UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID - TLEMCEN
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE

pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Option :PROBABILITES ET STATISTIQUES

présenté par

MERAD MOHAMMED EL-AMIN

Thème

LA CONDITION L.A.N

(LOCAL ASYMPTOTIC NORMALITY)

Devant le jury composé de :

Mr. T. Mourid, Professeur. UABBT. **Président**.

Mr. A.Allam, Maître de Conférences. UABBT. **Examinateur**.

Mme. W. Benyahia, Maître de Conférences. UABBT. **Examinateur**.

Mme. M. Dali-Korso, Maître de Conférences. UABBT. **Rapporteur**.

Table des matières

1 Rappels et compléments **5**

1.1 Notations 5

1.2 Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue 6

1.3 Information de Fisher 6

1.4 Théorème de la limite centrale 7

1.5 Statistique régulière 8

2 Condition LAN **14**

2.1 Rapport De Vraisemblance(cas i.i.d) 14

2.2 Condition LAN : Cas i.i.d 21

2.3 Condition LAN : Cas non i.i.d 24

2.4 Corollaires pour le modèle Signal Plus bruit 31

3 Application : estimation paramétrique **34**

3.1 Estimateur du maximum de vraisemblance 34

3.2 Exemple d'Ornstein-Uhlenbeck 35

3.3 Simulation 37

Remerciements

Au moment de rédiger les dernières lignes de ce mémoire de fin d'études qui seront paradoxalement les premières, il m'a semblé essentiel de revenir sur ces dernières années d'aventure scientifique mais aussi humaine, et d'adresser mes plus vifs remerceiments à celles et ceux qui ont contribué, directement ou indirectement, à la réalisation de ce travail.
Mes premiers mots sont pour le professeur Dali Youcef Malika qui m'a fait le très grand honneur de diriger ce mémoire.
Je tiens à remercier sincèrement le Professeur Tahar Mourid chef de l'équipe de probabilités-statistiques pour sa grande disponibilité pour tous les étudiants et ses qualités humaines. Je tiens à remercier Madame Ghomari Wahiba et le Professeur Kamal Boukhetala qui m'ont montré la bonne voie pour aborder le logiciel de simulation.
Je remercie également tous les membres du jury qui ont accepté de lire mon travail et de l'évaluer.
J'ai un dernier mot pour ma famille, chez qui j'ai toujours pu retrouver un havre de tranquilité quand le travail le nécessitait, particulièrement pour mon père pour ses conseils judicieux qui m'ont toujours permis d'avancer, surtout dans les moments délicats et d'hésitation.

Introduction

Le but de ce travail est d'établir la condition LAN pour certains types de problèmes, nous introduisons cette condition comme elle est présentée dans l'ouvrage de Ibragimov-Has'minskii [4] c'est à dire pour n observations $X_1, X_2, ..., X_n$ indépendantes (de même loi, puis de lois différentes) avec les preuves détaillées correspondantes.
Nous présentons un Théorème fondamental (admis) sur l'estimateur du maximum de vraisemblance sous la condition LAN uniforme et sous certaines conditions supplémentaires de régularité sur le rapport de vraisemblance.
Nous rappelons également le Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue, l'Information de Fisher et nous définissons la propriété de régularité d'un problème statistique qui sont des notions primordiales pour aborder ce type de problème.
Dans le cas d'un problème statistique à temps continu nous nous sommes limités à énoncer les résultas établis dans les ouvrages de Ibragimov-Has'minskii [4] et Kutoyants [5]. Pour ce type de problème nous ne disposons pas de n observations $X_1, X_2, ..., X_n$ mais nous observons une trajectoire complète $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ auquel cas le Théorème (3.2.1) établi dans (Ibragimov,R.Z.Has'minskii) s'applique à l'exemple du processus de Ornstein-Uhlenbeck

$$dX_t = \theta X_t dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0$$

. Nous nous sommes intéressés au cas d'un processus à temps continu car du point de vue simulation les graphes obtenus pour (X_t) sont plus représentatifs, aussi moyennant le logiciel R version 2.15.3 nous avons abtenu des représentations de trajectoires $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$. La représentation de l'EMV correspondant à différentes valeurs du paramètre ε est faite également pour un cas particulier traité dans la thèse de Benyahia [1].

Chapitre 1

Rappels et compléments

Dans ce chapitre nous rappelons quelques résultats de statistique utilisés le long de ce mémoire. Parmis ces résultats il y a le théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue qui sert à définir la densité d'une mesure de probabilité par rapport à une mesure donnée. Nous allons rappeler aussi l'information de Fisher qui est une notion de statistique très importante introduite par Ronald Fisher qui quantifie l'information relative à un paramètre à estimer dans le cadre d'un travail sur un échantillon. Le théorème central limite est également fondamental pour ce type de problèmes car il établit la convergence en loi de la somme d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées vers la loi normale.

1.1 Notations

Tout au long de ce travail nous adoptons les notations suivantes qui vont d'abord nous permettre de rappeler certains résultats de la statistique tels que le Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue, l'information de Fisher et le théorème central limite

. $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de taille n d'une variable aléatoire de loi $P_\theta, \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$.
. $\mathcal{X}$ est l'ensemble où la variable aléatoire X_i prend ses valeurs
. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times ... \times \mathcal{U}_n$ où $\mathcal{U}_i$ est la tribu de Borel dans $\mathbb{R}$.
. $P_\theta = P_{\theta_1} \times P_{\theta_2} \times ... \times P_{\theta_k}$ où P_θ est une mesure de probabilité absolument continue par rapport à une mesure donnée $\nu = \nu_1 \times \nu_2 \times ... \times \nu_k$ définie sur $\mathcal{U}$.
. $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^k$

1.2 Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue

Soit $\nu = \nu_1 \times \nu_2 \times ... \times \nu_n$ une mesure positive définie sur $\mathcal{U}$, on dit que P_θ est absolument continue par rapport à ν et l'on note $P_\theta \ll \nu$ si et seulement si P_θ admet une densité f par rapport à ν (voir [6]) c'est à dire

$$\frac{dP_\theta}{d\nu} = P_n(x, \theta) = f(x_1, \theta) \times f(x_2, \theta) \times ... \times f(x_n, \theta)$$

pour ν-presque tout x où $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{X}^n$.

1.3 Information de Fisher

L'information de Fisher joue un rôle très important dans la théorie de l'estimation. Nous donnons plusieurs approches pour cette information.
Il existe un grand nombre de formulations alternatives de l'information de Fisher révélant certaines propriétés intéressantes. Nous avons choisit quelques définitions les plus utilisées dans notre domaine. La matrice de l'information est définie moyennant l'élément de la ième ligne et la jème colonne noté $I_{ij}(\theta)$ pour $i = 1, ..., k$ et $j = 1, ..., k$.
La définition suivante est introduite dans le cadre de l'eléctronique, la télécommunication,... par exemple pour le calcul du niveau maximal d'un amplificateur audio.

Définition 1.3.1. *[3] on l'appelle écriture sous forme de rapport qui est interprétable comme un rapport signal sur bruit*

$$I_{ij}(\theta) = \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{f(x, \theta)} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j} \nu(dx).$$

La définition suivante est introduite par Fisher en 1943

Définition 1.3.2. *[3] I_{ij} peut également s'ecrire sous la forme suivante et notons que cette formulation est à rapprocher de la définition de la distance de Hellinger.*

$$I_{ij}(\theta) = 4 \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial f^{\frac{1}{2}}(x, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f^{\frac{1}{2}}(x, \theta)}{\partial \theta_j} \nu(dx).$$

La définition suivante est associée à la divergence de Kullback-Leibler (entropie relative). La quelle est une mesure de dissimilarité entre deux lois de probabilités.

Définition 1.3.3. *[3] I_{ij} peut s'écrire sous la forme suivante*

$$\begin{aligned} I_{ij}(\theta) &= \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial log\, f(x, \theta)}{\partial \theta_j} \nu(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial log\, f(x, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j} \nu(dx). \end{aligned}$$

L'exemple suivant illustre ces définitions comme une mesure unique

Exemple 1.3.4. *considérons la Loi gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$: avec $\theta = (m, \sigma)$ le paramètre à éstimer moyennant un échantillon $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n. On peut vérifier par les trois formulations précedentes que la matrice de l'Information s'écrit comme suit*

$$I(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Rappelons enfin qu'il existe plusieurs versions du théorème central limite mais nous nous limitons à deux versions utilisées dans ce travail.

1.4 Théorème de la limite centrale

Théorème 1.4.1. *[7] soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d à carré intégrable et posons*
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$ *alors*

$$\sqrt{n}(S_n/n - E(X_1)) \longrightarrow \mathcal{N}(0, Var(X_1)) \quad quand \quad n \to \infty.$$

Théorème 1.4.2. *[7] soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d à carré intégrable et posons*
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$ *alors*

$$\frac{S_n - nE(X_1)}{\sqrt{n}\sqrt{Var(X_1)}} \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad quand \quad n \to \infty.$$

Rappelons aussi que le Théorème reste vrai dans le cas de $I\!R^n$. Le Théorème suivant généralise le T.C.L au cas non i.i.d

Théorème 1.4.3. *[5] soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de moyennes $E[X_i] = \mu_i$ et de variances $Var[X_i] = \sigma_i^2$ finies, posons $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Si la suite $(X_i)_{i \leq n}$ vérifie la condition suivante (condition de LINDEBERG)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu_i)^2 \mathcal{X}_{\{|X_i - \mu_i| > \varepsilon s_n\}}] = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$ ou $\mathcal{X}$ est la fonction indicatrice alors la variable aléatoire $\mathcal{Z}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu_i)}{s_n}$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0,1)$ quand $n \to \infty$.

Le théorème qui suit, éxplique comment nous pouvons utiliser des transformations de variables aléatoires connues pour générer de nouvelles variables.

Théorème 1.4.4 (changement de variable). *Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f_X et φ une application dérivable strictement croissante de $I\!R$ vers $I\!R$. Alors , la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$ admet pour densité la fonction f_Y définie par :*

$$\forall y \in I\!R,\ f_Y(y) = \frac{1}{\varphi\prime(\varphi^{-1}(y))} f_X(\varphi^{-1}(y)).$$

Nous introduisons dans le paragraphe qui suit la notion de régularité qui est une question primordiale lorsqu'on aborde le problème statistique de l'estimation.

1.5 Statistique régulière

Considérons les observations $X_1, X_2, ..., X_n$ d'un phénomène aléatoire et soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^k$ tel que toute mesure induite par l'échantillon P_θ, $\theta \in \Theta$ est absolument continue par rapport à ν une mesure donnée sur $\mathcal{U}$. Soit $\frac{dP_\theta}{d\nu} = f(x, \theta)$ la densité de Radon-Nikodym correspondante. Supposons que f est une fonction continue par rapport à θ sur Θ pour ν-presque tout x. L'Information de Fisher associée à l'échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ au point $\theta \in \Theta$ est finie si la fonction $f^{\frac{1}{2}}(., u)$ est différentiable au point $u = \theta$ dans $\mathtt{L}_2(\nu)$.
La differentiabilité en moyenne quadratique pour une fonction g est définie comme suit :

Définition 1.5.1. *on dit que la fonction g est différentiable au sens de $\mathtt{L}_2(\nu)$ s'il existe une fonction $\Psi : \mathcal{X} \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^k$ telle que*

. $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} |\ \Psi(x, u)\ |^2 d\nu = \|\ \Psi(., u)\ \|^2\ < \infty$

. $\int_{\mathcal{X}} |\ g(x, \theta + h) - g(x, \theta) - (\Psi(x, \theta), h)\ |^2\ d\nu = \circ(|\ h\ |^2)\ ,\ h \to 0$

Remarques

Notons $f^{\frac{1}{2}}(x,\theta) = g(x,\theta)$, nous avons alors :

. la matrice de l'information s'écrit alors, $I(\theta) = 4\int_{\mathcal{X}} \Psi(x,\theta)(\Psi(x,\theta))^t d\nu$

. si de plus la densité f est différentiable au point θ au sens classique alors bien sûr $\Psi(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f^{\frac{1}{2}}(x,\theta)$ car la différentielle d'une fonction au sens de la moyenne quadratique coincide avec la différentielle au sens classique lorsque celle ci existe.

Ibragimov et Has'minskii [4] définissent la régularité d'un problème statistique comme suit :

Définition 1.5.2. *Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de taille n de loi P_θ, $\theta \in \Theta$, on dit que le problème statistique est régulier dans Θ si les conditions suivantes sont vérifiées*

(a) $f(x,\theta)$ est continue sur Θ pour ν-presque tout x.

(b) $I(\theta) < \infty$, $\forall\theta \in \Theta$.

(c) la fonction $\Psi(.,\theta)$ est continue dans $\mathtt{L}_2(\nu)$.

Ces conditions de régularité peuvent être modifiées comme dans le livre de Lipster ou le livre de Kutoyants mais dans ce travail nous nous posons le problème de l'éstimation sous ce type de conditions. Pour cela nous énonçons le Lemme suivant qui précise les propriétés que doit remplir la matrice de l'Information pour que le problème statistique soit régulier.

