, on note par $\vec{0} = (0,0,0) \in \Omega_r^0 \subset^3$, et on va travailler localement au voisinage du point $(\vec{0},0) \in \Omega_r^0 \times$ et on le note Γ satisfait $(\vec{0},0) \in \Gamma \subset \Omega_r^0 \times$

$$\Gamma \equiv \Gamma_{r,\tilde{r}}^0 := \Omega_r^0 \times]-\tilde{r}, \tilde{r}[, \qquad (r,\tilde{r}) \in_+^* \times]0,1[.$$

On note par $i,\ j$ et k des éléments distincts de l'ensemble $\{1,2,3\}$. La condition (2.11) donne

$$\nabla w_k(x,\theta) \in Vec\,\langle \nabla w_i(x,\theta), \nabla w_j(x,\theta)\rangle\,, \quad \forall\,(x,\theta) \in \Gamma_{r,\tilde{r}}^0\,, \tag{2.14}$$
$$\nabla w_i(x,\theta) \wedge \nabla w_j(x,\theta) \neq 0\,, \quad \forall\,(x,\theta) \in \Gamma_{r,\tilde{r}}^0\,. \tag{2.15}$$

Alors le vecteur $\nabla\varphi(\vec{0})$ ne peut être parallèle simultanément à $\nabla w_i(\vec{0},0)$ et $\nabla w_j(\vec{0},0)$. Par une permutation des coordonnées x_1, x_2 et x_3 en accorde avec les composantes w_1, w_2 et w_3 et on fait diminuer $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\tilde{r} \in]0,1[$ on a

$$\nabla\varphi \wedge \nabla w_1 \not\equiv 0\,, \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Gamma_{r,\tilde{r}}^0 \tag{2.16}$$

donc les conditions (2.14) et (2.15) donne

$$\nabla w_3(x,\theta) \in Vec\,\langle \nabla w_1(x,\theta), \nabla w_2(x,\theta)\rangle\,, \quad \forall\,(x,\theta) \in \Gamma_{r,\tilde{r}}^0\,, \tag{2.17}$$
$$\nabla w_1(x,\theta) \wedge \nabla w_2(x,\theta) \neq 0\,, \quad \forall\,(x,\theta) \in \Gamma_{r,\tilde{r}}^0\,. \tag{2.18}$$

la condition (2.17) affirme que w_3 est fonction de w_1 et de w_2 alors il existe une fonction $\mathbb{W}_3 \in C^1(^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[;\mathbb{R})$ tel que

$$w_3(x,\theta) = \mathbb{W}_3\big(w_1(x,\theta), w_2(x,\theta), \theta\big), \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Gamma_{r,\tilde{r}}^0\,. \tag{2.19}$$

alors on note

$$\mathbb{W}(w_1,w_2,\theta) = \begin{pmatrix} \mathbb{W}_1(w_1,w_2,\theta) \\ \mathbb{W}_2(w_1,w_2,\theta) \\ \mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta) \end{pmatrix},$$

d'ou

$$w(x,\theta) = \mathbb{W}\big(w_1(x,\theta), w_2(x,\theta), \theta\big), \quad \forall\,(x,\theta) \in \Gamma_{r,\tilde{r}}^0\,. \tag{2.20}$$

Lemme 2 *Soit* (φ, w) *un couple compatible sur* $\varGamma^0_{r,\tilde r}$ *satisfait (2.17) - (2.18). Alors il existe une fonction scalaire* $W_2 \in C^1(^2\times]-\tilde r, \tilde r[;\mathbb{R})$ *tel que la second composante* w_2 *de* w *peut être mise sous la forme*

$$w_2(x,\theta) = W_2\big(\varphi(x), w_1(x,\theta), \theta\big), \quad \forall\,(x,\theta) \in \varGamma^0_{r,\tilde r}\,. \tag{2.21}$$

Preuve. Pour avoir (2.21), on montre que

$$\nabla w_2(x,\theta) \in Vec\,\langle \nabla\varphi(x), \nabla w_1(x,\theta)\rangle\,, \quad \forall\,(x,\theta) \in \varGamma^0_{r,\tilde r}\,. \tag{2.22}$$

On raisonnement par absurde, on suppose que (2.22) n'est pas vérifiée :

$$\exists\,(x_0,\theta_0) \in \varGamma^0_{r,\tilde r}\,, \qquad \nabla w_2(x_0,\theta_0) \notin Vec\,\langle \nabla\varphi(x_0), \nabla w_1(x_0,\theta_0)\rangle\,. \tag{2.23}$$

les deux conditions (2.16) et (2.23), affirment que les trois vecteurs $\nabla\varphi(x_0)$, $\nabla w_1(x_0,\theta_0)$ et $\nabla w_2(x_0,\theta_0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
On utilise l'expression de $\varXi_j$ et les relations (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9), le calcule fournit

$$\big(D_x w + \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi\big)^3 = \sum_{j=0}^{3} \varXi_j = 0\,.$$

Or la matrice

$$D_x w + \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi = \begin{pmatrix} {}^t\nabla w_1 + \partial_\theta w_1\,{}^t\nabla\varphi \\ {}^t\nabla w_2 + \partial_\theta w_2\,{}^t\nabla\varphi \\ {}^t\nabla w_3 + \partial_\theta w_3\,{}^t\nabla\varphi \end{pmatrix}$$

est de rang deux, vu (2.19), le troisième vecteur de cette matrice est de la forme

$$\begin{aligned} \nabla w_3 + \partial_\theta w_3\,\nabla\varphi = \\ &\partial_{w_1}\mathbb{W}_3\,(\nabla w_1 + \partial_\theta w_1\,\nabla\varphi) + \\ &\qquad \partial_{w_2}\mathbb{W}_3\,(\nabla w_2 + \partial_\theta w_2\,\nabla\varphi) + \\ &\qquad\qquad \partial_\theta\mathbb{W}_3\,\nabla\varphi\,. \end{aligned}$$

est donc il est en combinaison linéaire du premier et du second vecteur d'où l'existence de deux scalaire $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} &[\,\partial_\theta w_3 \;+\; a\,]\,(\nabla w_1 + \partial_\theta w_1\,\nabla\varphi) \\ &\qquad + [\,\partial_{w_2}\mathbb{W}_3 \;+\; b\,]\,(\nabla w_2 + \partial_\theta w_2\,\nabla\varphi) \\ &\qquad\qquad + \partial_\theta\mathbb{W}_3\,\nabla\varphi \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Or pour $(x,\theta) = (x_0,\theta_0)$ la famille $\nabla w_1, \nabla w_2, \nabla\varphi$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc

$$(\partial_\theta \mathbb{W}_3)\big(w_1(x_0,\theta_0), w_2(x_0,\theta_0), \theta_0\big) = 0 \;, \tag{2.24}$$

ce qui donne que

$$\partial_\theta w_3 \;=\; \partial_{w_1}\mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta_0)\;\partial_\theta w_1 \;+\; \partial_{w_2}\mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta_0)\;\partial_\theta w_2\,.$$

