

UNIVERSITE DE TLEMCCEN

INSTITUT D'ELECTRONIQUE

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

EN ELECTRONIQUE

Option: COMMUNICATION OPTIQUES ET MICRO-ONDES

Présentée par:

Mohammed FEHAM

Thème

Analyse rigoureuse par la méthode des éléments finis des structures résonnantes passives micro-ondes.  
-Applications au filtre millimétrique à résonateur diélectrique-

Soutenue le

devant la commission d'examen:

**B. BENYOUCEF**

Professeur à l'Université de Tlemcen

Président

**M. BENDAOU**

Professeur à l'USTHB

Examinateur

**H. AOURAG**

Maître de Conférences à l'Université de

Examinateur

Sidi Bel -Abbes

**N.E. CHABANE SARI**

Maître de Conférences à l'Université de Tlemcen Examinateur

**F.T. BENDIMERAD**

Maître de Conférences à l'Université de Tlemcen Promoteur



# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
<b>CHAPITRE I: FORMULATION DE LA METHODE DE CALCUL DE LA MATRICE DE REPARTITION DES CIRCUITS PASSIFS MICRO-ONDES</b>	
Introduction.....	4
I.1. Géométrie du milieu étudié.....	4
I.2. Formulation électromagnétique.....	6
I.2.1. Champ électromagnétique et distribution surfacique.....	6
I.2.2. Equations de Maxwell.....	8
I.2.3. Mise en équation du problème.....	10
I.3. Calcul des courants surfaciques sur les plans d'accès.....	14
I.3.1. Notions de repère local.....	16
I.3.2. Champ électromagnétique sur les plans d'accès.....	18
I.4. Calcul des termes de la matrice de répartition [S].....	20
I.5. Cas particulier.....	21
I.6. Conclusion.....	22
<b>CHAPITRE II: PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS</b>	
II.1. Etude des approximations.....	23
II.1.1. Approximation nodale.....	23
II.1.2. Approximation par élément finis.....	24
II.2. Notion d'élément de référence.....	27
II.3. Calcul des fonctions $N(\lambda)$ et $\bar{N}(\lambda)$ .....	28
II.3.1. Calcul des fonctions d'interpolation $N(\lambda)$ .....	28
II.3.2. Calcul des fonctions de transformation $\bar{N}(\lambda)$ .....	29
II.4. Élément triangulaire de Lagrange.....	31
II.4.1. Calcul de $\bar{N}(\lambda)$ .....	31
II.4.2. Calcul des fonctions d'interpolation $N(\lambda)$ .....	32
II.5. Élément cubique du Lagrange.....	34
II.6. Élément linéique de Lagrange.....	36
II.7. Éléments finis mixtes.....	36
II.7.1. Espace vectoriel $H^{\text{rot}}$ .....	37
II.7.2. Notations.....	37
II.7.3. Éléments mixtes triangulaire et cubique.....	38
II.7.4. Calcul des polynômes d'interpolation.....	38
II.8. Erreur d'interpolation sur un élément de maillage [K].....	44
II.8.1. Affinement du maillage.....	45
II.8.2. Choix de l'interpolation.....	45
II.9. Méthodologie pour éléments finis.....	45

**CHAPITRE III: DISCRETISATION DU PROBLEME D'OSCILLATION ET VALIDATION  
DE LA METHODE SUR DES STRUCTURES SIMPLES**

Introduction.....	47
III.1. Discrétisation du premier membre de l'équation (I.22).....	47
III.1.1. Discrétisation par un élément fini de Lagrange.....	48
III.1.2. Solutions parasites.....	51
III.1.3. Discrétisation par un élément fini mixte.....	53
III.2. Discrétisation du second membre de l'équation (I.22).....	54
III.3. Forme générale de l'équation (I.22) discrétisée par l'élément fini de Lagrange.....	57
III.4. Validation de la méthode d'analyse des structures résonnantes en oscillation libre.....	59
III.4.1. Calcul des composantes restantes du champ électromagnétique.....	61
III.4.2. Calcul du facteur de qualité à vide $Q_0$ .....	62
III.4.3. Analyse d'une cavité parallépipédique homogène par la MEF-3D.....	65
III.4.4. Analyse des structures cylindriques par la MEF-2D.....	67
III.5. Validation de la méthode d'analyse des structures résonnantes en oscillation forcée.....	84
III.5.A. Etude de la propagation guidée.....	84
A.1. Modes TEM et QUASI-TEM.....	86
A.2. Modes TE, TM et HEM.....	96
III.5.B. Calcul de la matrice de répartition de quelques structures simples.....	122
B.1. Structure à un accès.....	122
B.2. Structure à deux accès.....	125
III.6. Limite de validité d'un maillage.....	136
III.7. Conclusion.....	137

**CHAPITRE IV: APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS A L'ETUDE  
DES RESONATEURS DIELECTRIQUES EN OSCILLATIONS LIBRE ET FORCEE.**

Introduction.....	138
IV.1. Etude de la stabilité en température du résonateur diélectrique (R.D.).....	140
IV.2. Analyse des R.D. cylindriques sans pertes par la MEF-2D.....	142
IV.2.1. Caractérisation des modes de résonance.....	142
IV.2.2. Influence de l'environnement du R.D. sur son comportement.....	151
IV.2.3. Influence des plongeurs métalliques et diélectriques.....	161
IV.3. Analyse du R.D. conventionnel à faibles pertes par la MEF-2D.....	171
IV.4. Analyse des filtres millimétriques à base du R.D.....	175
IV.4.1. Analyse du R.D. parallépipédique par la MEF-3D.....	175
IV.4.2 Etude du R.D. millimétrique à Whispering Gallery (W.G.) modes.....	178
IV.4.2.1. Caractéristiques fondamentales d'un R.D. à W.G. modes.....	178
IV.4.2.2. Applications de la MEF-2D au R.D.P.....	184
IV.4.2.3. Application des R.D. à W.G. modes au filtrage directif.....	185
4.3. Conclusion.....	190



**CONCLUSION GENERALE.....191**

**BIBLIOGRAPHIE.....193**

**ANNEXES**

**Annexe 1.....199**

**Annexe 2.....205**

**Annexe 3.....220**

**Annexe 4.....222**

**Annexe 5.....226**





***INTRODUCTION GENERALE***

## INTRODUCTION GENERALE

Les structures résonnantes micro-ondes sont des circuits oscillants trouvant leurs applications dans de nombreux dispositifs [1], [2], [3] tels que les générateurs, les fréquencesmètres, les filtres, etc ...

Ces circuits résonnants sont réalisés à partir des cavités métalliques, des tronçons de ligne de transmission ou des guides d'ondes, des résonateurs diélectriques, etc...

Les effets d'intégration et de miniaturisation des dispositifs micro-ondes, notamment dans le domaine des communications, et les progrès réalisés dans la conception de matériaux à forte permittivité, stables en température et à très faibles pertes, ont conduit à développer l'utilisation des résonateurs diélectriques ( R.D.) dans de nombreux systèmes (filtres, oscillateurs, ...) [4], [5], [6].

Si on cherche à faire le bilan de tous les résonateurs diélectriques qu'il est possible d'imaginer, tout en jouant sur la géométrie que sur la nature des matériaux qui les constituent, on se persuade vite qu'il est illusoire d'espérer analyser avec précision la majorité d'entre eux par des fonctions analytiques exactes ou par les méthodes approximatives traditionnelles [7], [8].

L'idée d'un outil unique capable de traiter rigoureusement tous les circuits oscillants passifs micro-ondes est donc séduisante.

Dans la pratique, les résonateurs diélectriques sont isolés du milieu environnant par une cavité métallique sur laquelle sont pratiquées des ouvertures qui reliées à des lignes de transmission formeront des accès d'excitation et de détection.

En oscillation libre (pas d'excitation), la résolution des équations de Maxwell dans ces éléments résonnants est un problème à valeurs et vecteurs propres. Un tel problème admet un ensemble de solutions appelées modes de résonance.

Chacun de ces modes est caractérisé par:

- une fréquence de résonance,
- une distribution du champ électromagnétique,
- un facteur de qualité à vide.

En oscillation forcée (prise en compte de l'excitation), cette étude conduit à la détermination de la matrice de répartition (Scattering matrix) [S] traduisant la réponse fréquentielle du dispositif résonnant.

La contribution de ce travail à l'outil mentionné ci-dessus est la conception d'un logiciel à base de la méthode des éléments finis (MEF), capable d'analyser les caractéristiques électromagnétiques d'une grande famille de résonateurs diélectriques (cylindriques avec ou sans pertes, à épaulement, planaire, parallépipédique, ...) indépendamment de leurs formes et des propriétés des matériaux qui les constituent.

Ce travail se compose de quatre chapitres.

Dans le *premier chapitre*, nous présentons la méthode générale de calcul de la matrice de répartition d'une structure résonnante en oscillation forcée.

Dans le cas général, cette structure est une cavité métallique inhomogènement chargée de matériaux diélectriques et reliée au monde extérieur à travers plusieurs lignes de transmission (ou accès) servant à l'excitation et à la détection de l'énergie électromagnétique.

Le principe de calcul de la matrice de répartition d'une telle structure, consiste à résoudre les équations fondamentales reliant le champ électromagnétique, régnant dans le dispositif, aux densités de courants surfaciques imposées sur les plans de référence des différents accès.

Le *second chapitre* est consacré à la présentation de la méthode des éléments finis (en deux et trois dimensions) qui est une technique numérique rigoureuse dont le champ d'application ne cesse de s'élargir avec le développement des calculateurs puissants.

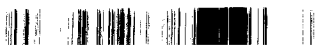
Nous étudions en particulier deux types d'éléments finis:

- l'élément fini de Lagrange d'utilisation, très répandue mais générant pour certains problèmes d'électromagnétisme des solutions non physiques dites parasites,
- l'élément fini mixte, permettant l'élimination radicale de ces solutions indésirables.

Le *troisième chapitre* est organisé de la manière suivante:

- nous discrétisons les équations fondamentales développées en *chapitre I*, traduisant le comportement des résonateurs passifs micro-ondes en oscillations libre et forcée;
- la génération des solutions parasites lors de l'utilisation de l'élément fini de Lagrange, sera élucidée;
- le logiciel en deux dimensions (**MEF-2D**) développé pour l'analyse des structures résonnantes cylindriques en oscillation libre, sera validé sur des cavités métalliques homogènes vides ou chargées de diélectriques sans pertes admettant des solutions analytiques exactes;
- afin de tenir compte des matériaux diélectriques réels, nous développons une méthode d'analyse des structures résonnantes cylindriques à faibles pertes;
- le logiciel (**MEF-3D**) mis au point pour l'analyse des dispositifs passifs ne présentant aucune symétrie, sera validé sur une cavité métallique parallélépipédique;
- l'analyse des structures résonnantes en oscillation forcée nécessite la détermination des densités de courants surfaciques électrique et magnétique sur les plans de référence des accès. Ces densités de courants sont déduites du champ électromagnétique guidé dans ces accès.

Par conséquent, nous analysons par la méthode des éléments finis le phénomène de propagation des ondes électromagnétique dans les différentes lignes de transmission



tels que la ligne coaxiale, la ligne micro-ruban, le guide d'onde métallique, le guide image, la fibre optique, etc...;

- enfin le calcul de la matrice de répartition de plusieurs structures simples, homogènes ou inhomogènes, à un ou plusieurs accès, sera établi.

Le *quatrième chapitre* sera consacré à l'application de ces logiciels, à l'étude des structures résonnantes de formes plus complexes fonctionnant dans la gamme des ondes millimétriques en vue de concevoir des filtres passifs à base d'une nouvelle génération de résonateurs diélectriques, en particulier:

- un filtre millimétrique à résonateur diélectrique parallélépipédique fonctionnant sur son mode fondamental TE,
- un filtre millimétrique à résonateur diélectrique planaire fonctionnant sur un mode supérieur du type "Whispering Gallery" (W.G.).

CHAPITRE I

**FORMULATION DE LA METHODE DE CALCUL  
DE LA MATRICE DE REPARTITION DES  
CIRCUITS PASSIFS MICRO-ONDES**



## CHAPITRE I

# FORMULATION DE LA METHODE DE CALCUL DE LA MATRICE DE REPARTITION DES CIRCUITS PASSIFS MICRO-ONDES

### INTRODUCTION

En basse fréquence, tout dispositif électronique est caractérisé par sa matrice impédance ou admittance liant les tensions et les courants. Dans le domaine des micro-ondes, la mesure des coefficients de réflexion et de transmission en puissance, au niveau des différents accès alimentant le dispositif à étudier, est plus facilement accessible que la mesure du courant et de la tension [9], [10].

Ces coefficients de réflexion et de transmission définissent les termes de la matrice de répartition dite "matrice [S]" du dispositif [11]. La détermination de cette matrice [S] permet par la suite la déduction de la matrice impédance et par conséquent le schéma électronique équivalent du composant.

Nous proposons dans ce chapitre d'établir une formulation générale permettant l'obtention de la matrice de répartition d'une structure passive, alimentée par des lignes de transmission, à partir de l'analyse du champ électromagnétique existant dans celle-ci.

### I.1. GEOMETRIE DU MILIEU ETUDIE

Le milieu considéré est un domaine  $\bar{\Omega}$  de volume  $V$ , de géométrie quelconque, composé de  $d$  milieux  $\bar{\Omega}_i$  de volume  $V_i$  ( $i \in [1, d]$ ). Ces milieux sont homogènes, isotropes, linéaires et sans pertes. L'interface entre deux milieux  $V_i$  et  $V_j$  ( $1 \leq i < j \leq d$ ) sera notée  $S_{ij}$ . Le domaine  $\bar{\Omega}$  (figure (I.1)) est borné par une surface  $S$  fermée, constituée de murs électriques de surface  $S_e$ , de  $q$  plans d'accès  $P_j$  de surfaces  $S_{pj}$  ( $j \in [1, d]$ ) court circuités ou soumis à des courants surfaciques magnétiques  $\vec{J}_{ms_{pj}}$  et électriques  $\vec{J}_{es_{pj}}$  et éventuellement par des murs magnétiques de surface  $S_m$ , rendant compte de symétries du dispositif.

Nous notons les normales à ces surfaces comme suit:

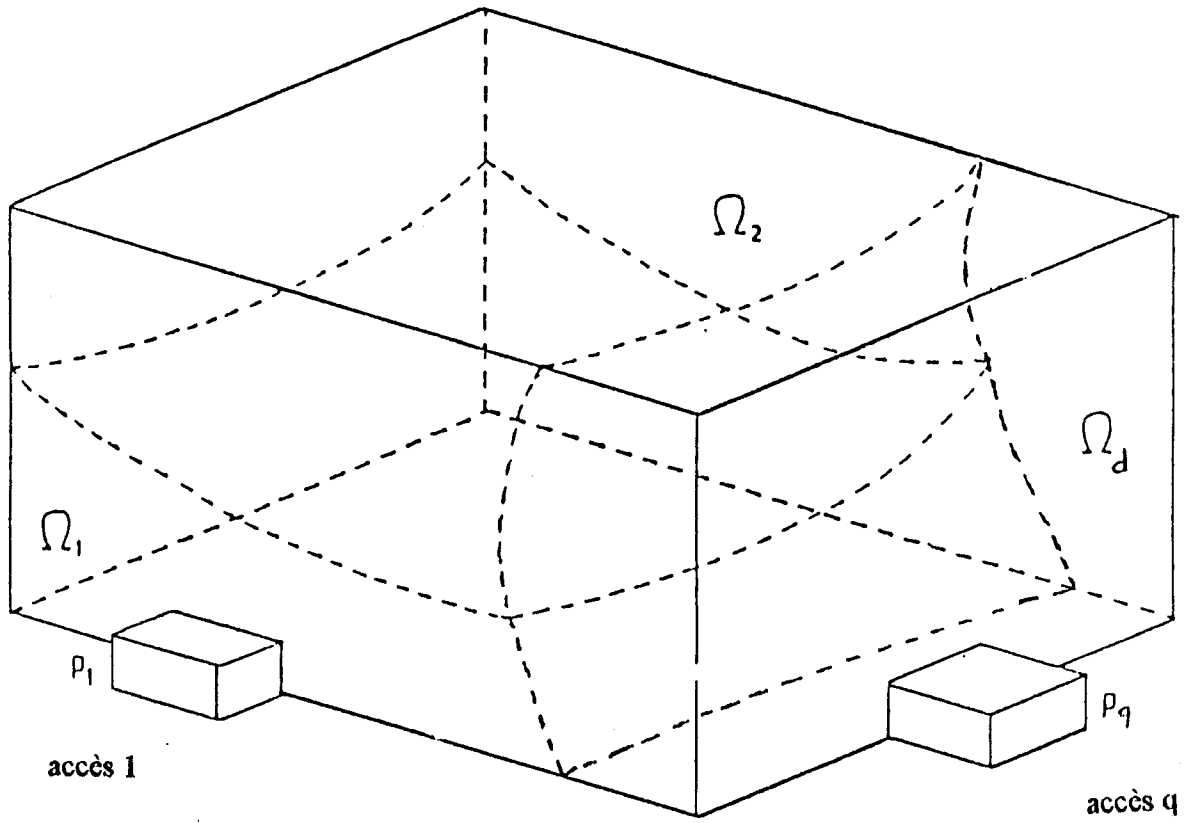
$\vec{n}_e$ : normale au mur électrique (C.C.E).

