Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier Dieu le tout puissant pour son accompagnement tout au long de ce mémoire.

Je suis particulièrement reconnaissante envers mon directeur de mémoire monsieur Fakhreddine BOUKHARI, pour la disponibilité dont il a fait preuve à mon égard, et pour ses connaissances qui m'ont énormément apporté.

Je tiens à exprimer ma gratitude à monsieur Tahar MOURID mon professeur de statistiques et responsable de master en probabilités et statistiques pour sa main bienveillante toujours tendue et sa bonne humeur réconfortante.

Je remercie monsieur Abdelaziz ALLAM d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont aussi à tous mes professeurs qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'accomplissement de ce travail.

Plus quiconque, il me faut remercier mes très chers parents Hassane et Souad HAKIKI pour leur soutien exceptionnel en toutes circonstances, l'amour et la patience dont ils ont fait preuve s'inscrivent à chaque page de ce document.

Enfin je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à ma tendre belle mère Cherifa BRAHAMI, mon frère et ma sœur, qui m'ont entouré et motivé sans cesse pour devenir meilleure.

Table des matières

Introduction

En théorie ergodique des systèmes dynamiques on est souvent amené à étudier la convergence presque sure des séries aléatoires perturbées ; cette recherche active est intimement liée à l'estimation uniforme de polynômes trigonométriques aléatoires. La pertinence de cette problématique s'est d'ailleurs confirmée au cours des travaux préparatoires de Salem et Zygmund [9].
Les méthodes issues de l'entropie métrique constituent non seulement un très bon moyen dans l'élaboration de ce genre d'estimations mais elles semblent être l'approche la plus efficace qui soit.

Ce mémoire se base essentiellement sur le travail de Michel Weber :

— WEBER M., *Estimating random polynomials by means of metric entropy methods*, Mathematical inequalities and applications, volume 3, number 3 (2000), 443-457.

L'exploitation d'une telle source a permis de répondre à une série de questions inhérentes au sujet intitulé "Estimations uniformes pour des polynômes trigonométriques aléatoires"

Ce mémoire est composé de trois parties, dans la première on présente quelques théorèmes et résultats indispensables de la théorie des processus stochastiques, on y introduit également la notion d'entropie métrique et on y démontre le théorème fondamental de Dudley.
Dans la deuxième partie, on énonce et on démontre le principal résultat de ce mémoire permettant de répondre aux grandes questions posées et préparant d'importantes applications.
Enfin, dans la troisième partie on donne un critère pour la convergence des séries de Fourier aléatoires en plus de plusieurs autres résultats d'estimations.

Chapitre 1

Processus stochastiques

1.1 Introduction

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité complet.

Définition 1.1.1 *Soit T un ensemble non vide, un processus stochastique indexé par T est une famille de variables aléatoires réelles $(X_t,\, t \in T)$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*

Remarque 1.1.1 .
L'ensemble T peut être :

L'ensemble $\mathbb{N}$ ce qui correspond aux processus à temps discret.
L'ensemble $\mathbb{R}^+$ ou l'intervalle $[0, a]$ $a > 0$ ce qui correspond aux processus à temps continu.

Remarque 1.1.2 *Pour tout $\omega \in \Omega$ l'application $t \longmapsto X_t(\omega)$ s'appelle trajectoire associée à ω.*

Définition 1.1.2 *Un processus stochastique $(X_t,\, t \in T)$ est dit à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Le lemme suivant (lemme 4.1 [6]) permet de borner l'espérance de l'exponentielle d'une variable aléatoire réelle bornée.

Lemme 1.1.1 *Pour toute variable aléatoire bornée X et pour tout nombre réel α on a :*

$$\mathbb{E}e^{\alpha X} \leq e^{\alpha \mathbb{E}X + \alpha^2 \|X\|_\infty^2 / 2}$$

Dans la théorie des processus stochastiques, il existe trois notions pour comparer les processus : l'équivalence, la modification et l'indistinguabilité.

Définition 1.1.3 *Soient* $(X_t,\, t \in T)$ *et* $(X'_t,\, t \in T)$ *deux processus définis sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que X *et* X' *sont équivalents si*

$$\forall n \geq 1,\ \forall t_1, t_2, ..., t_n \in T \quad (X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{=} (X'_{t_1}, X'_{t_2}, ..., X'_{t_n})$$

On dit que X' *est une modification de* X *si, pour tout* t, $X_t = X'_t\ P - p.s.$

$$\forall t \geq 0,\ P(X_t = X'_t) = 1.$$

On dit que X *et* X' *sont indistinguables si,* $P - p.s.$ *les trajectoires de* X *et de* X' *sont les mêmes, i.e :*

$$P(X_t = X'_t,\ \forall t \geq 0) = 1.$$

L'exemple suivant permet d'illustrer la différence entre les deux dernières notions.

Exemple 1.1.1 *Soient* $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $P =$ *mesure de Lebesgue. On définit* $(X_t)_{t\in[0,1]}$ *et* $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ *par :*

$$X_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega) \quad et \quad Y_t(\omega) \equiv 0$$

Alors, pour tout t fixé,

$$P(\omega, X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1 - P(\omega, X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = 1 - P(\{t\}) = 1$$

et X *est une modification de* Y. *Par contre,*

$$P(\omega, X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ pour tout } t) = 0.$$

Donc, X *et* Y *ne sont pas indistinguables.*

Proposition 1.1.1 *Soient* $X = (X_t)_{t\in T}$, $Y = (Y_t)_{t\in T}$ *deux processus stochastiques, alors :*

$$X\, et\, Y\, sont\ indistingables \Rightarrow X\, est\ une\ modification\ de\, Y \Rightarrow X\, et\, Y\, sont\ equivalents$$

Définition 1.1.4 *Soit* $X = (X_t,\, t \in \mathbb{R}^+)$ *un processus stochastique.*
On dit que X *est stationnaire si pour tout* $h > 0$ *les processus* $(X_{t+h})_{t\geq 0}$ *et* $(X_t)_{t\geq 0}$ *sont équivalents, c'est à dire :*

$$\forall h > 0, \forall n \geq 1,\ \forall t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}^+ (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h}) \overset{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$$

Exemple 1.1.2 *Soit Y une variables aléatoire réelle, on définit le processus X par :*

$$X_t = Y \qquad t \geq 0$$

Alors X est stationnaire.

On dit que X est à accroissements stationnaires si le processus $(X_{t+h} - X_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ est stationnaire.

1.2 Processus Gaussiens

Définition 1.2.1 *Un processus $(X_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ est dit gaussien si $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur aléatoire Gaussien pour tout $n \geq 1$ et $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}^+$. Ceci revient à dire que $c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$ est une variable aléatoire Gaussienne $\forall n \geq 1$, $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}^+$ et $c_1, c_2, ...c_n \in \mathbb{R}$.*

Pour un vecteur aléatoire (pas forcément gaussien) on définit :

- *La fonction $m : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et appelée la fonction moyenne.*
- *La fonction $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $K(s,t) = cov(X_s, X_t)$ et appelée la fonction covariance.*

L'un des exemples les plus remarquables de processus gaussiens est le mouvement brownien.

Définition 1.2.2 *Soit $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un processus Gaussien centré et de covariance $K(s,t) = \min(s,t)$. Le processus W est appelé processus de Weiner ou mouvement brownien.*
Le mouvement brownien vérifie :

(i) $W_0 = 0\, P - p.s.$

(ii) $\forall 0 \leq t \leq s,\ W_s - W_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0, s-t)$ *(accroissements stationnaires et gaussiens).*

(iii) $\forall n \geq 1, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n,\ W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes (accroissements indépendants).*

(iv) *W admet une modification continue.*

Un autre exemple important des processus Gaussiens est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Définition 1.2.3 *Soit $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un processus de Weiner, on pose :*

$$\forall t \geq 0, \qquad U_t = e^{-\frac{t}{2}} W_{e^t}$$

Le processus $U = (U_t)_{t\geq 0}$ s'appelle le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.
Sa fonction moyenne est identiquement nulle $m(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ et sa fonction covariance vaut

$$K(s,t) = e^{-\frac{|s-t|}{2}} \qquad \forall s,t \geq 0$$

Puisque ce mémoire n'est sujet que d'estimations, dans cette section on va énoncer plusieurs théorèmes concernant les processus Gaussiens.
On commence par le théorème qui traite de l'intégrabilité forte (exponentielle) de la semi-norme d'un vecteur Gaussien, qu'on peut retrouver dans [2] (théorème 10.2.2).

Théorème 1.2.1 *Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace vectoriel mesurable. Considérons le vecteur Gaussien X défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.*
Soit $N : (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ une semi norme mesurable et supposons que $P(N(X) < \infty) > 0$. Alors $\mathbb{E}N(X) < \infty$ et de plus il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{N(X)^2}{K \left(\mathbb{E}N(X)\right)^2} \right\} \leq 2$$

À présent on introduit la notion de coefficient de découplage.

Définition 1.2.4 *Soit $X = (X_n)_{n\geq 1}$ un processus stochastique centré, le coefficient de découplage du processus X désigne la quantité suivante :*

$$p(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\mathbb{E}\left(X_1 X_k\right)}{\mathbb{E}\left(X_1^2\right)} \right|$$

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à temps discret ($t \in \mathbb{N}$) est l'exemple typique d'un processus Gaussien stationnaire à coefficient de découplage fini. En effet

$$p(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\mathbb{E}\left(U_1 U_k\right)}{\mathbb{E}\left(U_1^2\right)} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{Cov(U_1, U_k)}{V(U_1)} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1-k}{2}} = (1 - e^{-\frac{1}{2}})^{-1}$$

Dans le même contexte, on donne le théorème de Klein-Landau-Shucker[4]

Théorème 1.2.2 *Soit $T = (T_1, T_2, ...)$un processus Gaussien stationnaire, centré et à coefficient de découplage fini $p(T)$. Soit $(f_k,\ k = 1, 2, ...)$ une suite d'applications mesurables à valeurs complexes. Alors pour tout sous-ensemble J fini de $\mathbb{N}$, on a :*

$$|\mathbb{E} \prod_{j\in J} f_j(T_j)| \leq \prod_{j\in J} \|f_j(T_1)\|_{p(T)}$$

Avec

$$\|f_j(T_1)\|_{p(T)} = \left(\mathbb{E}|f_j(T_1)|^{p(T)}\right)^{\frac{1}{p(T)}}$$

Remarque 1.2.1 *Le coefficient de découplage $p(T) \geq 1$.*
En effet

$$\begin{aligned} p(T) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\mathbb{E}\,(T_1 T_k)}{\mathbb{E}\,(T_1^2)} \right| \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\mathbb{E}\,(T_1 T_k)}{\mathbb{E}\,(T_1^2)} \right| \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

En dernier on donne le résultat suivant qui découle de l'inégalité de Borell-Sudakov-Tsirelson (voir par exemple [7] lemme 3.1 p 57) :

Théorème 1.2.3 *Si $G_1, G_2, ..., G_N$ sont des vecteurs gaussiens à valeurs dans un espace de Banach séparable $(B, \|.\|)$, alors :*

$$\mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq N} \|G_k\| \leq C \left\{ \sup_{1\leq k\leq N} \mathbb{E}\|G_k\| + \mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq N} \sigma_k |g_k| \right\}$$

Où $\sigma_k = \sup_{f\in B^*,\, \|f\|\leq 1} \left(\mathbb{E}\,\langle f, G_k\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $k = 1, ..., N$, $(g_k)_{k=1}^N$ une suite de variables aléatoires normales $N(0, 1)$ indépendantes, et C une constante universelle.

1.3 Espaces d'Orlicz

Dans la plupart des cas, on travaille avec des processus qui sont dans $L^p\, 1 \leq p < \infty$ mais dans toute la suite, le travail se fera dans un espace d'Orlicz .

Définition 1.3.1 *On dit qu'une fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, +\infty[$ est une fonction de Young si :*

(i) ψ *est une fonction croissante convexe.*

(ii) $\psi(0) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t) = \infty$.

Exemples :

1. $\psi(t) = |t|^p \quad p \geq 1$.
2. $\psi(t) = e^{|t|} - 1$.
3. $\psi(t) = e^{t^2} - 1$.