Lemme 1.5.3. *soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon d'un problème statistique régulier de loi P_θ, $\theta \in \Theta$ alors*

(1) la matrice de l'information $I(\theta)$ est continue sur Θ (i.e toutes les fonctions $I_{ij}(\theta)$ sont continues sur Θ,

(2) les intégrales $I_{ij}(\theta)$ convergent uniformément dans tout compact K ; de Θ i.e ;

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{\theta\in K} \int_{\mathcal{X}} \frac{\mid \frac{\partial}{\partial\theta_i} f(x,\theta) \frac{\partial}{\partial\theta_j} f(x,\theta) \mid}{f(x,\theta)} \mathcal{X}_{\{x: \mid \frac{\partial}{\partial\theta_i} f \frac{\partial}{\partial\theta_j} f \mid \backslash f > A\}} d\nu = 0$$

(3) si l'intervalle$\{t + su/0 \leq s \leq 1\}$ est inclus dans Θ alors $g(x,t+u) - g(x,t) = \int_0^1 (\frac{\partial g}{\partial t}(x,t+us),u) ds$ dans $\mathtt{L}_2(\nu)$(l'intégrale à droite est la limite dans $\mathtt{L}_2(\nu)$ de la somme de Riemann).

preuve

(1) Nous avons

$$| I_{ij}(\theta+h) - I_{ij}(\theta) | = 4 \left| \int_{\mathcal{X}} \psi_i(x,\theta+h)\psi_j(x,\theta+h) - \psi_i(x,\theta)\psi_j(x,\theta)\nu(dx) \right|$$

$$\leq 4 \int_{\mathcal{X}} | \psi_i(x,\theta+h)\psi_j(x,\theta+h) - \psi_i(x,\theta)\psi_j(x,\theta) | \nu(dx)$$

$$= 4 \int_{\mathcal{X}} | (\psi_i(x,\theta+h)\psi_j(x,\theta+h) - \psi_i(x,\theta+h)\psi_j(x,\theta)) + (\psi_i(x,\theta+h)\psi_j(x,\theta)$$

$$- \psi_i(x,\theta)\psi_j(x,\theta)) | \nu(dx)$$

$$\leq 4 \int_{\mathcal{X}} | \psi_i(x,\theta+h)\psi_j(x,\theta+h) - \psi_i(x,\theta+h)\psi_j(x,\theta) | + | \psi_i(x,\theta+h)\psi_j(x,\theta)$$

$$- \psi_i(x,\theta)\psi_j(x,\theta) | \nu(dx)$$

$$= 4(\int_{\mathcal{X}} | \psi_i(x,\theta+h) || \psi_j(x,\theta+h) - \psi_j(x,\theta) | \nu(dx) + \int_{\mathcal{X}} | \psi_j(x,\theta) |$$

$$| \psi_i(x,\theta+h) - \psi_i(x,\theta) | \nu(dx)).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$| I_{ij}(\theta+h) - I_{ij}(\theta) | \leq 4(I_{ii}^{\frac{1}{2}}(\theta+h) + I_{jj}^{\frac{1}{2}}(\theta)) \times (\textstyle\int_{\mathcal{X}} (\psi(x,\theta+h) - \psi(x,\theta))^2\nu(dx))^{\frac{1}{2}}$$

en passant à la limite lorsque h tend vers 0 nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} | I_{ij}(\theta+h) - I_{ij}(\theta) | \quad &\leq \quad \lim_{h\to 0}[4(I_{ii}^{\frac{1}{2}}(\theta+h) + I_{jj}^{\frac{1}{2}}(\theta)) \\ &\quad \times (\int_{\mathcal{X}} (\psi(x,\theta+h) - \psi(x,\theta))^2\nu(dx))^{\frac{1}{2}}] \end{aligned}$$

or $I(\theta) < \infty \ \forall \ \theta \in \Theta$

donc $\lim\limits_{h\to 0} 4(I_{ii}^{\frac{1}{2}}(\theta+h) + I_{jj}^{\frac{1}{2}}(\theta)) < \infty$.
D'autre part nous avons

$$\lim_{h\to 0}(\int_{\mathcal{X}} (\psi(x,\theta+h) - \psi(x,\theta))^2\nu(dx))^{\frac{1}{2}}) = 0$$

car ψ est continue dans $\mathtt{L}_2(\nu)$
et donc $\lim\limits_{h\to 0} | I_{ij}(\theta+h) - I_{ij}(\theta) | = 0$
d'où la continuité de la matrice de l'information $I(\theta)$.

(2) Raisonnons pas l'absurde, supposons alors le contraire c'est à dire pour tout $\delta > 0$, il existe deux suites $(\theta_n) \subset K$ et $(A_n) \subset \mathbb{R}$ ($\theta_n \to \theta$ et $A_n \to +\infty$)telles que

$$\int_{\mathcal{X}} | \psi_j(x,\theta_n) |^2 \ \chi\{x : | \psi_j(x,\theta_n) | > A_n\} d\nu > \delta$$

d'aprés l'inégalité de Tchebychev nous avons

$$\begin{aligned}\nu(x :\mid \psi_j(x,\theta_n) \mid > A_n) &\leq A_n^{-2} \parallel \psi_j(x,\theta_n) \parallel^2 \\ &\leq \frac{\sup\limits_{u\in K} I_{jj}(u)}{A_n} \to 0.\end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$\int_{\mathcal{X}} \mid \psi_j(x,\theta) \mid^2 \chi\{x :\mid \psi_j(x,\theta_n) \mid > A_n\} d\nu \to 0$$

cependant, dans ce cas nous avons pour $n \to +\infty$

$\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \mid \psi_j(x,\theta_n) \mid^2 \chi\{x :\mid \psi_j(x,\theta_n) \mid > A_n\} d\nu \leq$
$\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \mid \psi_j(x,\theta) \mid^2 \chi\{x :\mid \psi_j(x,\theta_n) \mid > A_n\} d\nu + \int_{\mathcal{X}} \big|\mid \psi_j(x,\theta) \mid^2 - \mid \psi_j(x,\theta_n) \mid^2\big|$
$d\nu$. Pour la première intégrale nous avons déja montré qu'elle tend vers 0 et pour la seconde il est clair qu'elle tend vers 0 grace à la continuité de la fonction ψ dans $\mathtt{L}_2(\nu)$ ainsi,

$$\int_{\mathcal{X}} \mid \psi_j(x,\theta_n) \mid^2 \chi\{x :\mid \psi_j(x,\theta_n) \mid > A_n\} d\nu \to 0$$

d'où la contradiction.

(3) Pour ce point il s'agit d'une généralisation du résultat du théorème de la moyenne au sens classique lorsque la dérivée $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ est au sens de la moyenne quadratique.

Rappelons le théorème de la moyenne pour une fonction f à valeurs réelles

Théorème 1.5.4. *pour toute fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur un segment $[a,b]$, avec $a<b$, il existe un réel c compris entre a et b vérifiant :*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Théorème 1.5.5. *soient $X_1, X_2, ..., X_n$ et $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ deux échantillons d'un problème statistique régulier de lois f_1, f_2 de matrices d'informations $I(\theta, X)$, $I(\theta, Y)$ respectivement alors l'échantillon $Z_i = X_i \times Y_i$ correspond à un problème statistique régulier, de plus $I(\theta, Z) = I(\theta, X) + I(\theta, Y)$*

preuve.
Posons $\frac{dP_{\theta_1}}{d\nu_1} = f_1(x,\theta)$ et $\frac{dP_{\theta_2}}{d\nu_2} = f_2(x,\theta)$, il est clair que

$$\frac{dP_\theta}{d\nu_1 \times d\nu_2} = f_1(x_1,\theta) f_2(x_2,\theta) = f(x,\theta)$$

$$\begin{aligned}
I_{ij}(\theta,Z) &= 4\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{f(x,\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sqrt{f(x,\theta)}d\nu \\
&= 4\int_{\mathcal{X}_1}\int_{\mathcal{X}_2} \frac{\partial}{\partial\theta_i}(\sqrt{f_1}\sqrt{f_2})\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sqrt{f_1}\sqrt{f_2})d(\nu_1\times\nu_2) \\
&= 4\int_{\mathcal{X}_1}\int_{\mathcal{X}_2} [\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\sqrt{f_1})\sqrt{f_2} + \frac{\partial}{\partial\theta_i}(\sqrt{f_2})\sqrt{f_1}]\times \\
& [\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sqrt{f_1})\sqrt{f_2} + \frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sqrt{f_2})\sqrt{f_1}]d(\nu_1\times\nu_2) \\
&= 4\int_{\mathcal{X}_1} \frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{f_1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sqrt{f_1}d\nu_1\int_{\mathcal{X}_2} f_2 d\nu_2 + 4\int_{\mathcal{X}_2} \frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{f_2}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sqrt{f_2}d\nu_2\int_{\mathcal{X}_1} f_1 d\nu_1
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}_1}\int_{\mathcal{X}_2}(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{f_1})\sqrt{f_1}(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sqrt{f_2})\sqrt{f_2}d(\nu_1\times\nu_2) &= \int_{\mathcal{X}_1}(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{f_1})\sqrt{f_1}d\nu_1\int_{\mathcal{X}_2}(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sqrt{f_2})\sqrt{f_2}d\nu_2 \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta_i}\int_{\mathcal{X}_1}\sqrt{f_1}\sqrt{f_1}d\nu_1 \times \frac{\partial}{\partial\theta_j}\int_{\mathcal{X}_2}\sqrt{f_2}\sqrt{f_2}d\nu_2 = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\int_{\mathcal{X}_1} f_1 d\nu_1 \times \frac{\partial}{\partial\theta_j}\int_{\mathcal{X}_2} f_2 d\nu_2 \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta_i}1 \times \frac{\partial}{\partial\theta_j}1 = 0
\end{aligned}$$

et de la même façon on montre que

$$\int_{\mathcal{X}_1}\int_{\mathcal{X}_2}(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sqrt{f_1})\sqrt{f_1}(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{f_2})\sqrt{f_2}d(\nu_1\times\nu_2) = 0$$

donc

$$I_{ij}(\theta,Z) = 4\int_{\mathcal{X}_1} \frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{f_1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sqrt{f_1}d\nu_1 + 4\int_{\mathcal{X}_2} \frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{f_2}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sqrt{f_2}d\nu_2$$

car

$$\int_{\mathcal{X}_2} f_2 d\nu_2 = 1 \quad et \quad \int_{\mathcal{X}_1} f_1 d\nu_1 = 1$$

par conséquent

$$I(\theta,Z) = I(\theta,X) + I(\theta,Y)$$

d'où le théorème.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème précédent pour un échantillon de taille n

Corollaire 1.5.6. *Soit* $X_1, X_2, ..., X_n$ *un échantillon de taille* n *d'un problème statistique. Si l'observation* X_i *est régulière et possède l'information* $I(\theta)$ *alors l'echantillon est régulier, de plus*

$$I(\theta, x^{(n)}) = nI(\theta).$$

Chapitre 2

Condition LAN

2.1 Rapport De Vraisemblance(cas i.i.d)

Dans beaucoup de documents classiques (Hajek, Lecam, Lipster Shiryaev, ...) il est prouvé que de nombreuses propriétés importantes des estimateurs statistiques découlent de celles de la vraisemblance. Dans ce chapitre nous étudions une représentation de la vraisemblance qui conduit à établir des propriétés importantes de la famille de lois $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ de densité $f(x, \theta)$ dans le cas d'un problème régulier. Notons $I(\theta)$ la matrice de l'information pour ce type de problème. Elle s'écrit :

$$I(\theta) = \int_{\{x:f(x,\theta)\neq 0\}} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta} (\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta})^T f^{-1}(x,\theta)\nu(dx). \tag{2.1}$$

Nous introduisons la définition suivante du rapport de vraisemblance.

Définition 2.1.1. *Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de la loi $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ dans le cadre d'un problème statistique régulier. supposons que pour θ_1,$\theta_2 \in \Theta$ $\mathbb{P}_{\theta_2}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_{\theta_1}$ alors le rapport de vraisemblance pour ces deux valeurs du paramètre, s'écrit*

$$\frac{d\mathbb{P}_{\theta_2}}{d\mathbb{P}_{\theta_1}}(X^{(n)})$$

Le Théorème suivant permet d'introduire une écriture du rapport de vraisemblance normalisé et il est dû à Lecam.

Théorème 2.1.2. *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ est un échantillon de la loi $\mathbb{P}_\theta$,$\theta \in \Theta$ et dans le cas régulier , $detI(\theta) \neq 0$ ($I(\theta)$ est inversible) pour tout $\theta \in \Theta$ alors le rapport de vraisemblance nomalisé pour les deux valeurs du paramètre $\theta_1 = \theta$ et $\theta_2 = \theta + un^{\frac{-1}{2}}$ telles que $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ s'ecrit*

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_{n,\theta}(u) = \exp\Big\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial ln\, f(X_j,\theta)}{\partial \theta}, u) - \frac{1}{2}(I(\theta)u, u) + \psi_n(u,\theta) \Big\} \tag{2.2}$$

où

$$\mathbb{P}_\theta^n(| \psi_n(u,\theta) |> \varepsilon) \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

quand $n \to \infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ tels que $\theta_2 \in \Theta$ de plus

$$\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_j,\theta)}{\partial \theta}) \longrightarrow \mathcal{N}(0, I(\theta)). \tag{2.4}$$

Pour démonter ce Théorème nous avons besoin du Lemme suivant qui donne certaines propriétés relatives à l'Information de Fisher :

Lemme 2.1.3. *Soit f la densité de probabilité de X_i dans un problème statistique régulier, posons $g(x,\theta) = \sqrt{f(x,\theta)}$*

$$\text{et} \quad \zeta_\theta(u) = g^{-1}(X_1,\theta) g(X_1, \theta + u) - 1 \tag{2.5}$$

alors les relations suivantes sont vraies (quand $u \in \mathcal{V}(0)$)

$$E_\theta \zeta_\theta^2(u) - \frac{1}{4}(I(\theta)u, u) = o(| u |^2) \tag{2.6}$$

$$E_\theta \mid \zeta_\theta^2(u) - (u, g^{-1}(X_1,\theta)\frac{\partial g(X_1,\theta)}{\partial \theta})^2 \mid = o(| u |^2) \tag{2.7}$$

$$\mathbb{P}_\theta\{| \zeta_\theta(u) |> \varepsilon\} = o(| u |^2) \tag{2.8}$$

$$E_\theta \zeta_\theta(u) + \frac{1}{8}(I(\theta)u, u) = o(| u |^2) \tag{2.9}$$

preuve du Lemme
pour les ensembles$\{x : f(x,\theta) = 0\}$ et $\{x : f(x,\theta) \neq 0\}$ nous avons les relations suivantes (quand $u \to 0$)

$$\int_{\{x:f(x,\theta)=0\}} f(x,\theta+u)\nu(dx) = o(\mid u \mid^2) \tag{2.10}$$

$$E_\theta\Big\{\zeta_\theta(u) - \frac{1}{2}(u, \frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta})\Big\}^2 = o(\mid u \mid^2) \tag{2.11}$$