$\vec{n}_m$ : normale au mur magnétique (C.C.M).

$\vec{n}_p$ : normale au plan d'accès  $p$ .

Les murs électriques (C.C.E) et les murs magnétiques (C.C.M.) sont caractérisés par:

$$\text{C.C.E} \begin{cases} \vec{n}_e \times \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{n}_e \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}, \quad \text{C.C.M} \begin{cases} \vec{n}_m \times \vec{H} = \vec{0} \\ \vec{n}_m \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$



Structure 3D contenant d milieux  $\Omega_i$   
et ayant q accès physiques

figure I-1



Ces normales sont toutes orientées vers l'intérieur du dispositif. Nous définissons également  $\bar{n}_{ij}$  comme la normale à l'interface  $S_{ij}$  orientée du milieu  $j$  vers le milieu  $i$ , ce qui permet d'écrire  $\bar{n}_{ij} = -\bar{n}_{ji}$ . Si les plans d'accès sont court-circuités, on dit que la structure est en oscillation libre. Dans le cas contraire, elle est en oscillation forcée, ce qui permet de caractériser le dispositif étudié par sa matrice  $[S]$ .

Suivant la fréquence de travail, un ou plusieurs modes peuvent se propager dans un accès électrique. nous supposons dans la suite que nous disposons de  $N_p$  accès électriques; le nombre d'accès physiques  $q$  étant inférieur ou égal à  $N_p$ .

Le calcul par la méthode des éléments finis est toujours effectué sur la plus petite section possible de la structure, pour diminuer la taille du système numérique à résoudre. Il est donc important d'exploiter au mieux les plans de symétrie géométrique (s'ils existent) de la structure et la périodicité du champ électromagnétique, pour limiter le domaine d'étude. Par conséquent, les structures possédant une section constante suivant un axe (cas des lignes de transmission) ou suivant une direction azimutale (cas des structures cylindriques), contiennent des champs électromagnétiques périodiques selon ces axes ou direction (figures (I.2) et (I.3)).

## I.2. FORMULATION ELECTROMAGNETIQUE

Nous utilisons par la suite, un repère cartésien étant entendu que les relations obtenues sont valables quelque soit le repère orthonormé considéré.

### I.2.1. CHAMP ELECTROMAGNETIQUE ET DISTRIBUTION SURFACIQUE [12], [13]

Le champ électromagnétique est défini par des distributions sur  $\mathcal{R}^4(x,y,z,t)$  [Annexe I]. Il est rendu indépendant du temps  $t$  par décomposition en série de Fourier (périodicité) ou transformation de Fourier (durée limitée dans le temps  $t$ ).

Les grandeurs caractérisant ce champ sont décrites dans  $\mathcal{R}^3$  par:

$\vec{E}(x,y,z)$ : distribution du champ électrique,

$\vec{H}(x,y,z)$ : distribution du champ magnétique,

$\vec{D}(x,y,z)$ : distribution de l'induction électrique,

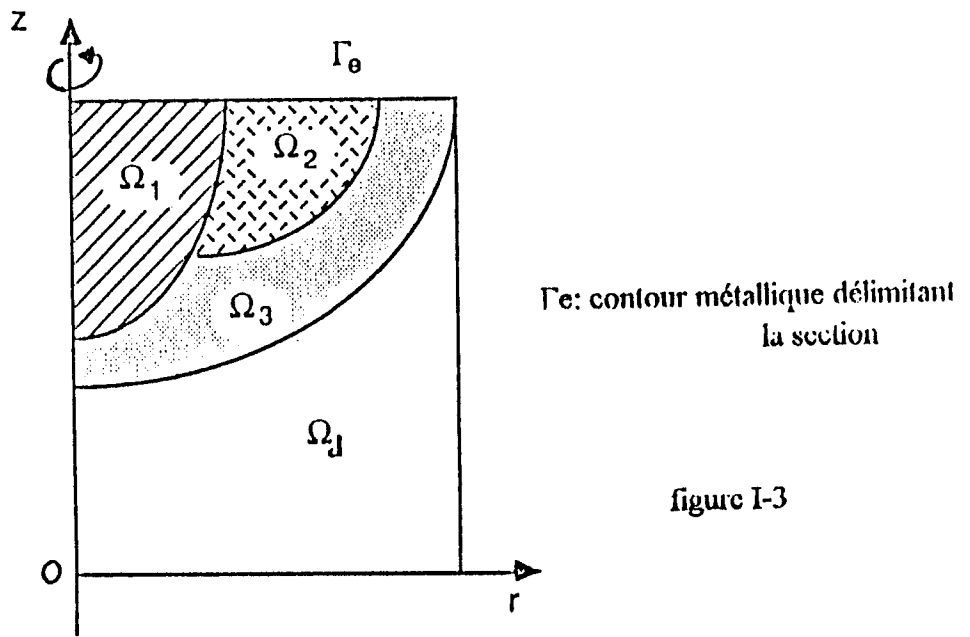
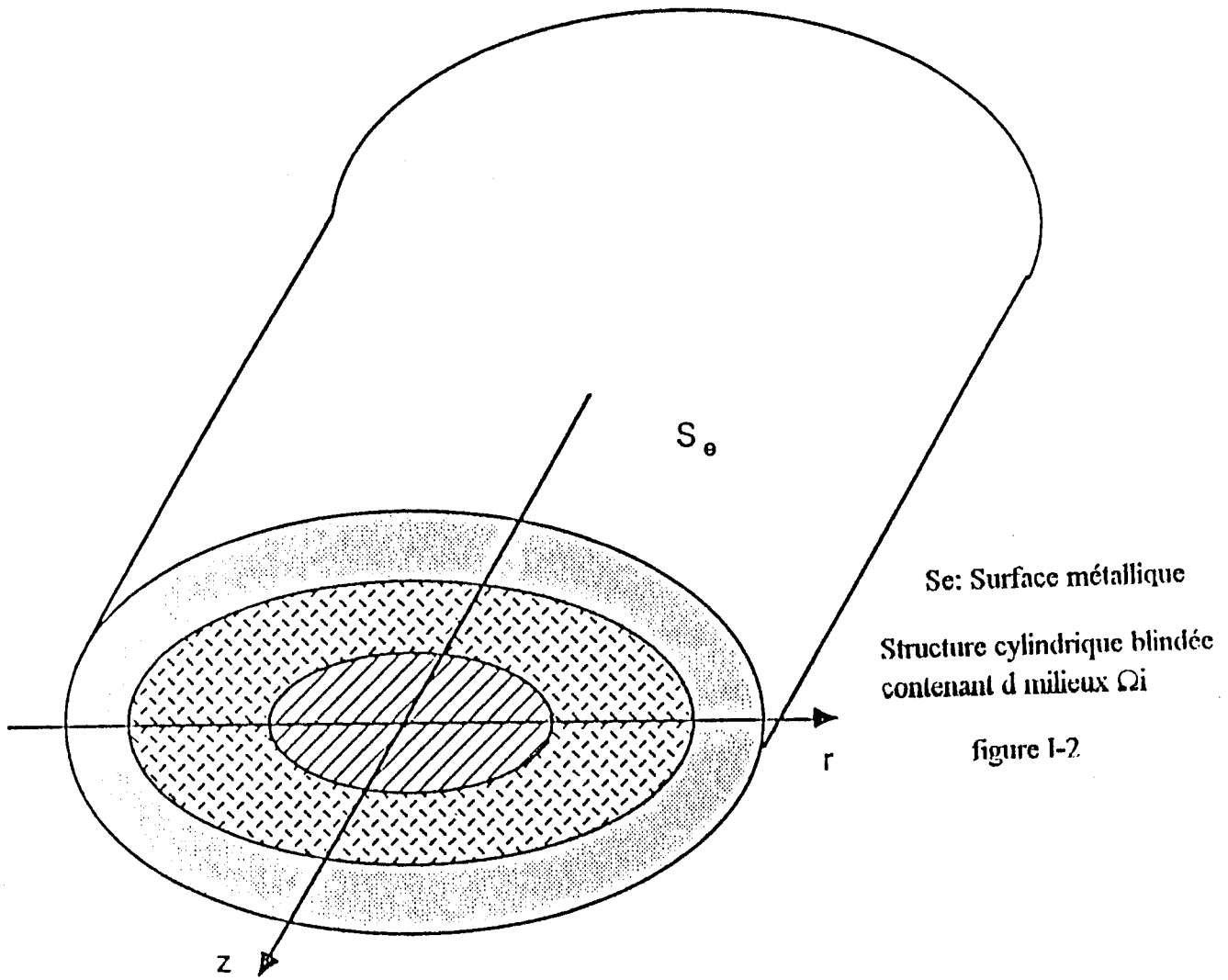
$\vec{B}(x,y,z)$ : distribution de l'induction magnétique,

$\vec{J}_e(x,y,z)$ : distribution de la densité de courant électrique,

$\rho_e(x,y,z)$ : distribution de la densité de charge électrique.

Ces grandeurs sont reliées entre elles à travers les équations de Maxwell. Le développement de ces dernières au sens des distributions conduit à supposer l'existence de densités surfaciques de charges et de courants sur l'ensemble des surfaces précédemment définies. Il est possible de distinguer deux types de charges et de courants surfaciques; les charges et les courants respectivement induits et imposés. Ces grandeurs seront dites induites sur une surface s'il existe un champ électromagnétique près de celle-ci; la détermination des





Section droite d'une structure à symétrie  
de révolution contenant d milieux  $\Omega_i$



charges et des courants se faisant à partir de ce champ. Par contre, si le champ électromagnétique se déduit des charges et des courants, nous parlerons de grandeurs imposées.

Les charges et les courants électriques et magnétiques surfaciques dont nous tenons compte sur les murs électriques et magnétiques sont induits par le champ électromagnétique régnant dans le dispositif.

Les charges et les courants surfaciques sur les plans d'accès seront eux imposés, puisqu'ils traduisent l'excitation du dispositif.

D'où la présence des distributions surfaciques suivantes:

- $\rho_{es_e} \delta S_e, \bar{J}_{es_e} \delta S_e$ : charges et courants électriques de support  $S_e$  (mur électrique),  
 $\rho_{ms_m} \delta S_m, \bar{J}_{ms_m} \delta S_m$ : charges et courants magnétiques de support  $S_m$  (mur magnétique),  
 $\rho_{es_p} \delta S_p, \bar{J}_{es_p} \delta S_p$ : charges et courants électriques sur les plans d'accès  $p$  ( $p \in [1, Np]$ ),  
 $\rho_{ms_p} \delta S_p, \bar{J}_{ms_p} \delta S_p$ : charges et courants magnétiques sur les plans d'accès  $p$  ( $p \in [1, Np]$ ),  
 $\rho_{es_{ij}} \delta S_{ij}, \rho_{ms_{ij}} \delta S_{ij}$ : charges électriques et magnétiques sur la surface  $S_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq d$ ).

### 1.2.2. EQUATIONS DE MAXWELL

Les quatre équations de Maxwell, sous leurs formes générales, sont décrites par le système suivant:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(x, y, z) = -\bar{J}_{ms_m} \delta S_m - j\omega \vec{B}(x, y, z) - \sum_{p=1}^{Np} \bar{J}_{ms_p} \delta S_p \quad (I.1)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H}(x, y, z) = \bar{J}_{es_e} \delta S_e + \bar{J}_e(x, y, z) + j\omega \vec{D}(x, y, z) + \sum_{p=1}^{Np} \bar{J}_{es_p} \delta S_p \quad (I.2)$$

$$\text{div} \vec{B}(x, y, z) = \rho_{ms_m} \delta S_m + \sum_{p=1}^{Np} \rho_{ms_p} \delta S_p + \sum_{1 \leq i < j \leq d} \rho_{ms_{ij}} \delta S_{ij} \quad (I.3)$$

$$\text{div} \vec{D}(x, y, z) = \rho_e(x, y, z) + \rho_{es_e} \delta S_e + \sum_{p=1}^{Np} \rho_{es_p} \delta S_p + \sum_{1 \leq i < j \leq d} \rho_{es_{ij}} \delta S_{ij} \quad (I.4)$$

Les opérateurs  $\vec{\text{rot}}$  et  $\text{div}$  sont ici appliqués à des distributions.

Le développement de ces opérateurs [Annexe 1] conduit à des équations simplifiées et à des conditions aux limites imposées.

Ainsi, nous obtenons de l'équation (I.1) la relation (I.5).

$$\begin{aligned} & \left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \vec{E}(x, y, z) + \sum_{1 \leq i < j \leq d} (\vec{n}_{ij} \times \vec{E}_i(x, y, z) + \vec{n}_{ji} \times \vec{E}_j(x, y, z)) \delta S_{ij} \\ & + (\vec{n}_e \times \vec{E}(x, y, z)) \delta S_e + (\vec{n}_m \times \vec{E}(x, y, z)) \delta S_m + \sum_{p=1}^{N_p} (\vec{n}_p \times \vec{E}(x, y, z)) \delta S_p \quad (I.5) \\ & = -\vec{J}_{ms_m} \delta S_m - j\omega \vec{B}(x, y, z) - \sum_{p=1}^{N_p} \vec{J}_{ms_p} \delta S_p \end{aligned}$$

L'opérateur  $\left\{ \vec{\text{rot}} \right\}$  est l'opérateur rotationnel appliqué à une fonction.

L'étude des conditions aux limites nous permet d'écrire:

$$(\vec{n}_e \times \vec{E}) = \vec{0} \quad \text{sur } S_e \quad (I-6)$$

$$(\vec{n}_m \times \vec{E}) = -\vec{J}_{ms_m} \quad \text{sur } S_m \quad (I-7)$$

$$(\vec{n}_p \times \vec{E}) = -\vec{J}_{ms_p} \quad \text{sur } S_p ; (p \in [1, N_p]) \quad (I-8)$$

Ces conditions aux limites sont dites "naturelles".