Définition 1.3.2 *Soit ψ une fonction de Young, un espace d'Orlicz $L_\psi = L_\psi(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associé à ψ est défini comme étant l'espace de toutes les variables aléatoires réelles Z sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que :*

$$\mathbb{E}\psi\left(\frac{|Z|}{c}\right) < \infty \quad \textit{pour un} \quad c > 0.$$

Définition 1.3.3 *(la norme de Luxemburg). Soit ψ une fonction de Young, on munit l'espace d'Orlicz de la norme suivante, pour toute variables aléatoires Z dans L_ψ*

$$\|Z\|_\psi = \inf\{c > 0 : \mathbb{E}\psi\left(\frac{|Z|}{c}\right) \leq 1\}$$

Muni de cette norme, l'espace $L_\psi(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace vectoriel normé complet (un espace de Banach).
Les espaces d'Orlicz généralisent les espaces L^p dans le sens que si $\psi(t) = |t|^p$ alors $L_\psi = L^p$.
On peut se référer à l'excellent livre de Krasnosel'skii et Rutikii ([5] chapitre 1 et chapitre 2) qui contient toutes les notions et propriétés fondamentales concernant les espaces d'Orlicz.

Citons un théorème qui nous sera grandement utile pour la suite, et qui est l'inégalité de Graversen-Peskir-Weber [2].

Théorème 1.3.1 *Soit la fonction de Young suivante, $\psi(t) = e^{t^2} - 1$, alors :*

$$\forall n \geq 2, \quad \forall f_1, ..., f_n \in L_\psi \qquad \|\sup_{0 \leq j \leq n} |f_j|\|_\psi \leq \left(\frac{2}{\log 2} \log n\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{0 \leq j \leq n} \||f_j|\|_\psi$$

En dernier, on donne deux lemmes permettant d'estimer la norme d'un variable aléatoire dans l'espace d'Orlicz.
Le premier repose sur une inégalité de grande déviation :

Lemme 1.3.1 *Soit la fonction de Young suivante $\psi(t) = e^{t^2} - 1$, et soit la variable aléatoire réelle $X \in L_\psi$, si pour tout $t \geq 0$ on a :*

$$P\left(|X| > t\right) \leq \gamma e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \qquad \gamma > 1\,, \alpha > 0$$

Alors $\|X\|_\psi \leq \alpha\sqrt{1+\gamma}$.

En effet :
Soit C une constante strictement positive, alors par la formule d'intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\psi\left(\frac{|X|}{c}\right) &= \int_0^{+\infty} P\left(\psi\left(\frac{|X|}{c}\right) > t\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} P\left(X^2 > C^2 \log(t+1)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} P\left(|X| > C\sqrt{\log(t+1)}\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On obtient en utilisant l'hypothèse du théorème :

$$\mathbb{E}\psi\left(\frac{|X|}{c}\right) \leq \gamma \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^{\frac{C^2}{\alpha^2}}} \mathrm{d}t = \gamma \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{C^2}{\alpha^2}}} \mathrm{d}u$$

Si $\frac{C^2}{\alpha^2} > 1$ alors :

$$\mathbb{E}\psi\left(\frac{|X|}{c}\right) \leq \gamma\left(\frac{1}{\frac{C^2}{\alpha^2} - 1}\right)$$

Il suffit donc que $\gamma\left(\frac{1}{\frac{C^2}{\alpha^2}-1}\right) \leq 1$ pour que $\mathbb{E}\psi\left(\frac{|X|}{c}\right) \leq 1$.

$$\gamma\left(\frac{1}{\frac{C^2}{\alpha^2} - 1}\right) \leq 1 \Leftrightarrow C \geq \alpha\sqrt{1+\gamma}$$

Posons $C_0 = \alpha\sqrt{1+\gamma}$, la définition de la norme entraine que $\|X\|_\psi \leq C_0$.
D'où le lemme.

Le lemme suivant va nous permettre de mettre en œuvre le lemme ci-dessus :

Lemme 1.3.2 *Soit la fonction de Young suivante,* $\psi(t) = e^{t^2} - 1$*, alors, si* U *est une variable aléatoire réelle telle que :* $\mathbb{E}e^{\lambda U} \leq e^{\lambda^2 C^2}(\forall \lambda \in \mathbb{R})$*, alors* $\|U\|_G \leq 9C$*.*

En effet, soient $\lambda > 0$ et $t \geq 0$, en utilisant l'inégalité de Markov, on a :

$$\begin{aligned} P(|U| > t) &= P\left(e^{|\lambda U|} > e^{\lambda t}\right) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{|\lambda U|}\right)}{e^{\lambda t}} \\ &\leq 2\,\frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda U}\right)}{e^{\lambda t}} \end{aligned}$$

En s'inspirant de l'hypothèse du lemme, on a :

$$P(|U| > t) \leq 2\, e^{\lambda^2 C^2 + \lambda t}$$

Et donc,

$$P(|U| > t) \leq 2 \min_{\lambda > 0} e^{\lambda^2 C^2 + \lambda t} = 2\, e^{\min\limits_{\lambda > 0} \lambda^2 C^2 + \lambda t}$$

Posons $Q(\lambda) = \lambda^2 C^2 + \lambda t$, alors :

$$\min_{\lambda > 0} Q(\lambda) = Q\left(\frac{t}{2C^2}\right) = -\frac{t^2}{4C^2}$$

D'où,

$$P(|U| > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{4C^2}}$$

D'après le lemme précédent :

$$\|U\|_G \leq 2C \leq 9C$$

1.4 Critère entropique de Dudley

L'objectif principal de cette partie est de montrer que pour certains processus stochastiques $X = (X_t)_{t \in E} \quad E \subset \mathbb{R}$, la continuité est intimement liée à la bornitude du supremûm . En d'autre termes le problème est de trouver -essentiellement- des conditions pour que X soit à trajectoires continues ou bornées presque surement, ou qu'il admette une modification possédant ces propriétés.

L'étude se basera sur le théorème de Dudley ([7], théorème 2.1) qui en plus de vérifier que le processus est continu presque surement, donne une borne supérieure à la norme de $\sup_{s,t}(X_s - X_t)$, E fini ou dénombrable, et ce au moyen de l'intégrale entropique basée sur la technique classique des recouvrements !

Une fois le résultat établi, la bornitude découlera facilement, et ce en remarquant que :

$$\sup_{t\in E} X_t \leq \sup_{t\in E}|X_t| \leq |X_{t_0}| + \sup_{s,t\in E}|X_s - X_t|$$

On suppose que E est un espace pseudo-métrique, c'est à dire qu'il est muni d'une distance qui ne sépare pas forcément ses points. on suppose que notre processus est dans un espace d'Orlicz L_ψ c'est à dire $\|X_t\|_\psi < \infty \quad \forall t$.

1.4.1 L'intégrale entropique de Dudley

La question qui se pose est la suivante : Étant donnés une fonction de Young suivante $\psi(t) = e^{t^2} - 1$ et un processus stochastique indexé par un espace pseudo-métrique (E, d) qui est dans L_ψ satisfaisant la condition lipschitzienne, pour tout $s, t \in E$

$$\|X_s - X_t\|_\psi \leq d(s,t)$$

Estimons $\| \sup_{s,t\in E} (X_s - X_t) \|_\psi$.

Notons par $N(E, d, u)$ le cardinal du plus petit recouvrement de E par des d-boules de rayon u.

L'intégrale entropique de Dudley désigne la quantité suivante (voir[8] chapitre 10) :

$$I(E,d) = \int_0^{diam(E,d)} \sqrt{\log N(E,d,u)}\,\mathrm{d}u$$

1.4.2 Théorème de Dudley

Soit un ensemble dénombrable E, muni d'une pseudo-métrique d, et soit le processus stochastique $X = \{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in E\}$ indexé sur E, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, satisfaisant la condition suivante :

$$\|X_s - X_t\|_\psi \leq d(s,t) \qquad \forall s, t \in E$$

Supposons que l'intégrale suivante :

$$I(E,d) = \int_0^{diam(E,d)} \sqrt{\log N(E,d,u)}\,\mathrm{d}u < \infty$$

Alors il existe une constante universelle C telle que :

$$\| \sup_{s,t\in E} (X_s - X_t) \|_\psi \leq CI(E,d)$$

Démonstration du théorème

Notons pas D le diamètre de E, et supposons que $D > 0$, autrement le résultat est évident ! Soit la suite $(S_n)_{n\geq 0} \subset E$ telle que pour tout $n = 1, 2, 3, ...$ $S_n \subset E$ et S_n est la suite (ensemble) de tous les centres des boules de rayon $2^{-n}D$ correspondants au plus petit recouvrement de E.
$S_0 = x_{i_0}$ (correspondant au rayon $u = D$). Posons $S = \bigcup\limits_{n\geq 0} S_n$, alors par construction S est dense dans E.
En effet : Soit $x \in E$, et soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists n_0$ tel que $\varepsilon > 2^{-n_0}D$ et donc il existe $x_0 \in S_{n_0}$ tel que x_0 soit le centre d'une des boules de rayon $2^{-n_0}D$ d'oú : $d(x, x_0) \leq 2^{-n_0}D < \varepsilon$. Notons par $x_i \longrightarrow \overline{x_i}$ le choix qui associe à $x_i \in S_n$ (x_i le centre d'une boule de rayon $2^{-n}D$) $\overline{x_i} \in S_{n-1}$ tel que $\| (X_{x_i} - X_{\overline{x_i}}) \|_\psi < 2^{-n+1}D$.

Á présent posons :

$$\forall n \geq 0, \qquad M_n = \sup_{x_i\in S_n} |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}|, \qquad W_n = \sup_{0\leq j\leq n} M_j$$

Avec $M_0 = W_0 = 0$. Alors,

$$0 \leq W_n - W_{n-1} \leq \sup_{x_i\in S_n} |X_{x_i} - X_{\overline{x_i}}|$$

En effet :
$(W_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante d'où la première partie de l'inégalité.
$W_n - W_{n-1} \geq 0$ donc soit

$$W_n - W_{n-1} = 0$$

Soit

$$W_n - W_{n-1} > 0$$

Si $W_n = W_{n-1}$, il n'y a rien à démontrer.

$$(W_n - W_{n-1} = 0 \quad et \quad \sup_{x_i\in S_n} |X_{x_i} - X_{\overline{x_i}}| \geq 0)$$

Sinon , si $W_n > W_{n-1} \Rightarrow W_n = \sup\limits_{0\leq j\leq n} M_j = M_n$ d'une part !
D'autre part,

$$W_{n-1} = \sup_{0\leq j\leq n-1} M_j \geq M_{n-1} = \sup_{x_i\in S_{n-1}} |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}|$$

Soit $x_s \in S_n$ tel que $M_n = \sup\limits_{x_i \in S_n} |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}| = |X_{x_s} - X_{x_{i_0}}|$.Alors

$$W_{n-1} \geq |X_{\overline{x_s}} - X_{x_{i_0}}|$$

pour la simple raison que

$$x_s \in S_n \Rightarrow \overline{x_s} \in S_{n-1}$$

et

$$W_{n-1} \geq \sup_{x_i \in S_{n-1}} |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}| \geq |X_{\overline{x_s}} - X_{x_{i_0}}|$$

alors

$$W_n - W_{n-1} = |X_{x_s} - X_{x_{i_0}}| - W_{n-1} \leq |X_{x_s} - X_{x_{i_0}}| - |X_{\overline{x_s}} - X_{x_{i_0}}| \leq |X_{x_s} - X_{\overline{x_s}}| \leq \sup_{x_i \in S_n} |X_{x_i} - X_{\overline{x_i}}|$$

Dans la suite on aura besoin de l'inégalité du théorème (1.2.2)

$$\forall n \geq 2, \quad \forall f_1, ..., f_n \in L_\psi \qquad \| \sup_{0 \leq j \leq n} |f_j| \|_\psi \leq \left(\frac{2}{\log 2} \log n \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{0 \leq j \leq n} \| |f_j| \|_\psi$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|W_n - W_{n-1}\|_\psi &\leq \| \sup_{x_i \in S_n} |X_{x_i} - X_{\overline{x_i}}| \|_\psi \\ &\leq \left(\frac{2}{\log 2} \log N(E, d, 2^{-n}D) \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x_i \in S_n} \|X_{x_i} - X_{\overline{x_i}}\|_\psi \end{aligned}$$