(2.11) implique immédiatement (2.6) et (2.7).Mais par la relation

$$E_\theta\zeta_\theta(u) - \frac{1}{2}(u, E_\theta\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}) = o(\mid u \mid^2) \tag{2.12}$$

en utilisant (2.10) nous obtenons

$$\begin{aligned} E_\theta\zeta_\theta^2(u) &= \int_{\{x:f(x,\theta)\neq 0\}} (g(x,\theta+u) - g(x,\theta))^2\nu(dx) \\ &= 2 + o(\mid u \mid^2) - 2E_\theta(g^{-1}(X_1,\theta)g(X_1,\theta+u)) \\ &= 2E_\theta\zeta_\theta(u) + o(\mid u \mid^2). \end{aligned}$$

La dernière inégalité et (2.6) impliquent (2.9).
Établissons maintenant l'inégalité (2.8) ; nous avons

$$\mathbb{P}_\theta\{\mid \zeta_\theta(u) \mid > \varepsilon\} \leq \mathbb{P}_\theta\Big\{\mid \zeta_\theta(u) - \frac{1}{2}(u, \frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}) \mid > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} + \mathbb{P}_\theta\Big\{(u, \frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta})^2 > \varepsilon^2\Big\}$$

puis en appliquant l'inégalité de Tchebychev nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta\{\mid \zeta_\theta(u) \mid > \varepsilon\} &\leq \frac{2}{\varepsilon}E_\theta\Big\{\zeta_\theta(u) - \frac{1}{2}(u, \frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta})\Big\}^2 \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\{x:\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} > \frac{\varepsilon}{\mid u \mid}\}} (u, \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta})f(x,\theta)\nu(dx). \end{aligned}$$

En tenant compte de (2.11) le premier terme de la partie droite de cette dernière inégalité est de l'ordre de $o(\mid u \mid^2)$ et grâce à la convergence des intégrales qui représentent les éléments de la matrice de l'Information le second terme est également du même ordre.

Remraque :

l'égalité suivante est une conséquence directe de (2.9) et (2.12)

$$E_\theta\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta} = \int_{\{x:f(x,\theta)\neq 0\}} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta}\nu(dx) = 0 \tag{2.13}$$

en effet

$$\begin{aligned}
E_\theta \frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial \theta} &= \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta} \nu(dx) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathcal{X}} f(x,\theta)\nu(dx) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0
\end{aligned}$$

preuve du Théorème
Posons

$$\eta_{jn} = \Big(\frac{f(X_j, \theta + un^{\frac{-1}{2}})}{f(X_j,\theta)}\Big)^{\frac{1}{2}} - 1$$

et considérons l'évènement

$$A_n = \{\max_{1 \le j \le n} \mid \eta_{jn} \mid < \varepsilon\}.$$

Si l'évènnement A_n est réalisé, en appliquant le développement de Taylor pour le logarithme de η_{jn} il existe alors des nombres α_{jn} tels que $\mid \alpha_{jn} \mid < 1$
et l'égalité suivante est valide

$$\begin{aligned}
\ln \frac{f(X_j, \theta + un^{\frac{-1}{2}})}{f(X_j,\theta)} &= 2\ln(1+\eta_{jn}) \\
&= 2\eta_{jn} - \eta_{jn}^2 + \alpha_{jn} \mid \eta_{jn} \mid^3
\end{aligned}$$

puis en sommant, on en déduit

$$\sum_{j=1}^{n} \ln \frac{f(X_j, \theta + un^{\frac{-1}{2}})}{f(X_j,\theta)} = 2\sum_{j=1}^{n} \eta_{jn} - \sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \mid \eta_{jn} \mid^3 . \qquad (2.14)$$

En conséquence les représentations (2.2) et (2.4) seront vérifiées dès que l'on établit les relations suivantes pour tout $\varepsilon > 0$, quand $n \longrightarrow \infty$:

$$\mathbb{P}_\theta(A_n^c) \longrightarrow 0 \qquad (2.15)$$

$$\mathbb{P}_\theta\Big\{ \mid 2\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} - n^{\frac{-1}{2}} \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \ln f(X_j,\theta)}{\partial \theta}, u\Big) + \frac{1}{4}(I(\theta)u,u) \mid > \varepsilon \Big\} \longrightarrow 0 \qquad (2.16)$$

$$\mathbb{P}_\theta\{ \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 - \frac{1}{4}(I(\theta),u) \mid > \varepsilon\} \longrightarrow 0 \qquad (2.17)$$

$$\mathbb{P}_\theta\{ \sum_{j=1}^{n} \mid \eta_{jn}^3 \mid > \varepsilon\} \longrightarrow 0 \qquad (2.18)$$

pour la concergence de (2.15) comme $X_1, X_2, ..., X_n$ sont i.i.d, $\eta_{1n}, \eta_{2n}, ..., \eta_{nn}$ le sont aussi. D'autre part nous avons $\eta_{1n} = \zeta_\theta(\frac{u}{\sqrt{n}})$ d'où

$$\mathbb{P}_\theta(A_n^c) \le \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_\theta\{ \mid \eta_{jn} \mid > \varepsilon\} = n\mathbb{P}_\theta\{ \mid \zeta_\theta(\frac{u}{\sqrt{n}}) \mid > \varepsilon\}$$

en appliquant (2.8) quand $n \longrightarrow \infty$ il en découle

$$\mathbb{P}_\theta(A_n^c) \longrightarrow 0.$$

Pour établir à présent (2.17), grâce à l'inégalité de Tchebychev nous avons

$$\mathbb{P}_\theta\Big\{ \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (u, g^{-1}(X_j,\theta)\frac{\partial g(X_j,\theta)}{\partial \theta})^2 \mid > \varepsilon \Big\}$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon} E_\theta \sum_{j=1}^{n} \mid \eta_{jn}^2 - \frac{1}{n}(u, g^{-1}(X_j,\theta)\frac{\partial g(X_j,\theta)}{\partial \theta})^2 \mid$$
$$\leq \frac{n}{\varepsilon} E_\theta \mid \zeta_\theta^2(\frac{u}{\sqrt{n}}) - (\frac{u}{\sqrt{n}}, g^{-1}(X_j,\theta)\frac{\partial g(X_j,\theta)}{\partial \theta})^2 \mid \longrightarrow 0 \text{ en appliquant (2.7).}$$

D'autre part nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(u, g^{-1}(X_j,\theta)\frac{\partial g(X_j,\theta)}{\partial \theta})^2 = u^T \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g^{-2}(X_j,\theta)(\frac{\partial g(X_j,\theta)}{\partial \theta})(\frac{\partial g(X_j,\theta)}{\partial \theta})^T u$$

qui converge en probabilité vers $\frac{1}{4}(I(\theta)u,u)$.Ainsi (2.17) est prouvée par application de la loi des grands nombres.

Montrons à présent la relation (2.18) ; nous avons

$$\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid (1 + (I(\theta)u,u)) > \varepsilon$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 > 1 + (I(\theta)u,u)$$

en multipliant terme à terme les deux inégalités nous déduisons

$$\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 > \varepsilon$$

et par conséquent

$$\mathbb{P}_\theta\{\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 > \varepsilon\} \leq \mathbb{P}_\theta\{\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid (1 + (I(\theta)u,u)) > \varepsilon\}$$
$$+\mathbb{P}_\theta\{\textstyle\sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 > 1 + (I(\theta)u,u)\}.$$

D'autre part nous avons

$$\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 \geq \sum_{j=1}^{n} \mid \eta_{jn}^3 \mid$$

donc $P_\theta\{\max\limits_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid \sum\limits_{j=1}^{n}\eta_{jn}^2 > \varepsilon\} \geq \mathbb{P}_\theta\{\sum\limits_{j=1}^{n} \mid \eta_{jn}^3 \mid > \varepsilon\}$.
Donc pour établir (2.18) il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}_\theta\{\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid > \frac{\varepsilon}{1+(I(\theta)u,u)}\} \to 0$$

et que

$$\mathbb{P}_\theta\{\sum_{j=1}^{n}\eta_{jn}^2 > 1+(I(\theta)u,u)\} \to 0.$$

Pour la première convergence, si on pose $\varepsilon\prime = \frac{\varepsilon}{1+(I(\theta)u,u)}$ nous avons

$$\mathbb{P}_\theta\{\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid > \varepsilon\prime\}$$

et cette dernière probabilité tend vers 0 d'après (2.15).

Pour la seconde limite d'une part nous avons $1+(I(\theta)u,u) > \frac{1}{4}(I(\theta)u,u)$ et d'autre part nous avons montré auparavant d'après (2.17) que

$\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_{jn}^2 \longrightarrow \frac{1}{4}(I(\theta)u,u)$ en probabilité, d'où la relation (2.18).

Pour établir la relation (2.16) remarquons que l'on a grâce à (2.9) et quand n est assez grand

$$E_\theta\eta_{jn} = E_\theta\zeta_\theta(\frac{u}{\sqrt{n}}) = -\frac{(I(\theta)u,u)}{8n} + o(\frac{1}{n}).$$

Posons alors

$$J_u = \mathbb{P}_\theta\Big\{2 \mid \sum_{j=1}^{n}[(\eta_{jn} - E_\theta\eta_{jn}) - \frac{(\frac{\partial \ln f(X_j,\theta)}{\partial\theta}, u)}{2\sqrt{n}}] \mid > \varepsilon\Big\}.$$

Remarquons que montrer la relation (2.16) est équivalent à montrer que $J_u \longrightarrow 0$. Comme $X_1, X_2, ..., X_n$ sont i.i.d, par la relation (2.13) et moyennant l'inégalité de Tchebychev nous avons

$$\begin{aligned} J_u &\leq \frac{4}{\varepsilon^2}E_\theta\Big\{\sum_{j=1}^{n}[(\eta_{jn} - E_\theta\eta_{jn}) - \frac{(\frac{\partial \ln f(X_j,\theta)}{\partial\theta}, u)}{2\sqrt{n}}]\Big\}^2 \\ &= \frac{4}{\varepsilon^2}nE_\theta\Big\{\eta_{1n} - E_\theta\eta_{1n} - \frac{(\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}, u)}{2\sqrt{n}}\Big\}^2 \\ &= \frac{4n}{\varepsilon^2}E_\theta\Big\{\zeta_\theta(\frac{u}{\sqrt{n}}) - E_\theta\zeta_\theta(\frac{u}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}, \frac{u}{\sqrt{n}})\Big\}^2 \\ &= \frac{4n}{\varepsilon^2}\Big\{E_\theta(\zeta_\theta(\frac{u}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}, \frac{u}{\sqrt{n}}))^2 - (E_\theta\zeta_\theta(\frac{u}{\sqrt{n}}))^2\Big\}. \end{aligned}$$

En appliquant la relation (2.11) nous obtenons que le membre de droite de la dernière égalité est voisin de 0 quand $n \longrightarrow \infty$ d'où la relation (2.16).

Par conséquent les représentations (2.2) et (2.3) sont vérifiées.

Pour l'assertion (2.4) elle se déduit de la relation (2.13) et du théorème central-limite dans $\mathbb{R}^n$.
Ceci achève la démonstration du théorème.

Proposition 2.1.4. *Sous les hypothèses du Théorème, en posant $u = I(\theta)^{\frac{1}{2}} v$, nous avons la formulation suivante pour le même résultat (2.2) du Théorème (2.1.2)*

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_{n,\theta}(v) = \exp\left\{(v, \Delta_{n,\theta}) - \frac{1}{2} \mid v \mid^2 + \psi_n(v,\theta)\right\} \tag{2.19}$$

avec

$$\Delta_{n,\theta} = n^{\frac{-1}{2}} I^{\frac{-1}{2}}(\theta) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_j,\theta)}{\partial\theta}$$

et, $\mathbb{P}_\theta\{\mid \psi_n(v,\theta) \mid > \varepsilon\} \to 0$ *quand* $n \to \infty$,

$$\mathcal{L}(\Delta_{n,\theta}/\mathbb{P}_\theta^n) \longrightarrow \mathcal{N}(0, J).$$

Dans ce cas la démonstration du Théorème ne change pas sauf pour le dernier point où on doit utiliser l'autre version tu Théorème central limite.

Remarque

nous allons maintenant énoncer la version uniforme du Théorème précédent qui est donc plus forte que la première version.

Théorème 2.1.5. *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ est un échantillon d'un problème statistique régulier et tel que $det I(\theta) \neq 0$ pour tout θ dans Θ alors pour tout compact $K \subset \Theta$, toute suite $(\theta_n) \subset K$ et tout $u \in \mathbb{R}^k$ la représentation suivante du rapport de vraisemblance est valide quand $n \longrightarrow \infty$*

$$\mathcal{Z}_{n,\theta_n}(u) = \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial ln\, f(X_j,\theta_n)}{\partial\theta}, u) - \frac{1}{2}(I(\theta_n)u,u) + \psi_n(u,\theta_n)\right\} \tag{2.20}$$

de plus pour tout $u \in \mathbb{R}^k$, pour tout $\varepsilon > 0$ et quand $n \to \infty$ nous avons

$$\mathbb{P}_{\theta_n}^n(\mid \psi_n(u,\theta_n) \mid > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{L}(n^{-\frac{1}{2}}I^{-\frac{1}{2}}(\theta_n)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f(X_j,\theta_n)}{\partial\theta}) \longrightarrow \mathcal{N}(0,J).$$

Ici J est la matrice identité.