Vu (2.3), on a $\partial_\theta w_1(x_0,\theta_0) \neq 0$ ou $\partial_\theta w_2(x_0,\theta_0) \neq 0$. donc on peut supposer que

$$\partial_\theta w_2(x_0,\theta_0) \neq 0.$$

On utilise (2.24) la condition (2.6) ce transfome en

$$\nabla\varphi \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = -\,\frac{\partial_\theta w_1}{\partial_\theta w_2}\;\nabla\varphi\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W} \tag{2.25}$$

1. <u>*Traitement de la condition (2.8).*</u> On a

$$(D_x w)^3 = \big[(D_x w)^2\;\partial_{w_1}\mathbb{W}\big]\otimes\nabla w_1 + \big[(D_x w)^2\;\partial_{w_2}\mathbb{W}\big]\otimes\nabla w_2 \;\equiv\; 0\,.$$

on utlise la relation (2.18) on obtient

$$(D_x w)^2\;\partial_{w_1}\mathbb{W} \equiv 0, \qquad\qquad (D_x w)^2\;\partial_{w_2}\mathbb{W} \equiv 0. \tag{2.26}$$

La première partie de (2.26) donne

$$(D_x w)^2\;\partial_{w_1}\mathbb{W} \;=\; \alpha\;{}^t(1,0,\partial_{w_1}\mathbb{W}_3) \;+\; \beta\;{}^t(0,1,\partial_{w_2}\mathbb{W}_3) \;=\; 0$$

$$\alpha = {}^t\nabla w_1\,D_x w\,\partial_{w_1}\mathbb{W}, \quad \beta = {}^t\nabla w_2\,D_x w\,\partial_{w_1}\mathbb{W},$$

donc α et β sont nuls ce qui donne

$$(\nabla w_1\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W})^2 + (\nabla w_1\cdot\partial_{w_2}\mathbb{W})\;(\nabla w_2\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W}) = 0\;, \tag{2.27}$$
$$(\nabla w_2\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W})\;(\nabla w_1\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2\cdot\partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0\;. \tag{2.28}$$

Par la même méthode en utilisant cette fois la deuxième partie de (2.26) on a

$$(\nabla w_1\cdot\partial_{w_2}\mathbb{W})\;(\nabla w_1\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2\cdot\partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0\;, \tag{2.29}$$
$$(\nabla w_2\cdot\partial_{w_2}\mathbb{W})^2 + (\nabla w_1\cdot\partial_{w_2}\mathbb{W})\;(\nabla w_2\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W}) = 0\;. \tag{2.30}$$

On remarque qu'il est impossible d'avoir

$$\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W} \neq 0. \tag{2.31}$$

car si on suppose que (2.31) est vrais, alors (2.28) et (2.29) donne la relation $\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W} = 0$ et $\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W} = 0$, et (2.27) - (2.30) conduit á $\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W} = 0$ et $\nabla w_2 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W} = 0$. ce qui contredit (2.31). D'ou

$$\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W} = 0. \tag{2.32}$$

La condition (2.32) élimine (2.28) et (2.29), et rendre (2.30) équivalente à (2.27), autrement on a le système

$$(\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W})^2 + (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W})\,(\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W}) = 0\,, \tag{2.33}$$

$$\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W} = 0\,. \tag{2.34}$$

Les conditions (2.33) et (2.34) affirme que les vecteurs

$$(\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W}, \nabla w_2 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W}) \in \mathbb{R}^2, \qquad (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W}, \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W}) \in \mathbb{R}^2$$

sont colinéaire, donc il existe $(\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ tel que

$$\nabla w_1 \cdot (\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1} \mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2} \mathbb{W}) = 0, \qquad \nabla w_2 \cdot (\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1} \mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2} \mathbb{W}) = 0. \tag{2.35}$$

2. *Traitement de la condition (2.7)* évaluer en (x_0, θ_0). Les conditions (2.24), (2.25) et (2.34), transforme (2.7) en

$$\Big[2\ \partial_\theta w_1\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W}) + \partial_\theta w_2\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W}) - \frac{(\partial_\theta w_1)^2}{\partial_\theta w_2}\ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W})\Big]\ (\nabla \varphi \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W}) = 0. \tag{2.36}$$

Un Produit de (2.36) par $\partial_\theta w_2\ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W})$, et vu (2.27) et (2.32) donne

$$(\nabla \varphi \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W})\ (\nabla w_2 \cdot \partial_\theta w)^2 = 0\,. \tag{2.37}$$

on multipliant (2.36) par $\partial_\theta w_2\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2} \mathbb{W})$ et on utilise (2.27) on a

$$(\nabla \varphi \cdot \partial_{w_1} \mathbb{W})\ (\nabla w_1 \cdot \partial_\theta w)^2 = 0\,. \tag{2.38}$$

Deux cas :

- Le cas $\nabla\varphi\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W}\neq 0$. Les équations (2.6), (2.37) et (2.38) affirmant que $\nabla\varphi$, ∇w_1 et ∇w_2 sont dans $(\partial_\theta w^\perp)$. Ce qui est en contradiction avec (2.23).
- Si $\nabla\varphi\cdot\partial_{w_1}\mathbb{W}=0$. L'équation (2.25) donne $\nabla\varphi\cdot\partial_{w_2}\mathbb{W}=0$, d'ou

$$\nabla\varphi\cdot(\alpha^{'}\,\partial_{w_1}\mathbb{W}+\beta^{'}\,\partial_{w_2}\mathbb{W})=0,\quad \forall(\alpha^{'},\beta^{'})\in\mathbb{R}^2. \tag{2.39}$$

Soit $\alpha^{'}=\tilde{\alpha}$ et $\beta^{'}=\tilde{\beta}$, vu la formule de $\mathbb{W}$ et le fait que $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\neq(0,0)$, on a

$$\tilde{\alpha}\,\partial_{w_1}\mathbb{W}+\tilde{\beta}\,\partial_{w_2}\mathbb{W}={}^t(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\star)\neq(0,0,0)\,.$$

or (2.35) et (2.39) (dans le cas ou $\alpha^{'}=\tilde{\alpha}$ et $\beta^{'}=\tilde{\beta}$) donne $\nabla\varphi$, ∇w_1 et ∇w_2 sont dans $(\tilde{\alpha}\,\partial_{w_1}\mathbb{W}+\tilde{\beta}\,\partial_{w_2}\mathbb{W})^\perp$, ce qui contredit (2.23).