On a

$$\forall x_i \in S_n, \qquad \|X_{x_i} - X_{\overline{x_i}}\|_\psi < 2^{-(n-1)} D$$

Alors :

$$(\forall n \geq 1) \quad \|W_n - W_{n-1}\|_\psi \leq K 2^{-(n-1)} D \left(log N(E, d, 2^{-n}D) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Avec $K = \left(\frac{2}{\log 2} \right)^{\frac{1}{2}}$.
Puis que $W_n = W_n - W_0 = \sum_{k=1}^{n} W_k - W_{k-1}$, il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \|W_n\|_\psi &\leq \sum_{k=1}^{n} \|W_k - W_{k-1}\|_\psi \leq K \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} D \left(log N(E, d, 2^{-k}D) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} D \left(log N(E, d, 2^{-k}D) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \int_0^D \sqrt{\log N(E, d, u)} \, \mathrm{d}u, \end{aligned}$$

Où C est une constante universelle.
En effet :
Posons pour $x > 0$: $f(x) = (logN(E,d,x))^{\frac{1}{2}}$. f est décroissante, donc si :

$$\frac{D}{2^{k+1}} \leq x \leq \frac{D}{2^k}$$

Alors,

$$f\left(\frac{D}{2^k}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{D}{2^{k+1}}\right)$$

D'où,

$$\forall k \geq 0 \qquad \frac{D}{2^{k+1}} f\left(\frac{D}{2^k}\right) \leq \int_{\frac{D}{2^{k+1}}}^{\frac{D}{2^k}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{D}{2^{k+1}} f\left(\frac{D}{2^{k+1}}\right)$$

Ainsi,

$$\forall k \geq 0 \qquad \frac{D}{2^k} f\left(\frac{D}{2^k}\right) \leq 2\int_{\frac{D}{2^{k+1}}}^{\frac{D}{2^k}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

En sommant tous les termes, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D}{2^k} f\left(\frac{D}{2^k}\right) \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{D}{2^{k+1}}}^{\frac{D}{2^k}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sachant que $f(D) = 0$ le premier terme de la somme gauche s'annule et donc,

$$K\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} D f\left(\frac{D}{2^k}\right) \leq 4K\int_0^D f(x)\,\mathrm{d}x$$

En posant $C = 4K$, on a :

$$K\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} D \left(logN(E,d,2^{-k}D)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\int_0^{\infty} \sqrt{\log N(E,d,u)}\,\mathrm{d}u$$

Lorsque n tend vers l'infini , on a :

$$\begin{aligned}
\underset{n\to+\infty}{lim} W_n &= \sup_{j\geq 0} M_j \\
&= \sup_{j\geq 0} \sup_{x_i\in S_j} |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}| \\
&= \sup_{x_i \in \underset{j\geq 0}{\cup} S_j} |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}| \\
&= \sup_{x_i\in S} |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}|
\end{aligned}$$

Il s'en suit que :

$$\|\sup_{x_i \in S} \|X_{x_i} - X_{x_{i_0}}\|_\psi \leq C \int_0^D \sqrt{\log N(E,d,u)}\, \mathrm{d}u$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on a :

$$|X_{x_i} - X_{x_j}| \leq |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}| + |X_{x_j} - X_{x_{i_0}}|$$

On obtient que :

$$\begin{aligned} \|\sup_{x_i,x_j} |X_{x_i} - X_{x_j}|\|_\psi &\leq \|\sup_{x_i} |X_{x_i} - X_{x_{i_0}}|\|_\psi + \|\sup_{x_j} |X_{x_j} - X_{x_{i_0}}|\|_\psi \\ &\leq C \int_0^\infty \sqrt{\log N(E,d,u)}\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

La finitude de cette intégrale implique que (E, d) est pré-compact et par conséquent séparable.
L'hypothèse du théorème montre que le processus X est $d-$ *continu* en probabilité :
Soit $\varepsilon > 0$, en utilisant l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned} P\left(|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon\right) &\leq \frac{\mathbb{E}|X_t - X_{t_0}|}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{\|X_t - X_{t_0}\|_\psi}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{d(t,t_0)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

D'où $\underset{t \longrightarrow t_0}{lim} P\left(|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon\right) = 0$.
Et puisque S est dense dans E pour la métrique d, pour chaque $t \in E$,il existe une suite $(t_n)_n \subset S$ (qui est en fait une sous suite de $(t_n)_n$) telle que :

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{lim} d(t, t_n) = 0$$

$$P\left(\underset{n \longrightarrow \infty}{lim} X_{t_n} = X_t\right) = 1$$

Il s'en suit que $P\left(\sup_{x_i,x_j \in S} |X_{x_i} - X_{x_j}| = \sup_{x_i,x_j \in E} |X_{x_i} - X_{x_j}|\right) = 1$ D'où le théorème.

Chapitre 2

Estimations uniformes pour des polynômes trigonométriques aléatoires

2.1 Préliminaires

Soit $\{p_1, p_2, ...\}$ une suite croissante d'entiers strictement supérieurs à 1, soit$\{\theta_1, \theta_2, ...\}$ une suite de réels, et considérons deux suites de variables aléatoires réelles $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ...\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ...\}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. À ces données on associe la suite des polynômes aléatoires suivantes :

$$\forall N \geq 1, \qquad Z_N(\omega, t) = \sum_{k=1}^{N} \theta_k \{X_k(\omega) \cos 2\pi p_k t + Y_k(\omega) \sin 2\pi p_k t\} \tag{2.1}$$

Le but de cette partie est d'estimer la quantité suivante :

$$Q_n := \sup_{t \in [0,1]} |Z_n(t)| \qquad n \geq 1$$

Remarque 2.1.1 *Lorsque* $\mathcal{X}$ *et* $\mathcal{Y}$ *sont indépendants, identiquement distribués avec* $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}Y_1 = 0$ *et* $\mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{E}Y_1^2 = 1$*, on a :*

$$\mathbb{E}\left((Z_N(s) - Z_N(t))^2\right) = 4 \sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 \sin^2 \pi p_k (t - s)$$

En effet :
Posons :

$$R_k = \theta_k \{X_k(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t) + Y_k(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)\}$$

$$(R_N(s) - R_N(t))^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} R_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{N} R_k^2 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} R_k R_j$$

$$\mathbb{E}\left(R_N(s) - R_N(t)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}R_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}R_k^2 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \mathbb{E}R_k R_j$$

$$\mathbb{E}R_k^2 = \theta_k^2\left[(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)^2 + (\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)^2\right]$$

$$\mathbb{E}R_k R_j = 0$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)^2 &= \left(-2\sin\left(\frac{2\pi p_k(s+t)}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi p_k(s-t)}{2}\right)\right) \\ &= 4\sin^2 \pi p_k(s+t)\sin^2 \pi p_k(s-t)\end{aligned}$$

Et que :

$$(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)^2 = 4\sin^2 \pi p_k(s-t)\cos^2 \pi p_k(s+t)$$

On obtient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}R_k^2 &= \theta_k^2\left[4\sin^2 \pi p_k(s-t)\left(\sin^2 \pi p_k(s+t) + \cos^2 \pi p_k(s+t)\right)\right] \\ &= 4\theta_k^2 \sin^2 \pi p_k(s-t)\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left((R_N(s) - R_N(t))^2\right) = 4\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 \sin^2 \pi p_k(t-s)$$

En s'inspirant de ce résultat, considérons la pseudo-métrique d sur $[0,1]$suivante :

$$\forall s,t \in [0,1] \qquad d_N(s,t) = 2\left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 \sin^2 \pi p_k(t-s)\right)^{\frac{1}{2}}$$

En remarquant que : $d_N(s,t) = \|Z_N(s) - Z_N(t)\|_2$, cette pseudo-métrique jouera un rôle très important dans la suite !

Considérons à présent la fonction de Young suivante :

$$G(t) = \exp t^2 - 1 \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

$L^G(P)$ est l'espace d'orlicz associé à G, muni de la norme suivante :

$$\forall f \in L^G(P) \qquad \|f\|_G = \min\{c > 0 \quad : \quad \mathbb{E}G(\frac{f}{c}) \leq 1\}$$

Pour estimer l'extremum :

$$Q_N := \sup_{t\in[0,1]} |Z_N(t)| \qquad N \geq 1 \tag{2.2}$$

On suppose que :

$$\forall 0 \leq s, t \leq 1 \qquad \begin{cases} \|Z_N(s) - Z_N(t)\|_G \leq C d_N(s,t), \\ \|Z_N(s)\|_G \leq C \left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{2.3}$$

Où C est une constante universelle, qui peut changer de valeur à chaque nouvelle étape.

Remarque 2.1.2 *Ces hypothèses sont trivialement vérifiées lorsque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont indépendants, identiquement distribués de loi Gaussienne ou de Rademacher ; elles sont également vérifiées dans d'autres cas (voir exemples).*

2.2 Théorème principal

On démontre le résultat le plus important de ce mémoire, qui est le suivant :

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses (2.3), il existe une constante universelle K (qui est fonction de la constante C) telle que :*

$$\forall N \geq 1, \qquad \|Q_N\|_G \leq K \left(\log p_N \sum_{k=1}^N \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

Avant de procéder à la démonstration du résultat donnons trois exemples, où les hypothèses (2.3) sont vérifiées !

Exemple 1 :

Supposons que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux processus Gaussiens stationnaires centrés, avec coefficient de découplage fini, c'est-à-dire :

$$p(\mathcal{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\mathbb{E}X_1X_k}{\mathbb{E}X_1^2}\right| < \infty, \qquad p(\mathcal{Y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\mathbb{E}Y_1Y_k}{\mathbb{E}Y_1^2}\right| < \infty.$$

Alors, les hypothèses (2.3) sont vérifiées. Plus précisément, pour chaque $0 \leq s, t \leq 1$,

$$\begin{cases} \|Z_N(s) - Z_N(t)\|_G \leq 18\sqrt{2}\max\left(p\left(\mathcal{X}\right), p\left(\mathcal{Y}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2 \sin^2 \pi p_k(t-s)\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|Z_N(s)\|_G \leq 9\sqrt{2}\max\left(p\left(\mathcal{X}\right), p\left(\mathcal{Y}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{2.5}$$

En effet :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$e^{\lambda(Z_N(s)-Z_N(t))} = e^{\lambda \sum_{k=1}^N \theta_k\{X_k(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t) + Y_k(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)\}}$$

En prenant l'espérance et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\lambda(Z_N(s)-Z_N(t))} &= \mathbb{E}e^{\lambda \sum_{k=1}^N \theta_k\{X_k(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t) + Y_k(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)\}} \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{k=1}^N \theta_k X_k(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)} e^{\lambda \sum_{k=1}^N \theta_k Y_k(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)}\right) \\ &\leq \left(\mathbb{E}e^{2\lambda \sum_{k=1}^N \theta_k X_k(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)} \mathbb{E}e^{2\lambda \sum_{k=1}^N \theta_k Y_k(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On pose pour $k = 1...N$:

$$f_k^{\mathcal{X}}(x) = e^{2\lambda\theta_k x(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)}, \qquad f_k^{\mathcal{Y}}(x) = e^{2\lambda\theta_k x(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)},$$

On a donc :

$$\mathbb{E}e^{\lambda(Z_N(s)-Z_N(t))} \leq \left(\mathbb{E}\prod_{k=1}^N f_k^{\mathcal{X}}(X_k)\mathbb{E}\prod_{k=1}^N f_k^{\mathcal{Y}}(Y_k)\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après le théorème (1.2.2), on obtient que :

$$|\mathbb{E}\prod_{k=1}^N f_k^{\mathcal{X}}(X_k)| \leq \left(\prod_{k=1}^N \mathbb{E}e^{2p(\mathcal{X})\lambda\theta_k X_1(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)}\right)^{\frac{1}{p(\mathcal{X})}}$$

$$|\mathbb{E}\prod_{k=1}^N f_k^{\mathcal{Y}}(Y_k)| \leq \left(\prod_{k=1}^N \mathbb{E}e^{2p(\mathcal{Y})\lambda\theta_k Y_1(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)}\right)^{\frac{1}{p(\mathcal{Y})}}$$

Sachant que $\mathbb{E}e^{\lambda N(0,1)} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$, on alors :

$$\mathbb{E}e^{2p(\mathcal{X})\lambda\theta_k X_1(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)} = e^{2p(\mathcal{X})^2\lambda^2\theta_k^2(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)^2}$$

$$\mathbb{E}e^{2p(\mathcal{Y})\lambda\theta_k Y_1(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)} = e^{2p(\mathcal{Y})^2\lambda^2\theta_k^2(\sin 2\pi p_k s - \sin 2\pi p_k t)^2}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\lambda(Z_N(s)-Z_N(t))} &\leq e^{2\lambda^2 \max(p(\mathcal{X}),p(\mathcal{Y}))\sum_{k=1}^N \theta_k^2\left\{(\cos 2\pi p_k s-\cos 2\pi p_k t)^2+(\sin 2\pi p_k s-\sin 2\pi p_k t)^2\right\}} \\ &\leq e^{8\lambda^2 \max(p(\mathcal{X}),p(\mathcal{Y}))\sum_{k=1}^N \theta_k^2 \sin^2 \pi p_k(t-s)}\end{aligned}$$

Compte tenu du lemme (1.3.2), on obtient que :

$$\|Z_N(s)-Z_N(t)\|_G \leq 18\sqrt{2}\max\left(p\left(\mathcal{X}\right),p\left(\mathcal{Y}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2 \sin^2 \pi p_k(t-s)\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où la première inégalité. On démontre la deuxième de manière similaire.