Preuve

la démonstration de ce Théorème consiste en celle du dernier point car pour les autres points nous reprenons les mêmes démonstrations que dans le Théorème (2.1.2).

Par le lemme (1.5.3) nous pouvons écrire :

$$\sup_{\theta\in k}\int_{\{|\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)|>A\}} |\ \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\ |^2\ f(x,\theta)\nu(dx) \longrightarrow 0 \tag{2.21}$$

et en posant $s_n^2 = nI(\theta)$, nous en déduidons la condition de LINDEBERG pour toute suite θ_n convergente vers θ dans K quand $n\to\infty$

$$\frac{1}{s_n^2}\int_{\{|\frac{\partial}{\partial\theta_n}\ln f(x,\theta_n)|>As_n\}} |\ \frac{\partial \ln f(x,\theta_n)}{\partial\theta_n}\ |^2\ f(x,\theta_n)\nu(dx) \longrightarrow 0$$

et en appliquant le Théorème (1.4.3) nous obtenons que

$\mathcal{L}(n^{-\frac{1}{2}}I^{-\frac{1}{2}}(\theta_n)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln f(X_j,\theta_n)}{\partial\theta}) \longrightarrow \mathcal{N}(0,J)$ quand $n\to\infty$.

Remarque.

une version plus fine du Théorème (2.1.2) peut être obtenue, si nous prenons une suite u_n qui converge vers u dans $\mathbb{R}^k$ au lieu de prendre directement u fixé dans $\mathbb{R}^k$ (cela concerne l'uniformité du résultat).

2.2 Condition LAN : Cas i.i.d

Comme nous l'avons déja mentionné, la propriété de la vraisemblance prouvée dans le Théorème (2.1.2) est un outil très puissant pour l'étude des propriétés des estimateurs statistiques ; il est donc important de noter que cette propriété est valable dans une plus grande classe de problèmes que celle où les observations sont i.i.d. Dans cette section nous allons enfin introduire la condition LAN(normalité asymptotique locale) qui est l'objectif principal de ce mémoire. Ce travail consiste à trouver une formule pour une famille de lois sous des hypothèses locales de sorte que si cette famille de lois vérifie la formule en question alors elle converge vers la loi normale.

Ibragimov et Has'minskii ont défini la condition LAN comme suit

Définition 2.2.1. *une famille de loi $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ est dite localement asymptotiquement normale (LAN) au point $t \in \Theta$ quand $\varepsilon \to 0$ s'il existe une matrice $n \times n$ non dégénérée $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon, t)$ telle que pour tout $u \in I\!R^n$ le rapport de vraisemblance peut s'écrire*

$$\mathcal{Z}_{\varepsilon,t}(u) = \frac{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{t+\varphi(\varepsilon)u}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_t} = \exp\{u^T\Delta_{\varepsilon,t} - \frac{1}{2} \mid u \mid^2 + \psi_\varepsilon(u,t)\} \tag{2.22}$$

où

$$\mathcal{L}(\Delta_{\varepsilon,t}) \to \mathcal{N}(0, J) \text{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{2.23}$$

Ici J est la matrice unité et pour tout $u \in I\!R^n$

$$\psi_\varepsilon(u,t) \to 0 \text{ en probabilit quand } \varepsilon \to 0 \tag{2.24}$$

on dit alors que la famille $\{\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}\}$ vérifie la condition LAN au point $\theta = t$.

La proposition suivante fournit la matrice non dégénérée $\varphi(\varepsilon, t)$ relative au cas particulier d'observations i.i.d dans un problème régulier.

Proposition 2.2.2. *supposons que les hypothèses du Théorème (2.1.2) sont remplies alors la condition LAN est vérifiée au point $\theta = t$.Plus précisément en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et $\varphi(\varepsilon, t) = (nI(t))^{\frac{-1}{2}}$ nous avons*

$$\Delta_{\varepsilon,t} = (nI(t))^{\frac{-1}{2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_j, t)}{\partial t}. \tag{2.25}$$

Remarquons que les conditions 2.10 et 2.11 ne sont pas faciles à vérifier en général. Nous introduisons le Théorème suivant dù à Hajek et qui permet d'établir ces deux conditions pour le cas réel.

Théorème 2.2.3. *soient $\Theta \subset I\!R$ et $f(x,\theta) = \dfrac{d\mathbb{P}_\theta}{d\nu}$ la densité des observations X_i, vérifiant*

(1) la fonction $f(x,\theta)$ est absolument continue en θ dans un certain voisinage du point $\theta = t$ pour tout $x \in \mathcal{X}$,

(2) la dérivé $\dfrac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta}$ existe pour tout θ appartenant à ce voisinage de t et pour $\nu-$ presque tout $x \in \mathcal{X}$,

(3) la fonction $I(\theta)$ est continue et positive au point $\theta = t$.

Alors la famille de lois $\mathbb{P}_\theta^n$ générée par les observations indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$ et de densité f vérifie la condition LAN au point $\theta = t$ de plus ε, φ et Δ sont donnés par la formule (2.25).

La démonstration de ce Théorème est basée sur les deux Lemmes suivants

Lemme 2.2.4. *Soit g une fonction positive et absolument continue sur l'intervalle $[a,b]$ et telle que*

$$\int_a^b \frac{\mid g\prime(y) \mid}{\sqrt{g(y)}} dy < \infty$$

alors la fonction $\sqrt{g(y)}$ est aussi absolument continue sur $[a,b]$

preuve.
Rappelons d'abord qu'une fonction f est absolument continue sur $[a,b]$ si et seulement s'il existe une fonction F telle que pour tout $x \in [a,b]$ nous avons

$$\int_a^x F(t)dt = f(x) - f(a).$$

Soit g une fonction positive et absolument continue sur $[a,b]$ et considérons $x \in [a,b]$
nous avons alors

$$\int_a^x \frac{g\prime(y)}{2\sqrt{g(y)}} dy = \frac{1}{2}\int_a^x \frac{g\prime(y)}{\sqrt{g(y)}} dy < \infty$$

donc on peut écrire

$$\int_a^x \frac{g\prime(y)}{2\sqrt{g(y)}} dy = \sqrt{g(x)} - \sqrt{g(a)} \quad \forall x \in [a,b]$$

d'où $\sqrt{g(y)}$ est absolument continue sur $[a,b]$.

Lemme 2.2.5. *Supposons que les conditions (1) et (3) du Théorème (2.2.3) sont vérifiées et soit X_1 une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_t$ alors la variable aléatoire $\varphi(X_1) = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln f(X_1,t)}{\partial t}$ est égale à la dérivée en moyenne quadratique du processus aléatoire*
$\zeta(u) = \sqrt{\frac{f(X_1,t+u)}{f(X_1,t)}} - 1$ *au voisinage de* 0, *ce qui se traduit par la convergence*

$$E_t\left(\frac{\zeta(u)}{u} - \varphi(X_1)\right)^2 \longrightarrow 0 \;\; quand \;\; u \to 0 \tag{2.26}$$

preuve.
Puisque $I(\theta)$ est continue alors en appliquant le Théorème de FUBINI nous aurons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{(f'_\theta(x,\theta))^2}{f(x,\theta)} d\theta &= \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(f'_\theta(x,\theta))^2}{f(x,\theta)} d\nu d\theta \\ &= \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} I(\theta)d\theta < \infty, \end{aligned}$$

et par conséquent l'intégrale intèrieure dans la partie gauche et l'intégrale suivante

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{\mid f'_\theta(x,\theta) \mid}{\sqrt{f(x,\theta)}} d\theta$$

sont finies ν-preque sûrement puis en appliquant le Lemme (2.2.4) à la fonction $f(x,\theta)$ nous obtenons que la fonction $\sqrt{f(x,\theta)}$ est absolument continue dans un voisinage du point $\theta = t$ pour ν-presque tout x. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u^2} E_t(\xi(u))^2 &= \frac{1}{u^2} E_t\left(\frac{(\sqrt{f(X_1,t+u)} - \sqrt{f(X_1,t)})^2}{f(X_1,t)}\right) \\
&= \frac{1}{u^2} \int (\sqrt{f(x,t+u)} - \sqrt{f(x,t)})^2 d\nu \\
&= \frac{1}{u^2} \int d\nu \left(\int_t^{t+u} \frac{f'_u}{2\sqrt{f}} du\right)^2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons, partant de cette dernière égalité :

$$\frac{1}{u^2} E_t(\xi(u))^2 \leq \frac{1}{4u^2} \int d\nu \left(\int_t^{t+u} \frac{f'^2}{f} du\right)\left(\int_t^{t+u} du\right).$$

En appliquant le Théorème de FUBINI encore une fois nous obtenons

$$\frac{1}{u^2} E_t(\xi(u))^2 \quad \leq \quad \frac{1}{4u} \int_t^{t+u} \left(\int \frac{f'^2}{f} d\nu\right) du.$$

Il s'en suit alors

$$\frac{1}{u^2} E_t(\xi(u))^2 \leq \frac{1}{4u} \int_t^{t+u} I(y) dy. \tag{2.27}$$

D'autre part puisque $I(\theta)$ est continue au point $\theta = t$ alors il est clair que les relations suivantes sont valides

$$\overline{\lim_{u \to 0}} \frac{1}{u^2} E_t \xi(u)^2 \leq \frac{I(t)}{4}$$

$$E(\varphi^2(X_1)) = \frac{1}{4} I(t)$$

$$\frac{1}{u} \xi(u) \longrightarrow \varphi(X_1) \quad quand \;\; u \to 0$$

d'où la relation (2.26).

2.3 Condition LAN : Cas non i.i.d

Dans cette section nous introduisons la condition LAN pour une suite de variables aléatoires indépendantes mais qui n'ont pas la même loi. Pour cela considérons les observations indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$ de densités respectives $f_1, f_2, ..., f_n$ et introduisons la mesure de probabilité de l'échantillon $\mathbb{P}_\theta^n$. Le rapport de vraisemblace pour deux valeurs θ_1 et $\theta_2$du paramètre associé à ces observations s'écrit alors

$$\frac{\mathbb{P}_{\theta_2}^n}{\mathbb{P}_{\theta_1}^n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{f_j(X_j, \theta_2)}{f_j(X_j, \theta_1)}.$$

Pour simplifier les calculs et pour bien comprendre le problème nous ne considérons que le cas réel ($\Theta \subset I\!R$). Posons $\Psi^2(n, \theta) = \sum_{j=1}^{n} I_j(\theta)$ où $I_j(\theta)$ est l'Information de Fisher associée à l'observation X_j. Nous avons alors le théorème de convergence

Théorème 2.3.1. *si les conditions suivantes sont remplies*
(1) $\Psi^2(n, \theta_1) > 0$,
(2) et pour tout $k > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|u|<k} \frac{1}{\Psi^2(n,\theta_1)} \sum_{j=1}^{n} \int \left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{f_j(x, \theta_1 + \frac{u}{\Psi(n,\theta_1)})} - \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{f_j(x,\theta_1)}\right)^2 \nu_j(dx) = 0, \tag{2.28}$$

(3) la condition de Lindeberg est satisfaite i.e pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Psi^2(n,t)} \sum_{j=1}^{n} E_t\{\left| \frac{f\prime_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)} \right|^2 \mathcal{X}_{\{|\frac{f\prime_j}{f_j}|>\varepsilon\Psi(n,t)\}}\} = 0, \tag{2.29}$$

alors la famille de loi $\mathbb{P}_\theta^n$ *définie par* $\mathbb{P}_\theta^n(A) = \int_A ... \int \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j, \theta)\nu_j(dx_j)$ *satisfait la condition LAN au point* $\theta = t$.
Ici $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\varphi(n) = \varphi(n,t) = \Psi^{-1}(n,t)$, $\Delta_{n,t} = \varphi(n,t)\sum_{j=1}^{n} \frac{f\prime_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)}$.

pour démontrer ce Théorème nous avons besoin du Lemme suivant. Notons d'abord :

$$\eta_{jn} = \left(\frac{f_j(X_j, t+\varphi(n)u)}{f_j(X_j,t)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

Lemme 2.3.2. *si les conditions du Théorme (2.3.1) sont vérifiées alors pour tout* $u \in I\!R$ *les relations suivantes sont valides*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{j=1}^{n} E_t \eta_{jn}^2 \le \frac{1}{4}u^2 \quad , \tag{2.30}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E_t \left| \eta_{jn} - \frac{1}{2}\varphi(n)u\frac{f\prime_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)} \right|^2 = 0. \tag{2.31}$$

preuve du lemme

Puisque le problème statistique est régulier, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} E_t \eta_{jn}^2 &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\{x: f_j(x,t) \neq 0\}} (f_j^{\frac{1}{2}}(x, t+\varphi(n)u) - f_j^{\frac{1}{2}}(x,t))^2 \nu_j(dx) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \int (f_j^{\frac{1}{2}}(x, t+\varphi(n)u) - f_j^{\frac{1}{2}}(x,t))^2 \nu_j(dx) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \int (\int_o^{\varphi(n)u} \frac{f\prime_j(x,t+v)}{2\sqrt{f_j(x,t+v)}} dv)^2 \nu_j(dx).
\end{aligned}$$

En appliquant le Théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-schwarz nous obtenons l'inégalité suivante

$$\sum_{j=1}^{n} E_t \eta_{jn}^2 \leq \frac{u\varphi(n)}{4} \int_0^{\varphi(n)u} \sum_{j=1}^{n} I(t+v) dv. \tag{2.32}$$

Rappelons l'inégalité suivante, pour $a, b \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

$$\mid ab \mid < \alpha \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2\alpha} b^2. \tag{2.33}$$