Les composantes tangentielles du champ électrique étant continues sur l'interface  $S_{ij}$  entre deux milieux ; alors on a:

$$(\vec{n}_{ij} \times \vec{E}_i + \vec{n}_{ji} \times \vec{E}_j) = \vec{0} \quad \text{sur } S_{ij} \quad (I.9)$$

Ces conditions étant vérifiées, nous pouvons écrire finalement:

$$\left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad \text{sur } V_i \quad (I.10)$$

En appliquant un raisonnement identique à l'équation (I.2), nous obtenons:

$$(\vec{n}_m \times \vec{H}) = \vec{0} \quad \text{sur } S_m \quad (I.11)$$

$$(\vec{n}_e \times \vec{H}) = \vec{J}_{es_e} \quad \text{sur } S_e \quad (I.12)$$

$$(\vec{n}_p \times \vec{H}) = \vec{J}_{es_p} \quad \text{sur } S_p, (p \in [1, N_p]) \quad (I.13)$$

$$(\vec{n}_{ij} \times \vec{H}_i + \vec{n}_{ji} \times \vec{H}_j) = \vec{0} \quad \text{sur } S_{ij} \quad (I.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \end{array} \right\} \vec{H} = \vec{J}_e + j\omega \vec{D} \quad \text{sur } V_i \quad (\text{I.15})$$

De même, le développement des équations (I.3) et (I.4) conduit aux relations suivantes, où l'opérateur {div} est associé à des fonctions.

$$\vec{n}_m \cdot \vec{B} = \rho_{ms_m} \quad \text{sur } S_m \quad (\text{I.16})$$

$$\vec{n}_e \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{sur } S_e \quad (\text{I.17})$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{B} = \rho_{ms_p} \quad \text{sur } S_p; (p \in [1, Np]) \quad (\text{I.18})$$

$$\vec{n}_{ij} \cdot \vec{B}_i + \vec{n}_{ji} \cdot \vec{B}_j = \rho_{ms_{ij}} \quad \text{sur } S_{ij} \quad (\text{I.19})$$

$$\{\text{div}\} \vec{B} = 0 \quad \text{sur } V_i \quad (\text{I.20})$$

$$\vec{n}_e \cdot \vec{D} = \rho_{es_e} \quad \text{sur } S_e \quad (\text{I.21})$$

$$\vec{n}_m \cdot \vec{D} = 0 \quad \text{sur } S_m \quad (\text{I.22})$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{D} = \rho_{es_p} \quad \text{sur } S_p; (p \in [1, Np]) \quad (\text{I.23})$$

$$\vec{n}_{ij} \cdot \vec{D}_i + \vec{n}_{ji} \cdot \vec{D}_j = \rho_{es_{ij}} \quad \text{sur } S_{ij} \quad (\text{I.24})$$

$$\{\text{div}\} \vec{D} = \rho_e \quad \text{sur } V_i \quad (\text{I.25})$$

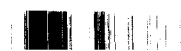
### 1.2.3. MISE EN EQUATION DU PROBLEME

Le dispositif à étudier étant composé de milieux linéaires, isotropes, homogènes, sans charges et sans courants, nous pouvons écrire:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{J}_e = \vec{0}$$



$$\rho_e = 0$$

$\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité absolues.

$\epsilon_r$  et  $\mu_r$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité relatives du milieu  $V_i$ .

En partant des équations (I.6) à (I.15), nous allons montré dans la suite qu'il est possible d'obtenir deux systèmes d'équations équivalents, l'un en champ électrique et l'autre en champ magnétique.

#### a. FORMULATION EN CHAMP ELECTRIQUE

L'équation (I.10) provenant du développement de (I.1), permet d'exprimer  $\vec{H}$  en fonction de  $\vec{E}$ .

soit:

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega \mu_0 \mu_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{E} \quad (I.26)$$

Les équations (I.6) à (I.9) imposent respectivement:

- Les continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  à la traversée des interfaces  $S_{ij}$ :

$$(\vec{n}_{ij} \times \vec{E}_i + \vec{n}_{ji} \times \vec{E}_j) = \vec{0} \quad \text{sur } S_{ij}$$

- Un champ électrique purement normal aux murs électriques  $S_e$ :

$$(\vec{n}_e \times \vec{E}) = \vec{0} \quad \text{sur } S_e$$

- L'expression des courants magnétiques sur les murs magnétiques  $S_m$ .

$$(\vec{n}_m \times \vec{E}) = \vec{J}_{ms_m} \quad \text{sur } S_m$$

- L'expression des courants magnétiques  $\vec{J}_{ms_p}$  sur le plan d'accès p de surface  $S_p$ :

$$(\vec{n}_p \times \vec{E}) = -\vec{J}_{ms_p} \quad \text{sur } S_p; \quad (p \in [1, N_p])$$

Avec l'hypothèse  $\vec{J}_e = \vec{0}$ , l'équation (I.2) s'écrit:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{es_e} \delta S_e + j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} + \sum_{p=1}^{N_p} \vec{J}_{es_p} \delta S_p \quad (I.27)$$



Le terme relatif à la densité de courant  $\vec{J}_{es_e}$  peut être annulé par le choix d'une fonction test  $\vec{\phi}_e$  orthogonale aux murs électriques  $S_e$ . Ainsi pour toute fonction test  $\vec{\phi}_e(x, y, z)$  appartenant à  $(D(\mathcal{R}^3))^3$ , telle que  $(\vec{n}_e \times \vec{\phi}_e) = \vec{0}$  sur  $S_e$ ; on a:

$$\langle \vec{J}_{es_e} \delta S_e, \vec{\phi}_e \rangle = 0 \quad (I.28)$$

La formulation en champ électrique se traduit finalement par le système (I.29):

$$\forall \vec{\phi}_e \in (D(\mathcal{R}^3))^3 ; (\vec{n}_e \times \vec{\phi}_e) = \vec{0} \quad \text{sur } S_e$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{rot} \left( \frac{1}{\mu_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{E} \right), \vec{\phi}_e \rangle - k_0^2 \langle \epsilon_r \vec{E}, \vec{\phi}_e \rangle = -j\omega\mu_0 \sum_{p=1}^{N_p} \langle \vec{J}_{es_p} \delta S_p, \vec{\phi}_e \rangle \end{array} \right. \quad (I.29.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{n}_p \times \vec{E}) = -\vec{J}_{ms_p} \quad \text{sur } S_p \end{array} \right. \quad (I.29.b)$$

$$k_0^2 = \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0$$

#### b. FORMULATION EN CHAMP MAGNETIQUE

L'équation (I.15) en tenant compte que  $\vec{J}_e = \vec{0}$ , se traduit par:

$$\left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{j}{\omega\epsilon_0\epsilon_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \quad (I.30)$$

En considérant les équations (I.11) à (I.14) vérifiées par le champ magnétique  $\vec{H}$ , nous obtenons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\vec{J}_{ms_m} \delta S_m - j\omega\mu_0\mu_r \vec{H} - \sum_{p=1}^{N_p} \vec{J}_{ms_p} \delta S_p \end{array} \right. \quad (I.31.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{n}_p \times \vec{H}) \delta S_p = \vec{J}_{es_p} \delta S_p ; \quad \forall p \in [1, N_p] \end{array} \right. \quad (I.31.b)$$

De même, le choix de fonctions test  $\vec{\phi}_m$  normales au mur magnétique  $S_m$ , permet d'annuler le terme relatif à la densité de courants magnétiques.

Soit:

$$\forall \vec{\phi}_m \in (D(\mathcal{R}^3))^3 \quad \text{telles que } (\vec{n}_m \times \vec{\phi}_m) = \vec{0}; \quad \langle \vec{J}_{ms_m} \delta S_m, \vec{\phi}_m \rangle = 0$$

Nous obtenons finalement sous ces conditions:

$$\forall \vec{\phi}_m \in (D(\mathcal{R}^3))^3, (\vec{n}_m \times \vec{\phi}_m) = \vec{0};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{rot} \left( \frac{1}{\epsilon_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \right), \vec{\phi}_m \rangle - k_0^2 \langle \mu_r \vec{H}, \vec{\phi}_m \rangle = -j\omega\epsilon_0 \sum_{p=1}^{Np} \langle \vec{J}_{ms_p} \delta S_p, \vec{\phi}_m \rangle \end{array} \right. \quad (\text{I.32.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{n}_p \times \vec{H}) = +\vec{J}_{es_p} \quad \text{sur } S_p \end{array} \right. \quad (\text{I.32.b})$$

$$k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

**REMARQUES:**

- Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs définis dans un volume  $V$ , on note alors :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \iiint_V \vec{u} \cdot \vec{v} \, dV$$

- Si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont définis sur une surface  $S$ , alors:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \iint_S \vec{u} \cdot \vec{v} \, dS$$

**c. DUALITE DES DEUX FORMULATIONS**

L'observation des deux systèmes (I.29) et (I.32); montre l'équivalence des formulations en champ électrique et magnétique.

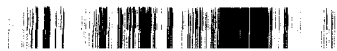
Celles-ci peuvent en effet s'écrire sous la forme générale (I.33).

$$\forall \vec{\phi}_f \in (D(\mathcal{R}^3))^3, (\vec{n}_f \times \vec{\phi}_f) = \vec{0} \quad \text{sur } S_f$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{rot} \left( \frac{1}{a_f} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{F} \right), \vec{\phi}_f \rangle - k_0^2 \langle b_f \vec{F}, \vec{\phi}_f \rangle = -j\omega c_f \sum_{p=1}^{Np} \langle \vec{J}_{fs_p} \delta S_p, \vec{\phi}_f \rangle \\ \vec{n}_p \times \vec{F} = \vec{J}_{fs_p} ; \forall p \in [1, Np] \end{array} \right. \quad (\text{I.33})$$

Le vecteur  $\vec{F}$  vérifie également les deux relations suivantes:

$$(\vec{n}_{ij} \times \vec{F}_i + \vec{n}_{ji} \times \vec{F}_j) = \vec{0} \quad \text{sur } S_{ij}$$



•  $\vec{n}_f \times \vec{F} = \vec{0}$  sur  $S_f$

La signification des grandeurs scalaires et vectorielles du système (I.33) est donnée sur le tableau (I-1):

TABLEAU (I-1)

Grandeurs	Formulation en champ	
	Electrique	Magnétique
$\vec{F}$	$\vec{E}$	$\vec{H}$
$\vec{\phi}_f$	$\vec{\phi}_e$	$\vec{\phi}_m$
$\vec{n}_f$	$\vec{n}_e$	$\vec{n}_m$
$\vec{J}_{fs_p}$	$\vec{J}_{es_p}$	$\vec{J}_{ms_p}$
$\vec{J}'_{f's_p}$	$\vec{J}_{ms_p}$	$\vec{J}_{es_p}$
$a_f$	$\mu_r$	$\epsilon_r$
$b_f$	$\epsilon_r$	$\mu_r$
$c_f$	$\mu_0$	$\epsilon_0$
$s_f$	$s_e$	$s_m$

Les deux formulations définies précédemment permettent la résolution du même problème. Le choix de l'une des formulations repose sur la réduction du nombre de conditions aux limites à imposer.

En effet, la formulation en champ magnétique est plus appropriée à l'étude des structures inhomogènes en  $\epsilon_r$  ( $\mu_r$  étant une constante), puisque dans ces milieux, toutes les composantes du champ magnétique sont continues sur l'interface  $S_{ij}$ , alors que la composante normale du champ électrique ne l'est pas.

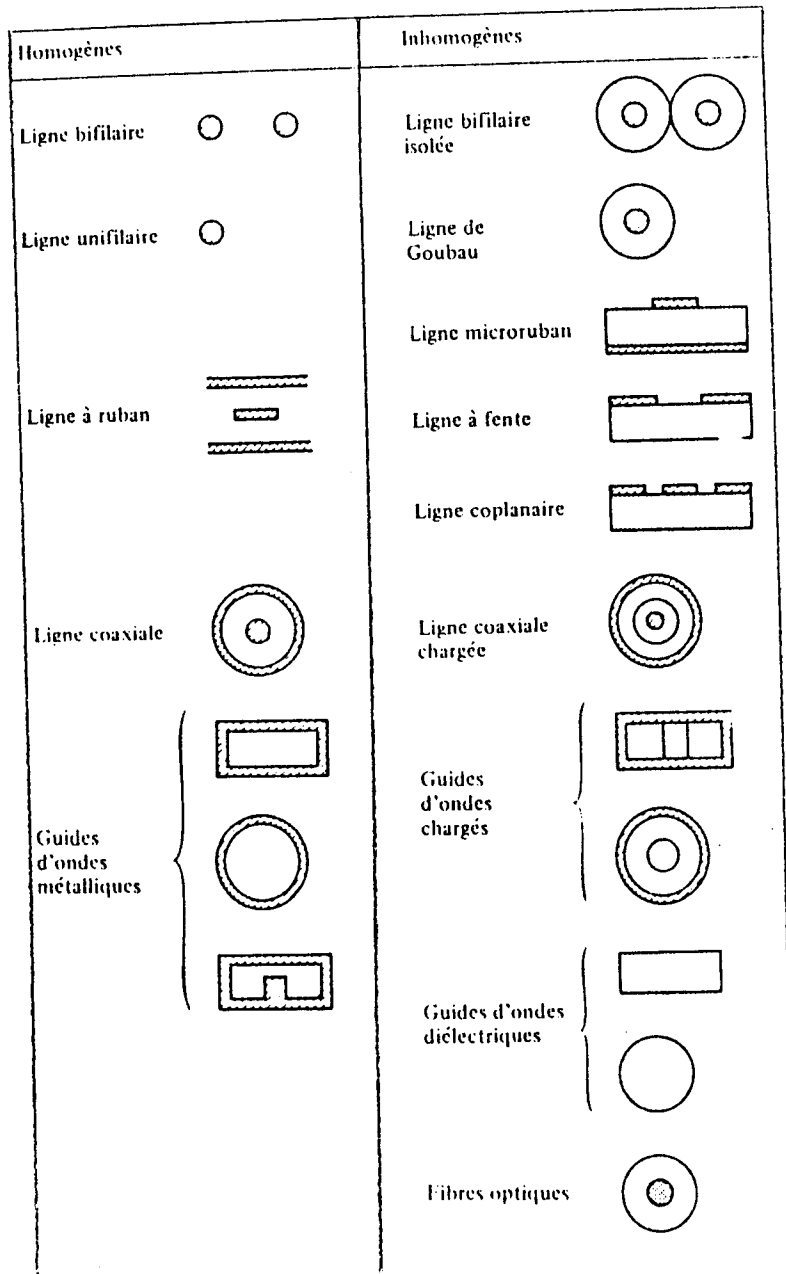
### I.3. CALCUL DES COURANTS SURFACIQUES SUR LES PLANS D'ACCES

Dans le cadre de l'étude présentée, le dispositif micro-ondes à caractériser peut être alimenté par différentes lignes de transmission telles que les lignes coaxiales, les lignes microrubans et les guides d'ondes métalliques vides ou chargés de diélectriques. Une grande variété de ces lignes est présentée par la figure (I.4).

L'excitation est provoquée par les modes susceptibles de se propager dans ces structures. Nous considérons alors dans chaque type d'accès les modes suivants:







Sections transversales des principales lignes de transmission et des guides d'ondes

figure I-4



- Dans une ligne coaxiale:
  - mode TEM (Transverse électromagnétique)
  - mode TE (Transverse électrique)
  - mode TM (Transverse magnétique)
- Dans une ligne micro-ruban:
  - mode quasi-TEM
- Dans un guide d'ondes:
  - mode TE
  - mode TM
  - mode HEM (Hybride électromagnétique)

Nous allons développer pour ces divers types d'excitation, l'expression des courants surfaciques  $\vec{J}_{ms_p}$  et  $\vec{J}_{es_p}$  sur les plans d'accès.

### I.3.1. NOTIONS DE REPERE LOCAL

Les  $N_p$  accès électriques excitant le système étant disposés de manière quelconque dans le repère  $(x,y,z)$  de base orthonormée  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  du dispositif à étudier (figure (I.1)), on associe alors à chaque accès  $p$  un repère local  $(x',y',z')$  de base  $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$  dans lequel les courants sont plus facilement calculables. Nous présentons sur les figures (I.5.a) et (I.5.b) un plan d'accès disposé dans ces repères tel que  $\vec{u}'_z$  lui soit normal.