Exemple 2 :

Supposons que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux suites de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées, et qu'il existe une constante positive M telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad |X_k| \leq M, \quad |Y_k| \leq M. \qquad P-p.s.$$

Alors les hypothèses (2.3) sont vérifiées, et pour tout $0 \leq s,t \leq 1$

$$\begin{cases} \|Z_N(s)-Z_N(t)\|_G \leq 9Md_N(s,t) \\ \|Z_N(s)\|_G \leq 9M\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{2.6}$$

En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\lambda(Z_N(s)-Z_N(t))} &= \mathbb{E}e^{\lambda\sum_{k=1}^N \theta_k\{X_k(\cos 2\pi p_k s-\cos 2\pi p_k t)+Y_k(\sin 2\pi p_k s-\sin 2\pi p_k t)\}} \\ &\leq \left(\mathbb{E}e^{2\lambda\sum_{k=1}^N \theta_k X_k(\cos 2\pi p_k s-\cos 2\pi p_k t)}\mathbb{E}e^{2\lambda\sum_{k=1}^N \theta_k Y_k(\sin 2\pi p_k s-\sin 2\pi p_k t)}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

En utilisant le lemme (1.1.1), on obtient :

$$\mathbb{E}e^{2\lambda\theta_k X_k(\cos 2\pi p_k s-\cos 2\pi p_k t)} \leq e^{4\lambda^2\theta_k^2(\cos 2\pi p_k s-\cos 2\pi p_k t)^2 M^2/2}$$

Il s'en suit que :

$$\mathbb{E}e^{2\lambda\sum_{k=1}^N \theta_k X_k(\cos 2\pi p_k s-\cos 2\pi p_k t)} \leq e^{2\lambda^2 M^2\sum_{k=1}^N \theta_k^2(\cos 2\pi p_k s-\cos 2\pi p_k t)^2}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\lambda(Z_N(s)-Z_N(t))} &\leq e^{\lambda^2 M^2\sum_{k=1}^N \theta_k^2\left\{(\cos 2\pi p_k s-\cos 2\pi p_k t)^2+(\sin 2\pi p_k s-\sin 2\pi p_k t)^2\right\}} \\ &= e^{4\lambda^2 M^2\sum_{k=1}^N \theta_k^2 \sin^2 \pi p_k(t-s)} = e^{\lambda^2 M^2 d_N^2(s,t)}\end{aligned}$$

On a alors la première inégalité :

$$\|Z_N(s) - Z_N(t)\|_G \leq 9Md_N(s,t)$$

La deuxième inégalité s'obtient en faisant des calculs similaires.
Exemple 3 :

Soit $(\mathcal{A}_k, k \geq 0)$une filtration de $\mathcal{A}$, et supposons que $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ...\}$ est une suite de différences de martingale telle que :

$$\forall k \geq 1, \qquad \|X_k\|_\infty \leq 1,$$

Et supposons que $\mathcal{Y} \equiv 0$; alors les hypothèses (2.3) sont vérifiées.
En effet
$Z_N(t) = \sum_{k=1}^N d_k^{(t)}$ où $d_k^{(t)} = \theta_k X_k \cos 2\pi p_k t$. $Z_N(t)$ est une somme de différences de martingale satisfaisant $\|d_k^{(t)}\|_\infty \leq \theta_k$. Alors d'après le lemme de Ledoux-Talagrand[7] (lemme 1.5 p 31) on a :

$$\forall v \geq 0, \quad P\left\{\left|\sum_{k=1}^N d_k^{(t)}\right| > v\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{v^2}{2\sum_{k=1}^N \|d_k^{(t)}\|_\infty^2}\right) \tag{2.7}$$

Il s'en suit que

$$\forall v \geq 0, \quad P\left\{\left|\sum_{k=1}^N d_k^{(t)}\right| > v\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{v^2}{2\sum_{k=1}^N \theta_k^2}\right) \tag{2.8}$$

En utilisant la majoration (2.8), et lemme (1.3.1) on obtient :

$$\|Z_N(s)\|_G \leq C\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Où C est une constante universelle.

Pour l'autre inégalité, il suffit de remarquer que pour tout $v \geq 0$, on a :

$$P\left\{\left|Z_N(s) - Z_n(t)\right| > v\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{v^2}{\sum_{k=1}^N \theta_k^2(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)^2}\right)$$

En raisonnant de façon similaire, on déduit que :

$$\|Z_N(s) - Z_N(t)\|_G \leq C\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2(\cos 2\pi p_k s - \cos 2\pi p_k t)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq Cd_N(s,t)$$

Où C est une constante universelle.

Démonstration du théorème

Comme première idée, notons que la pseudo-distance $d_N(.,.)$ est localement comparable à la distance usuelle.
En effet puisque $|\sin x| \leq (|x| \wedge 1)$, on a alors :

$$d_N^2(s,t) \leq 4\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 \left((\pi p_k|s-t|)^2 \wedge 1\right) \leq 4\pi^2|s-t|^2 \sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 \left(p_k^2 \wedge \frac{1}{\pi^2|s-t|^2}\right)$$

On en déduit que si $\pi|s-t| \leq 1/p_N$, alors $\left(p_k^2 \wedge \frac{1}{\pi^2|s-t|^2}\right) = p_k^2, k = 1, ..., N$.
Par conséquent $d_N(s,t) \leq 2\pi|s-t| \left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Afin de maintenir les estimations précédentes on divise l'intervalle $[0,1[$ en sous intervalles, comme suit :

$$I_{N,j} = \left[\frac{j-1}{4p_N}, \frac{j}{4p_N}\right[, \qquad j = 1,2,...,4p_N \tag{2.9}$$

Si $s,t \in I_{N,j} \quad \Rightarrow \quad |s-t| \leq \frac{1}{4p_N} \leq \frac{1}{\pi p_N}$ il s'en suit que :

$$\forall j = 1,2,...,4p_N, \quad \forall s,t \in I_{N,j}, \quad d_N(s,t) \leq 2\pi|s-t| \left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

Pour pouvoir poursuivre, on introduit le processus auxiliaire suivant :

$$\forall j = 1,2,...,4p_N, \quad \forall s,t \in I_{N,j}, \quad \mathcal{Y}_N(t) = \frac{\left[Z_N(t) - Z_N\left(\frac{j-1}{4p_N}\right)\right]}{2\pi\left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.11}$$

En bornant Q_N relativement à cette partition de l'intervalle $[0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} Q_N = \sup_{0\leq t<1} |Z_N(t)| &= \sup_{j=1,2,...,4p_N} \sup_{t\in I_{N,j}} |Z_N(t)| \\ &= \sup_{j=1,2,...,4p_N} \sup_{t\in I_{N,j}} \left| 2\pi \left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}_N(t) + Z_N\left(\frac{j-1}{4p_N}\right) \right| \end{aligned}$$

D'où :

$$Q_N \leq \sup_{j=1,2,...,4p_N} \left| Z_N\left(\frac{j-1}{4p_N}\right) \right| + 2\pi \left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{j=1,2,...,4p_N} \sup_{t\in I_{N,j}} \left|\mathcal{Y}_N(t)\right|. \tag{2.12}$$

Le problème étant à présent simplifié, il suffit d'estimer la borne supérieure $\sup_{t\in I_{N,j}} \mid \mathcal{Y}_N(t) \mid$ du processus qui de plus vérifie :

$$\forall s,t \in I_{N,j} \quad \|\mathcal{Y}_N(s)-\mathcal{Y}_N(t)\|_G \leq C \mid s-t \mid, \quad \forall j=1,2,...,4p_N.$$

En effet, en se servant de l'hypothèse du théorème et de (2.7), on a pour $\forall j=1,2,...,4p_N$:

$$\begin{aligned}\forall s,t \in I_{N,j} \quad \|\mathcal{Y}_N(s)-\mathcal{Y}_N(t)\|_G &= \|Z_N(s)-Z_N(t)\|_G \times \frac{1}{2\pi\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\ &\leq C d_N(s,t)\frac{1}{2\pi\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} = C|s-t|\end{aligned}$$

Pour construire l'objet souhaité, on va utiliser l'inégalité du théorème (1.3.1) et l'hypothèse du théorème (2.10) comme suit :

$$\begin{aligned}\|Q_N\|_G &\leq \left\|\sup_{j=1,2,...,4p_N}\left|Z_N\left(\frac{j-1}{4p_N}\right)\right|\right\|_G\\ &+ 2\pi\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.\left\|\sup_{j=1,2,...,4p_N}\sup_{t\in I_{N,j}} \mid \mathcal{Y}_N(t) \mid \right\|_G\\ &\leq ([2/\log]\log 4p_N)^{\frac{1}{2}} \sup_{j=1,2,...,4p_N}\left\|Z_N\left(\frac{j-1}{4p_N}\right)\right\|_G\\ &+ 2\pi\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left[\frac{2}{\log 2}\right]\log 4p_N\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{j=1,2,...,4p_N}\left\|\sup_{t\in I_{N,j}} \mathcal{Y}_N(t)\right\|_G\\ &\leq ([2/\log]\log 4p_N)^{\frac{1}{2}}\left\{C\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\pi\left(\sum_{k=1}^N \theta_k^2 p_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{j=1,2,...,4p_N}\left\|\sup_{t\in I_{N,j}} \mathcal{Y}_N(t)\right\|_G\right\}\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à borner $\left\|\sup_{t\in I_{N,j}} |\mathcal{Y}_N(t)|\right\|_G$.
Puisque $diam(I_{N,j},|.|)=1/4p_N$ alors pour tout $0<u\leq 1/4p_N$:

$$N(I_{N,j},|.|,u) \leq 1+\left[\frac{1/4p_N}{2u}\right] \leq 1+\frac{1/4p_N}{2u} \leq \frac{1}{2up_N}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(I_{N,j},|.|) &= \int_0^{1/4p_N} \sqrt{\log N(I_{N,j},|.|,u)}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{1/4p_N} \sqrt{\log \frac{2}{4up_N}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4p_N}\int_0^1 \sqrt{\log \frac{2}{v}}\,\mathrm{d}v \leq \frac{C}{p_N}\end{aligned}$$