Posons $a_j = f_j'(x,\theta)/\sqrt{f_j(x,\theta)}$ et $b_j = f_j'(x,t)/\sqrt{f_j(x,t)}$ nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mid \frac{1}{\Psi^2(n,t)} \sum_{j=1}^{n} I_j(\theta) - 1 \mid &\leq \frac{1}{\Psi^2(n,t)} \sum_{j=1}^{n} \int \mid (a_j - b_j)(a_j + b_j) \mid \nu_j(dx) \\
&\leq \frac{1}{\Psi^2(n,t)} [\alpha \sum_{j=1}^{n} \int (a_j - b_j)^2 \nu_j(dx) \\
&+ \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{n} (\int a_j^2 \nu_j(dx) + \int b_j^2 \nu_j(dx))].
\end{aligned}$$

Considérons alors la dernière inégalité pour $\alpha = 2$ et avec la relation (2.28) nous déduisons que l'èxprèssion $\Psi^{-2}(n,t) \sum_{j=1}^{n} I_j(\theta)$ est bornée pour $\mid \theta - t \mid < \varphi(n) \mid u \mid$. Puis en utilisant la même inégalité pour α assez grand :

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|\theta - t| < \varphi(n)|u|} \mid \Psi^{-2}(n,t) \sum_{j=1}^{n} I_j(\theta) - 1 \mid = 0. \tag{2.34}$$

Nous pouvons alors conclure que (2.30) découle des relations (2.32) et (2.34). Il reste à montrer (2.31) pour cela nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} E_t(\eta_{jn} - \frac{1}{2}\varphi(n)u \frac{f_j'(X_j,t)}{f_j(X_j,t)})^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \int [\int_0^{\varphi(n)u} (\frac{f_j'(x,t+v)}{\sqrt{f_j(x,t+v)}} - \frac{f_j'(x,t)}{\sqrt{f_j(x,t)}}) dv]^2 \nu_j(dx) \\
&\leq \frac{1}{4}\varphi(n)u \int_0^{\varphi(n)u} dv \sum_{j=1}^{n} \int (\frac{f_j'(x,t+v)}{\sqrt{f_j(x,t+v)}} - \frac{f_j'(x,t)}{\sqrt{f_j(x,t)}})^2 \nu_j(dx)
\end{aligned}$$

et cette dernière expression tends vers zero quand $n \to \infty$ grâce à la relation (2.28).

Preuve du Théorème.
Si $\max\limits_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} \mid< \varepsilon$ alors la représentation (2.14) est valide alors

$$\sum_{j=1}^{n} \ln \frac{f_j(X_j, t+\varphi(n)u)}{f_j(X_j,t)} = 2\sum_{j=1}^{n} \eta_{jn} - \sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \mid \eta_{jn} \mid^3.$$

La condition (2.29) assure que la suite

$$\varphi(n) \sum_{j=1}^{n} f'_j(X_j,t)/f_j(X_j,t)$$

converge en loi vers la loi normale standard. Donc la preuve se réduit à vérifier la validité des égalités suivantes pour tout $\varepsilon > 0$ lesquelles sont analogues à (2.6)-(2.9)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_t\{\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} > \varepsilon\} = 0 \tag{2.35}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_t\{\sum_{j=1}^{n} \eta_{jn}^2 - \frac{u^2}{4} > \varepsilon\} = 0 \tag{2.36}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_t\{\mid 2\sum_{j=1}^{n} \eta_{jn} - \varphi(n)u \sum_{j=1}^{n} \frac{f'_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)} + \frac{u^2}{4} > \varepsilon\} = 0 \tag{2.37}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_t\{\sum_{j=1}^{n} \mid \eta_{jn}^3 \mid\} = 0. \tag{2.38}$$

Pour la preuve de (2.35) nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_t\{\max_{1\leq j\leq n} \mid \eta_{jn} > \varepsilon\} &\leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_t\{\mid \eta_{jn} \mid> \varepsilon\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_t\{\mid \eta_{jn} - \frac{\varphi(n)u}{2} \frac{f'_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)} \mid> \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_t\{\mid \frac{f'_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)} \mid> \frac{\varepsilon}{4\varphi(n) \mid u \mid}\},
\end{aligned}$$

puis en appliquant l'inégalité de Tchebyshev, nous obtenons que la première somme tend vers zéro moyennant (2.31) et la deuxième tend aussi vers zéro par la condition de Lindeberg, d'où (2.35).

Nous passons maintenant à la preuve de (2.36). Nous utilisons alors (2.33) et l'inégalité de Tchebyshev et nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_t\{\mid \sum_{j=1}^{n}\eta_{jn}^2 - \frac{1}{4}\varphi^2(n)u^2\sum_{j=1}^{n}(\frac{f'(X_j,t)}{f_j(X_j,t)})^2 \mid > \varepsilon\} &\leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}E_t \mid \eta_{jn}^2 - \frac{1}{4}\varphi^2(n)u^2(\frac{f'(X_j,t)}{f_j(X_j,t)})^2 \mid \\
&\leq \frac{\alpha}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}E_t \mid \eta_{jn} - \frac{1}{2}\varphi(n)u\frac{f'(X_j,t)}{f_j(X_j,t)} \mid^2 \\
&+ \frac{1}{2\alpha\varepsilon}(1+\sum_{j=1}^{n}E_t\eta_{jn}^2).
\end{aligned}$$

Par (2.30), (2.31) et en choisissant un α assez grand nous déduisons que le membre de droite de la dernière expression tend vers zéro quand $n \to \infty$. La condition (2.29) assure la stabilité des sommes $\sum_{j=1}^{n}(\frac{f'_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)})^2$ quand elles sont normalisées au sens que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_t\{\mid \varphi^2(n)\sum_{j=1}^{n}(\frac{f'(X_j,t)}{f_j(X_j,t)})^2 - 1 \mid > \varepsilon\} = 0,$$

d'où l'égalité (2.36).

L'égalité (2.38) découle de (2.35) et (2.36) et il reste à prouver l'égalité (2.37). Il résulte de (2.36) que $\sum_{j=1}^{n}\eta_{jn}^2$ converge en probabilité vers $\frac{1}{4}u^2$ et en appliquant l'inégalité (2.30) nous déduisons

$$\lim_{n\to\infty}E_t\sum_{j=1}^{n}\eta_{jn}^2 = \frac{1}{4}u^2.$$

De manière analogue à (2.10),en utilisant cette dernière égalité et (2.32) nous déduisons la convergence :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{x:f_j(x,t)=0\}} f_j(x,t+\varphi(n)u)\nu_j(dx) = 0.$$

Enfin en utilisant les deux dernières limites nous avons

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_{jn}^2 = \sum_{j=1}^{n}(\frac{f_j(X_j,t+\varphi(n)u)}{f_j(X_j,t)} - 1) - 2\sum_{j=1}^{n}\eta_{jn}.$$

De l'egalité suivante :

$$\lim_{n\to\infty}E_t\sum_{j=1}^{n}\eta_{jn} = -\frac{1}{8}u^2,$$

et comme, nous avons également pour $n > n_0$

$$\mathbb{P}_t\{\mid 2\sum_{j=1}^{n}\eta_{jn} - \varphi(n)u\sum_{j=1}^{n}\frac{f'_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)} + \frac{u^2}{4} > \varepsilon\}$$

$$\leq \mathbb{P}_t\{\mid 2\sum_{j=1}^{n}(\eta_{jn} - E_t\eta_{jn})\varphi(n)u\sum_{j=1}^{n}\frac{f'_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)} > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$\leq \frac{16}{\varepsilon^2}E_t[\sum_{j=1}^{n}(\eta_{jn} - E_t\eta_{jn}) - \frac{1}{2}\varphi(n)u\sum_{j=1}^{n}\frac{f'_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)}]^2$$

$$\leq \frac{16}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n}E_t(\eta_{jn} - \frac{1}{2}\varphi(n)u\frac{f'_j(X_j,t)}{f_j(X_j,t)})^2,$$

alors cette dernière majoration, avec la limite (2.31) impliquent la convergence (2.37).
Ceci achève la démonstration du théorème (3.3.1).

Remarque 2.3.3. *Les conditions (2.28) et (2.29) étant quelque peu compliquées, nous introduisons certaines conditions plus fortes mais plus simples à vérifier. La condition (2.29) est la condition de Lindeberg et elle est déduite de la condition de Lyapunov : pour tout* $\delta > 0$

$$\frac{1}{[\Psi(n,t)]^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n}E_t \mid \frac{f'_j}{f_j}(X_j,t)\mid^{2+\delta} \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.39}$$

Si la fonction $(f_j^{\frac{1}{2}}(x,\theta))'$ *est absolument continue par rapport à* θ *pour tout* x, *il est alors possible de poser une condition suffisante pour établir (2.28).*
En effet

$$\int(\frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{f_j(x,\theta)} - \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{f_j(x,t)})^2\nu_j(dx) = \int(\int_t^\theta \frac{\partial^2}{\partial v^2}\sqrt{f_j(x,v)}dv)^2,$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder nous avons :

$$\int(\frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{f_j(x,\theta)} - \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{f_j(x,t)})^2\nu_j(dx)$$

$$\leq (\theta - t)\int_t^\theta(\int \mid \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f_j(x,v)\mid^2 \nu_j(dx))dv.$$

Par conséquent, la condition (2.28) résulte de la condition

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Psi^4(n)}\sup_{|\theta-t|<|u|/\Psi(n,t)}\sum_{j=1}^{n}\int \mid \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\sqrt{f_j(x,\theta)}\mid^2 \nu_j(dx) = 0 \tag{2.40}$$

Quelques spécificités particulières au modèle signal plus bruit font l'objet du paragraphe suivant.

2.4 Corollaires pour le modèle Signal Plus bruit

Nous avons le modèle suivant,

$$dX_t = S(X, t, \theta)dt + \varepsilon dW_t$$

où S est une fonction absolument continue par rapport à θ et W_t est le processus de Winner. Commençons par étudier un cas particulier qui s'appele signal plus bruit.

Nous considérons les observations $X_j \in \mathbb{R}$ à partir du modèle

$$X_j = S(j, \theta) + \varepsilon_j \tag{2.41}$$

S est une fonction absolument continue par rapport à θ pour tout j et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ sont des variables aléatoires réelles identiquement distribuées de densité f absolument continue. Le modèle (2.41) est lié à des applications dans la théorie de la communication en particulier et d'autres domaines également. Ici $S(j, \theta)$ est considéré comme un signal transmis à l'instant j et ε_j est un bruit additif dans la communication. L'Information de Fisher associée aux variables aléatoires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ dans ce type de problèmes (2.41) est définie par

$$I = \int_{\{x: f(x) \neq 0\}} \frac{(f'(x))^2}{f(x)} dx < \infty.$$

Pour en déduire l'information de Fisher associée aux variables observées $X_1, X_2, ...xX_n$, nous calculons la densité f_j associée àX_j, et pour cela nous faisons appel au théorème du changement de variable (1.4.1) ainsi

$$f_j(x, \theta) = f(x - S(j, \theta))$$

. Nous pouvons alors calculer l'information de Fisher pour une observation X_j :

$$\begin{aligned}
I_j(\theta) &= \int \frac{(f_j'(x,\theta))^2}{f_j(x,\theta)} dx \\
&= \int \frac{(-S'(j,\theta)(f_j'(x,\theta))^2}{f_j(x,\theta)} dx \\
&= S'^2(j,\theta) \int \frac{(f_j'(x,\theta))^2}{f_j(x,\theta)} dx \\
&= S'^2(j,\theta) \int \frac{(f'(x - S(j,\theta)))^2}{f(x - S(j,\theta))} dx,
\end{aligned}$$

et par le chagement de variable ($y = x - S(j, \theta)$) nous obtenons que

$$I_j(\theta) = S'^2(j,\theta) \int \frac{(f'(x))^2}{f(x)} dx = S'^2(j,\theta) I.$$

Posons pour la suite $\Psi^2(n,t) = I\sum_{j=1}^{n} S_t'^2(j,t)$.
Ainsi la donnée de la fonction $S(j,\theta)$ nous permet de vérifier si les conditions (2.39) et (2.40) sont réalisées et donc de vérifier la condition LAN par le théorème (2.3.1). Nous étudions dans la suite quelques exemples pour comprendre dans quelles circonstances la condition LAN est satisfaite pour ce type de modèle.

Exemple 2.4.1. *soit la fonction continue $S(j,\theta) = S(\theta)$; dans ce cas le signal ne dépend pas du temps.*
Pour cet exemple nous appliquons le Théorème (2.2.3) (Hadjek), il suffit alors de vérifier les 3 hypothèses du Théorème.
Sous les hypothèses :

(1) S est absolument continue en θ pour tout j et que f l'est aussi pour tout x, d'autre part la fonction $x - S(\theta)$ est absolument continue en θ, par conséquent la fonction
$f_j(x,\theta) = f(x, S(\theta))$ est absolument continue en θ.

(2) f est une densité absolument continue en θ, alors la dérivée de f_j par rapport à θ existe en tout point θ pour ν-presque tout x, de plus

$$\frac{\partial f_j(x,\theta)}{\partial\theta} = -S'(\theta)f'(x - S(\theta))$$

.

(3) Puisque f est une densité alors $\int \frac{(f')^2}{f}dx$ est positive et continue en tout point θ tel que $S'(\theta) \neq 0$, d'où $I_j(\theta) = S'^2(\theta)I$ est positive et continue en tout point θ tel que $S'(\theta) \neq 0$.