d'ou (2.22). □

Proposition 2 *On supose (2.3) et soient $\tilde{\theta}\in$ et (φ,w) un couple compatible sur $\Gamma^{\tilde{\theta}}_{r,\tilde{r}}$. Alors par un choix de $r\in^*_+$ et $\tilde{r}\in]0,1[$ et avec une permutation des coordonnées x_1,x_2 et x_3 en accorde avec les composantes w_1, w_2 et w_3 de w, il est possible d'avoir (2.16) et la fonction $w(x,\theta)$ peut être mise sous la forme*

$$w(x,\theta)=W\big(\varphi(x),w_1(x,\theta),\theta\big)\,,\qquad (x,\theta)\in\Gamma^{\tilde{\theta}}_{r,\tilde{r}} \tag{2.40}$$

avec $W={}^t(W_1,W_2,W_3)\in C^1(^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[;\mathbb{R}^3)$ et ces deux première composantes W_1 et W_2 vérifiant

$$W_1(\varphi,w_1,\theta)=w_1\,,\quad \forall\,(\varphi,w_1,\theta)\in^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[, \tag{2.41}$$
$$\partial_\varphi W_2(\varphi,w_1,\theta)\neq 0\,,\quad \forall\,(\varphi,w_1,\theta)\in^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[. \tag{2.42}$$

Preuve. On peut prendre $\tilde{\theta}=0$. Vu (2.21), la fonction w_3 est de la forme

$$w_3(x,\theta)=W_3\big(\varphi(x),w_1(x,\theta),\theta\big),\qquad \forall\,(x,\theta)\in\Gamma^0_{r,\tilde{r}}$$

tel que $W_3(\varphi,w_1,\theta):=\mathbb{W}_3\big(w_1,W_2(\varphi,w_1,\theta),\theta\big)$. D'où

$$W_1(\varphi,w_1,\theta):=w_1\,,\qquad \forall\,(\varphi,w_1,\theta)\in^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[.$$

Ce qui donne (2.40) et (2.41), vu (2.16) pour avoir (2.3), il faut que le vecteur $\partial_\varphi W\wedge\partial_{w_1}W$ est non nul sur $^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[$, ce qui donne que $\partial_\varphi W_2\neq 0$ sur $^2\times]-\tilde{r},\tilde{r}[$. □

2.2.2 Traitement global du système $\mathcal{S}$.

Proposition 3 *Soit (φ, w) Un couple compatible sur la boule $\Omega_r^0\times$. On fait réduire $r \in_+^*$ si nécessaire alors on a l'existence d'une fonction scalaire $\psi \in^1 (\Omega_r^0\times;\mathbb{R})$ vérifiée*

$$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0 \,,$$

et une fonction vectoriel $\in^1 ({}^2\times\mathbb{T};\mathbb{R}^3)$ tel que

$$w(x,\theta) = \big(\varphi(x), \psi(x,\theta), \theta\big)\,, \qquad \forall\ (x,\theta) \in \Omega_r^0 \times\ . \tag{2.43}$$

$$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0\,, \qquad \partial_\varphi \wedge \partial_\psi \not\equiv 0\,. \tag{2.44}$$

Preuve. Soit (φ, w) un couple compatible et soit (2.11) donc

$$\dim \mathrm{Vec}\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle = 2, \qquad \forall\ (x,\theta)\ \in\ \Omega_r^0 \times \mathbb{T}. \tag{2.45}$$

Une permutation de x_1, x_2 et x_3 et vu la Proposition 2, on a

$$\nabla\varphi \in Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2\rangle\,.$$

Donc $\nabla\varphi$ et dans l'espace $Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle$. alors

$$\nabla\varphi\ \in\ Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle\,, \qquad \forall\ (x,\theta)\ \in\ \Omega_r^0 \times \mathbb{T}. \tag{2.46}$$

Soit $\theta \in$ fixée, et soit une fonction $\Psi_\theta \in C^1({}^3;)$ et $r_\theta \in]0, r[$, et on construit

$$\psi_\theta(x,\tilde\theta) := \Psi_\theta(w_1,w_2,w_3)(x,\tilde\theta)\,, \qquad \forall (x,\tilde\theta) \in \Omega_{r_\theta}^0 \times]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[.$$

On peut déduire à partir de la condition (2.45) et (2.46) l'existence d'une fonction $\Psi_\theta \in C^1({}^3;)$ et $r_\theta \in]0,r[$ tel que $\nabla\varphi$ indépendant de $\nabla\psi_\theta$, d'où

$$Vec\,\langle \nabla\varphi, \nabla\psi_\theta\rangle \equiv Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle\,, \quad \forall (x,\theta) \in \Omega_{r_\theta}^0 \times]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[.$$

Les intervalles $]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[$ avec $\theta \in$ forment un recouvrement ouvert de . Or est compact,donc il existe une sous famille finie qui couvre

$$\subset \bigcup_{i=1}^{N}]\theta_i - r_{\theta_i}, \theta_i + r_{\theta_i}[.$$

On considère maintenant une partition de l'unité formé par des fonction $\{\chi_i\}_{i=1}^N$ tel que $\chi_i \in C^\infty(;_+)$ sont ajustés de tel sorte que

$$\operatorname{supp} \chi_i \subset]\theta_i - r_{\theta_i}, \theta_i + r_{\theta_i}[\,, \quad \sum_{i=1}^N \chi_i \equiv 1 \,.$$

On remplace $r \in^*_+$ par le minimum des r_{θ_i} (avec $i \in \{1, \cdots, N\}$). Alors, on peut définir la fonction

$$\psi(x,\theta) := \sum_{i=1}^N \psi_{\theta_i}(x,\theta)\, \chi_i(\theta) \,.$$

Ce qui donne (2.44) avec

$$Vec\,\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle \equiv Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3 \rangle \,, \qquad \forall (x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T} \,. \quad (2.47)$$

La condition (2.47) affirme que les composantes w_i sont des fonctions de φ, ψ et de θ ce qui donne (2.43). □

2.3 Conditions de compatibilité sur le triplet $(\varphi, \psi,)$.

On va donner les conditions nécessaires et suffisantes sur (φ, ψ, W) pour que le couple (φ, w) définie par la Proposition 3 soit compatible.