Les expressions des courants électrique  $\vec{J}_{es_p}$  et magnétique  $\vec{J}_{ms_p}$  dans le repère  $(x,y,z)$  sont obtenues par simple transformation du repère  $(x',y',z')$ . Le choix d'un point  $O'(x_0, y_0, z_0)$  origine du repère local et d'un vecteur de la base locale  $\vec{u}'_x(u_{x_1}, u_{y_1}, u_{z_1})$  par exemple, permet la détermination de cette de transformation.

En effet, soit  $A'$  un point de ce plan tel que  $\vec{O}'A' \times \vec{u}'_x \neq \vec{0}$ ; alors la normale au plan de surface  $S_p$ , notée  $\vec{u}'_z(u'_{x_3}, u'_{y_3}, u'_{z_3})$  est donnée par:

$$\vec{u}'_z = \vec{u}'_x \times \frac{\vec{O}'A'}{\|\vec{O}'A'\|} = \vec{n}_p$$

Le vecteur  $\vec{u}'_y(u'_{x_2}, u'_{y_2}, u'_{z_2})$  est déduit de  $\vec{u}'_x$  et de  $\vec{u}'_z$  en utilisant la relation:

$$\vec{u}'_y = \vec{u}'_z \times \vec{u}'_x.$$

Les paramètres  $u_{x_i}, u_{y_i}$  et  $u_{z_i}$  pour  $i$  variant de 1 à 3, permettent de définir la transformation de la base  $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$  à la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

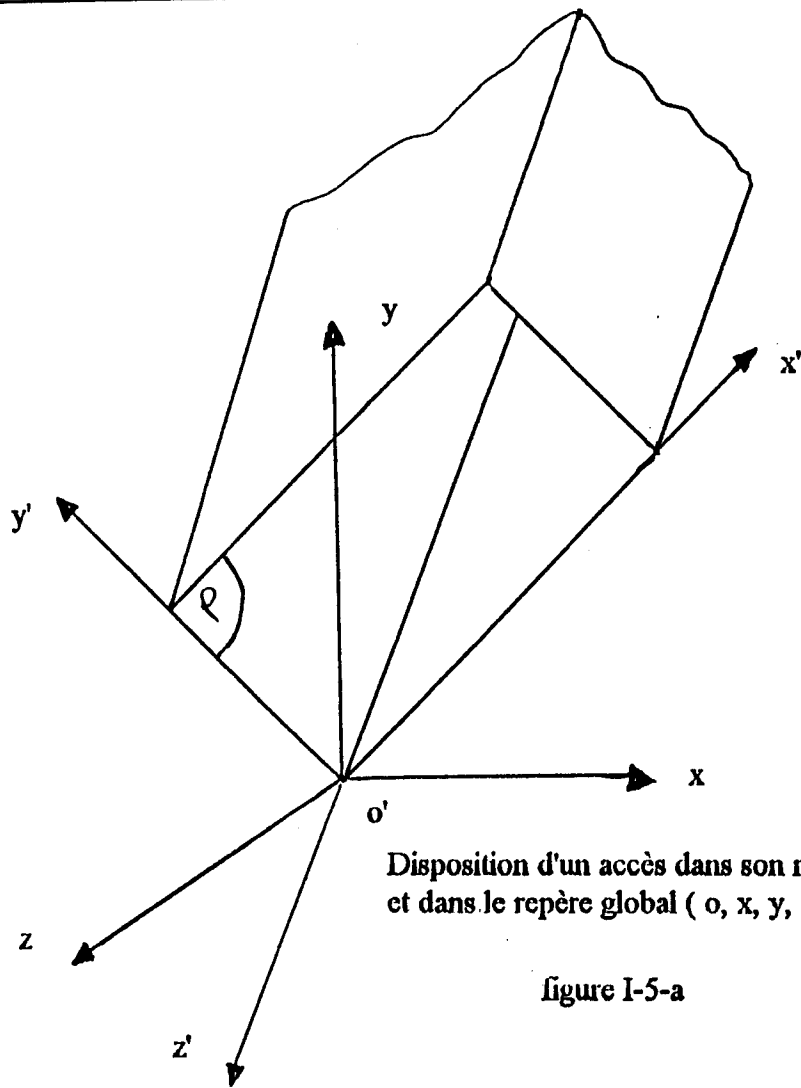


figure I-5-a

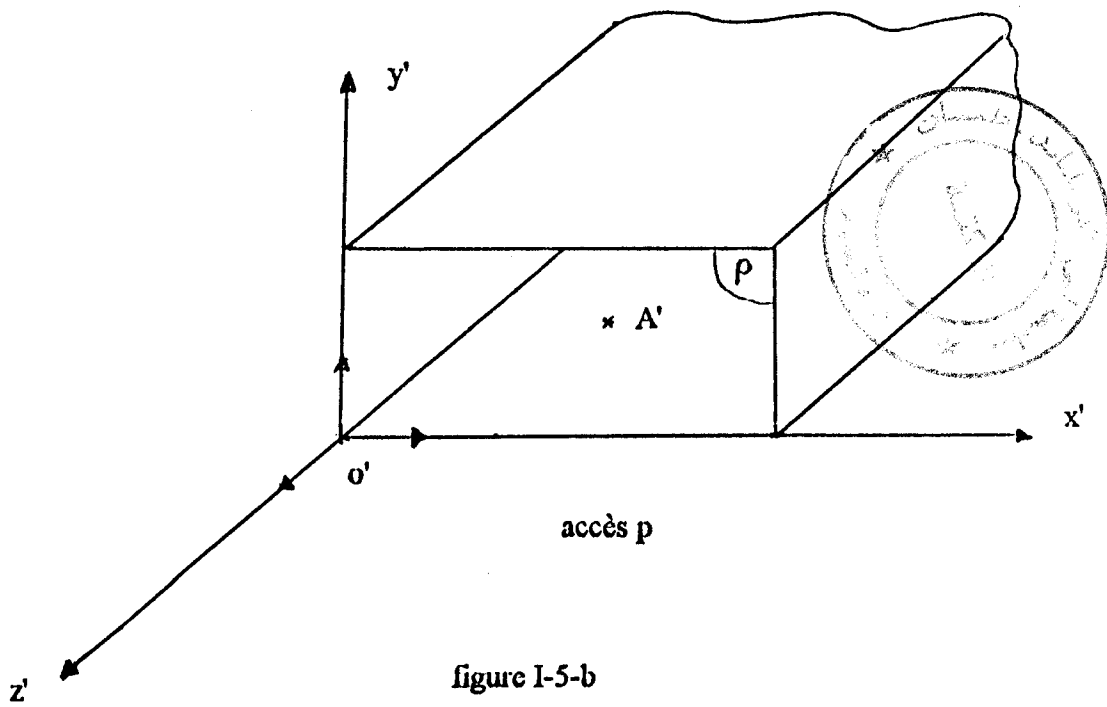


figure I-5-b



$$\text{soit } \begin{cases} \bar{u}'_x = u_{x_1} \bar{u}_x + u_{y_1} \bar{u}_y + u_{z_1} \bar{u}_z \\ \bar{u}'_y = u_{x_2} \bar{u}_x + u_{y_2} \bar{u}_y + u_{z_2} \bar{u}_z \\ \bar{u}'_z = u_{x_3} \bar{u}_x + u_{y_3} \bar{u}_y + u_{z_3} \bar{u}_z \end{cases}$$

### I.3.2. CHAMP ELECTROMAGNETIQUE SUR LES PLANS D'ACCES

Les plans d'accès sont choisis comme plan de référence pour les ondes transmises et réfléchies de chaque mode d'excitation. Les coefficients de réflexion et de transmission sont donc évalués sur ces plans.

Pour un mode se propageant dans la ligne, nous allons faire apparaître ces coefficients en décomposant le champ électromagnétique en une onde incidente ( $\bar{E}^+, \bar{H}^+$ ) et une onde réfléchie ( $\bar{E}^-, \bar{H}^-$ ).

$$\text{Soient: } \begin{cases} \bar{E}(x', y', z') = \bar{E}^+(x', y', z') + \bar{E}^-(x', y', z') \\ \bar{H}(x', y', z') = \bar{H}^+(x', y', z') + \bar{H}^-(x', y', z') \end{cases}$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} \bar{E}^+ = A\bar{E}_t(x', y')e^{-j\beta z'} + AE_z(x', y')\bar{u}'_z e^{-j\beta z'} \\ \bar{E}^- = B\bar{E}_t(x', y')e^{+j\beta z'} - BE_z(x', y')\bar{u}'_z e^{+j\beta z'} \\ \bar{H}^+ = A\bar{H}_t(x', y')e^{-j\beta z'} + AH_z(x', y')\bar{u}'_z e^{-j\beta z'} \\ \bar{H}^- = -B\bar{H}_t(x', y')e^{+j\beta z'} + BH_z(x', y')\bar{u}'_z e^{+j\beta z'} \end{cases}$$

$\bar{E}_t$  et  $\bar{H}_t$  sont les composantes transversales normalisées du champ magnétique, de telle sorte que la puissance transportée dans le système d'excitation soit égale à 1 Watt.  
 $\beta$  est la constante de propagation longitudinale de l'onde selon  $\bar{u}'_z$ .

Notons  $a = Ae^{-j\beta z'}$  et  $b = Be^{+j\beta z'}$  représentant respectivement les coefficients en amplitudes de l'onde transmise et de l'onde réfléchie.

Le champ électromagnétique d'un mode donné, s'écrit alors dans le plan d'excitation:

$$\begin{cases} \bar{E}(x', y', z') = (a + b)\bar{E}_t(x', y') + (a - b)E_z(x', y')\bar{u}'_z \\ \bar{H}(x', y', z') = (a - b)\bar{H}_t(x', y') + (a + b)H_z(x', y')\bar{u}'_z \end{cases}$$



Sur un plan d'accès  $p$  de surface  $S_p$  et ayant une normale  $\vec{n}_p = \vec{u}'_z$ , les courants surfaciques relatives à un mode de propagation s'expriment par le système (I.34).

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{J}_{ms_p} \delta S_p &= -(\vec{n}_p \times \vec{E}) \delta S_p = -(a_p + b_p)(\vec{n}_p \times \vec{E}_t) \delta S_p \\ &= \frac{j}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} (a_p + b_p) \left( \left\{ \vec{\text{grad}} \right\}_t H_z + j\beta \vec{H}_t \right) \delta S_p \end{aligned} \right. \quad (\text{I.34.a})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{J}_{es_p} \delta S_p &= -(\vec{n}_p \times \vec{H}) \delta S_p = (a_p - b_p)(\vec{n}_p \times \vec{H}_t) \delta S_p \\ &= -\frac{j}{\omega \mu_0 \mu_r} (a_p - b_p) \left( \left\{ \vec{\text{grad}} \right\}_t E_z + j\beta \vec{E}_t \right) \delta S_p \end{aligned} \right. \quad (\text{I.34.b})$$

$\left\{ \vec{\text{grad}} \right\}_t$  étant l'opérateur gradient transverse associé à une fonction, est décrit sur la surface  $S_p$  du plan  $p$ .

Le système (I.34) s'écrit encore:

$$\forall p \in [1, N_p];$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{J}_{ms_p} \delta S_p &= (a_p + b_p) \vec{J}'_{ms_p} \delta S_p = (a_p + b_p)(-\vec{n}_p \times \vec{E}_t) \delta S_p \\ \vec{J}_{es_p} \delta S_p &= (a_p - b_p) \vec{J}'_{es_p} \delta S_p = (a_p - b_p)(\vec{n}_p \times \vec{H}_t) \delta S_p \end{aligned} \right. \quad (\text{I.35.a})$$

$$(\text{I.35.b})$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{J}'_{ms_p} \delta S_p &= -(\vec{n}_p \times \vec{E}_t) \delta S_p \\ \vec{J}'_{es_p} \delta S_p &= (\vec{n}_p \times \vec{H}_t) \delta S_p \end{aligned} \right.$$

Nous avons donc au préalable, à calculer le champ électromagnétique transverse  $(\vec{E}_t, \vec{H}_t)$  au plan d'accès  $p$ , pour pouvoir déterminer les densités des courants électriques  $\vec{J}'_{es_p}$

et magnétique  $\vec{J}'_{ms_p}$  sur ce plan. Le calcul de  $\vec{E}_t$  et de  $\vec{H}_t$  sur la section droite d'une ligne de transmission sera accompli dans le *chapitre III*.

#### I.4. CALCUL DES TERMES DE LA MATRICE DE REPARTITION [S]

Nous présentons ici, le calcul de la matrice [S], à partir de la formulation en champ magnétique. Le traitement de cette matrice à partir d'une formulation en champ électrique reste identique. Le système d'équation (I.22) caractérisant la formulation du problème en champ magnétique, se traduit en explicitant les seconds membres comme combinaisons linéaires de courants imposés, par:

$$\forall \vec{\phi}_m \in (D(\mathcal{R}^3))^3, \quad \vec{n}_m \times \vec{\phi}_m = \vec{0} \quad \text{sur } S_m$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{rot} \left( \frac{1}{\epsilon_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \right), \vec{\phi}_m \rangle - k_0^2 \langle \mu_r \vec{H}, \vec{\phi}_m \rangle = \sum_{p=1}^{N_p} (a_p + b_p) \langle -j\omega\epsilon_0 \vec{J}'_{ms_p} \delta S_p, \vec{\phi}_m \rangle \end{array} \right. \quad (\text{I.36.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{n}_p \times \vec{H}) \delta S_p = (a_p - b_p) \vec{J}'_{es_p} \delta S_p; \quad \forall p \in [1, N_p] \end{array} \right. \quad (\text{I.36.b})$$

La fréquence étant imposée, les variables inconnues du système (I.36) sont les ondes  $a_p$  et  $b_p$  et le vecteur  $\{\vec{H}\}$ .

Nous utilisons la méthode de substitution pour résoudre ce système. Soit  $\vec{\Psi}_p$  une solution de (I.36.a) avec seulement  $(-j\omega\epsilon_0 \vec{J}'_{ms_p})$  au second membre. Le champ magnétique  $\vec{H}$ , solution de l'équation (I.36.a), est la combinaison linéaire de ces solutions  $\vec{\Psi}_p$ .

$$\text{Soit} \quad \vec{H} = \sum_{p=1}^{N_p} (a_p + b_p) \vec{\Psi}_p \quad (\text{I.37})$$

Nous déduisons ensuite le champ magnétique  $\vec{H}_{/s_p}$  relatif à un plan d'accès numéro  $p$  ( $p \in [1, N_p]$ ), en limitant le vecteur  $\vec{\Psi}_p$  à sa valeur sur ce plan  $p$ , notée  $\vec{\Psi}_{p/s_p}$ .

$$\text{Ainsi; } (p \in [1, N_p]) \quad ; \quad \vec{H}_{/s_p} = \sum_{p=1}^{N_p} (a_p + b_p) \vec{\Psi}_{p/s_p}$$

En substituant cette expression de  $\vec{H}_{/s_p}$  dans l'équation (I.36.b), nous obtenons un système de  $N_p$  équations vectorielles.