En appliquant alors le théorème de Dudley (1.4.2), et en utilisant le fait que $\mathcal{Y}\left(\frac{j-1}{4p_N}\right) = 0$, pour tout sous ensemble dénombrable E de $I_{N,j}$ on a :

$$\left\|\sup_{t\in E}\mathcal{Y}_N(t)\right\|_G \leq \left\|\sup_{t\in E}|\mathcal{Y}_N(s)-\mathcal{Y}_N(t)|\right\|_G \leq \frac{C}{p_N} \tag{2.13}$$

puisque $t \longmapsto Z(t,\omega)$ est continu pour presque tout $\omega \in \Omega$ alors le processus auxiliaire $\mathcal{Y}_N$ est également continu presque surement, de ce fait posons :

$$\Omega^* = \{\omega; \quad t \longmapsto \mathcal{Y}_N(t)\, est\, continu\} \qquad alors\, P(\Omega^*) = 1$$

Soient $\omega \in \Omega^*$, $\varepsilon > 0$ et $j \in \{1,...,4p_N\}$, d'après le théorème de Heine $t \longmapsto \mathcal{Y}_N(t)$ est uniformément continu sur $\left[\frac{j-1}{4p_N}, \frac{j}{4p_N}\right]$ c'est-à-dire :

$$\exists\delta(\varepsilon) > 0\, tel\, que \qquad \sup_{|s-t|<\delta} |\mathcal{Y}_N(s,\omega)-\mathcal{Y}_N(t,\omega)| < \varepsilon$$

Soit $s \in \left[\frac{j-1}{4p_N}, \frac{j}{4p_N}\right]$, et soit $t_0 \in E$ tel que $|s-t_0| < \delta$, E sous ensemble dénombrable dense de $\left[\frac{j-1}{4p_N}, \frac{j}{4p_N}\right]$, on a alors :

$$\mathcal{Y}_N(s,\omega) = \mathcal{Y}_N(s,\omega) - \mathcal{Y}_N(t_0,\omega) + \mathcal{Y}_N(t_0,\omega)$$

Il s'en suit que :

$$|\mathcal{Y}_N(s,\omega)| \leq \sup_{|s-t|<\delta} |\mathcal{Y}_N(s,\omega)-\mathcal{Y}_N(t,\omega)| + \sup_{t\in E,\,|s-t|<\delta} |\mathcal{Y}_N(t,\omega)|$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow |\mathcal{Y}_N(s,\omega)| \leq \varepsilon + \sup_{s\in E}|\mathcal{Y}_N(s,\omega)| \qquad\qquad \forall s \in \left[\frac{j-1}{4p_N}, \frac{j}{4p_N}\right] \\ &\Rightarrow \sup_{s\in\left[\frac{j-1}{4p_N},\frac{j}{4p_N}\right]} |\mathcal{Y}_N(s,\omega)| \leq \varepsilon + \sup_{s\in E}|\mathcal{Y}_N(s,\omega)| \\ &\Rightarrow \sup_{s\in\left[\frac{j-1}{4p_N},\frac{j}{4p_N}\right]} |\mathcal{Y}_N(s,\omega)| - \sup_{s\in E}|\mathcal{Y}_N(s,\omega)| \leq \varepsilon \qquad\qquad \forall\varepsilon > 0\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que pour tout sous ensemble E dénombrable et dense dans $\left[\frac{j-1}{4p_N}, \frac{j}{4p_N}\right]$, $j \in \{1, ..., 4p_N\}$:

$$\underset{\left[\frac{j-1}{4p_N}, \frac{j}{4p_N}\right]}{sup} |\mathcal{Y}_N(s)| = \underset{E}{sup} |\mathcal{Y}_N(s)|$$

On vient donc de montrer que :

$$\left\| \sup_{t \in I_{N,j}} |\mathcal{Y}_N(t)| \right\|_G \leq \left\| \sup_{t \in \left[\frac{j-1}{4p_N}, \frac{j}{4p_N}\right]} |\mathcal{Y}_N(t)| \right\|_G \leq \frac{C}{p_N}$$

Ceci implique finalement que :

$$\begin{aligned}
\|Q_N\|_G &\leq C \left(\log 4p_N\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4p_N} \left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 p_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq C \left(\log p_N\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *L'estimation (2.4) est optimale.*

En effet :
Si $X_n = \xi_{2n}$, et $Y_n = \xi_{2n+1}$ où $(\xi_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables de Rademacher indépendantes. Et si $\theta_k = 1$, $p_k = k (k \geq 1)$. On a alors :

$$Z_N(\omega, t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_{2k}(\omega) \cos 2\pi kt + \sum_{k=1}^{N} \xi_{2k+1}(\omega) \sin 2\pi kt$$

D'où :

$$\mathbb{E} Q_N = \int_\Omega Q_N(\omega) \, \mathrm{d}P(\omega) = \int_\Omega \sup_{t \in [0,1]} |Z_n(t, \omega)| \, \mathrm{d}P(\omega)$$

Pour pouvoir minorer $\mathbb{E}Q_N$ on utilise le résultat suivant ([3] proposition 2, p 129) affirmant qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\int_\Omega \underset{0 \leq x \leq 2\pi}{sup} |g_N(x, \omega)| \, \mathrm{d}P(\omega) \geq C \left(N \log N\right)^{\frac{1}{2}} \qquad N = 2, 3, ...$$

Où

$$g_N(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_1(\omega) + \sum_{n=1}^{N} \left(\xi_{2n} \cos nx + \xi_{2n+1} \sin nx\right)$$

Et $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...\}$ est une suite de variables de Rademacher.
Ceci entraine que pour $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Q_N &= \mathbb{E} \underset{0\leq x\leq 2\pi}{sup} |g_N(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1| \\
&\geq \mathbb{E} \underset{0\leq x\leq 2\pi}{sup} |g_N(x)| - \frac{1}{2} \\
&\geq C\,(N \log N)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\
&\geq C\,(N \log N)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$C\,(N \log N)^{\frac{1}{2}} \leq \|Q_N\|_G \leq K\,(N \log N)^{\frac{1}{2}}$$

Chapitre 3

Applications

Dans cette partie on donne cinq applications du théorème (2.2.1).

1. La première fournit une estimation précise pour les sommes de la forme :
$$\sum_1^N U_k\theta_k e^{2i\pi p_k t} \qquad\qquad N = 1, 2, ...$$
Où $\mathcal{U} = (U_k)_k$ est une suite de variables aléatoires indépendantes (corollaire 3.1.1).
2. La seconde donne une estimation uniforme pour la différence de ces suites de polynômes, et dans ce cas on suppose que la suite $\mathcal{U}$ est Gaussienne (corollaire 3.1.2).
3. La troisième application fournit une estimation uniforme similaire pour les suites de variables aléatoires indépendantes et symétriques (théorème 3.1.1).
4. La quatrième est une variante du problème initial (théorème 3.1.4).
5. La dernière concerne la convergence uniforme des séries de Fourier aléatoires.

3.1 Résultats pertinents

Corollaire 3.1.1 .
(a)Soit $\mathcal{U} = (U_k)_{k=1}^{\infty}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées, on suppose qu'il existe un réel* $M < \infty$ *tel que :* $|U_k| \leq M$ *presque surement pour tout* $k \geq 1$*(voir exemple 2). Alors :*

$$\left\| \underset{0\leq t\leq 1}{sup} \left| \sum_{k=1}^N U_k\theta_k e^{2i\pi p_k t} \right| \right\|_G \leq CM \left(\log p_N \sum_{k=1}^N \theta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

C constante universelle.

(b)Soit $\mathcal{V} = (V_k)_{k=1}^{\infty}$ un processus gaussien discret stationnaire et centré avec un coefficient de découplage fini $p(\mathcal{V})$ (voir exemple 1). Alors

$$\left\|\sup_{0\le t\le 1}\left|\sum_{k=1}^{N} V_k\theta_k e^{2i\pi p_k t}\right|\right\|_G \le C\sqrt{p(\mathcal{V})}\left(\log p_N \sum_{k=1}^{N}\theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

C constante universelle.

Preuve :
Pour établir (3.1), on applique le théorème (2.2.1) à $\mathcal{X} = \{U_k/M,\ k \ge 1\}$, $\mathcal{Y} = 0$, ensuite à $\mathcal{X} = 0$, $\mathcal{Y} = \{U_k/M,\ k \ge 1\}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{0\le t\le 1}\left|\sum_{k=1}^{N} U_k\theta_k e^{2i\pi p_k t}\right|\right\|_G &\le \left\|\sup_{0\le t\le 1}\left|\sum_{k=1}^{N} U_k\theta_k \cos 2\pi p_k t\right|\right\|_G + \left\|\sup_{0\le t\le 1}\left|\sum_{k=1}^{N} U_k\theta_k \sin 2\pi p_k t\right|\right\|_G \\ &\le CM\left(\log p_N \sum_{k=1}^{N}\theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On procède de la même manière pour établir la deuxième inégalité, et ce en prenant $\mathcal{X} = \{V_k/p(\mathcal{V}),\ k \ge 1\}$, $\mathcal{Y} = 0$, ensuite à $\mathcal{X} = 0$, $\mathcal{Y} = \{V_k/p(\mathcal{V}),\ k \ge 1\}$.

L'objectif du corollaire suivant est d'améliorer (3.1.1).

Corollaire 3.1.2 *Soit $\mathcal{V} = (V_k)_{k=1}^{\infty}$ un processus gaussien stationnaire et centré avec un coefficient de découplage fini $p(\mathcal{V})$. Alors,*

$$\left\|\sup_{N<M}\sup_{0\le t\le 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} V_k\theta_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}\theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\|_G \le C\sqrt{p(\mathcal{V})}, \tag{3.3}$$

Où C est une constante universelle.

Preuve :
Comme précédemment on établit des estimations pareilles à chacune des parties réelles et imaginaires, pour ce faire on pose :

$$\begin{cases} L_{N,M}^{(cos)} = \sup\limits_{0\le t\le 1}\frac{|\sum_{k=1}^{N} V_k\theta_k \cos 2\pi p_k t|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}\theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} & (N < M), \\ L_{N,M}^{(sin)} = \sup\limits_{0\le t\le 1}\frac{|\sum_{k=1}^{N} V_k\theta_k \sin 2\pi p_k t|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}\theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} & (N < M), \\ L^{(cos)} = \sup\limits_{N<M} L_{N,M}^{(cos)} \qquad L^{(sin)} = \sup\limits_{N<M} L_{N,M}^{(sin)} \end{cases} \tag{3.4}$$

Il suffit de montrer que :

$$\mathbb{E}L^{(cos)} \leq C\sqrt{p(\mathcal{V})}, \qquad \mathbb{E}L^{(sin)} \leq C\sqrt{p(\mathcal{V})}. \tag{3.5}$$

En s'appuyant sur le théorème (1.2.1) des semi-normes Gaussiennes, et (3.5),il existe une constante K telle que :

$$2 \geq \mathbb{E}\left(\exp \frac{\left(L^{(cos)}\right)^2}{K\left(\mathbb{E}L^{(cos)}\right)^2}\right) \geq \mathbb{E}\left(\exp \frac{\left(L^{(cos)}\right)^2}{K\left(C\sqrt{p(\mathcal{V})}\right)^2}\right)$$

On en déduit immédiatement que :

$$\|L^{(cos)}\|_G \leq C\sqrt{p(\mathcal{V})}$$

Pour les mêmes raisons, on a :

$$\|L^{(sin)}\|_G \leq C\sqrt{p(\mathcal{V})}$$

D'où le résultat.
Montrons à présent (3.5) et ce en s'appuyant sur le théorème (1.2.3).On a alors,

$$\mathbb{E}L^{(cos)} \leq C\left\{\sup_{N<M} \mathbb{E}L^{(cos)}_{N,M} + \mathbb{E}\sup_{N<M} |\lambda_{N,M}|\sigma_{N,M}\right\} \tag{3.6}$$

Où :

$$\sigma_{N,M} = \sup_{0\leq t\leq 1} \| \frac{|\sum_{k=1}^{N} V_k\theta_k \cos 2\pi p_k t|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \|_2 \tag{3.7}$$

et $(\lambda_{N,M})_{N<M}$ est une suite de variables aléatoires normales $N(0,1)$ indépendantes.
En effet :
Posons pour $k = 1, ..., N$

$$G_k(t,\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{N} V_k\theta_k \cos 2\pi p_k t}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Et donc,

$$\|G_N\| = \sup_{t\in[0,1]} |G_N(t)| = L^{(cos)}_{N,M}$$

Par suite,

$$\mathbb{E}\sup_{N<M} \|G_N\| = \mathbb{E}\sup_{N<M} L^{(cos)}_{N,M} = \mathbb{E}L^{(cos)}$$