Proposition 4 *On suppose (2.11), (2.43) et (2.3). Alors, le couple (φ, w) est compatible sur $\Omega_r^0\times$ si et seulement si on a (2.44) complété par le système des contraintes*

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta + \partial_\theta\psi \;\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \equiv 0 \,, \quad (2.48)$$
$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi)\; (\nabla\psi \cdot \partial_\theta + \partial_\theta\psi \;\nabla\psi \cdot \partial_\psi) \equiv 0 \,, \quad (2.49)$$
$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi)^2 + (\nabla\varphi \cdot \partial_\psi)\; (\nabla\psi \cdot \partial_\varphi) \equiv 0 \,, \quad (2.50)$$
$$\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi + \nabla\psi \cdot \partial_\psi \equiv 0 \,. \quad (2.51)$$

Preuve. La condition (2.48) c'est une répétition de (2.6). La contrainte (2.49) découle de (2.7) lorsqu'on remplace la matrice $D_x w(x,\theta)$ par

$$D_x w \;=\; \partial_\varphi \otimes \nabla\varphi \;+\; \partial_\psi \otimes \psi \,. \quad (2.52)$$

En utilisant (2.52) la relation (2.8) ce transforme en

$$(D_x w)^2\, \partial_\varphi \otimes \nabla\varphi + (D_x w)^2\, \partial_\psi \otimes \nabla\psi \,=\, 0\,.$$

Vu (2.44), les deux vecteurs $\nabla\varphi$ et $\nabla\psi$ sont indépendant, ce qui permet de conclure que

$$(D_x w)^2\, \partial_\varphi = 0\,, \tag{2.53}$$
$$(D_x w)^2\, \partial_\psi = 0\,. \tag{2.54}$$

(2.52) transforme (2.53) en

$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi)^2 + (\nabla\psi \cdot \partial_\varphi)\,(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi) = 0\,, \tag{2.55}$$
$$(\nabla\psi \cdot \partial_\varphi)\;(\nabla\psi \cdot \partial_\psi + \nabla\varphi \cdot \partial_\varphi) = 0\,. \tag{2.56}$$

On fait la même chose pour (2.54), on a

$$(\nabla\psi \cdot \partial_\psi)^2 + (\nabla\psi \cdot \partial_\varphi)\,(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi) = 0\,, \tag{2.57}$$
$$(\nabla\varphi \cdot \partial_\psi)\;(\nabla\psi \cdot \partial_\psi + \nabla\varphi \cdot \partial_\varphi) = 0\,. \tag{2.58}$$

Les deux relations (2.50) et (2.55) sont similaires, de plus on a

$$\nabla\psi \cdot \partial_\psi + \nabla\varphi \cdot \partial_\varphi \equiv 0,$$

La preuve elle ce fait par absurde et de la même manière que dans la preuve du Lemme 2. Finalement (2.51) rendre (2.58) et (2.56) juste et (2.55) devient équivalente á (2.57) et conduit á (2.50). □

2.4 Traitement du cas $\boldsymbol{\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \mathbf{W} = 0}$

Dans le bute de ne pas reproduire ce qui est apparu en [2], on va travailler avec , φ et ψ ajuster de tel facon que

$$\partial_\psi \wedge \partial_\theta \not\equiv 0\;, \quad \nabla\psi \wedge \nabla\varphi \not\equiv 0\;. \tag{2.59}$$

Il existe plusieurs manière pour factoriser le profil $w(x, \theta)$ comme il est proposé dans (2.43). En effet, si

$$\chi(\varphi, \psi, \theta) \in^\infty (^2 \times;\,)$$

une fonction quelconque tel que $\partial_\psi \chi \not\equiv 0$, on note

$$\tilde{\psi} := \chi(\varphi, \psi, \theta) \ ,$$

on trouve

$$w \equiv (\varphi, \psi, \theta) \equiv \tilde{}(\varphi, \tilde{\psi}, \theta)$$

avec

$$(\varphi, \psi, \theta) \equiv \tilde{}\big(\varphi, \chi(\varphi, \psi, \theta), \theta\big) \ .$$

Alors, on va avoir

$$\partial_\psi \equiv \partial_\psi \chi \ \partial_{\tilde{\psi}} \tilde{} \not\equiv 0$$

avec

$$\partial_\varphi \equiv \partial_{\tilde{\varphi}} \tilde{} + \partial_\varphi \chi \ \partial_\psi / \partial_\psi \chi \, , \qquad \partial_\theta \tilde{\psi} \equiv \partial_\theta \psi \ \partial_\psi \chi + \partial_\theta \chi \, .$$

Dans cette transformation $\partial_\psi \not\equiv 0$ et $\partial_\varphi \not\equiv 0$ sont préserve. autrement dit, on a une certain liberté concernant $\partial_\theta \psi$. On ajustant χ convenablement, on ait sur que $\partial_\theta \psi \not\equiv 0$ ou $\partial_\theta \psi \equiv 0$. Selon les circonstances, nous allons utiliser une ou l'autre de ces deux conditions. En prévision de ce qui suit, nous mettons de côté le cadre (2.60) donnée ci-après

$$\partial_\theta \psi \not\equiv 0 \, , \qquad \partial_\varphi \not\equiv 0 \, , \qquad \partial_\psi \wedge \partial_\theta \not\equiv 0 \, , \qquad \nabla\psi \wedge \nabla\varphi \not\equiv 0 \, . \tag{2.60}$$

Nous discutons ici le système (2.48)-(2.49)-(2.50)-(2.51) sous la restriction (2.60) est dans le cas ou

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \equiv 0.$$

autrement dit on va travailler avec (2.43), (2.44) et (2.60) combiné avec les conditions

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta = 0, \tag{2.61}$$
$$\nabla\varphi \cdot \partial_\varphi = 0, \tag{2.62}$$
$$\nabla\psi \cdot \partial_\psi = 0, \tag{2.63}$$
$$\nabla\varphi \cdot \partial_\psi = 0. \tag{2.64}$$

2.4.1 La structure de la phase φ.

Lemme 3 *On suppose les conditions (2.3), (2.44) et (2.60) ainsi que (2.61), (2.62), (2.63) et (2.64). On fait diminuer $r \in^*_+$ et par une permutation des coordonnées x_1, x_2, x_3 et des composantes $\partial_1\varphi$, $\partial_2\varphi$, $\partial_3\varphi$, on a l'existence de deux fonctions scalaires $f \in^1 (\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $g \in^1 (\mathbb{R};\mathbb{R})$ ajuster de tel sorte que*

$$\nabla\varphi(x) \equiv \begin{pmatrix} f\big(\varphi(x)\big) \\ 1 \\ g\big(\varphi(x)\big) \end{pmatrix} \partial_2\varphi(x)\,, \qquad \forall x \in \Omega_r^0\,. \tag{2.65}$$

Preuve. Les conditions (2.61) et (2.64) informe que la directions $\nabla\varphi$ est parallèle à $\partial_\theta \wedge \partial_\psi \not\equiv 0$. ainsi la direction $\nabla\varphi$ peut être vu comme fonction de (φ, ψ, θ). On diminue $r \in_+^*$ et on permute les coordonnées x_1, x_2, x_3 et les composantes $\partial_1\varphi$, $\partial_2\varphi$, $\partial_3\varphi$, on peut toujours avoir

$$\nabla\varphi \,=\, E(\varphi, \psi, \theta)\; \partial_2\varphi\,, \qquad E(\varphi, \psi, \theta) := \begin{pmatrix} f(\varphi, \psi, \theta) \\ 1 \\ g(\varphi, \psi, \theta) \end{pmatrix}.$$