D'où:  $\forall p \in [1, N_p]$  ;

$$(a_p + b_p) \vec{J}'_{es_p} = \sum_{p=1}^{N_p} (a_p + b_p) (\vec{n}_p \times \vec{\Psi}_{p/s_p}) \quad (I.38)$$

En multipliant scalairement les deux membres de l'équation (I.38) par les  $N_p$  vecteurs conjugués  $\vec{J}'_{es_p}$  relatifs à chaque accès électrique  $p$ , nous aboutissons à un système de  $N_p$  équations scalaires de la forme:

Soit:  $\forall p \in [1, N_p]$

$$b_p \left\{ \vec{J}'_{es_p} \cdot \vec{J}'_{es_p} \right\} + \sum_{p=1}^{N_p} \left\{ \vec{J}'_{es_p} \cdot (\vec{n}_p \times \vec{\Psi}_{p/s_p}) \right\} b_p \quad (I.39)$$

$$+ a_p \left\{ \vec{J}'_{es_p} \cdot \vec{J}'_{es_p} \right\} + \sum_{p=1}^{N_p} a_p \left\{ -\vec{J}'_{es_p} \cdot (\vec{n}_p \times \vec{\Psi}_{p/s_p}) \right\} = 0$$

Nous déduisons de ces équations, le système matriciel donnant la matrice de répartition [S] du dispositif:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \\ \vdots \\ b_{N_p} \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \\ \vdots \\ a_{N_p} \end{pmatrix}$$

### 1.5. CAS PARTICULIER

Analysons le cas d'un système à deux accès dans lequel se propage seul le mode fondamental.

Pour un tel dispositif, nous obtenons du système (I.39) en fixant  $N_p$  égal à 2, les deux équations suivantes:

$$b_1 \left\{ \vec{J}'_{es_1} \cdot \vec{J}'_{es_1} + \vec{J}'_{es_1} \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{\Psi}_{1/s_1}) \right\} + b_2 \left\{ \vec{J}'_{es_1} \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{\Psi}_{2/s_1}) \right\} \quad (I.40.a)$$

$$= a_1 \left\{ (\vec{J}'_{es_1} \cdot \vec{J}'_{es_1}) - \vec{J}'_{es_1} \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{\Psi}_{1/s_1}) \right\} + a_2 \left\{ -\vec{J}'_{es_1} \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{\Psi}_{2/s_1}) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & b_2 \left\{ \bar{\mathbf{J}}'_{es_2} \cdot \bar{\mathbf{J}}'_{es_2} + \bar{\mathbf{J}}'^*_{es_2} \cdot \left( \bar{\mathbf{n}}_2 \times \bar{\Psi}_{2/s_2} \right) \right\} + b_1 \left\{ \bar{\mathbf{J}}'^*_{es_2} \cdot \left( \bar{\mathbf{n}}_2 \times \bar{\Psi}_{1/s_2} \right) \right\} \\
 & = a_2 \left\{ \left( \bar{\mathbf{J}}'^*_{es_2} \cdot \bar{\mathbf{J}}'_{es_2} \right) - \bar{\mathbf{J}}'^*_{es_2} \cdot \left( \bar{\mathbf{n}}_2 \times \bar{\Psi}_{2/s_2} \right) \right\} + a_1 \left\{ -\bar{\mathbf{J}}'^*_{es_2} \cdot \left( \bar{\mathbf{n}}_2 \times \bar{\Psi}_{1/s_2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{I.40.b}$$

Ce qui s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Les termes diagonaux  $S_{ii}$ , pour  $i$  variant de 1 à 2, représentent les coefficients de réflexion à l'accès  $i$ .

Les autres termes  $S_{ij}$  ( $i \neq j$ ) traduisent les coefficients de transmission entre l'accès d'entrée  $j$  et l'accès de sortie  $i$ .

Les termes de la matrice  $[S]$  se calculent comme suit:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{b_1}{a_1} & \text{quand} & & a_2 &= 0 \\
 S_{22} &= \frac{b_2}{a_2} & \text{quand} & & a_1 &= 0 \\
 S_{12} &= \frac{b_1}{a_2} & \text{quand} & & a_1 &= 0 \\
 S_{21} &= \frac{b_2}{a_1} & \text{quand} & & a_2 &= 0
 \end{aligned}$$

## I.6. CONCLUSION

Le calcul de termes de la matrice de répartition  $[S]$  nécessite la détermination des trois grandeurs suivantes:

- Les courants électriques surfaciques  $\bar{\mathbf{J}}'_{es_p}$  sur les plans d'accès électriques.
- Les courants magnétiques surfaciques  $\bar{\mathbf{J}}'_{ms_p}$  sur les plans d'accès électriques.
- Les solutions élémentaires  $\bar{\Psi}_p$ .

Vue l'équation (I.36) à résoudre, il apparaît clairement que les solutions élémentaires ne peuvent être obtenues analytiquement.

Nous sommes donc amenés à traiter cette étape de calcul à l'aide de la méthode des éléments finis.



**CHAPITRE II**

***PRESENTATION DE LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS***



CHAPITRE II

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS (M.E.F.)

C'est une méthode d'approximation permettant de remplacer un système inconnu (de dimensions infinies) par un système discret (de dimensions finies) équivalent.

Deux types d'approximation peuvent être envisagés:

- l'approximation nodale,
- l'approximation par éléments finis.

II.1. ETUDE DES APPROXIMATIONS

II.1.1. APPROXIMATION NODALE [12], [14], [15]

Soit un système physique décrit par une fonction exacte  $u_{ex}(x)$ ,  $x$  appartenant à  $\mathcal{R}^n$ . Supposons que l'on connaisse les valeurs de  $u_{ex}(x)$  en  $m$  points  $x_1, x_2, \dots, x_m$  appartenant à  $\mathcal{R}^n$ , appelés noeuds. On approxime la fonction  $u_{ex}(x)$  par une fonction "simple"  $u(x)$  telle que la fonction erreur  $e(x) = u(x) - u_{ex}(x)$  soit faible. Pour maintenir  $e(x)$  faible, on choisit des fonctions  $u(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$  qui dépendent des  $m$  paramètres  $a_i$  et on fait coïncider  $u_{ex}(x)$  avec  $u(x)$  en  $m$  points  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ; soit  $u_{ex}(x_i) = u(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m)$  pour  $i$  variant de 1 à  $m$ .

Le plus souvent, la fonction  $u(x)$  est une combinaison linéaire de  $a_i$ ,

$$\text{soit } u(x, a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m a_i P_i(x) \tag{II.1}$$

- Les  $P_i(x)$  sont des fonctions de base connues, linéairement indépendantes des  $a_i$  et linéairement indépendantes entre elles.

- Les paramètres  $a_i$  sont les paramètres généraux de l'approximation. Ils n'ont généralement pas de sens physique. Pour leur donner un sens, on les choisit comme étant les valeurs de la fonction  $u_{ex}$  sur les noeuds  $x_i$ .

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u_{ex}(x_1) = u_1 \\ &\vdots \\ u(x_m) &= u_{ex}(x_m) = u_m \end{aligned}$$



La fonction  $u(x)$  s'écrit alors:

$$u(x) = \sum_{i=1}^m N_i(x) u_i = \langle N_1(x) \ N_2(x) \ \dots \ N_m(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

- Les  $u_i$  sont les variables nodales ou paramètres nodaux.
- Les  $N_i(x)$  sont les fonctions d'interpolation.

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

### II.1.2. APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous-domaine. Cette méthode simplifie considérablement la construction de la fonction  $u(x)$  de l'approximation notamment lorsque:

- le nombre  $m$  des noeuds devient important,
- le domaine  $V$  a une forme complexe,
- la fonction  $u(x)$  doit satisfaire des conditions aux limites sur les frontières de  $V$ .

Cette méthode consiste à diviser le domaine  $V$  en sous-domaines simples  $V^e$  et à approximer la fonction  $u_{ex}(x)$  par la méthode de l'approximation nodale, par une fonction  $u^e(x)$  différente sur chaque sous-domaine.

#### II.1.2.1. PRINCIPE DE L'APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

L'approximation par éléments finis nécessite d'entreprendre la suite d'opérations suivantes:

- faire une partition du domaine  $V$  en sous-domaine  $V^e$ ,
- approximer la fonction  $u_{ex}(x)$  par une fonction  $u^e(x)$  sur chaque sous-domaine  $V^e$ .

Ces fonctions ainsi définies, doivent satisfaire les conditions de continuité entre les différents sous-domaines.

### II.1.2.2. DEFINITIONS GENERALES

- Les sous-domaines  $V^e$  sont appelés des éléments.
- Les points où  $u_{ex}(x) = u^e(x)$  sont les noeuds d'interpolation ou points nodaux.
- Les coordonnées de ces noeuds sont les coordonnées nodales.
- Les valeurs  $u_i = u^e(x_i) = u_{ex}(x_i)$  sont les variables nodales.
- Les points qui permettent de définir la géométrie de l'élément  $V^e$  sont les noeuds géométriques.

### II.1.2.3. REGLES GENERALES DE PARTITION DU DOMAINE V EN ELEMENTS $V^e$ OU MAILLAGE

Des conditions strictes doivent être respectées pour faire le maillage d'un domaine V en éléments  $V^e$ .

- Il ne doit y avoir aucun recouvrement de deux éléments (figure (II.1)). Dans le cas d'un domaine à deux dimensions, les frontières entre éléments sont des points ou des courbes.
- L'ensemble de tous les éléments  $V^e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine V, en particulier il ne doit pas y avoir de trous entre éléments. Par contre, on peut tolérer une erreur de discrétisation géométrique quand le domaine V est constitué par des courbes ou des surfaces complexes (figure (II.2)). Cette erreur peut être réduite, soit en diminuant la taille des éléments et en augmentant leur nombre, soit en utilisant des éléments de formes complexes.
- Un élément  $V^e$  doit être contenu dans un seul milieu de propriétés constantes.

### II.1.2.4. ELEMENTS DE MAILLAGE

Le domaine V peut être subdivisé en une succession d'éléments géométriques  $V^e$  quelconques, tels que:

- des éléments triangulaires droits ou courbes,
- des éléments quadratiques droits ou courbes,
- des éléments tétradratiques droits ou courbes,
- des éléments hexaédriques droits ou courbes.

Cette liste n'est pas exhaustive et peut être complétée par d'autres éléments géométriques.

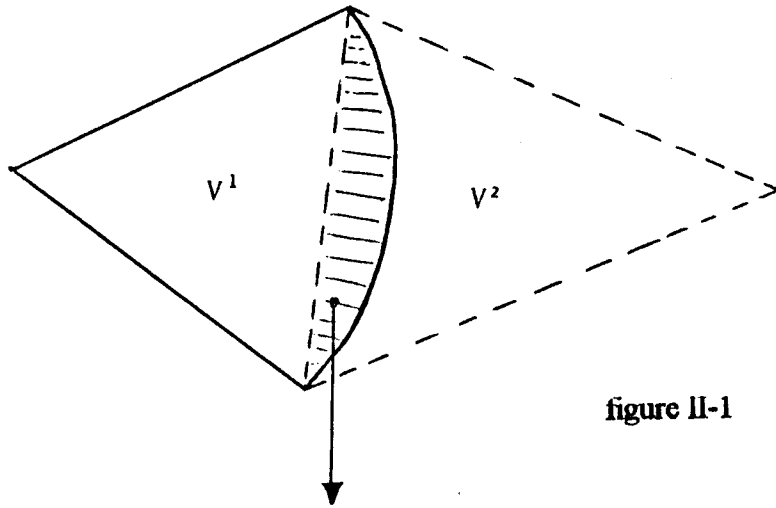


figure II-1

Recouvrement inadmissible

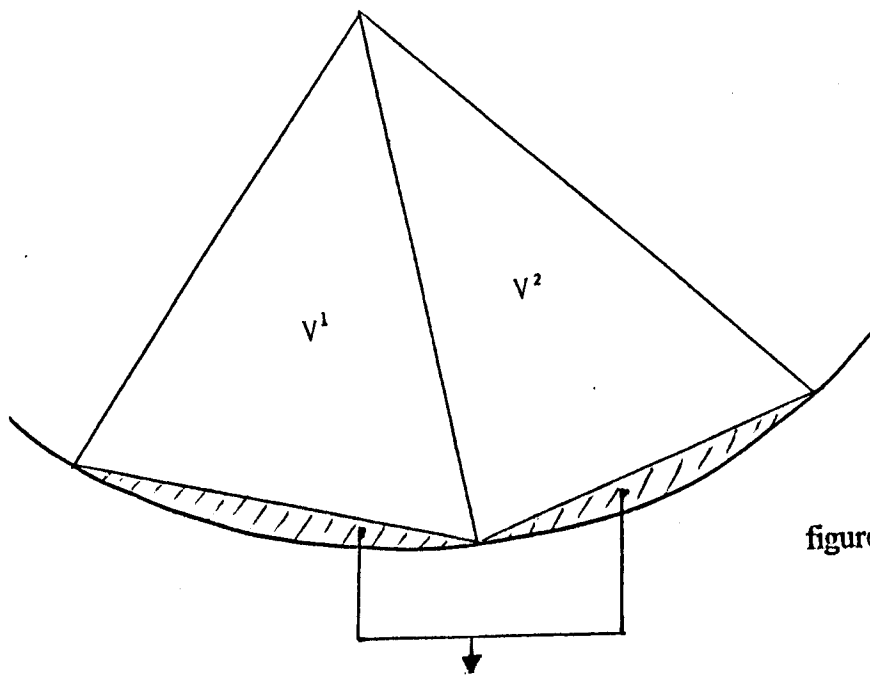


figure II-2

Erreur de discrétisation géométrique

## II.2. NOTION D'ELEMENT DE REFERENCE

- On appelle "élément réel", l'élément  $V^e$  du maillage dans le repère des coordonnées associé à l'étude du problème.
- On appelle "élément de référence", l'élément  $V^e$  du maillage dans le repère des coordonnées locales ou barycentriques.

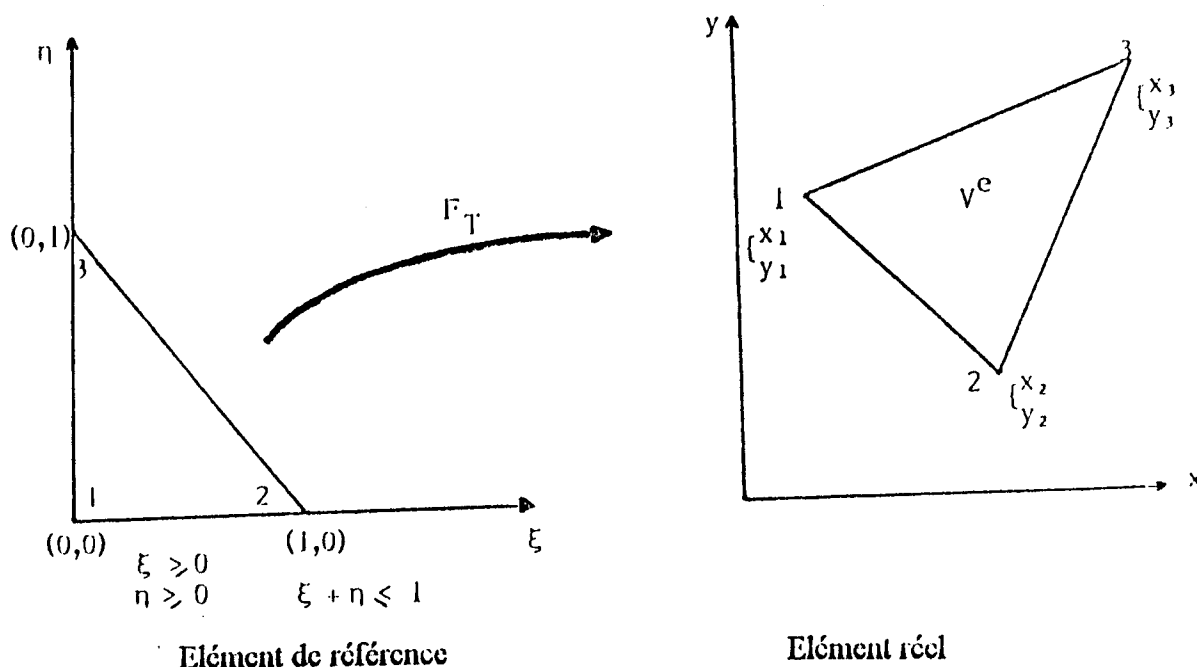


figure II-3

Tout point de l'élément de référence est repéré dans ces coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  ou dans les coordonnées barycentriques  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Les coordonnées barycentriques sont liées aux coordonnées locales par:

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3, \quad \lambda_2 = \xi \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \eta$$

Généralement, le calcul des polynômes d'interpolation  $N(x)$  est difficile à mener sur l'élément réel. On préfère souvent le calcul de ces polynômes sur l'élément de référence. On définit ainsi une fonction de transformation géométrique  $F_T$  de l'élément de référence à l'élément réel. Elle transforme tout point de coordonnées barycentriques  $\lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1]^\ell$ ; ( $\ell$  étant le nombre de noeuds géométriques ou sommet de cet élément), de l'élément de référence en un point de coordonnées  $x$ ,  $(x \in \mathcal{R}^n)$ ;  $n$  étant la dimension de l'espace étudié de l'élément réel.