D'où (3.6)
Sachant que $\{G_N(t),\, t \in [0,1]\}$ est un processus Gaussien continu, et en posant :

$$K(s,t) = Cov(G_N(s), G_N(t)) = \mathbb{E}(G_N(s)G_N(t))$$

Alors, la dualité s'exprime comme suit :

$$\langle \mu,\, G_N \rangle = \int_0^1 G_N(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \qquad \mu \in C[0,1]^*$$

$$\begin{aligned}\langle \mu,\, G_N \rangle^2 &= \int_0^1 G_N(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \int_0^1 G_N(s)\,\mathrm{d}\mu(s)\\ &= \int_0^1 \int_0^1 G_N(t)G_N(s)\,\mathrm{d}\mu(t)\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\langle \mu,\, G_N \rangle^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}\left(G_N(t)G_N(s)\right)\,\mathrm{d}\mu(t)\\ &= \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\,\mathrm{d}\mu(t)\\ &= \int_0^1 (Kf)(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\end{aligned}$$

Avec $K : C[0,1]^* \longrightarrow C[0,1]$ l'opérateur de covariance. Ceci implique

$$\sigma^2_{N,M} = \sup_{\|\mu\|_{C[0,1]^*} \le 1} \mathbb{E}\,\langle \mu,\, G_N \rangle^2 = \sup_{\|\mu\|_{C[0,1]^*} \le 1} \langle \mu, K\mu \rangle$$

Posons $S^* = \left\{\mu \in C[0,1]^*\,,\ \|\mu\|_{C[0,1]^*} \le 1\right\}$, alors d'une part :

$$\sigma^2_{N,M} \le \sup_{\mu \in S^*} \|\mu\|\|K\mu\| \le \|K\|$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\|K\| = \sup_{\mu \in S^*} \|K\mu\| = \sup_{\mu,\nu \in S^*} \langle \nu, K\mu \rangle &= \sup_{\mu,\nu \in S^*} \mathbb{E}\left(\langle \mu, G_N \rangle \langle \nu, G_N \rangle\right)\\ \le \sup_{\mu \in S^*} \left(\mathbb{E}\,\langle \mu, G_N \rangle\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{\nu \in S^*} \left(\mathbb{E}\,\langle \nu, G_N \rangle\right)^{\frac{1}{2}} &= \sigma^2_{N,M}\end{aligned}$$

D'où $\sigma^2_{N,M} = \|K\|$.
Par définition :

$$(K\mu)(t) = \int_0^1 K(s,t)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \le t \le 1$$

En prenant la valeur absolument :

$$\left|(K\mu)(t)\right| \leq \int_0^1 |K(s,t)|\,\mathrm{d}s$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|K(s,t)| \leq \left(\mathbb{E}\left(G_N(t)^2\right)\mathbb{E}\left(G_N(s)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\sup_{s,t}|K(s,t)| \leq \sup_{0\leq t\leq 1}\mathbb{E}\left(G_N(t)^2\right)$$

D'où

$$\left|(K\mu)(t)\right| \leq \sup_{0\leq t\leq 1}\mathbb{E}\left(G_N(t)^2\right)\|\mu\|$$

Il s'en suit que :

$$\|K\mu\|_\infty \leq \sup_{0\leq t\leq 1}\mathbb{E}\left(G_N(t)^2\right)\|\mu\|$$

Déduisant que :

$$\|K\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1}\mathbb{E}\left(G_N(t)^2\right)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\|K\| &= \sup_{\mu\in S^*}\|K\mu\|_\infty = \sup_{\mu\in S^*}\sup_{0\leq t\leq 1}\left|(K\mu)(t)\right| \\ &\geq \sup_{0\leq t\leq 1}|(K\delta_t)(t)| = \sup_{0\leq t\leq 1}\mathbb{E}\left(G_N(t)^2\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\sigma^2_{N,M} = \|K\| = \sup_{0\leq t\leq 1}\mathbb{E}\left(G_N(t)^2\right)$$

En d'autres termes :

$$\sigma_{N,M} = \sup_{0\leq t\leq 1}\|G_N(t)\|_2$$

En procédant de la même manière que dans l'exemple (1), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\lambda\sum_{N+1}^{M}\theta_k V_k\cos 2\pi p_k t} &= \mathbb{E}\left(\prod_{N+1}^{M} e^{\lambda\theta_k V_k\cos 2\pi p_k t}\right) \\ &\leq \prod_{N+1}^{M}\mathbb{E}^{\frac{1}{p(\mathcal{V})}}\left(e^{\lambda p(\mathcal{V})\theta_k V_k\cos 2\pi p_k t}\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}p(\mathcal{V})\lambda^2\sum_{N+1}^{M}\theta_k^2\cos^2 2\pi p_k t}\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\left\| \sum_{N+1}^{M} \theta_k V_k \cos 2\pi p_k t \right\|_G \leq C\sqrt{p(\mathcal{V})} \left(\sum_{k=N+1}^{M} \theta_k^2 \cos^2 2\pi p_k t \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C\sqrt{p(\mathcal{V})} \left(\sum_{k=N+1}^{M} \theta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Par suite,

$$\left\| \sum_{N+1}^{M} \theta_k V_k \cos 2\pi p_k t \right\|_2 \leq C\sqrt{p(\mathcal{V})} \left(\sum_{k=N+1}^{M} \theta_k^2 \cos^2 2\pi p_k t \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\sigma_{N,M} = \sup_{0\leq t\leq 1} \left\| \frac{\left|\sum_{k=1}^{N} V_k \theta_k \cos 2\pi p_k t\right|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\|_2$$
$$\leq \frac{C\sqrt{p(\mathcal{V})} \left(\sum_{k=N+1}^{M} \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} \theta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= C\sqrt{p(\mathcal{V})} \left(\log p_M\right)^{-\frac{1}{2}}$$

par le théorème (2.2.1) on sait que :

$$\sup_{N<M} \mathbb{E} L_{N,M}^{(cos)} \leq \mathbb{E} L^{(cos)} \leq C\sqrt{p(\mathcal{V})}$$

D'autre part, si on ré-indexe la suite comme suit : On pose $m_1 = 1, \quad m_k = 1 + \sum_{j=2}^{k} (j-1) \quad (k \geq 2)$, et pour tout $M \geq 1$ et tout $l \in [m_M, m_{M+1}[$, $g_l := \lambda_{l-m_M,M}$, $s_l := (\log p_M)^{\frac{1}{2}}$.on a $s_l \geq (\log M)^{\frac{1}{2}}$, d'où :

$$\mathbb{E} \sup_{N<M} |\lambda_{N,M}| \sigma_{N,M} \leq C\, \mathbb{E} \sup_{k\geq 1} \frac{|g_k|}{s_k}$$
$$\leq C \sup_{k\geq 2} \sqrt{\frac{\log k}{s_k}}\, \mathbb{E} \sup_{k\geq 2} \frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}}$$

Par ailleurs, pour $N \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{2\leq k\leq N} \frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}} &= \int_0^{+\infty} P\left(\sup_{2\leq k\leq N} \frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}} > t\right) \mathrm{d}t \\
&\leq b + \int_b^{+\infty} P\left(\sup_{2\leq k\leq N} \frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}} > t\right) \mathrm{d}t \\
&= b + \sum_{k=2}^{N} \int_b^{+\infty} P\left(|g_1| > t\sqrt{\log k}\right) \mathrm{d}t \\
&= b + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=2}^{N} \int_b^{+\infty} \int_{t\sqrt{\log k}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité qui affirme que pour tout $a > 0$ on a :

$$\int_a^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{2}}$$

on obtient que :

$$\mathbb{E} \sup_{2\leq k\leq N} \frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}} \leq b + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=2}^{N} \int_b^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{\log k}} e^{-\frac{\log k}{2}t^2} \,\mathrm{d}t$$

En posant $u = t\sqrt{\log k}$ et en réutilisant l'inégalité citée, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{2\leq k\leq N} \frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}} &\leq b + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{\log k}} \int_{b\sqrt{\log k}}^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u \\
&\leq b + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{b\log k} \int_{b\sqrt{\log k}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u \\
&\leq b + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{b^2(\log k)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{b^2}{2}\log k} \\
&= b + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{b^2 k^{\frac{b^2}{2}} (\log k)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

En prenant $b = 2$, on a :

$$\mathbb{E} \sup_{2\leq k\leq N} \frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2(\log k)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où :

$$\mathbb{E}\sup_{k\geq 2}\frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}} = \lim_{N\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}\sup_{2\leq k\leq N}\frac{|g_k|}{\sqrt{\log k}}$$
$$\leq 2+\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2(\log k)^{\frac{3}{2}}} < \infty$$

Entrainant,

$$\mathbb{E}\sup_{N<M}|\lambda_{N,M}|\sigma_{N,M}\leq C$$

Donc $\mathbb{E}L^{(cos)} \leq C\sqrt{p(\mathcal{V})}$. En résonnant identiquement on établit la même estimation pour $\mathbb{E}L^{(sin)}$ et en combinant les deux résultats on obtient (3.5). Le résultat suivant concerne les variables aléatoires symétriques.

Théorème 3.1.1 *Soit $\mathcal{W}=(W_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires symétriques indépendantes. Alors,*

$$\left\|\sup_{N<M}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}W_k\theta_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M\sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\|_G\leq C, \tag{3.8}$$

C une constante universelle.

Remarque 3.1.1 *Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on a :*

$$\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}W_k\theta_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M\sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\leq\frac{\left(\sum_{k=N+1}^{M}|W_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=N+1}^{M}|e^{2i\pi p_k t}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(\log p_M)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\leq\left(\frac{M-N}{\log p_M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En particulier si la suite $(p_m)_{m\geq 1}$ est telle que $p_{m+1}\geq\lambda p_m$ $(\lambda>1)$ pour tous les $m\geq 1$, alors :

$$\log p_M\geq\log(\lambda^{M-1}p_1)\geq(M-1)log\lambda$$

On peut affirmer alors que :

$$\sup_{N<M}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}W_k\theta_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M\sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\leq\sup_{N<M}\sup_{0\leq t\leq 1}\left(\frac{M-N}{M-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\log\lambda}}=C$$

La constante C dépend uniquement de λ. Alors le théorème (3.1.1) n'est intéressant que lorsque la suite $(p_m)_{m\geq 1}$ croit au plus de façon géométrique.