Or la fonction φ ne dépend pas de θ, alors nécessairement on a

$$\partial_\theta\psi\, \partial_\psi E + \partial_\theta E \equiv 0.$$

Dans le cas ou $\partial_\psi E \equiv 0$, on a aussi $\partial_\theta E \equiv 0$ donc (2.65) est vérifiée. A partir de maintenant on suppose que

$$\partial_\psi E \not\equiv 0.$$

L'application $\partial_\theta\psi$ peut être représenter comme une fonction de (φ, ψ, θ), ce qui donne

$$\partial_\theta\psi = k(\varphi, \psi, \theta)$$

avec $k \in^1 (^2\times;)$. On considère n'importe qu'elle fonction $\chi(\varphi, \psi, \theta)$ satisfait

$$\partial_\psi\chi \not\equiv 0\;, \quad k\,\partial_\psi\chi + \partial_\theta\chi \equiv 0.$$

On défini $\tilde\psi := \chi(\varphi, \psi, \theta)$. Alors on peut faire un changement des variables (φ, ψ, θ) à $(\varphi, \tilde\psi, \theta)$ ce qui donne

$$E(\varphi, \psi, \theta) \equiv \tilde E(\varphi, \tilde\psi, \theta).$$

On observe que

$$\partial_\theta\big[E(\varphi, \psi, \theta)\big] \equiv \partial_\theta\psi\,\partial_\psi E + \partial_\theta E \equiv 0 \equiv \partial_\theta\big[\tilde E(\varphi, \tilde\psi, \theta)\big] \equiv \partial_\theta\tilde\psi\,\partial_{\tilde\psi}\tilde E + \partial_\theta \tilde E\,.$$

Par construction on a $\partial_\theta\tilde\psi \equiv 0$. Il en résulte que la fonction $\tilde E$ ne dépend pas de θ. Donc

$$\nabla\varphi = \tilde{E}(\varphi,\tilde{\psi})\;\partial_2\varphi\,, \quad \tilde{E}(\varphi,\tilde{\psi}) := \begin{pmatrix} \tilde{f}(\varphi,\tilde{\psi}) \\ 1 \\ \tilde{g}(\varphi,\tilde{\psi}) \end{pmatrix}\,. \tag{2.66}$$

Or $\partial_\psi E \not\equiv 0$, donc on a nécessairement $\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{E} \not\equiv 0$.
On pose

$$(\varphi,\psi,\theta) \equiv \tilde{\ }(\varphi,\tilde{\psi},\theta),$$

on va travailler avec (2.61)-(2.62)-(2.63)-(2.64) mais cette fois avec $\tilde{\ }$ et $\tilde{\psi}$ à la place de et ψ. On décompose $\tilde{\ }$ en

$$\tilde{\ }(\varphi,\tilde{\psi},\theta) = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{g} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{f} \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ 1 \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

ou les trois fonctions α, β et γ dépend en φ, $\tilde{\psi}$ et θ. La condition (2.61) donne $\partial_\theta\gamma \equiv 0$. De plus la restriction (2.64) permet d'avoir

$$\partial_{\tilde{\psi}}\gamma\,(\tilde{f}^2+1+\tilde{g}^2) - \alpha\,\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{g} - \beta\,\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{f} + \gamma\,(\tilde{f}\,\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{f} + \tilde{g}\,\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{g}) \equiv 0\,. \tag{2.68}$$

On dérive (2.68) en θ, on obtient

$$\partial_\theta\alpha\,\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{g} + \partial_\theta\beta\,\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{f} \equiv 0\,. \tag{2.69}$$

La symétrie de la deuxième dérivation exprimé sous la forme $\partial^2_{13}\varphi \equiv \partial^2_{31}\varphi$ peut être traduit par

$$\begin{pmatrix} -\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{g} \\ \tilde{f}\,\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{g} - \tilde{g}\,\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{f} \\ \partial_{\tilde{\psi}}\tilde{f} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1\tilde{\psi} \\ \partial_2\tilde{\psi} \\ \partial_3\tilde{\psi} \end{pmatrix} \equiv 0\,. \tag{2.70}$$

On combine (2.69) et (2.70) avec $\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{E} \not\equiv 0$, on peut déduire que

$$\nabla\tilde{\psi}\cdot\partial_\theta\tilde{\ } \equiv \partial_\theta\beta\,\partial_1\tilde{\psi} - (\tilde{f}\,\partial_\theta\beta + \tilde{g}\,\partial_\theta\alpha)\,\partial_2\tilde{\psi} + \partial_\theta\alpha\,\partial_3\tilde{\psi} \equiv 0\,. \tag{2.71}$$

Or $\nabla\varphi\wedge\nabla\tilde{\psi} \not\equiv 0$. Donc les relations (2.61), (2.63), (2.64) et (2.71) indique que les deux vecteurs $\partial_\theta\tilde{\ }$ et $\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{\ }$ sont colinéaires.Il s'ensuit que

$$\partial_\theta \wedge \partial_\psi = \partial_\psi\chi\;\partial_\theta\tilde{\ }\wedge\partial_{\tilde{\psi}}\tilde{\ } \equiv 0.$$

Cette dernière information est clairement en contradiction avec (2.60). □

Rappelons ici un résultat de base (voir [3, 2]) concernant (2.65).

Lemme 4 *On sélectionne trois fonctions $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ et $\varphi_{00}(x_2)$ dans $^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Alors, pour $r \in^*_+$ assez petit, il existe une unique expression $\varphi(x) \in^1 (\Omega^0_r;)$ satisfait (2.65), à savoir*

$$\partial_1\varphi - f\circ\varphi\ \partial_2\varphi = 0\,, \qquad \partial_3\varphi - g\circ\varphi(x)\ \partial_2\varphi = 0\,, \qquad \forall x \in \Omega^0_r \tag{2.72}$$

avec la donnée initiale $\varphi(0,x_2,0) = \varphi_{00}(x_2)$ pour tout $x_2 \in]-r,r[$.

Preuve. Le problème de Cauchy pour la première lois de conservation donné au niveau de (2.72), à savoir

$$\partial_1\varphi_0 - f\circ\varphi_0\ \partial_2\varphi_0\ =\ 0\,, \qquad \varphi_0(0,x_2) = \varphi_{00}(x_2) \tag{2.73}$$

admet une solution de classe ^{1} notée $\varphi_0(x_1,x_2)$ au voisinage du point $(0,0) \in^2$. Alors, On considère la solution locale de classe ^{1} $\varphi(x)$ de

$$\partial_3\varphi - g\circ\varphi(x)\ \partial_2\varphi\ =\ 0\,, \qquad \varphi(x_1,x_2,0) = \varphi_0(x_1,x_2)\,. \tag{2.74}$$

Pour avoir (2.65), il suffit d'avoir

$$\Xi := \partial_1\varphi - f\circ\varphi(x)\partial_2\varphi \equiv 0$$

pour tout $x_3 \neq 0$. Cette propriété est une conséquence de la construction précédente qui implique que

$$\partial_3\Xi - g\circ\varphi(x)\ \partial_2\Xi\ =\ g'\circ\varphi\ \partial_2\varphi\ \Xi\,, \qquad \Xi(x_1,x_2,0) = 0\,.$$