Par le Théorème(2.2.3)(Hadjek) nous concluons que le processus $\{X_j\}$
, $X_j = (\theta) + \varepsilon_j$ est LAN en tout point θ tel que $S'(\theta) \neq 0$, de plus
$\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\Psi^2(n,\theta) = InS'^2(\theta)$,
$\varphi(n,\theta) = \Psi^{-1}(n,\theta) = (\sqrt{In} \mid S'(\theta) \mid)^{-1}$
et $\Delta_{n,\theta} = \varphi(n,\theta)\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j'(X_j,\theta)}{f_j(X_j,\theta)}$

Exemple 2.4.2. *Considérons un exemple où le signal dépend du temps alors dans le but d'appliquer le Théorème (2.3.1) et à partir de (2.39) et (2.40) nous obtenons les conditions suffisantes pour satisfaire la condition LAN. Les fonctions $f(x)$ et $S(j,\theta)$ sont supposées deux fois dérivables par rapport à x et θ respectivement, et*

$$\int \frac{\mid f'(x) \mid^{2+\delta}}{f(x)^{1+\delta}}dx < \infty \quad (pour \quad tout \quad \delta > 0)$$

$$\int [\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sqrt{f(x)}]^2 dx < \infty$$

et pour tout $u > 0$ nous avons

$$\frac{1}{\Psi^4(n,t)} \sup_{|\theta - t| < u/\Psi(n)} \sum_{j=1}^{n} [\mid S''_\theta(j,\theta) \mid^2 + \mid S'_\theta(j,\theta) \mid^4] \rightarrow 0 \tag{2.42}$$

quand $n \rightarrow \infty$
cette dernière condition est facilement vérifiée pour certaines formes spécifiques du signal $S(j,\theta)$. Pour bien comprendre le problème introduisons l'exemple ou le signal vérifie $S(j,\theta) = \theta g(j)$, alors la condition (2.42) s'écrit

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} g^4(j)}{(\sum_{j=1}^{n} g^2(j))^2} \rightarrow 0$$

cette condition est remplie si par exemple, $g(j) = j^\alpha$ avec $\alpha \geq -\frac{1}{2}$.

Si en revanche $\alpha < -\frac{1}{2}$, le rapport de vraisemblace possède une limite sans avoir à utiliser le coefficient de normalisation.
Si $g(j) = a^j$ où $\mid a \mid \neq 1$, alors la condition (2.42) n'est pas vérifiée. Si $\mid a \mid < 1$ alors une fois de plus , la limite du rapport de vraisemblance existe sans avoir à utiliser le coefficient de normalisation.
Dans le cas où $\mid a \mid > 1$ la limite du logarithme du rapport de vraisemblance dépend essentiellement de f.
Soit $X_j = \theta a^j + \varepsilon_j$, $\mid a \mid > 1$ alors le rapprt de vraisemblace s'écrit :

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{f(X_j - a^j\theta_2)}{f(X_j - a^j\theta_1)}.$$

Si nous prenons le facteur de normalisation proportionnel à a^{-n} et si nous posons $\theta_2 = \theta_1 + a^{-n}u$ alors nous obtenons

$$\mathcal{Z}_n(u) = \frac{d\mathbb{P}^n_{\theta_1 + a^{-n}u}}{d\mathbb{P}^n_{\theta_1}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{f(\varepsilon_j - ua^{j-n})}{f(\varepsilon_j)}.$$

d'autre part

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2}),$$

nous déduisons alors que la dernière égalité peut s'écrire comme suit :

$$\ln \mathcal{Z}_n(u) = \frac{1}{\sigma^2}(\sum_{j=1}^{n} u\varepsilon_j a^{j-n} - \frac{1}{2}u^2 \sum_{j=1}^{n} a^{2(j-n)}),$$

et par conséquent la condition LAN est vérifiée et $\varphi(n) := a^{-n-1}\sqrt{a^2 - 1}$

Chapitre 3

Application : estimation paramétrique

Nous avons vu dans le chapitre précédent la condition LAN et quelques propriétés qui découlent de cette condition, dans ce chapitre nous considérons des exemples de processus stochastiques (X_t) avec un paramètre θ à estimer et nous essayons de voir l'importace de la condition LAN pour ce problème d'estimation.
Dans ce chapitre nous nous interessons à des problèmes du type

$$dX_t = S(X_t, \theta)dt + \varepsilon dW_t \tag{3.1}$$

où W_t est un mouvement brownien c'est à dire $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.
Nous ne démontrons pas les résultats établis dans le livre d'Ibragimov-Has'minskii pour ce qui est de l'estimation mais nous nous limiterons uniquement à mettre en évidence le rôle de la condition LAN dans l'estimation ponctuelle.

3.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance est défini par :

Définition 3.1.1. *on appelle estimateur du maximum de vraisemblace une valeur $\hat{\theta}_\varepsilon$ solution de problème* $\sup\limits_{\theta \in \Theta} \dfrac{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta+\varphi(\varepsilon)u}}{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta}}(X^{(n)})$.

L'estimateur du maximum de vraisemblance a des propriétés notables que nous allons rappeler. Comme précédemment, notre étude est basée sur le rapport de vraisemblance normalisé par une matrice non dégénéréé $\varphi(\varepsilon, t)$. Pour un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ de loi $\mathbb{P}^{(\varepsilon)}_{\theta}$, où $\theta \in \Theta$ un ouvert de $\mathbb{R}^k$.
Nous supposons les conditions suivantes

(N1) la famille de loi $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ vérifie la condition LAN uniforme sur tout compact $K \subset \Theta$; i.e ; pour une certaine matrice non dégénérée $\varphi(\varepsilon, t)$, et pour tout compact $K \subset \Theta$ et pour toute suite convergente telle que $t_n \in K$ et $t_n + \varphi(\varepsilon_n, t_n)u_n \in K$, avec $u_n \to u$, et $\varepsilon_n \to 0$, la représentation

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\varepsilon_n, t_n}(u_n) &= \frac{d\mathbb{P}^{(\varepsilon_n)}_{t_n+\varphi(\varepsilon_n,t_n)u_n}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon_n)}_{t_n}} \\ &= \exp\{(\Delta_{\varepsilon_n,t_n}, u) - \frac{\mid u \mid^2}{2} + \Psi_{\varepsilon_n}(u_n, t_n)\} \end{aligned}$$

est valide.
Avec $\mathcal{L}(\Delta_{\varepsilon_n,t_n})$ qui converge vers $\mathcal{N}(0, J)$ quand $\varepsilon_n \to 0$ et la suite $\Psi_{\varepsilon_n}(u_n, t_n)$ qui converge en probabilité vers 0.

(N2) Pour tout compact $K \subset \Theta$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in K} (\varphi(\varepsilon, t)\varphi(\varepsilon, t)^T) = 0$$

(N3) pour tout compact $K \subset \Theta$ et pour certaines constantes $m > 0$, $B = B(K)$, $a = a(K)$;

$$\sup_{t \in k} \sup_{|u|<R;|v|<R} \mid u - v \mid^{-2m} E_t^{(\varepsilon)} \mid \mathcal{Z}_{\varepsilon,t}^{\frac{1}{2m}}(u) - \mathcal{Z}_{\varepsilon,t}^{\frac{1}{2m}}(v) \mid^{2m} < B(1 + R^a).$$

(N4) Pour tout compact $K \subset \Theta$ et pour tout $N > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, K)$ tel que

$$\sup_{t \in k} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \sup_{|u|<R} \mid u \mid^N E_t^{(\varepsilon)} \mathcal{Z}_{\varepsilon,t}^{\frac{1}{2}}(u) < \infty$$

On admet sans démonstration les résultats suivants

Propriétés 3.1.2. *soient $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, et supposons que les conditions N1-N4 sont vérifiées. Soit K un compact quelconque ($K \subset \Theta$) alors l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$ possède les propriétés suivantes uniformément par rapport à θ dans K*
a) $\hat{\theta}_\varepsilon$ est consistent i.e $\mathbb{P}_\theta(\mid \hat{\theta}_\varepsilon - t \mid > \varepsilon) \to 0$.
b) $\hat{\theta}_\varepsilon$ est asymptotiquement normal i.e $\mathcal{L}(\hat{\theta}_\varepsilon) \to \mathcal{N}(t, \varphi^2(\varepsilon, t))$.
c) TouS les moments de la variable aléatoire $\varphi^{-1}(\varepsilon, t)(\hat{\theta}_\varepsilon - t)$ convergent quand $\varepsilon \to 0$ vers les moments correspondants de la loi normale de paramètres $(0, J)$ (J étant la matrice identité).

3.2 Exemple d'Ornstein-Uhlenbeck

[5] soit $\theta \in [\alpha, \beta]$ tel que $\mid \alpha \mid + \mid \beta \mid < \infty$ et considérons le processus $(X_t)_{0 \le t \le T}$ défini par :

$$dX_t = \theta X_t dt + \varepsilon dW_t, \ X_0 = x_0, \ 0 \le t \le T$$

. Notons que l'information de Fisher pour ce type de problème est définie par Ibragimov-Has'minskii comme suit

$$I(\theta) = \int_0^T \dot{S}^2(\theta, x_t)dt$$

où x_t est la solution de l'équation différentielle ordinaire, donc déterministe, associée à ce problème (lorsque $\varepsilon = 0$) définie par

$$\frac{dx_t}{dt} = \theta x_t$$

. Résolvons cette équation simple

$$\begin{aligned}
dx_t = \theta x_t dt \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dx_t}{x_t} = \theta dt \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^t \frac{dx_t}{x_t} = \int_0^t \theta dt \\
&\Leftrightarrow \quad [\ln x_t]_0^t = [\theta t]_0^t \\
&\Leftrightarrow \quad \ln \frac{x_t}{x_0} = \theta t \\
&\Leftrightarrow \quad x_t = x_0 \exp(\theta t).
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer l'Information de Fisher à partir de cette solution et en appliquant la définition précédente

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= \int_0^T x_0^2 \exp(2\theta t)dt \\
&= [\frac{x_0^2}{2\theta} \exp(2\theta t)]_0^T \\
&= \frac{x_0^2}{2\theta}(\exp(2\theta T) - 1).
\end{aligned}$$

Pour ce type de problème Ibragimov et Has'minskii introduisent le rapport de vraisemblace associé à ce problème pour deux valeurs distinctes du paramètre :θ_1 et θ_2 comme suit :

$$\frac{d\mathbb{P}_{\theta_1}}{d\mathbb{P}_{\theta_2}}(X_t) = \exp\{-\frac{1}{2}\int_0^T [\theta_2 X_{t,\theta 2} - \theta_1 X_{t,\theta_1}]^2 dt + \int_0^T [\theta_2 X_{t,\theta_2} - \theta_1 X_{t,\theta_1}]\varepsilon dW_t\}.$$

Ici (X_{t,θ_1}) respectivement (X_{t,θ_2}) sont les processus solution pour les valeurs respectives du paramètre θ_1 et θ_2.
Sur la base de l'observation d'une trajectoire complète$(X_t)_{0\leq t\leq T}$ nous admettons le Théorème suivant

Théorème 3.2.1. *la famille de loi* $\{\mathbb{P}_\theta\}$ *générée par le processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *est localement asymptotiquement normale uniformement par rapport à* θ *sur tout compact de* Θ *dans* $\mathbb{L}^2([0,T])$.

Preuve (Ibragimov et Has'minskii) Nous en déduisons alors la condition LAN uniforme pour l'exemple plus haut.
Par la propriété (4.1.2) l'estimateur du maximum de vraisemblace est asymptotiquement normale, uniformement par rapport à $\theta \in K$ pour tout compact $K \subset \Theta$. Nous avons alors

$$\mathcal{L}\{I^{\frac{1}{2}}(\theta)\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)\} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Notons que si $\theta \to 0$ alors $I(\theta) \to x_0^2 T$ et pour $x_0 \neq 0$ nous utilisons la convergence en loi de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour établir que

$$\mathcal{L}\{\varepsilon^{-1}\hat{\theta}_\varepsilon\} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{x_0^2 T})$$

3.3 Simulation

Nous abordons à présent le problème de simulation pour bien mettre en évidence l'éfficacité des outils introduits par Ibragimov et Ha'sminskii à savoir la condition LAN et les propriétés de l'EMV. Le tracé d'une trajectoire dans le cas d'un processus d' Ornstein-Uhlenbeck pour une valeur quelconque du paramètre dans l'exemple illustré (dans la partie réservée pour les figures) nous avons pris les exemples où $\theta = -2$ et $\theta = -\frac{1}{2}$. Nous avons en l'occurence choisi différentes valeurs de ε. Comme programme de simulation nous utilisons le logiciel R ainsi qu'un package : Sim.DiffProcGUI introduit pour la première fois par A.Guidoum dans le cadre d'une thèse dirigée par le Professeur K.Boukhetala. Le logiciel R est dù à R.Ihaka et R.Gentleman est utile pour manipuler des données statistiques, tracer des graphes et faire des analyses statistiques sur ces données.
En pratique, pour ce qui nous intéresse le logiciel R suit les étapes qui suivent pour aboutir d'abord à un tracé de trajectoire mais aussi pour trouver des valeurs pour l'EMV du paramètre inconnu θ :

(1) le locigiel génère des valeurs pour l'échantillon $(X(t))$ en fonction du dt (le pas) que nous précisons au préalable.