Preuve :
Soit $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite indépendante de $\mathcal{W}$ de variables de Rademacher mutuellement indépendantes, définie sur $(\Omega_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon, P_\varepsilon)$. Puisque la suite $\mathcal{W}$ est symétrique, alors $\mathcal{W}' = (\varepsilon_k W_k)_{k=1}^{\infty}$ et $\mathcal{W}$ sont identiquement distribuées.
Soit $g = (g_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires normales $N(0,1)$ indépendantes définie sur $(\Omega_g, \mathcal{A}_g, P_g)$ indépendante des autres suites.
Soit $|g'| = (|g_k'|)_{k=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, où $(g_k')_{k=1}^{\infty}$ est une copie indépendante de la suite $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ définie sur $(\Omega_{g'}, \mathcal{A}_{g'}, P_{g'})$.
Alors $(\varepsilon_k|g_k'|)_k \overset{\mathcal{L}}{=} (g_k)_k$.
Soit L un entier strictement positif.
On a d'une part, en utilisant le corollaire(3.1.2) :

$$\left\| \sup_{N<M\leq L} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\sum_{k=N+1}^{M} g_k W_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L^G(P_g)} \leq C \leq K_0$$

$$K_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C_0$$

En d'autres termes :

$$\mathbb{E}_g G \left(\sup_{N<M\leq L} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\sum_{k=N+1}^{M} g_k W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0 \left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \leq 1$$

D'autre part, par l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\varepsilon G \left(\sup_{N<M\leq L} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0 \left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \mathbb{E}_\varepsilon G \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_{N<M\leq L} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k \mathbb{E}_{g'}(|g_k'|) W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0 \left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \mathbb{E}_\varepsilon G \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_{N<M\leq L} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\mathbb{E}_{g'} \left(\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k |g_k'| W_k e^{2i\pi p_k t}\right)|}{K_0 \left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&\leq \mathbb{E}_\varepsilon G \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_{N<M\leq L} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{\mathbb{E}_{g'} |\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k |g_k'| W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0 \left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \mathbb{E}_\varepsilon G\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbb{E}_{g'}\left(\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}\varepsilon_k|g_k^{'}|W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$$

$$\leq \mathbb{E}_\varepsilon \mathbb{E}_{g'} G\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}\varepsilon_k|g_k^{'}|W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \mathbb{E}_\varepsilon \mathbb{E}_{g'}\mathbb{E}_g G\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}\varepsilon_k|g_k^{'}|W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \mathbb{E}_\varepsilon \mathbb{E}_{g'}\mathbb{E}_g G\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}g_k W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \mathbb{E}_g G\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}g_k W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \mathbb{E}_g G\left(\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}g_k W_k e^{2i\pi p_k t}|}{C_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \leq 1$$

Donc

$$\mathbb{E}_\varepsilon G\left(\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}\varepsilon_k W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \leq 1$$

Ceci implique que

$$\mathbb{E}\mathbb{E}_\varepsilon G\left(\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}\varepsilon_k W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \leq 1$$

Par conséquent

$$\mathbb{E} G\left(\sup_{N<M\leq L}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M}W_k e^{2i\pi p_k t}|}{K_0\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M}W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \leq 1$$

Prouvant que

$$\left\| \sup_{N<M\leq L} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\sum_{k=N+1}^{M} W_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\|_G \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} C_0$$

En tendant L vers l'infini, on obtient :

$$\left\| \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\sum_{k=N+1}^{M} W_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\|_G \leq C$$

D'où le théorème.

On peut déduire de ce théorème (exceptée la constante 2) l'estimation de Salem-Zygmund [9] que voici,

Théorème 3.1.2 *Soient $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes d'entiers positifs et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $\epsilon = (\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \boldsymbol{P})$. Alors :*

$$\boldsymbol{P}\left\{ \limsup_{k\longrightarrow+\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{max_{n_k<n\leq n_{k+1}} |\sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \epsilon_j e^{2i\pi p_j t}|}{\left(\log p_{n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 2 \right\} = 1 \qquad (3.9)$$

Preuve :
Posons pour tout $k \geq 1$:

$$A_k = \left\{ \omega\,;\ \sup_{0\leq t\leq 1} max_{n_k<n\leq n_{k+1}} \frac{|\sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \epsilon_j(\omega) e^{2i\pi p_j t}|}{\left(\log p_{n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq C' \right\}$$

Où $C' > C$ (la constante du théorème 3.1.1).
L'indépendance des variables de Rademacher de la suite ϵ entraine l'indépendance des évènements $A_k,\ k \geq 1$.
D'après l'inégalité de Markov et le théorème (3.1.1) on a,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{A}_k) &\leq \frac{1}{C'} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq 1} max_{n_k<n\leq n_{k+1}} \frac{|\sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \epsilon_j e^{2i\pi p_j t}|}{\left(\log p_{n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\leq \frac{C}{C'} \end{aligned}$$

Avec $\bar{A}_k$ l'évènement complémentaire de A_k.
D'où

$$\sum_{k\geq 1} \mathbf{P}(A_k) \geq \sum_{k\geq 1} \left(1 - \frac{C}{C'}\right) = +\infty$$

Ce qui implique que $\sum_{k\geq 1} \mathbf{P}(A_k) = +\infty$, et d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbf{P}\left(\limsup_k A_k\right) = 1$$

D'où le résultat du théorème.
Le théorème(3.1.2) est en fait une conséquence du théorème suivant de Salem-Zygmund ([8] lemme 4.3.1) que nous admettons :

Théorème 3.1.3 *considérons la série $\sum_1^\infty r_m\epsilon_m \cos mx$ où $\epsilon = (\epsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \boldsymbol{P})$, et $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.*
Notons par $P_n = P_n(\omega, x)$ le polynôme $\sum_1^n r_m\epsilon_m(\omega)\cos mx$ et posons $M_n = M_n(\omega) = \max_x |P_n(\omega, x)|$ et $R_n = \sum_1^n r_m^2$.
Alors il existe une constante A $(A \leq 2)$ telle que :

$$\limsup_{k\longrightarrow+\infty} \frac{M_n(\omega)}{\sqrt{R_n \log n}} \leq A \qquad \textit{pour presque tout } \omega.$$

En s'inspirant de la démonstration du théorème ci-dessus on peut affirmer que pour tout entier positif N :

$$\left\| \sup_x \left| \sum_{n=1}^N a_n\epsilon_n \exp(2i\pi nx) \right| \right\|_1 \leq C \sqrt{\left(\sum_1^N a_n^2\right) \log N}$$

C une constante universelle pouvant être estimée.
En effet :
Posons pour $N \geq 1$

$$P_N(\omega, x) = \sum_{n=1}^N a_n\epsilon_n \exp(2i\pi nx)$$

et

$$M_N(\omega) = \sup_{0\leq x\leq 1} \left| \sum_{n=1}^N a_n\epsilon_n \exp(2i\pi nx) \right|$$

En utilisant l'inégalité de Bernstein (lemme (4.2.1) de [8])que nous citons :

Lemme :
Soit $f_n(\omega) = \sum_1^n c_m \epsilon_m(\omega)$ où $\epsilon = (\epsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes, et $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Posons $C_n = \sum_1^n c_m^2$ et $D_n = \sum_1^n c_m^4$ et soit λ un réel positif, alors :

$$e^{\frac{1}{2}\lambda^2 C_n - \lambda^4 D_n} \leq \int_\Omega e^{\lambda f_n}\, \mathrm{d}\mathbf{P} \leq e^{\frac{1}{2}\lambda^2 C_n}$$

On a :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n \epsilon_n \exp(2i\pi n x)\right| \leq 2\left|\sum_{n=1}^{N} a_n \epsilon_n\right|$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\lambda|P_N|}\, \mathrm{d}\mathbf{P} &\leq \int_\Omega e^{2\lambda|\sum_{n=1}^N a_n\epsilon_n|}\, \mathrm{d}\mathbf{P} \\ &\leq 2e^{2\lambda^2 \sum_{n=1}^N a_n^2}\end{aligned}$$

Et donc

$$\int_\Omega \int_0^1 e^{\lambda|P_N|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\mathbf{P} \leq 2e^{2\lambda^2 \sum_{n=1}^N a_n^2}$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme (4.2.3) de [8], on obtient :

$$\int_0^1 e^{\lambda|P_N|}\, \mathrm{d}x > \frac{1-\theta}{N} e^{\lambda\theta M_N} \qquad 0 < \theta < 1$$

On a alors

$$\int_\Omega \frac{1-\theta}{N} e^{\lambda\theta M_N}\, \mathrm{d}\mathbf{P} < 2e^{2\lambda^2 \sum_{n=1}^N a_n^2}$$

Posons $\lambda = \left(\beta \frac{\log N}{\sum_{n=1}^N a_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ avec β une constante strictement positive. On obtient

$$\int_\Omega e^{\lambda\theta M_N}\, \mathrm{d}\mathbf{P} < \frac{2}{1-\theta} e^{\log N(2\beta+1)}$$

Plus encore

$$\int_\Omega e^{\lambda\theta M_N - \log N(2\beta+2+\eta)}\, \mathrm{d}\mathbf{P} < \frac{2}{1-\theta} e^{-(1+\eta)\log N} \qquad \eta > 0$$

Par le biais du théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{N=1}^{\infty} e^{\lambda\theta M_N - \log N(2\beta+2+\eta)}\, \mathrm{d}\mathbf{P} &= \sum_{N=1}^{\infty} \int_\Omega e^{\lambda\theta M_N - \log N(2\beta+2+\eta)}\, \mathrm{d}\mathbf{P} \\ &< \frac{2}{1-\theta} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{(1+\eta)}} < \infty\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement

$$\sum_{N=1}^{\infty} e^{\lambda\theta M_N - \log N(2\beta+2+\eta)} < \infty \qquad \mathbf{P}.p.s$$

Posons alors $\Omega^{'} = \omega \in \left\{\omega \in \Omega \,:\, \sum_{N=1}^{\infty} e^{\lambda\theta M_N(\omega) - \log N(2\beta+2+\eta)} < \infty\right\}$, et soit $\omega \in \Omega^{'}$, on sait que

$$e^{\lambda\theta M_N(\omega) - \log N(2\beta+2+\eta)} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$$

C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\omega) \in \mathbb{N} \quad \forall N \geq n_0(\omega) \quad e^{\lambda\theta M_N(\omega) - \log N(2\beta+2+\eta)} < \varepsilon$$

pour $\varepsilon = 1$

$$\forall N \geq n_0(\omega) \quad \lambda\theta M_N(\omega) < (2\beta + 2 + \eta)\log N$$

En remplaçant λ par sa valeur

$$M_N(\omega) < \theta^{-1}\beta^{-\frac{1}{2}}(2\beta + 2 + \eta)\left(\left(\sum_1^N a_n^2\right)\log N\right)^{\frac{1}{2}}$$

On a donc

$$\forall N \geq n_0(\omega) \geq 1 \qquad \frac{M_N(\omega)}{\left(\log N \sum_1^N a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq C \qquad \textit{Pour tout}\, \omega \in \Omega^{'}$$

D'où

$$\left\|\sup_x \left|\sum_{n=1}^N a_n\epsilon_n \exp(2i\pi nx)\right|\right\|_1 \leq C\sqrt{\left(\sum_1^N a_n^2\right)\log N}$$

On peut également traiter une variante du problème initial, pour ce-là considérons la suite $\mathcal{P}$:

$$P_1, P_2, ...$$

de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et satisfaisant la condition suivante :

$$\mathbf{P}\{p_i + P_i \geq 0\} = 1 \qquad i = 1, 2, ... \tag{3.10}$$

Cette hypothèse est purement technique.
Introduisons la suite de polynômes aléatoires suivante :

$$U_N(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{2i\pi t(p_k + P_k)} - \mathbb{E}e^{2i\pi t(p_k + P_k)} \qquad N = 1, 2, ... \tag{3.11}$$

U_N est une variable centrée, alors par la technique classique de symétrisation des variables aléatoires, l'étude de l'extremum de ces polynômes est réduite à l'étude de la suite symétrique suivante :

$$V_N = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k e^{2i\pi t(p_k + P_k)} \qquad N = 1, 2, ...$$

Où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ est une suite de variables aléatoires de Rademacher définies sur un autre espace de probabilité $(\Omega_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon, \mathbf{P}_\varepsilon)$, on note par $\mathbf{E}_\varepsilon$ le symbole d'intégration correspondant. Mais *conditionnellement* à la suite $(P_k)_k$ ces polynômes sont du même type que celui du corollaire (3.1.1)($(\mathcal{U}_k)_{k=1}^{\infty} = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ avec $|\varepsilon_k| \leq 1$, donc on peut user des résultats établis avant.
Pour la suite on suppose que la condition suivante soit vérifiée :

$$C(\mathcal{P}, \Phi) = \mathbb{E} \sup_{M \geq 1} \frac{\left[\log_+(p_M + P_M)\right]^{\frac{1}{2}}}{\Phi(M)} \tag{3.12}$$

Avec $\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application croissante, et

$$\log_+(x) = log\left(max(x, 1)\right) \qquad x > 0$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.1.4 *Il existe une constante universelle C telle que*

$$\mathbb{E} \sup_{N<M} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|U_M(t) - U_N(t)|}{(M-N)^{\frac{1}{2}} \Phi(M)} \leq C.C(\mathcal{P}, \Phi) \tag{3.13}$$