□

2.4.2 Structure du profile w.

Dans ce paragraphe 2.4.2, le point de départ pour la description de (2.67) qui est basé sur un fonction auxiliaire $\psi(x)$ (ne dépende pas de θ). a ce stade, on sais que w peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} w(x,\theta) &= \big(\varphi(x),\psi(x),\theta\big) \\ &= \alpha\big(\varphi(x),\psi(x),\theta\big)\begin{pmatrix}0\\ -g\circ\varphi(x)\\ 1\end{pmatrix} + \beta\big(\varphi(x),\psi(x),\theta\big)\begin{pmatrix}1\\ -f\circ\varphi(x)\\ 0\end{pmatrix} \\ &\quad +\gamma\big(\varphi(x),\psi(x),\theta\big)\begin{pmatrix}f\circ\varphi(x)\\ 1\\ g\circ\varphi(x)\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.75}$$

avec la phase φ satisfait (2.72). Il faut ajuster les ingrédients φ, ψ et selon (2.61)-$\cdots$-(2.64). On observe que la contrainte (2.61) est la même chausse que

$$\partial_\theta \gamma \equiv 0.$$

On utilise (2.72), la condition (2.64) est équivalente à

$$\partial_\psi \gamma \equiv 0.$$

Donc la fonction γ dépend que de la variable φ. On pose

$$\gamma(\varphi, \psi, \theta) \equiv \gamma(\varphi).$$

Maintenant on peut interpréter les deux conditions (2.62) et (2.63) en

$$-\alpha\, g' - \beta\, f' + \gamma'\, (f^2 + 1 + g^2) + \gamma\, (f\, f' + g\, g') = 0\,, \qquad (2.76)$$
$$\partial_\psi \alpha\ \nabla \psi \cdot {}^t(0, -g, 1) + \partial_\psi \beta\ \nabla \psi \cdot {}^t(1, -f, 0) = 0\,. \qquad (2.77)$$

A partir de (2.76), il est simple d'extraire

$$\partial_\theta \alpha\ g' + \partial_\theta \beta\ f' \equiv 0\,, \qquad \partial_\psi \alpha\ g' + \partial_\psi \beta\ f' = 0\,. \qquad (2.78)$$

La discutions de (2.76)-(2.77) est séparée en deux cas.

2.4.3 Le cas $f' \equiv g' \equiv 0$.

Par hypothèse on a $f \equiv a$ et $g \equiv b$ avec $(a, b) \in^2$. Donc

$$\varphi(x) = \varphi_{00}(a x_1 + x_2 + b x_3)\,, \qquad \varphi_{00} \in^1 (;)\,. \qquad (2.79)$$

vu (2.76), on a $\gamma \equiv c$ pour $c \in$. De plus la fonction $\psi(x)$ peut être mise sous la forme

$$\psi(x) = \Psi(x_1, x_3, a x_1 + x_2 + b x_3)\,, \qquad \Psi(X, Y, Z) \in^1 (^3;)\,. \qquad (2.80)$$

Alors, la condition (2.77) ce transforme en un lois de conservation (impliquant Z et θ comme paramètre)

$$\partial_\psi \beta\big(\varphi_{00}(Z), \Psi, \theta\big)\ \partial_X \Psi + \partial_\psi \alpha\big(\varphi_{00}(Z), \Psi, \theta\big)\ \partial_Y \Psi \equiv 0\,. \qquad (2.81)$$

Au niveau de (2.81), les variables Z et θ joue le rôle d'un paramètre. Or $\Psi(X, Y, Z)$ ne dépend pas de $\theta \in$, on a alors (quand $\partial_\psi \alpha \not\equiv 0$)

$$\partial_\psi \beta \,=\, \chi(\varphi, \psi)\, \partial_\psi \alpha\,, \qquad \chi \in^1 (^2;)\,. \tag{2.82}$$

l'équation (2.81) ce réduit en

$$\chi\big(\varphi_{00}(Z), \varPsi\big)\, \partial_X \varPsi \,+\, \partial_Y \varPsi \,\equiv\, 0\,. \tag{2.83}$$

Nous pouvons résumer la situation dans laquelle $\nabla\varphi \cdot \partial_\psi \equiv f' \equiv g' \equiv 0$ selon lé résultat suivant

Proposition 5 *On choisie* $(a, b, c) \in^3$*. On sélectionne les fonctions lisse* $\varphi_{00}(Z)$*,* $\chi(\varphi, \psi)$ *et* $\alpha(\varphi, \psi, \theta)$*, n'importe qu'elles fonctions* $\beta(\varphi, \psi, \theta)$ *et* $\varPsi(X, Y, Z)$ *vérifiant respectivement (2.82) et (2.83). On définie* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *selon (2.79) et (2.80). On considère la fonction* $w(x, \theta)$ *donnée par*

$$w = \alpha(\varphi, \psi, \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} + \beta(\varphi, \psi, \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}. \tag{2.84}$$

Alors, le couple (φ, w) *est compatible.*

Soit φ donnée par (2.79). Et soit la fonction $m \in^1 (\times;)$, on définie

$$\beta(\varphi, \psi, \theta) \,:=\, m(\varphi, \theta) + \varphi \int_0^\psi s\, (\partial_\psi \alpha)(\varphi, s, \theta)\, ds\,.$$

Alors, on a (2.81) avec $\psi(x) = x_1/\big(1 + x_3\, \varphi(x)\big)$. les vecteurs $\nabla\varphi$ et $\nabla\psi$ sont no colinéaire. Par un choix de m et de α convenablement, on peut obtenir

$$\begin{aligned} \partial_\psi \wedge \partial_\theta &= (\partial_\psi \alpha\ \partial_\theta \beta - \partial_\psi \beta\ \partial_\theta \alpha) \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \partial_\psi \alpha\ \left(\partial_\theta m - \varphi \int_0^\psi \partial_\theta \alpha(\varphi, s, \theta)\, ds \right) \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \\ &\not\equiv 0\,. \end{aligned}$$

La relation (2.59) n'est pas satisfait. Cette exemple montre que la situation présenter au niveau de la Proposition 5 n'apparait pas dans [2].

On note que le support en (X, Y) pour une solution no trivial $\varPsi \not\equiv 0$ de (2.83) ne peut être compacte. De plus quand χ dune façon non linéaire en ψ, dû à la formation des singularités, la construction est valable toujours d'une manière locale.