(2) Le logiciel permet le calcul de l'estimateur de θ (EMV) à partir d'un algorithme basé sur la formule suivante

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{dt}\log(\sum(X(t) - X(t-1))/\sum(X(t-1)^2)).$$

Enfin pour bien mettre en évidence le comportement de l'estimateur (EMV) dans le cadre des petites diffusions lorsque en particulier la condition LAN est vérifiée, nous rappelons comme exemple l'EDS étudiée par W. Benyahia.

$$dX_t^\varepsilon = (c_1 \int_\delta^1 X_{t-s}^\varepsilon e_1(s)ds)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \qquad -1 \leq s < \delta, \quad t \in [\delta, T].$$

L'auteur a notamment étudié le comportement de l'EMV selon les différentes valeurs prises par le coefficient de diffusion ε en utilisant le tracé de l'EMV

comme il est illustré dans la figure 7. Pour la simulation, les valeurs de l'estimateur de c_1. Choisissons alors :
$c_1 = 1, \quad \delta = 0.1, \quad x_0 = 2, \quad T = 2, \quad$ et $\quad e_1(s) = \cos(\frac{\pi}{2}s)$ donnée.

intèrprétation

Pour un ω choisi de manière aléatoire la simulation sur micro-ordinateur moyennant ce programme nous permet de mettre en évidence l'idée que la trajectoire de $X_t(\omega)$ est de plus en plus lisse "presque dérivable" quand $\varepsilon \to 0$ (réduction de la perturbation) c'est à dire que la régularité de la trajectoire va de paire avec la réduction de la perturbation.
Pour l'EMV nous remarquons des fluctuations récurrentes dues au mouvement brownien et qu'à partir d'un certain ordre de grandeur de ε (0.02) l'interaction du mouvement Brownien diminue. Dans ce cas l'EMV est d'autant plus proche de la vraie valeur de c_1 quand ε est petit. Ceci illustre notamment l'utilité de l'outil que représente la condition LAN pour obtenir une telle estimation paramétrique.

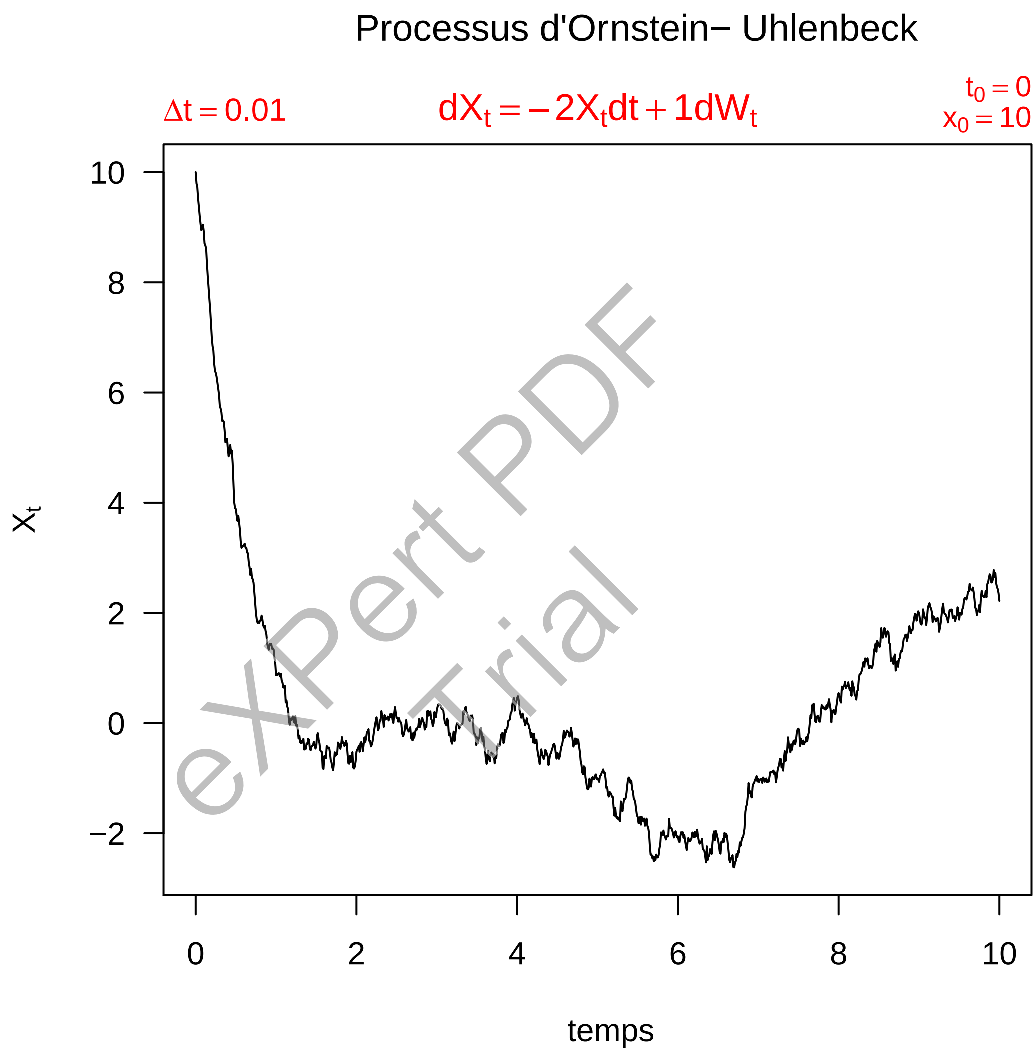


FIG. 3.1: Tracé d'une trajectoire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (X_t) (pour un ω fixé) et pour $\theta = -2$ et $\varepsilon = 1$.

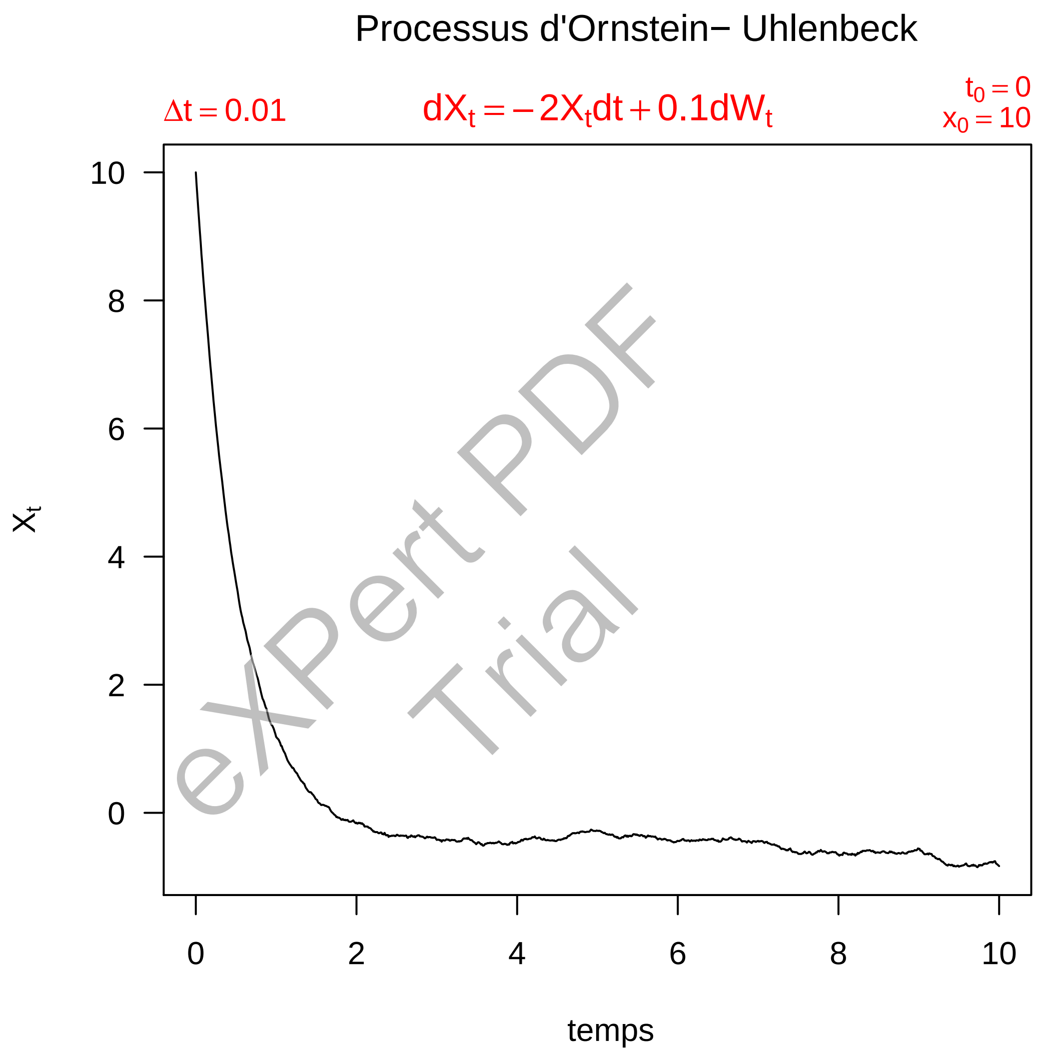


FIG. 3.2: Tracé d'une trajectoire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (X_t) (pour un ω fixé) et pour $\theta = -2$ et $\varepsilon = 0.1$.

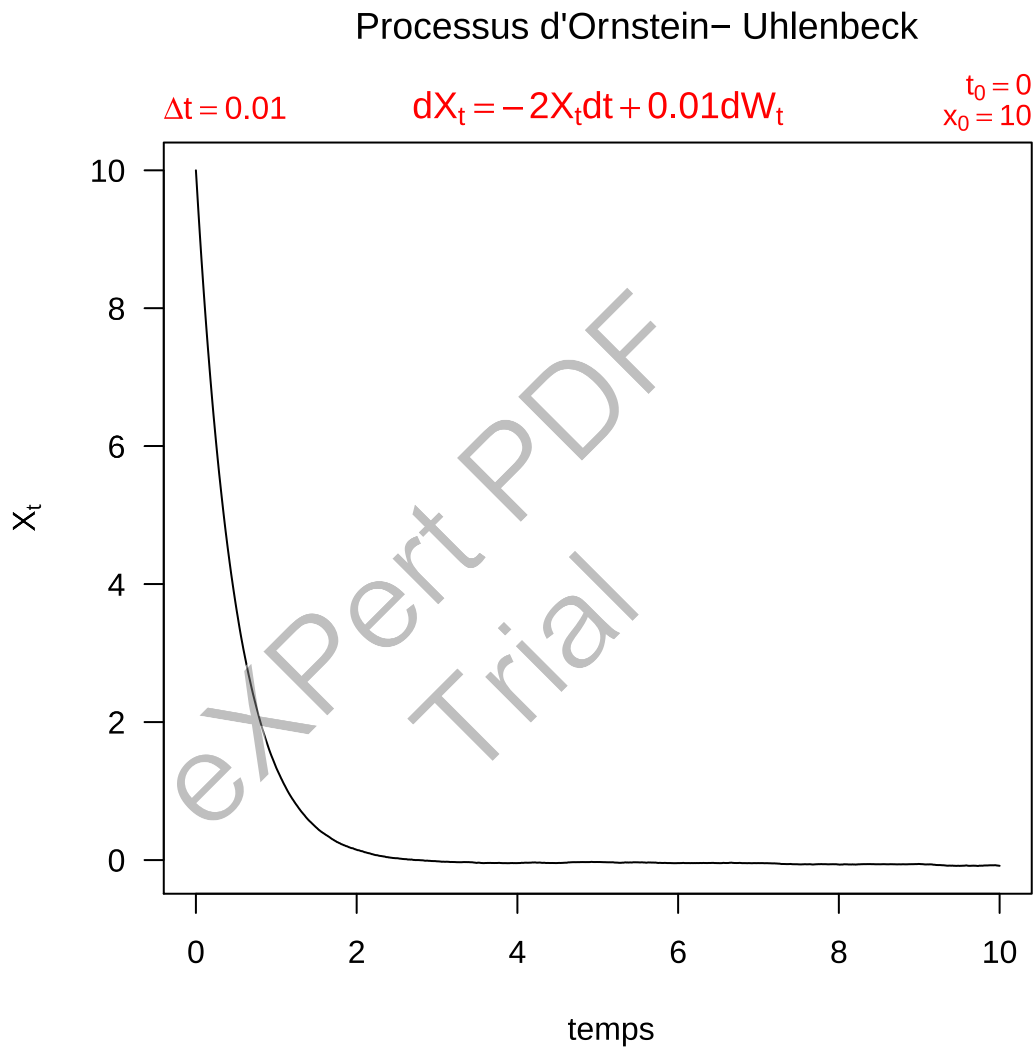


FIG. 3.3: Tracé d'une trajectoire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (X_t) (pour un ω fixé) et pour $\theta = -2$ et $\varepsilon = 0.01$.

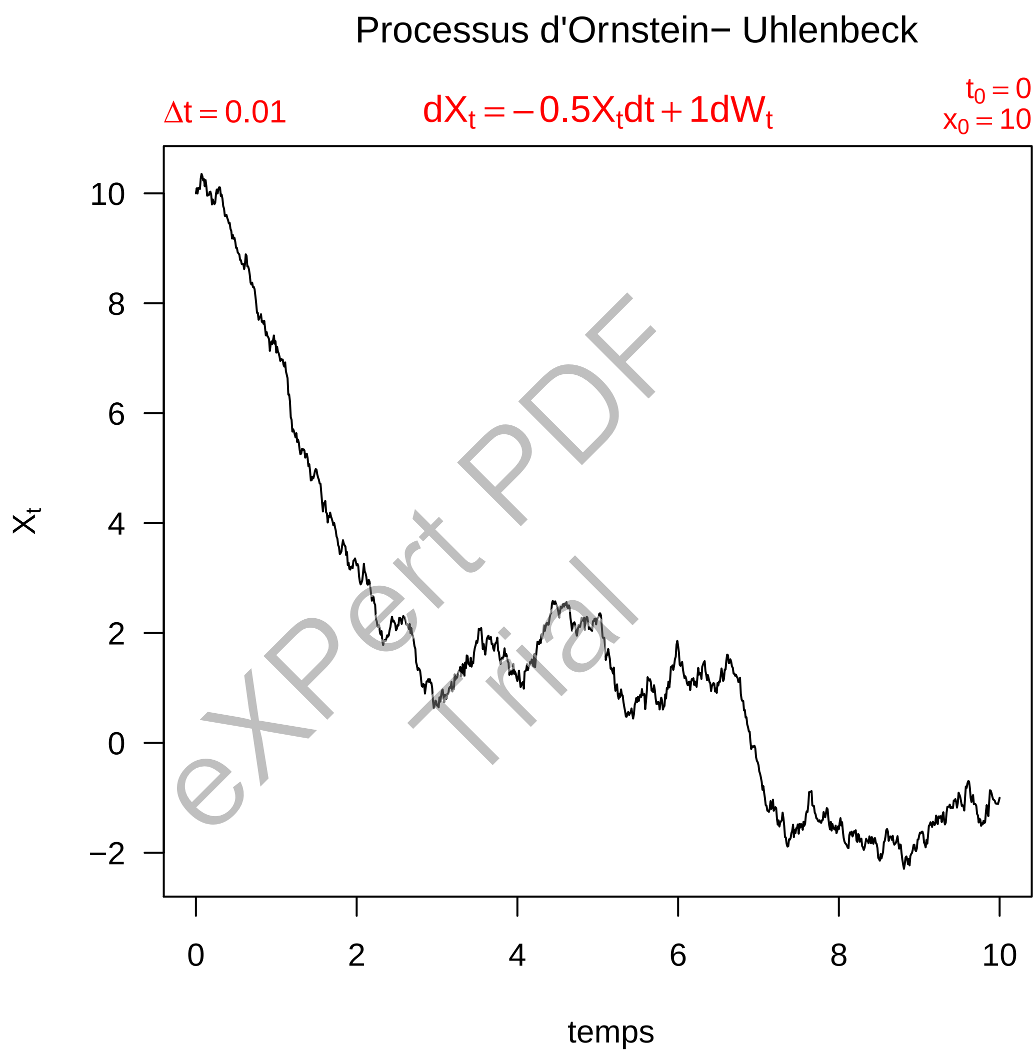


FIG. 3.4: Tracé d'une trajectoire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (X_t) (pour un ω fixé) et pour $\theta = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon = 1$.