Soit

$$x(\lambda) = \langle \bar{N}(\lambda) \rangle \{x\} \tag{II.4}$$

où  $\{x\} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_\ell)$  et les  $x_i$  sont les coordonnées des  $\ell$  sommets de l'élément.

De même, en utilisant cette transformation géométrique  $F_T$ , l'approximation  $u(x)$  de l'équation (I.2) devient:

$$u(x(\lambda)) = \langle N_1(\lambda) N_2(\lambda) \dots N_m(\lambda) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix}$$

ce qui peut également s'écrire:

$$u(x(\lambda)) = u(\lambda) = \langle N(\lambda) \rangle \{u\} \tag{II.5}$$

$\{u\} = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_m)$ ;  $m$  étant le nombre de noeuds d'interpolation sur l'élément de référence.

Les  $u_i$  sont les valeurs aux noeuds de la fonction  $u(x)$ .

Les fonctions  $\bar{N}(\lambda)$  sont appelées les fonctions de transformation géométrique.

Les fonctions  $N(\lambda)$  sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

### II.3. CALCUL DES FONCTIONS $N(\lambda)$ ET $\bar{N}(\lambda)$

#### II.3.1. CALCUL DES FONCTIONS D'INTERPOLATION $N(\lambda)$

Soit une base polynômiale de l'approximation, de dimension  $m$ ;  $m$  étant égal au nombre de noeuds d'interpolation sur l'élément.

$$\langle P \rangle = \langle P_1, P_2, \dots, P_m \rangle$$

Soit un vecteur  $\{a\} = {}^t(a_1, a_2, \dots, a_m)$  où les  $a_i$  sont les paramètres généraux de l'approximation de la fonction  $u(\lambda)$ .

L'équation (I.1) permet d'écrire:

$$u(\lambda) = \langle P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_m(\lambda) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \Rightarrow u(\lambda) = \langle P(\lambda) \rangle \{a\} \tag{II.6}$$

On exprime ensuite qu'à chaque noeud d'interpolation de coordonnées barycentriques  $\lambda_i$  ( $\lambda \in [0,1]^\ell$ ), ( $\ell$  étant le nombre de sommets de l'élément), la fonction  $u(\lambda)$  prend la valeur nodale  $u_i = u_{ex}(\lambda_i)$ .

$$\text{d'où } \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(\lambda_1) & P_2(\lambda_1) \cdots P_m(\lambda_1) \\ P_1(\lambda_2) & P_2(\lambda_2) \cdots P_m(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ P_1(\lambda_m) & P_2(\lambda_m) \cdots P_m(\lambda_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

ce qui s'écrit sous la forme:

$$\{u\} = [P]\{a\}; \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix}, \quad \{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1(\lambda_1) & P_2(\lambda_1) \cdots P_m(\lambda_1) \\ P_1(\lambda_2) & P_2(\lambda_2) \cdots P_m(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ P_1(\lambda_m) & P_2(\lambda_m) \cdots P_m(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{a\} = [P]^{-1}\{u\} \quad \text{si } \det [P] \neq 0 \tag{II.7}$$

Introduisons (II.7) dans (II.6), on obtient:

$$u(\lambda) = \langle P(\lambda) \rangle [P]^{-1}\{u\} = \langle N(\lambda) \rangle \{u\}$$

$$\text{d'où } \langle N(\lambda) \rangle = \langle P(\lambda) \rangle [P]^{-1} \tag{II.8}$$

### II.3.2. CALCUL DES FONCTIONS DE TRANSFORMATION GEOMETRIQUE $\bar{N}(\lambda)$

On choisit une base polynomiale de dimension  $\ell$  ;  $\ell$  étant le nombre de noeuds géométriques (sommets) de l'élément.

$$\text{soit } \langle \bar{P}(\lambda) \rangle = \langle P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_\ell(\lambda) \rangle$$

On écrit ensuite, les coordonnées  $x$ ; ( $x \in \mathcal{R}^n$ ) de tout point de l'élément sous forme d'une combinaison linéaire de polynômes de base  $\langle \bar{P}(\lambda) \rangle$ , affectés de paramètres généraux  $b_i$ .





$$\text{Soit } x(\lambda) = \langle \bar{P}_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_\ell(\lambda) \rangle \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\ell \end{Bmatrix}$$

que l'on peut aussi écrire:

$$x(\lambda) = \langle \bar{P}(\lambda) \rangle \{b\}; \tag{II.9}$$

avec  $\{b\} = {}^t (b_1, b_2, \dots, b_\ell)$  et les  $b_i$  étant des paramètres généraux quelconques.

Pour calculer ces paramètres, on écrit (II.9) sur les sommets de l'élément.

$$\text{Soit } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1(\lambda_1) & \bar{P}_2(\lambda_1) \cdots \bar{P}_\ell(\lambda_1) \\ \bar{P}_1(\lambda_2) & \bar{P}_2(\lambda_2) \cdots \bar{P}_\ell(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \bar{P}_\ell(\lambda_\ell) & \bar{P}_2(\lambda_\ell) \cdots \bar{P}_\ell(\lambda_\ell) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\ell \end{Bmatrix}$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\{x\} = [\bar{P}]\{b\} \tag{II.10}$$

$$\text{avec } \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \end{Bmatrix} ; \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\ell \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } [\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_1(\lambda_1) & \bar{P}_2(\lambda_1) \cdots \bar{P}_\ell(\lambda_1) \\ \bar{P}_1(\lambda_2) & \bar{P}_2(\lambda_2) \cdots \bar{P}_\ell(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \bar{P}_\ell(\lambda_\ell) & \bar{P}_2(\lambda_\ell) \cdots \bar{P}_\ell(\lambda_\ell) \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } \det [\bar{P}] \neq 0; \text{ alors } \{b\} = [\bar{P}]^{-1} \{x\} \tag{II.11}$$

Remplaçons (II.11) dans (II.9); alors:

$$x(\lambda) = \langle \bar{P}(\lambda) \rangle [\bar{P}]^{-1} \{x\} = \langle \bar{N}(\lambda) \rangle \{x\}$$

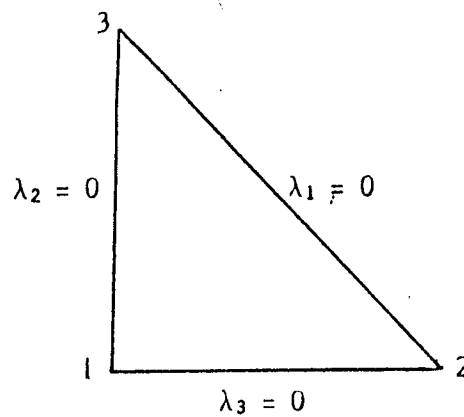
$$\Rightarrow \langle \bar{N}(\lambda) \rangle = \langle \bar{P}(\lambda) \rangle [\bar{P}]^{-1} \tag{II.12}$$



## II.4. ELEMENT TRIANGULAIRE DE LAGRANGE

Parmi les éléments bidimensionnels susceptibles d'être choisis pour la partition du domaine d'étude, l'élément triangulaire est le plus souvent utilisé. Il permet une bonne approximation de la fonction inconnue  $u_{ex}(x)$ .

Soit un triangle de référence K, droit, défini par ces trois noeuds géométriques (sommets) numérotés 1, 2 et 3.



Élément de référence

Figure II-4

Tout point de l'élément K de coordonnées barycentriques  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  est transformé en un point de coordonnées  $(x, y)$  de l'élément réel, par la transformation géométrique  $F_T$ . Cette transformation est déterminée par les fonctions  $\bar{N}(\lambda)$  décrites précédemment.

### II.4.1. CALCUL DE $\bar{N}(\lambda)$

Soit une base polynomiale de dimension  $\ell = 3$ ,  $\ell$  étant le nombre de noeuds géométriques de l'élément triangulaire K.

$$\langle \bar{P}(\lambda) \rangle = \langle \bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \quad \bar{P}_3 \rangle = \langle \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \rangle$$

On construit la matrice  $[\bar{P}]$  de dimension  $(3 \times 3)$  puis on calcule  $[\bar{P}]^{-1}$  en utilisant les équations (II.9) et (II.10).

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\bar{P}]^{-1} ; \det [\bar{P}] = 1$$

Ainsi:

$$\langle \bar{P}(\lambda) \rangle = \langle \bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \quad \bar{P}_3 \rangle = \langle \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \rangle$$

A partir de (II.12), on obtient le système suivant (II.13)

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \quad (II.13)$$

système qui peut s'écrire également:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [M_K] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} ; [M_K] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si l'inverse de  $[M_K]$  existe (K: triangle non dégénéré) alors

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} = [M_K]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} [M_K] &= (x_\ell - x_{\ell+1})(y_{\ell+1} - y_{\ell+2}) - (x_{\ell+1} - x_{\ell+2})(y_\ell - y_{\ell+2}) \\ &= 2 \times A \end{aligned} \quad (II.14)$$

A est l'aire du triangle K.

$$\lambda_\ell = [(y_{\ell+1} - y_{\ell+2})x + (x_{\ell+2} - x_{\ell+1})y + x_{\ell+1}y_{\ell+2} - x_{\ell+2}y_{\ell+1}] / \det[M_K] \quad (II.15)$$

$\ell = 1, 2, 3$  désigne les numéros des noeuds géométriques de l'élément K et les sommes  $(\ell + 1)$ ,  $(\ell + 2)$  sont à calculer modulo 3.

#### II.4.2. CALCUL DES FONCTIONS D'INTERPOLATION $N(\lambda)$

Par définition, l'interpolée de la fonction inconnue  $u_{ex}(x)$  sur l'élément de maillage K, notée  $\prod_K u_{ex}(x)$  est définie par:

$$\prod_K u_{ex}(x) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) u_{ex}(x_i, y_i)$$

m est le nombre de noeuds d'interpolation sur l'élément K.

Les fonctions d'interpolation  $N_i(x, y)$  sont des polynômes de Lagrange de degré k ( $k \geq 1$ ), linéairement indépendants. Ils constituent une base de l'espace vectoriel  $P_k$  des polynômes de degré k sur le triangle K. La dimension de  $P_k$  est donnée par  $d = (k+1)(k+2)/2$  et elle est égale au nombre de polynômes d'interpolation  $N_i$ .

Il faut donc considérer d noeuds d'interpolation sur K dont les coordonnées sont définies par le treillis suivant:

$$\sum_k \left\{ (x, y) / \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}; \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1; \quad \lambda_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{(k-1)}{k}, 1 \right\}; \quad 1 \leq i \leq 3$$

Chaque noeud du triangle K peut être représenté par un triplet  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  ;  
 $\sum_{i=1}^3 \mu_i = k$  ;  $0 \leq \mu_i \leq k$  telle que  $\lambda_i = \frac{\mu_i}{k}$ .

**EXEMPLE**

Pour des polynômes de Lagrange de degré 3 ( $k = 3$ ), on aura 10 noeuds d'interpolation sur le triangle K. Les coordonnées de ces noeuds sont définies dans le treillis  $\sum_k$ . Ainsi la

fonction  $\prod_K u_{ex}(x, y)$ , interpolée de  $u_{ex}(x, y)$  s'exprime par:

$$\prod_K u_{ex}(x, y) = \sum_{\mu} N_{\mu}(x, y) u(x_{\mu}, y_{\mu})$$

si  $v = (v_1, v_2, v_3)$  désigne un noeud du triangle K, alors:

$$N_{\mu}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = v \\ 0 & \text{si } \mu \neq v \end{cases}$$

$N_{\mu}(x, y)$  est le polynôme d'interpolation de Lagrange associé au noeud  $\mu$ . Ce polynôme peut être exprimé en fonction des coordonnées barycentriques  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . On obtient alors:

$$\begin{cases} N_{\mu}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \prod_{i=1}^3 Q_{\mu_i}(\lambda_i) \\ Q_{\mu_i}(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_i = 0 \\ \frac{1}{\mu_i!} \prod_{j=0}^{\mu_i-1} (k\lambda_i - j) & \text{si } \mu_i \geq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (II.16)$$





On choisit une base polynômiale  $\langle P(\xi, \eta, \zeta) \rangle$  de dimension  $m = 8$ ;  $m$  étant le nombre de noeuds d'interpolation. Ces polynômes sont des monômes en  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  indépendants  $((\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  coordonnées du noeud numéro  $i$  de l'élément de référence).

Soit la base polynômiale  $\langle P \rangle$  définie par:

$$\langle P(\xi, \eta, \zeta) \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \xi\zeta \quad \xi\eta\zeta \rangle$$

On construit ensuite les matrices  $[P]$  et  $[P]^{-1}$  données par les équations (II.6) et (II.12) et on calcule les fonctions d'interpolation  $N$  en utilisant la relation suivante:

$$\langle N(\xi, \eta, \zeta) \rangle = \langle P(\xi, \eta, \zeta) \rangle [P^{-1}]$$

Les valeurs du polynôme  $N$  et de ses dérivées premières par rapport aux variables  $(\xi, \eta, \zeta)$  sont présentées par le tableau (II-1):

TABLEAU II-1

Numéro du noeud	$\frac{1}{c} N$	$\frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial \eta}$	$\frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial \zeta}$
1	$a_2 b_2 c_2$	$-b_2 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_2 b_2$
2	$a_1 b_2 c_2$	$b_2 c_2$	$-a_1 c_2$	$-a_1 b_2$
3	$a_1 b_1 c_2$	$b_1 c_2$	$a_1 c_2$	$-a_1 b_1$
4	$a_2 b_1 c_2$	$-b_1 c_2$	$a_2 c_2$	$-a_2 b_1$
5	$a_2 b_2 c_1$	$-b_2 c_1$	$-a_2 c_1$	$a_2 b_2$
6	$a_1 b_2 c_1$	$b_2 c_1$	$-a_1 c_1$	$a_1 b_2$
7	$a_1 b_1 c_1$	$b_1 c_1$	$a_1 c_1$	$a_1 b_1$
8	$a_2 b_1 c_1$	$-b_1 c_1$	$a_2 c_1$	$a_2 b_1$

Avec

$$c = \frac{1}{8}$$

$$a_1 = 1 + \xi \quad ; \quad a_2 = 1 - \xi$$

$$b_1 = 1 + \eta \quad ; \quad b_2 = 1 - \eta$$

$$c_1 = 1 + \zeta \quad ; \quad c_2 = 1 - \zeta$$

Les éléments dont le nombre de noeuds d'interpolation est égal au nombre de noeuds géométriques (sommets) sont appelés éléments isoparamétriques. Pour ce type d'éléments, les fonctions de transformation géométrique  $\bar{N}(\xi, \eta, \zeta)$  sont identiques aux fonctions d'interpolation  $N(\xi, \eta, \zeta)$  pour une même base polynômiale.



### II.6. ELEMENT LINEIQUE DE LAGRANGE

Il est utilisé pour la partition d'une courbe C en segments.