2.4.4 Le cas $f' \not\equiv 0$ ou $g' \not\equiv 0$.

Vu (2.78), on a $\partial_\theta \wedge \partial_\psi \equiv 0$ ce qui implique (2.59). cette situation est exclus au niveau de (2.60) par ce que elle apparait en [2].
On va voir ce qui ce passe quand $f' \not\equiv 0$, l'autre situation ($g' \not\equiv 0$) est similaire. Soit la fonction $\psi(x)$ de la forme

$$\psi(x) = \Psi\big(x_1, x_3, \varphi(x)\big), \qquad \Psi(X, Y, Z) \in^1 (^3;). \tag{2.85}$$

A partir de (2.78), on extrait $\partial_\psi \beta$ en fonction de $\partial_\psi \alpha$. Injectant le résultat dans (2.77). vu (2.60), on a $\partial_\psi \alpha \not\equiv 0$. Ce qui donne

$$\Psi(X, Y, \varphi) = \Psi_0\big(g'(\varphi) Y + f'(\varphi) X\big), \qquad \Psi_0 \in^1 (;). \tag{2.86}$$

Le variable φ est fixé, la fonction Ψ est constant sur les lignes. Encore le support ne peut être compacte.

Proposition 6 *On sélectionne les fonctions f, g, γ et Ψ_0 dans $^1(;)$ avec $f' \not\equiv 0$. On applique le Lemme 4, on peut construire une phase $\varphi(x)$ solution de (2.72). On définie la fonction $\psi(x)$ selon (2.85) et (2.86). On donne n'importe qu'elle $\alpha \in^1 (^2\times;)$ avec $\partial_\psi \alpha \not\equiv 0$, on définie $\beta \in^1 (^2\times;)$ selon la relation (2.76). Finalement on considère l'expression $w(x, \theta)$ donnée par (2.43) ou $\gamma(\varphi, \psi, \theta) \equiv \gamma(\varphi)$. Alors, le couple (φ, w) est compatible.*

Un exemple, on prend $f(\varphi) = \varphi$, $g(\varphi) = \varphi^{-1}$ et $\gamma(\varphi) \equiv 0$. Et une solution de (2.65), par exemple

$$\varphi(x) = \frac{1 - x_2}{2x_1} + \sqrt{\Big(\frac{1 - x_2}{2x_1}\Big)^2 - \frac{x_3}{x_1}}.$$

Pour la fonction ψ, Soit la fonction $\Xi \in^1 (^3;)$, On peut prendre

$$\psi(x) \equiv \psi(x, \theta) = \Xi\big(\varphi(x), x_2 + 2\varphi(x) x_1, x_3 - \varphi(x)^2 x_1\big).$$

Chapitre 3

Propagation des couples compatibles dans le cas du système d'Euler incompressible tridimensionnelle

Soit (φ, w) un couple compatible. La fonctions $w(x,\theta)$ est donnée par (2.43) tel que $(\varphi, \psi,)$ est solution de (2.48)-(2.49)-(2.50)-(2.51) et (2.44).

Théorème 6 *Soit (φ, w) un couple compatible sur $\Omega_r^0 \times$. Il existe deux fonctions $(\varphi, \psi, \theta) \in^1 (^2\times;)$ et $\psi(x,\theta) \in^1 (\Omega_r^0 \times;)$ tel que la fonction $w(x,\theta)$ peut être factorisé sous la forme*

$$w(x,\theta) = \big(\varphi(x), \psi(x,\theta), \theta\big), \qquad \nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0. \tag{3.1}$$

Et il existe $T > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \big((\Phi, \Psi, \theta)\cdot\nabla\big)\Phi = 0\,, & \Phi(0,x) = \varphi(x)\,, \\ \partial_t \Psi + \big((\Phi, \Psi, \theta)\cdot\nabla\big)\Psi = 0\,, & \Psi(0,x,\theta) = \psi(x,\theta)\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

admet une solution $(\Phi, \Psi)(t,x,\theta)$ dans le domain $\Omega_r^T \times \mathbb{T}$. De plus on a $\partial_\theta \Phi \equiv 0$ et pour toute $\varepsilon \in]0,1]$, l'oscillation

$$u^\varepsilon(t,x) = \big(\Phi(t,x), \Psi(t,x,\Phi(t,x)/\varepsilon), \Phi(t,x)/\varepsilon\big), \quad \varepsilon \in]0,1] \tag{3.3}$$

est une solution de (2.1) dans le domaine Ω_r^T avec la donnée initiale $u^\varepsilon(0,\cdot)$ satisfait (2.2).

$$\tilde{}(t,x,\theta) := \big(\Phi(t,x), \Psi(t,x,\theta), \theta\big)$$

est compatible sur $B(0, r - tV[\times\mathbb{T}$. Plus précisément pour $t \in [0,T]$, on a nécessairement

$$\nabla\Phi\cdot\partial_\theta + \partial_\theta\Psi\ \nabla\Phi\cdot\partial_\Psi \equiv 0\,, \tag{3.4}$$

$$(\nabla\Phi\cdot\partial_\Psi)\ (\nabla\Psi\cdot\partial_\theta + \partial_\theta\Psi\ \nabla\Psi\cdot\partial_\Psi) \equiv 0\,, \tag{3.5}$$

$$(\nabla\Phi\cdot\partial_\varphi)^2 + (\nabla\Phi\cdot\partial_\Psi)\ (\nabla\Psi\cdot\partial_\varphi) \equiv 0\,, \tag{3.6}$$

$$\nabla\Phi\cdot\partial_\varphi + \nabla\Psi\cdot\partial_\Psi \equiv 0\,. \tag{3.7}$$

Soit (3.2). Le résultat standard [1] garantie l'existence locale dans le temps sur $\Omega_r^T\times$ avec $T\in_+^*$, d'une solution $^1-$ pour la première partie de (3.2). On introduit

$$(t,x,\theta):=\big(\Phi(t,x,\theta),\Psi(t,x,\theta),\theta\big).$$

A partir de (3.2), on a

$$\begin{aligned}&\partial_t+(\cdot\nabla)=0,\\&(0,x,\theta)=\big(\varphi(x),\psi(x,\theta),\theta\big)=w(x,\theta)\,.\end{aligned}\tag{3.8}$$

on intègre (3.2) le long des caractéristiques on a

$$\Phi(t,x,\theta)=\varphi\big(x-t\,(t,x,\theta)\big)\quad,\qquad\forall(t,x,\theta)\in\Omega_r^T\times\mathbb{T}\,,\tag{3.9}$$

$$\Psi(t,x,\theta)=\psi\big(x-t\,(t,x,\theta),\theta\big),\qquad\forall(t,x,\theta)\in\Omega_r^T\times\mathbb{T}\,.\tag{3.10}$$