Preuve :
Considérons la suite symétrique $(V_N)_{N\geq 1}$, conditionnellement à la suite $(P_k)_k$, posons $q_k = p_k + P_k \quad k \geq 1$, en vertu du théorème (3.1.1), on a :

$$\left\| \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\sum_{N+1}^{M} \varepsilon_k e^{2i\pi q_k t}|}{\left(\log_+ q_M \sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{G,\mathbf{P}_\varepsilon} \leq C$$

Où C est une constante universelle.
Sachant que $\sum_{N+1}^{M} \varepsilon_k e^{2i\pi q_k t} = V_M(t) - V_N(t)$ et que $\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k^2 = M - N$ alors,

$$\left\| \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|V_M(t) - V_N(t)|}{\big((M-N)\log_+ q_M\big)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{G,\mathbf{P}_\varepsilon} \leq C$$

D'où,

$$\mathbf{E}_\varepsilon \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|V_M(t) - V_N(t)|}{\big((M-N)\log_+(p_M + P_M)\big)^{\frac{1}{2}}} \leq C$$

De là on obtient :

$$\mathbb{E}\mathbf{E}_\varepsilon \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|V_M(t) - V_N(t)|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)}$$

$$= \mathbb{E}\mathbf{E}_\varepsilon \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \left(\frac{|V_M(t) - V_N(t)|}{\big((M-N)\log_+(p_M + P_M)\big)^{\frac{1}{2}}} . \frac{\big(\log_+(p_M + P_M)\big)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(M)} \right)$$

$$\leq \mathbb{E}\mathbf{E}_\varepsilon \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \left(\frac{|V_M(t) - V_N(t)|}{\big((M-N)\log_+(p_M + P_M)\big)^{\frac{1}{2}}} \sup_M \left(\frac{\big(\log_+(p_M + P_M)\big)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(M)} \right) \right)$$

$$\leq C\mathbb{E} \sup_M \frac{\big(\log_+(p_M + P_M)\big)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(M)} = C.C(\mathcal{P}, \Phi)$$

Soit $(P_k^{'})_{k\geq 1}$ une copie équivalente indépendante de la suite $(P_k)_{k\geq 1}$ définie sur un autre espace de probabilité $(\Omega^{'}, \mathcal{B}^{'}, P^{'})$ avec $\mathbb{E}^{'}$ le symbole d'intégration correspondant. Étant donné que :

$$\mathbb{E}^{'} e^{2i\pi t(p_k + P_k^{'})} = \mathbb{E} e^{2i\pi t(p_k + P_k)}$$

on a,

$$\mathbb{E}\mathbf{E}_\varepsilon \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|U_M(t) - U_N(t)|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)}$$

$$= \mathbb{E}\mathbf{E}_\varepsilon \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \left(\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} e^{2i\pi t(p_k + P_k)} - \mathbb{E} e^{2i\pi t(p_k + P_k)}|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \right)$$

$$= \mathbb{E}\mathbf{E}_\varepsilon \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \left(\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} e^{2i\pi t(p_k+P_k)} - \mathbb{E}' e^{2i\pi t(p_k+P_k^{'})}|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \right)$$
$$\le \mathbf{E}_\varepsilon \mathbb{E}\mathbb{E}^{'} \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \left(\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} e^{2i\pi t(p_k+P_k)} - e^{2i\pi t(p_k+P_k^{'})}|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \right)$$

Puisque

$$e^{2i\pi t(p_k+P_k)} - e^{2i\pi t(p_k+P_k^{'})} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varepsilon_k \left(e^{2i\pi t(p_k+P_k)} - e^{2i\pi t(p_k+P_k^{'})} \right)$$

Alors,

$$\mathbf{E}_\varepsilon \mathbb{E}\mathbb{E}^{'} \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \left(\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} e^{2i\pi t(p_k+P_k)} - e^{2i\pi t(p_k+P_k^{'})}|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \right)$$
$$= \mathbf{E}_\varepsilon \mathbb{E}\mathbb{E}^{'} \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \left(\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k \left(e^{2i\pi t(p_k+P_k)} - e^{2i\pi t(p_k+P_k^{'})} \right)|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \right)$$
$$\le \mathbf{E}_\varepsilon \mathbb{E}\mathbb{E}^{'} \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \left(\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k e^{2i\pi t(p_k+P_k)}|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \right)$$
$$+ \mathbf{E}_\varepsilon \mathbb{E}\mathbb{E}^{'} \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \left(\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k e^{2i\pi t(p_k+P_k^{'})}|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \right)$$
$$= 2\mathbf{E}_\varepsilon \mathbb{E} \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \left(\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} \varepsilon_k e^{2i\pi t(p_k+P_k)}|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \right)$$
$$= 2\mathbb{E}\mathbf{E}_\varepsilon \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \frac{|V_M(t)-V_N(t)|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)}$$
$$\le C.C(\mathcal{P},\Phi)$$

Ce qui entraine,

$$\mathbb{E} \sup_{N<M} \sup_{0\le t\le 1} \frac{|U_M(t)-U_N(t)|}{(M-N)^{\frac{1}{2}}\,\Phi(M)} \le C.C(\mathcal{P},\Phi)$$

3.2 La convergence uniforme des séries de Fourier aléatoires

Soit $\mathcal{C}[0,1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de la norme sup $\|f\| = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|,\ f \in \mathcal{C}[0,1]$. Considérons la série de Fourier du type

$$\sum_{k=1}^{n} W_k(\omega) e^{2i\pi p_k t} \qquad\qquad n = 1, 2, ...$$

Où $\mathcal{W} = (W_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et symétriques, et $(p_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante d'entiers positifs (avec $p_1 > 1$). Le but de cette partie est de trouver une condition suffisante pour la convergence des séries de Fourier aléatoires et ce en s'appuyant sur le théorème (3.1.1), en d'autre termes on montre que le théorème (3.1.1) reste valide pour ce genre de problèmes, et nous allons voir une manière très simple de le traduire dans ce contexte.

Théorème 3.2.1 *Soit $\mathcal{W} = (W_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et symétriques, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit $(p_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante d'entiers positifs (avec $p_1 > 1$).*
Supposons qu'il existe des entiers $0 := n_0 < n_1 < n_2 < ...$ tels que la conditions suivante soit vérifiée :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\log(p_{n_{i+1}})}\mathbb{E}\left[\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |W_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \textit{converge.} \tag{3.14}$$

Alors la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} W_k(\omega)e^{2i\pi p_k t} \quad n = 1, 2, ...$ converge dans $\mathcal{C}[0,1]$ pour presque tout ω.

Preuve :
Posons $S_n(\omega, t) := \sum_{k=1}^{n} W_k(\omega)e^{2i\pi p_k t}$ et

$$R = \sup_{N<M} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|\sum_{k=N+1}^{M} W_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Par le théorème (3.1.1) : $\|R\|_G < C$ d'où $\mathbb{E}R < \infty$. Par ailleurs,

$$S_{n_{i+1}} - S_{n_i} = \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} W_k e^{2i\pi p_k t} \qquad i \geq 1$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|S_{n_{i+1}} - S_{n_i}\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{0\le t\le 1}\left|\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} W_k e^{2i\pi p_k t}\right| \\
&= \sup_{0\le t\le 1} \frac{|\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} W_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log(p_{n_{i+1}})\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\log(p_{n_{i+1}})}\left[\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}|W_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sup_{N<M}\sup_{0\le t\le 1}\frac{|\sum_{k=N+1}^{M} W_k e^{2i\pi p_k t}|}{\left(\log p_M \sum_{k=N+1}^{M} W_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\log(p_{n_{i+1}})}\left[\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}|W_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= R\sqrt{\log(p_{n_{i+1}})}\left[\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}|W_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Donc pour $n_i \le n \le n_{i+1}, \quad i \ge 1$

$$\|S_n - S_{n_i}\|_{\mathcal{C}} \le R\sqrt{\log(p_n)}\left[\sum_{k=n_i+1}^{n}|W_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sup_{n_i\le n\le n_{i+1}}\|S_n - S_{n_i}\|_{\mathcal{C}} &\le R\sup_{n_i\le n\le n_{i+1}}\sqrt{\log(p_n)}\left[\sum_{k=n_i+1}^{n}|W_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= R\sqrt{\log(p_{n_{i+1}})}\left[\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}|W_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

À présent montrons que la suite (S_{n_k}) converge vers une limite S, et ce en montrant que c'est une suite de Cauchy. Soit $i, j \ge 1$:

$$\begin{aligned}
\|S_{n_j} - S_{n_i}\|_{\mathcal{C}} &\le \sum_{k=i}^{k=j-1}\|S_{n_{k+1}} - S_{n_k}\|_{\mathcal{C}} \\
&\le \sum_{k=i}^{k=j-1} R\sqrt{\log(p_{n_{k+1}})}\left[\sum_{l=n_k+1}^{n_{k+1}}|W_l|^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Et donc d'après l'hypothèse du théorème :

$$\lim_{i,j\longrightarrow+\infty}\|S_{n_j} - S_{n_i}\|_{\mathcal{C}} = 0 \quad P.p - s \tag{3.15}$$

Par ailleurs, soit $n \geq 1$, alors de manière similaire on a :

$$\sum_{k} \sup_{n_k \leq n \leq n_{k+1}} \|S_n - S_{n_k}\|_{\mathcal{C}} \leq \sum_{k} R\sqrt{\log(p_{n_{k+1}})} \left[\sum_{l=n_k+1}^{n_{k+1}} |W_l|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\sup_{n_k \leq n \leq n_{k+1}} \|S_n - S_{n_k}\|_{\mathcal{C}} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad P.p - s \tag{3.16}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$

$$\|S_n - S\|_{\mathcal{C}} \leq \|S_n - S_{n_k}\|_{\mathcal{C}} + \|S_{n_k} - S\|_{\mathcal{C}}$$

D'après (3.15) et (3.16) :

$$\|S_n - S\|_{\mathcal{C}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad P.p - s \tag{3.17}$$

Conclusion

Dans ce mémoire on montre qu'estimer -uniformément- des polynômes trigonométriques aléatoires constitue un moyen infaillible dans l'étude de la convergence presque sure de séries aléatoires.
Ce travail nous a également permis de montrer que la méthode d'entropie métrique permet -efficacement- d'apporter tous les éléments de réponse à cette problématique.

Et de façon similaire, la méthode d'entropie métrique a été utilisée pour obtenir des raffinements du théorème de Rademacher-Menchov sur la convergence presque sure des séries orthogonales, elle a aussi permis d'obtenir une nouvelle preuve pour la loi forte des grands nombres pour les suites faiblement stationnaires de V.F Gaposhkin.

Bibliographie

[1] DUDLEY R.M., *The size of compact subsets of Hilbert space ans continuity of Gaussian processes*, J.Functional Analysis 1 (1967), 290-330.

[2] GRAVERSON S.E., PESKIR G., WEBER M., *The continuity principle in exponential type Orlicz spaces*, Nagoya Math, J. 137 (1995), 55-75.

[3] KASHIN B.S., SAAKYAN A.A., *Orthogonal series*, Translation of Math. Manographs 75, Amer.Math. series (1989).

[4] KLEIN A., LANDAU L., SHUCKER D.S., *Decoupling inequalities for stationary Gaussian processes*, Ann of Prob 10 (1982), 702-282.

[5] KRASNOSEL'SKII M.A., RUTICKII Ya.B., *Convex functions and Orlicz spaces*, P.Noordfoff Ltd, Groningen, 1961.

[6] KUIPERS L., NEINDERREITER H., *Uniform distribution of sequences*, Pure Appl.Math., Wiley-Interscience, NEW YORK (1974).

[7] LEDOUX M., TALAGRAND M., *Probability in Banach spaces*, Springer Verlag, 1990.

[8] LIFSHITS M., *Lectures on Gaussian processes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, SpringerBriefs in Mathematics, 2012.

[9] SALEM R., ZYGMUND A., *Some properties of trigonometric series whose term have random signs*, Acta Math. 91 (1954), 245-301.

[10] WEBER M., *Dynamical systems and processes*, European Mathematical Society, IRMA lectures in mathematics and theoretical physics, 2009.

[11] WEBER M., *Estimating random polynomials by means of metric entropy methods*, Mathematical inequalities and applications, volume 3, number 3 (2000), 443-457.