Pour une approximation utilisant des polynômes de Lagrange de degré 1, on aura deux noeuds confondus avec les deux sommets de l'élément linéique. La représentation de ces noeuds (numérotation et coordonnées) sur un tel élément est présentée sur la figure (II.6).

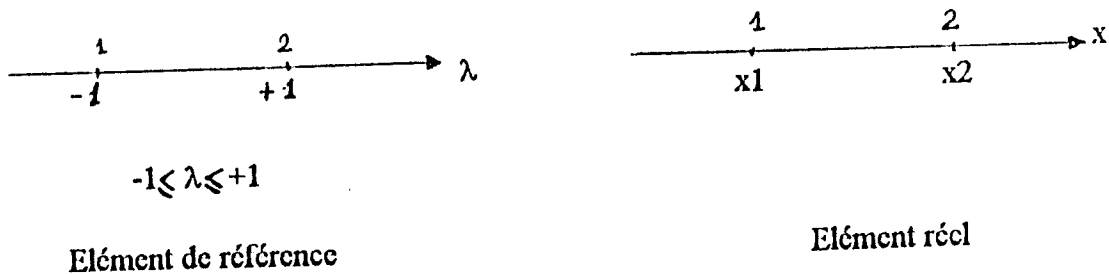


figure II-6

La base polynômiale de cet élément est définie par:

$$\langle P(\lambda) \rangle = \langle 1 \lambda \rangle$$

Les noeuds géométriques et les noeuds d'interpolation sont confondus, ainsi les fonctions N et  $\bar{N}$  sont identiques et elles valent :

N° du noeud	1	2
Coordonnées $\lambda$	-1	+1
$N = \bar{N}$	$\frac{1}{2}(1-\lambda)$	$\frac{1}{2}(1+\lambda)$

### II.7. ELEMENTS FINIS MIXTES, [16], [17], [18]

Les degrés de liberté de l'approximation par éléments finis mixtes ont été définis par J. C. Nedelec [16], [17] et permettent d'assurer la continuité des composantes tangentielles (ou normales) des fonctions vectorielles appartenant à l'espace  $H^{rot}$  (l'espace  $H^{div}$ ), au passage d'un élément à un autre.

Nous nous intéressons ici, uniquement aux éléments assurant la continuité des composantes tangentielles des fonctions appartenant à l'espace  $H^{rot}$ .

II.7.1. ESPACE VECTORIEL  $H^{rot}$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathfrak{R}^n$ ;  $n = 1, 2, 3$ .

- $L^2(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  telle que l'intégrale de leurs modules au carré soit finie  $(\int |f|^2) < +\infty$ .
- $D(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. Nous avons la relation  $D(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ .
- $H^{rot}(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $\vec{F} \in (L^2(\Omega))^n$  telles que  $rot \vec{F} \in (L^2(\Omega))^n$ ; le rotationnel étant pris au sens des distributions.

Pour pouvoir définir les intégrales de  $\left| rot \vec{F} \right|^2$ , les distributions singulières associées à

cet opérateur doivent être nulles.

Sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathfrak{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), le développement de l'opérateur  $rot$  [Annexe I] donne:

$$rot \vec{F} = \left\{ rot \right\} \vec{F} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\vec{n}_{ij} \times \vec{F}_i + \vec{n}_{ji} \times \vec{F}_j) \delta S_{ij}$$

$S_{ij}$  représente la surface de l'interface (une arête si  $n = 2$  ou une face si  $n = 3$ ) entre deux éléments contigus.

Si l'on pose cette distribution singulière de support  $S_{ij}$  nulle, on trouve:

- $rot \vec{F} = \left\{ rot \right\} \vec{F}$ ;  $rot \vec{F}$  est alors une fonction.
- $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\vec{n}_{ij} \times \vec{F}_i + \vec{n}_{ji} \times \vec{F}_j) \delta S_{ij} = \vec{0}$ ; cette équation traduit la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{F}$  à la traversée de la surface  $S_{ij}$ .

II.7.2. NOTATIONS

Nous précisons les notations suivante:

- $K$  est l'élément de  $\mathfrak{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ):
  - un triangle de surface  $\int_K dS$  dans  $\mathfrak{R}^2$ .
  - un cube de volume  $\int_K dV$  dans  $\mathfrak{R}^3$ .
- Si  $K$  est un cube, nous désignons par  $f$  une de ces faces de surface  $\int_f dS$ .
- $c_\ell$  est une arête de l'élément  $K$  de longueur  $\int_{c_\ell} d\ell$ .
- $\vec{\tau}$  est un vecteur unitaire porté par cette arête.
- $P_k$  est l'espace des polynômes de degré égal à  $k$ .





### II.7.3. ELEMENTS MIXTES TRIANGULAIRE ET CUBIQUE

Un élément mixte d'un domaine  $\Omega$  de  $\mathcal{R}^n$  est défini par le triplet  $(K, P, A)$ , tels que:

- K est:
  - un triangle si  $n = 2$
  - un cube si  $n = 3$
- L'espace vectoriel P des fonctions de base de l'approximation de degré k, est:
  - $P = (P_k)^2$  si  $n = 2$ ; espace vectoriel de dimensions  $d = \dim(P_k)^2 = (k+1)(k+2)$
  - $P = (P_k)^3$  si  $n = 3$ , espace vectoriel de dimensions  $d = \dim(P_k)^3 = 3(k+1)^3$

Pour une fonction  $\bar{p}$  de P, J. C. Nedelec définit suivant la valeur de k, des degrés de liberté sur les arêtes, sur les faces et internes à l'élément K [16], [17].

Dans la suite, nous ne considérons que des polynômes de degré  $k = 1$ , donnant lieu à des degrés de libertés situés seulement sur les arêtes. Pour des valeurs de  $k > 1$ , le nombre de degrés de libertés augmente et par conséquent le système à résoudre numériquement devient important.

Si  $n = 2$  (c'est le cas du triangle) ou  $n = 3$  (c'est le cas du cube); ces degrés de libertés situés sur les arêtes sont donnés par:

$$a_{c_\ell, i}(\bar{p}) = \int_{c_\ell} (\bar{p} \cdot \bar{\tau}) \Psi_i \, dc_\ell \tag{II.17}$$

avec  $\Psi_i \in \{\Psi_1, \dots, \Psi_{k+1}\}$  base de  $P_k(a)$ ; soit ici  $(k+1) = 2$  degrés de libertés par arête.

Il faut noter également que ces degrés de libertés ne sont pas, comme le cas des éléments de Lagrange, associés à un point de l'espace, mais sont simplement liés à une arête.

La numérotation de ces degrés de libertés sur un triangle et sur un cube, est présentée sur les figures (II.7) et (II.8).

### II.7.4. CALCUL DES POLYNOMES D'INTERPOLATION

Pour un degré de l'approximation  $k = 1$ , il n'existe que des degrés de liberté sur les arêtes de l'élément. Ils sont donnés par:

$$a_{c_\ell, i}(\bar{p}) = \int_{c_\ell} (\bar{p} \cdot \bar{\tau}_\ell) \Psi_i \, dc_\ell$$

où i désigne le numéro du degré de liberté sur l'arête numéro  $c_\ell$ .

Les fonctions de base  $\Psi_i$  sont choisies comme fonctions de base de l'approximation du type Lagrange pour un élément linéique correspondant à l'arête  $c_\ell$  et pour un degré identique.

Comme pour les éléments de Lagrange, les fonctions d'interpolation  $\bar{N}_{c_\ell, i}$  relatives à l'élément mixte réel s'obtiennent en utilisant la notion de coordonnées barycentriques ou coordonnées locales de l'élément de référence.



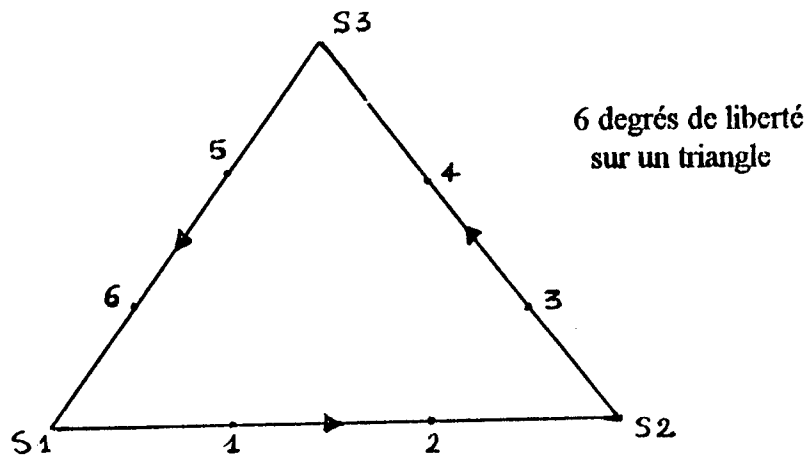


figure II-7

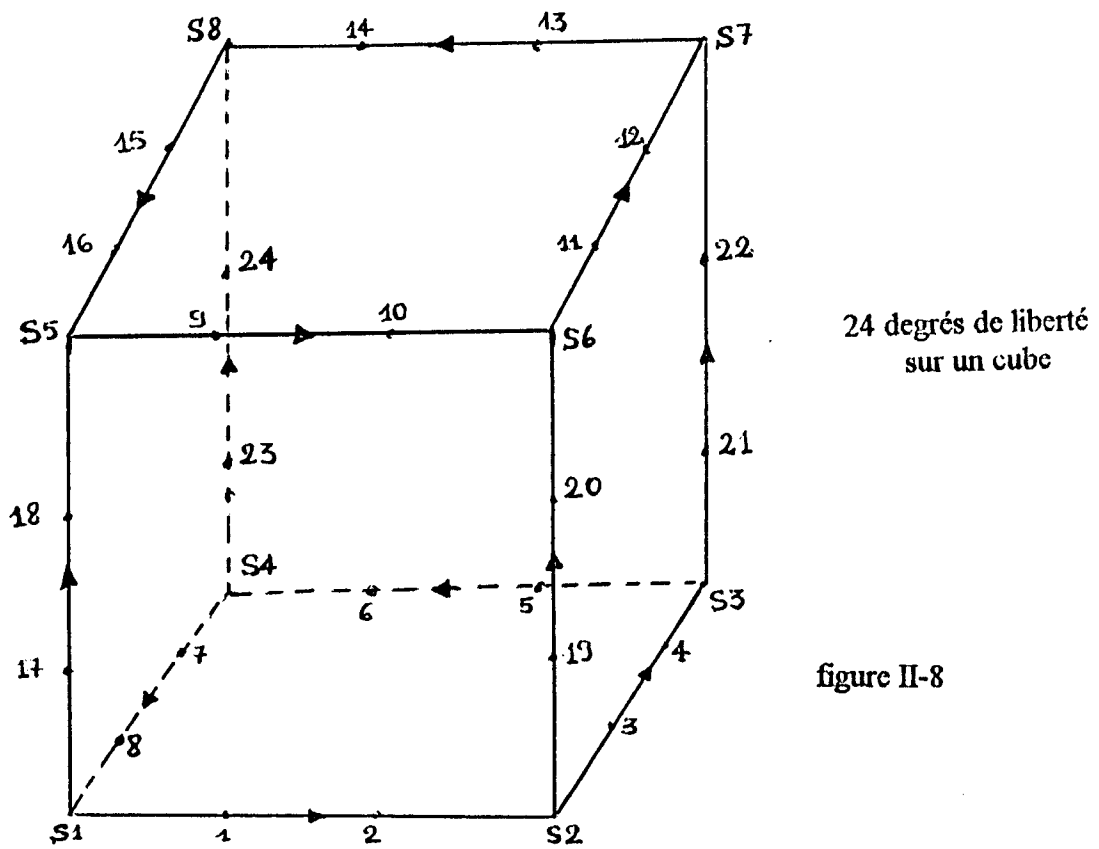


figure II-8



a. ELEMENT MIXTE TRIANGULAIRE (PROBLEME EN DEUX DIMENSIONS)

L'élément triangulaire placé dans un plan (o,x,y) d'un repère orthonormé direct (o,  $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$ ) est représenté sur la figure (II-9).

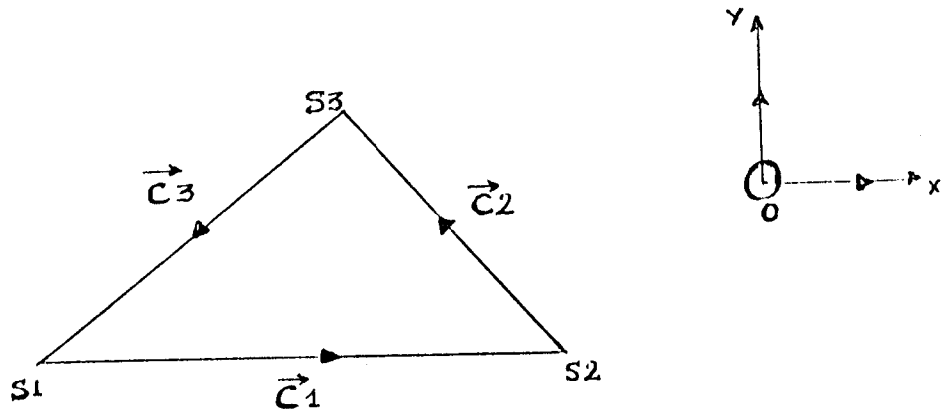


figure II-9

Nous notons:

- $\bar{C}_1 = S_1\bar{S}_2$  ;  $\bar{C}_2 = S_2\bar{S}_3$  ;  $\bar{C}_3 = S_3\bar{S}_1$

- $$\delta_{mn} = \begin{cases} +1 & \text{Si } m < n \\ -1 & \text{Si } m > n \end{cases}$$

m est le numéro du premier sommet de l'arête  $C_\ell$  ( $\ell = 1, 2, 3$ ) et n est le numéro de son second sommet.

- $\lambda_i$  pour  $i \in [1, 3]$  représentant les coordonnées barycentriques d'un point du triangle.
- $\Delta K = (+ \text{ ou } -)$  2 fois l'aire du triangle (*relation II-14*)

En tenant compte de ces notations, les fonctions  $\bar{N}_{c_\ell, i}$ , associées à l'arête  $C_\ell$  et numérotées en respectant l'orientation des arêtes (figure (II-9)), s'expriment par les relations (II-18) et (II-19)

$$\bar{N}_{c_\ell, i} = 2\delta_{mn} \frac{\|\bar{c}_\ell\|}{\Delta K} [2(\bar{u}_z \times \bar{c}_{\ell+2})\lambda_\ell + (\bar{u}_z \times \bar{c}_{\ell+1})\lambda_{\ell+1}] \quad (II.18)$$



$$\bar{N}_{c_{\ell,2}} = -2\delta_{mm} \frac{\|\bar{c}_{\ell}\|}{\Delta K} [(\bar{u}_z \times \bar{c}_{\ell+2})\lambda_{\ell} + 2(\bar{u}_z \times \bar{c}_{\ell+1})\lambda_{\ell+1}] \quad (II.19)$$

Les sommes  $(\ell + 1)$  et  $(\ell + 2)$  sont à effectuer modulo 3.

**b. ELEMENT MIXTE CUBIQUE (PROBLEME EN TROIS DIMENSIONS)**

Soient:

- $\Psi_i = N_i$  : polynôme de Lagrange décrit sur le tableau (II.1).
- $\Delta K$  = volume de cube.
- $\delta_{mm} = (+ \text{ ou } -)1$  (voir élément mixte triangulaire).
- $\ell = 1$  à 12; numéro des 12 arêtes du cube.
- $\bar{n}_i$  ( $i \in [1, 6]$ ) représentant les vecteurs normaux aux 6 faces du cube.

Nous présentons sur la figure (II.10) les normales aux faces, orientées vers l'intérieur du cube.