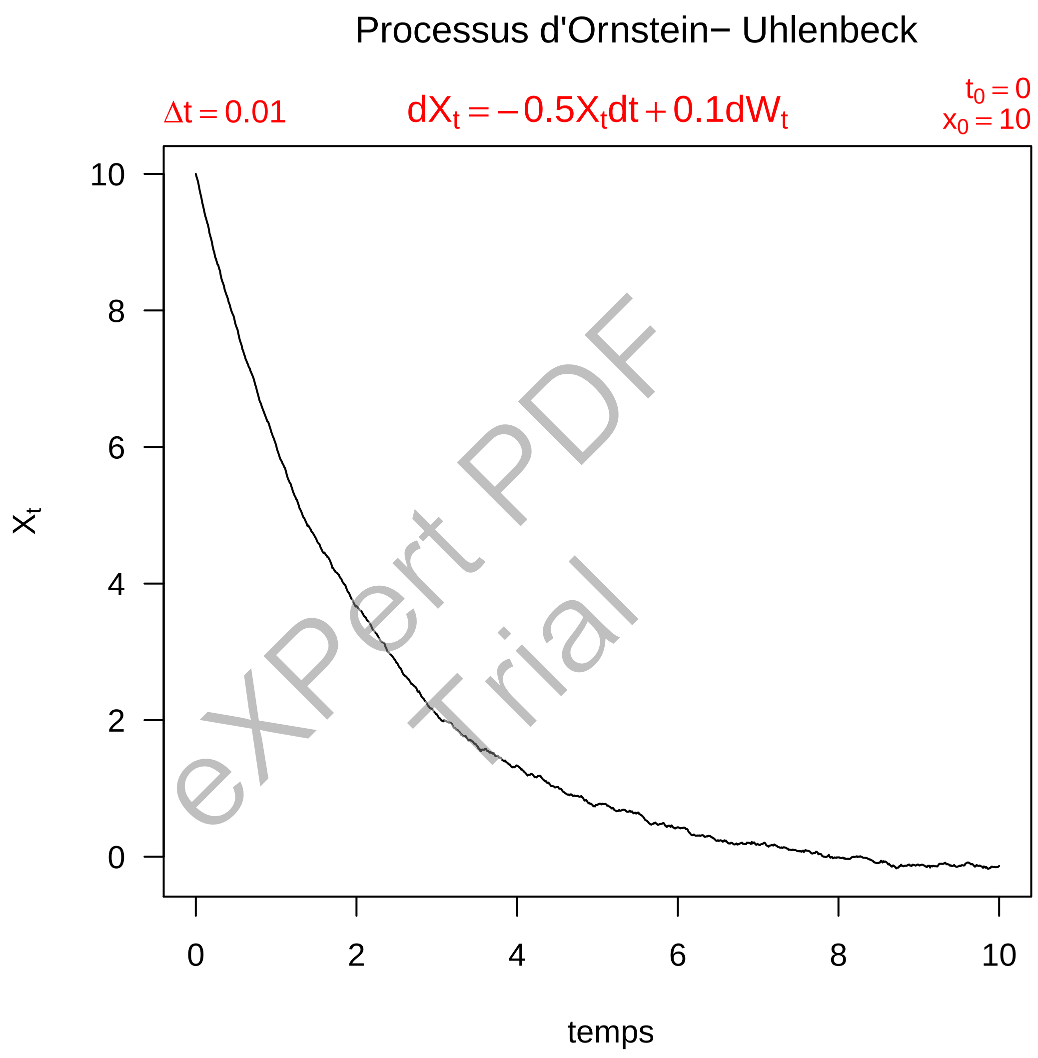


FIG. 3.5: Tracé d'une trajectoire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (X_t) (pour un ω fixé) et pour $\theta = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon = 0.1$.

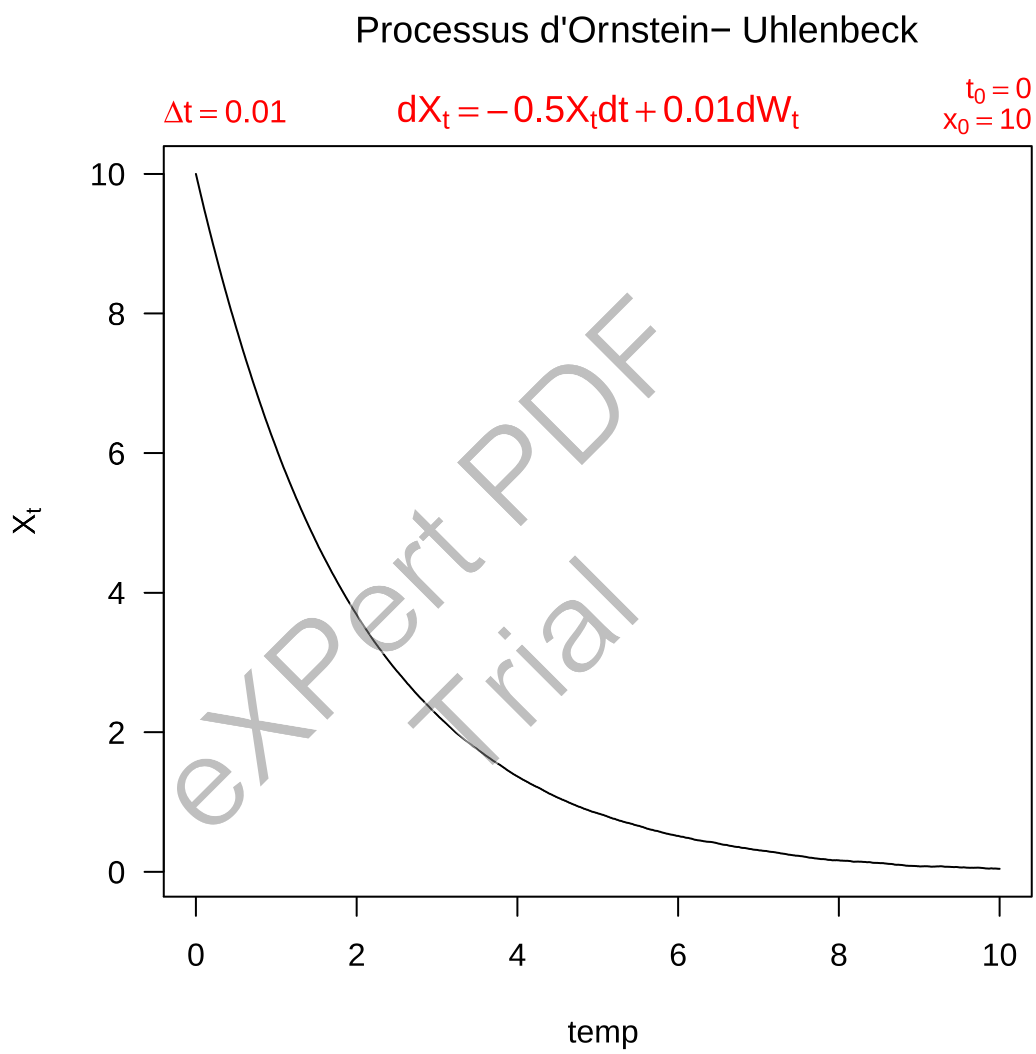
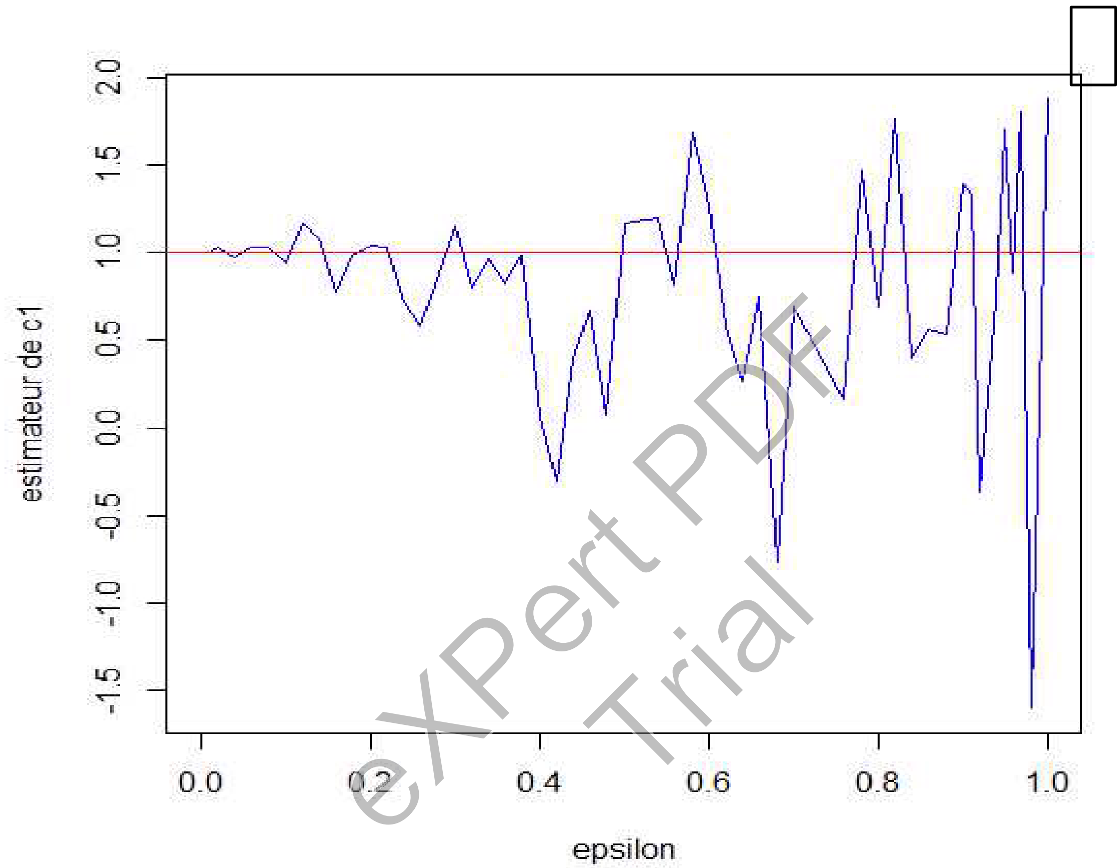


FIG. 3.6: Tracé d'une trajectoire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (X_t) (pour un ω fixé) et pour $\theta = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon = 0.01$.


estimateur de c1
epsilon
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes penchés sur la condition de la normalité asymptotique qui est un outil puissant introduit par Ibragimov et Has'minskii. Cette condition permet notamment de résoudre des problèmes statistiques concernant l'estimation, pour des modèles divers et des problèmes réels dans la physique, la médecine,... Les démonstrations sont très fines et très techniques. Nous avons cité à titre d'éxemples quelques applications et quelques simulations. Il s'est avéré que le logiciel R est très utile pour de telles simulations et nous entrevoyons la possibilité d'élaborer par la suite des packages complémentaires au R et spécifiques à tel ou tel problème statistique dans le but de visualiser le comportement des trajectoires du processus étudié ainsi que celui d'un estimateur proposé. Dans cet objectif il est nécéssaire d'adjoindre des connaissances de statisticien et d'informaticien à la fois.

Bibliographie

[1] W. BENYAHIA, Estimation paramétrique de la densité des retards dans un processus de diffusion, Thèse de Doctotart, 2012.

[2] K. BOUKHETALA-A.C. GUIDOUM, Conception d'un pro logiciel interactif sous R pour la simulation de processus de diffusion, Thèse, 2012.

[3] B.R. Frieden,Science from Fisher Information, Cambridge, 2004.

[4] I.A. Ibragimov,R.Z. Has'minskii, Statistical Estimation Asymptotic Theory, Springer-Verlag N.Y Heidelberg Berlin, 1981.

[5] Y.A. Kutoyants, Identification Of Dinamical Systems With Small Noise, Dordrecht :Kluwer, 1994.

[6] R.S. Lipster-A.N. Shiryayev, Statistics Of Random Process I General Theory, Springer-Verlag N.Y Heidelberg Berlin, 2000

[7] Queffelec-Zuily, Analyse pour l'agrégation, Florian BOUGUET, 2008.