Lemme 5 *Les ingrédient φ, ψ et vérifiant (2.48)-(2.49)-(2.50)-(2.51). Alors $\Phi(t,x,\theta)$ solution de (3.2) est tel que $\partial_\theta\Phi\equiv 0$. De plus*

$$y\equiv y(t,x):=x-t\,(t,x,\theta)\,,\qquad\Xi(y,\theta):=\big(\varphi(y),\psi(y,\theta),\theta\big)\in^2\times\,,$$

l'expression $\Psi(t,x,\theta)$ obtenu par (3.2) est tel que

$$\begin{aligned}&\partial_\theta\Psi(t,x,\theta)\equiv\partial_\theta\psi(y,\theta)\\&\quad-t\,\nabla\psi(y,\theta)\cdot\big[\partial_\theta\big(\Xi(y,\theta)\big)+\partial_\theta\psi(y,\theta)\,\partial_\psi\big(\Xi(y,\theta)\big)\big]\,.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Preuve. ***du Lemme 5.*** On utilise (3.9) et (3.10) avec la définition de on calcule $\partial_\theta\Phi$ et $\partial_\theta\Psi$

$$\begin{pmatrix}\partial_\theta\Phi(t,x,\theta)\\\partial_\theta\Psi(t,x,\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\,\nabla\varphi(y)\cdot\partial_\theta\big(\Xi(y,\theta)\big)\\\partial_\theta\psi(y,\theta)-t\,\nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\theta\big(\Xi(y,\theta)\big)\end{pmatrix}$$

tel que vaut

$$(t,y,\theta)\,:=\begin{pmatrix}1+t\,\nabla\varphi(y)\cdot\partial_\varphi & t\,\nabla\varphi(y)\cdot\partial_\psi\\ t\,\nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\varphi & 1+t\,\nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\psi\end{pmatrix}.$$

La matrice et les fonctions $\partial_\star$ sont calculé en $\Xi(y,\theta)$. Donc vu (2.50) et (2.51) on a

$$det\,(t,y,\theta)=1.$$

D'ou

$$\begin{aligned}\partial_\theta \Phi(t,x,\theta) &= -t\ \nabla\varphi\cdot(\partial_\theta + \partial_\theta\psi\ \partial_\psi)\\ &\quad + t^2\ \big[(\nabla\psi\cdot\partial_\theta)(\nabla\varphi\cdot\partial_\psi) - (\nabla\varphi\cdot\partial_\theta)(\nabla\psi\cdot\partial_\psi)\big]\,.\end{aligned}$$

Le côté droite est une fonction de (y,θ), et la condition (2.48) ni rien autre que

$$\nabla\varphi(y)\cdot\big[\partial_\theta\psi(y,\theta)\,\partial_\psi\big(\Xi(y,\theta)\big) + \partial_\theta\big(\Xi(y,\theta)\big)\big] = 0\,. \tag{3.12}$$

Ce qui donne

$$\partial_\theta \Phi(t,x,\theta) = t^2\ (\nabla\varphi\cdot\partial_\psi)\ (\nabla\psi\cdot\partial_\theta + \partial_\theta\psi\ \nabla\psi\cdot\partial_\psi)\,.$$

Vu (2.49) on a $\partial_\theta\Phi \equiv 0$, d'ou

$$\begin{aligned}\partial_\theta \Psi(t,x,\theta) &= \partial_\theta\psi + t\ \big(\partial_\theta\psi\ \nabla\varphi\cdot\partial_\varphi - \nabla\psi\cdot\partial_\theta\big)\\ &\quad + t^2\ \big[(\nabla\varphi\cdot\partial_\theta)(\nabla\psi\cdot\partial_\varphi) - (\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi)(\nabla\psi\cdot\partial_\theta)\big]\,.\end{aligned}$$

Vu (2.50), (2.51) et (3.12), on a

$$\begin{aligned}\partial_\theta \Psi(t,x,\theta) = \partial_\theta\psi\ &- t\ \big(\nabla\psi\cdot\partial_\theta + \partial_\theta\psi\ \nabla\psi\cdot\partial_\psi\big)\\ &- t^2\ (\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi)\ \nabla\psi\cdot\big(\partial_\theta + \partial_\theta\psi\ \partial_\psi\big)\,.\end{aligned}$$

Or (2.49) et (2.50) affirme que le terme en facteur de t^2 est nul, ce qui donne (3.11). □

Considère l'expression u^ε définie sur Ω_r^T par

$$\begin{aligned}u^\varepsilon(t,x) &:= \Big(t, x, \tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\Big)\\ &= \Big(\Phi(t,x), \Psi\big(t,x,\tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\big), \tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\Big)\,, \qquad \varepsilon\in]0,1]\,.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Par construction on a $u^\varepsilon(0,\cdot)\equiv h^\varepsilon(\cdot)$ avec h^ε satisfait (2.2). Un calcule directe de (3.2) donne que $u^\varepsilon(t,x)$ est une solution de (2.1) sur Ω_r^T. On applique le Théorème 2.6 de [4], on a $\big(D_x u^\varepsilon(t,x)\big)^3 \equiv 0$ sur $B(0, r-tV)$ pour $t\in[0,T]$. On refait dans le temps $t\in]0,T]$ la procédure du chapitre 1 on peut déduire que la construction (2.48), (2.49), (2.50) et (2.51) ce propage. autrement

Lemme 6 *Pour $t\in[0,T]$, la solution $\Phi(t,x)$ et $\Psi(t,x,\theta)$ de (3.2) sont solution de (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7).*

L'identité peut être obtenu par (2.48)-(2.49)-(2.50)-(2.51) ainsi que (3.9), (3.10) et du Lemme 5. Le Théoréme 6 est démontré.

Biobibliographie

1. Andrew J. Majda and Andrea L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
2. C. Cheverry and M. Houbad. Compatibility conditions to allow some large amplitude WKB analysis for Burger's type systems. *Phys. D*, 237(10-12) :1429–1443, 2008.
3. C. Cheverry and O. Guès. Counter-examples to concentration-cancellation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 189(3) :363–424, 2008.
4. C. Cheverry, O. Guès, and G. Métivier. Large-amplitude high-frequency waves for quasilinear hyperbolic systems. *Adv. Differential Equations*, 9(7-8) :829–890, 2004.
5. William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, No. 63.

Résumé
Dans ce document on va étudier les équations d'Euler incompressible dans [3]

$$\partial_t u \;+\; (\; u \cdot \nabla \;)\; u \;\equiv\; 0\;, \quad \mathrm{div}\; u \;\equiv\; 0\;.$$

Le système précédemment mentionné est un système de Burger multidimensionnelle associée à une condition de divergence nul qui porte sur la solution, tel que $u(\; t, x \;)$ est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$.
Le bute est d'établir l'existence et l'unicité des slutions ansi que une études assyptotique.

Abstract
In this documents we study the Euler incompressible equations in [3]

$$\partial_t u \;+\; (\; u \cdot \nabla \;)\; u \;\equiv\; 0\;, \quad \mathrm{div}\; u \;\equiv\; 0\;.$$

This equation is a burger multidimensional system associate to a divergence free condition, such that $u(\; t, x \;)$ is a function defined on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ with a value on $\mathbb{R}^3$.
our objective is to establish the existence and uniqueness of solutions and a asymptotic studies.