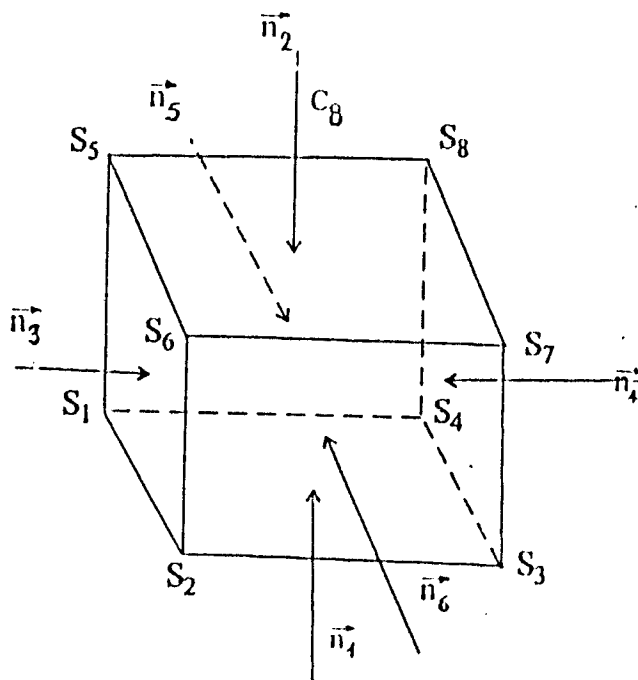


figure II-10

- $\bar{n}_1$  : normale à la face  $S_1S_2S_3S_4$
- $\bar{n}_2$  : normale à la face  $S_5S_6S_7S_8$
- $\bar{n}_3$  : normale à la face  $S_1S_2S_6S_5$
- $\bar{n}_4$  : normale à la face  $S_4S_3S_7S_8$
- $\bar{n}_5$  : normale à la face  $S_1S_4S_8S_5$
- $\bar{n}_6$  : normale à la face  $S_2S_3S_7S_6$



Compte tenu de ces notations les fonctions  $\bar{N}_{c,i}$  s'expriment par les relations:

$$\bar{N}_{c_{1,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_1 S_2 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{12} (2\bar{n}_5 \psi_1 - \bar{n}_6 \psi_2)$$

$$\bar{N}_{c_{1,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_1 S_2 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{12} (\bar{n}_5 \psi_1 - 2\bar{n}_6 \psi_2)$$

$$\bar{N}_{c_{2,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_2 S_3 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{23} (2\bar{n}_3 \psi_2 - \bar{n}_4 \psi_3)$$

$$\bar{N}_{c_{2,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_2 S_3 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{23} (\bar{n}_3 \psi_2 - 2\bar{n}_4 \psi_3)$$

$$\bar{N}_{c_{3,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_3 S_4 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{34} (2\bar{n}_6 \psi_3 - \bar{n}_5 \psi_4)$$

$$\bar{N}_{c_{3,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_3 S_4 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{34} (\bar{n}_6 \psi_3 - 2\bar{n}_5 \psi_4)$$

$$\bar{N}_{c_{4,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_4 S_1 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{41} (2\bar{n}_4 \psi_4 - \bar{n}_3 \psi_1)$$

$$\bar{N}_{c_{4,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_4 S_1 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{41} (\bar{n}_4 \psi_4 - 2\bar{n}_3 \psi_1)$$

$$\bar{N}_{c_{5,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_5 S_6 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{56} (2\bar{n}_5 \psi_5 - \bar{n}_6 \psi_6)$$

$$\bar{N}_{c_{5,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_5 S_6 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{56} (\bar{n}_5 \psi_5 - 2\bar{n}_6 \psi_6)$$

$$\bar{N}_{c_{6,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_6 S_7 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{67} (2\bar{n}_3 \psi_6 - \bar{n}_4 \psi_7)$$

$$\bar{N}_{c_{6,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_6 S_7 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{67} (\bar{n}_3 \psi_6 - 2\bar{n}_4 \psi_7)$$

$$\bar{N}_{c_{7,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_7 S_8 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{78} (2\bar{n}_6 \psi_7 - \bar{n}_5 \psi_8)$$

$$\bar{N}_{c_{7,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_7 S_8 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{78} (\bar{n}_6 \psi_7 - 2\bar{n}_5 \psi_8)$$

$$\bar{N}_{c_{8,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_8 S_5 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{85} (2\bar{n}_4 \psi_8 - \bar{n}_3 \psi_5)$$

$$\bar{N}_{c_{8,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_8 S_5 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{85} (\bar{n}_4 \psi_8 - 2\bar{n}_3 \psi_5)$$

$$\bar{N}_{c_{9,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_1 S_5 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{15} (2\bar{n}_1 \psi_1 - \bar{n}_2 \psi_5)$$

$$\bar{N}_{c_{9,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_1 S_5 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{15} (\bar{n}_1 \psi_1 - 2\bar{n}_2 \psi_5)$$

$$\bar{N}_{c_{10,1}} = \frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_2 S_6 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{26} (2\bar{n}_1 \psi_2 - \bar{n}_2 \psi_6)$$

$$\bar{N}_{c_{10,2}} = -\frac{\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ S_2 S_6 \end{array} \right\|}{\Delta K} \delta_{26} (\bar{n}_1 \psi_2 - 2\bar{n}_2 \psi_6)$$

$$\bar{N}_{c_{11,1}} = \frac{\left\| \vec{S}_3 S_7 \right\|}{\Delta K} \delta_{37} (2\bar{n}_1 \psi_3 - \bar{n}_2 \psi_7)$$

$$\bar{N}_{c_{11,2}} = -\frac{\left\| \vec{S}_3 S_7 \right\|}{\Delta K} \delta_{37} (\bar{n}_1 \psi_3 - 2\bar{n}_2 \psi_7)$$

$$\bar{N}_{c_{12,1}} = \frac{\left\| \vec{S}_4 S_8 \right\|}{\Delta K} \delta_{48} (2\bar{n}_1 \psi_4 - \bar{n}_2 \psi_8)$$

$$\bar{N}_{c_{12,2}} = -\frac{\left\| \vec{S}_4 S_8 \right\|}{\Delta K} \delta_{48} (\bar{n}_1 \psi_4 - 2\bar{n}_2 \psi_8)$$

Le calcul de ces expressions est explicité en [Annexe 2].

### II.8. ERREUR D'INTERPOLATION SUR UN ELEMENT DE MAILLAGE K [14]

Elle est définie comme étant la distance entre la fonction exacte  $u_{ex}(x)$  et son interpolée  $\prod_K u_{ex}(x)$  ;  $x \in \mathfrak{R}^n$ . Soit une fonction  $f(x)$  et  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ,  $m$  vecteurs de  $\mathfrak{R}^n$ . On désigne par:

$$\left\{ \begin{array}{l} D^m f(x) \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m); \text{ la dérivée } m^{\text{ième}} \text{ de la fonction } f \text{ au point } (x) \text{ dans les directions} \\ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \\ \|D^m f(x)\| = \sup_{\|\xi_i\|=1} (|D^m f(x) \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)|) \\ \|f\|_{m,p,k} = \left( \sum_{\ell=0}^m \int_K \|D^\ell f(x)\|^p dV^K \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$$

En utilisant ces propriétés, on démontre que l'erreur d'interpolation est donnée par la relation suivante:



$$\left\| u_{ex} - \prod_K u_{ex} \right\|_{m,p,k} = \theta(h^k)$$

où  $h$  est la longueur du plus grand côté de l'élément  $K$  et  $k$  désigne le degré du polynôme d'interpolation de Lagrange. On dispose des deux paramètres  $h$  et  $k$  pour améliorer la précision de la méthode des éléments finis.

### II.8.1. AFFINEMENT DU MAILLAGE

Afin d'améliorer la précision de la solution du problème, on peut conserver  $k$ , degré du polynôme d'interpolation de Lagrange, constant et diminuer  $h$ . On constate alors que l'erreur d'interpolation diminue, c'est l'opération de l'affinement du maillage.

### II.8.2. CHOIX DE L'INTERPOLATION

L'autre possibilité pour accroître la précision de la méthode consiste non plus à affiner le maillage, mais pour un même maillage, à utiliser une interpolation plus riche ( $k$  plus élevé). Naturellement, dans ces deux cas, la précision est obtenue au détriment de la taille du système à résoudre.

### II.9. METHODOLOGIE POUR ELEMENTS FINIS [12], [14], [19]

La fonction interpolée  $\pi u_{ex}$  est une fonction continue par partie (sur les sous-domaine  $\bar{\Omega}_j$ ). Elle peut être explicitée sur chaque élément de maillage  $K$ , comme une combinaison linéaire de fonction  $v_i(x)$ ;  $x \in \mathcal{R}^n$ , linéairement indépendantes, dites fonctions de base. La méthode des éléments finis consiste à:

- diviser le domaine  $\bar{\Omega}$  en milieux homogènes  $\bar{\Omega}_j$ .
- subdiviser les domaines  $\bar{\Omega}_j$  en éléments simples de maillage et choisir une interpolation.
- numéroter globalement les noeuds d'interpolation.
- associer à chaque noeud  $\mu$  de numéro  $i$ ,  $i \in I = \{ \text{ensemble des numéros des noeuds du maillage} \}$ , une fonction de base  $v_i(x)$  définie sur  $\bar{\Omega}$  par:
  - $v_i(x) = N_{\mu}(x)$  si le noeud  $\mu$  de numéro  $i$  appartient à  $K$ .
  - $v_i(x) = 0$  si le noeud  $\mu$  n'appartient pas à  $K$ .

Ainsi, une définition plus générale de la fonction  $\pi u_{ex}(x)$  est obtenue,

Soit

$$\pi u_{ex}(x) = \sum_{i \in I} u_{ex}(x_i) v_i(x); x \in \mathcal{R}^n$$

- discrétiser le système d'équations différentielles à résoudre sur chaque élément de maillage. On a alors, une forme matricielle élémentaire à laquelle on peut appliquer toutes les techniques numériques de calcul des matrices.





- assembler toutes les matrices élémentaires en une matrice globale sur tout le domaine d'étude.

Suivant le problème à résoudre, la forme finale sera du type:

$$\rightarrow [M] \{U\} = \{b\} \quad \text{pour les problèmes d'équilibre.}$$

$$\rightarrow ([K] - \lambda [M]) \{U\} = \{0\} \quad \text{pour les problèmes à valeurs et vecteurs propres.}$$

$$[M] = \sum [M^e]$$

Sur tous les éléments

$$[K] = \sum [K^e]$$

Sur tous les éléments

$[K]$  et  $[M]$  sont les matrices globales ou assemblées.

$[K^e]$  et  $[M^e]$  sont les matrices élémentaires.

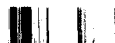
$\lambda$  = valeur propre et  $\{U\}$  = vecteur propre

$\{b\}$  = sollicitations.

- introduire les conditions aux limites à vérifier (si elles existent) dans ces matrices globales.
- résoudre le système final obtenu par des méthodes numériques.

**CHAPITRE III**

***DISCRETISATION DU PROBLEME  
D'OSCILLATION ET VALIDATION DE LA  
METHODE SUR DES STRUCTURES SIMPLES***



### CHAPITRE III

## DISCRETISATION DU PROBLEME D'OSCILLATION ET VALIDATION DE LA METHODE SUR DES STRUCTURES SIMPLES

### INTRODUCTION

Les deux types d'approximations par éléments finis, décrits dans le *Chapitre II*, génèrent des espaces vectoriels de fonctions ayant des propriétés différentes:

- l'approximation par éléments finis de Lagrange génère un espace vectoriel  $V_L$  de fonctions scalaires continues,
- l'approximation par éléments finis mixtes conduit à un espace vectoriel  $V_m$  de fonctions vectorielles à composantes tangentielles continues.

Dans ce paragraphe, nous présentons la méthode de discrétisation des équations fondamentales (I.19) et (I.22) traduisant les oscillations libre et forcée des structures passives micro-ondes en deux et trois dimensions.

Le logiciel élément fini développé dans ce cadre, sera testé sur des dispositifs simples (cavité métallique homogène, condensateur plan, ...).

### III.1. DISCRETISATION DU PREMIER MEMBRE DE L'EQUATION (I.22) [20], [21], [22]

Les deux équations (I.19) et (I.22) traduisant respectivement la formulation en champ électrique et la formulation en champ magnétique, sont valables pour l'analyse des dispositifs micro-ondes passifs.

Afin de présenter la technique de discrétisation, nous considérons uniquement l'équation en champ magnétique (I.22) présentée dans le *Chapitre I* sous la forme:

$$\forall \vec{\Phi}_m \in (D(\mathcal{R}^3))^3 ; \vec{n}_m \times \vec{\Phi}_m = \vec{0} \quad \text{sur } S_m ;$$

$$\iiint_V \vec{\text{rot}} \left( \frac{1}{\epsilon_r} \left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \vec{H} \right) \cdot \vec{\Phi}_m dV - k_0^2 \iiint_V \mu_r \vec{H} \cdot \vec{\Phi}_m dV = -j\omega\epsilon_0 \sum_{p=1}^{N_p} \iint_{S_p} \vec{J}_{ms_p} \cdot \vec{\Phi}_m dS_p$$

avec  $k_0^2 = \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0$

Ce qui s'écrit encore en utilisant la notion des distributions [*Annexe 1*].



$$\iiint_V \frac{1}{\epsilon_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \cdot \left\{ \text{rot} \right\} \vec{\phi}_m dV - k_0^2 \iiint_V \mu_r \vec{H} \cdot \vec{\phi}_m dV = -j\omega\epsilon_0 \sum_{p=1}^{N_p} \iint_{S_p} \vec{J}_{ms_p} \cdot \vec{\phi}_m dS_p \quad (\text{III.1})$$

Notons  $P_1$  le premier membre de cette équation.

$$P_1 = \iiint_V \frac{1}{\epsilon_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \cdot \left\{ \text{rot} \right\} \vec{\phi}_m dV - k_0^2 \iiint_V \mu_r \vec{H} \cdot \vec{\phi}_m dV$$

Nous allons discrétiser  $P_1$  en utilisant les deux types d'approximations définis précédemment.

### III.1.1. DISCRETISATION PAR UN ELEMENT FINI DE LAGRANGE

Le domaine d'étude est subdivisé (maillé) en un nombre NE d'éléments géométriques simples tels que des triangles en deux dimensions (2D) et des cubes en trois dimensions (3D). Les caractéristiques du milieu (permittivité, perméabilité) sont gardées constantes à l'intérieur de chaque élément. Le terme  $P_1$  s'écrit alors:

$$P_1 = \sum_{K=1}^{NE} \left[ \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{r_K}} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \cdot \left\{ \text{rot} \right\} \vec{\phi}_m dV_K - k_0^2 \iiint_{V_K} \mu_{r_K} \vec{H} \cdot \vec{\phi}_m dV_K \right]$$

Posons 
$$P_1 = \sum_{K=1}^{NE} P_1^K \quad (\text{III.2})$$

Avec

$$P_1^K = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{r_K}} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \cdot \left\{ \text{rot} \right\} \vec{\phi}_m dV_K - k_0^2 \iiint_{V_K} \mu_{r_K} \vec{H} \cdot \vec{\phi}_m dV_K \quad (\text{III.3})$$

La discrétisation consiste à approximer sur chaque élément  $V_K$  du maillage, toutes les composantes du champ  $\vec{H}$  par une somme de polynômes d'interpolation de Lagrange de degré  $k$  choisi (*Paragraphe II.4.2.*).

$$\text{Soit } \vec{H} = \sum_{i=1}^{Nd} \vec{H}_i N_i \quad (\text{III.4})$$

$Nd$  est le nombre de noeuds sur l'élément  $K$ .

$N_i$  est le polynôme d'interpolation de Lagrange au noeud numéro  $i$ .

Le vecteur  $\vec{H}_i$  ayant pour composantes  $(H_{x_i}, H_{y_i}, H_{z_i})$  représente la valeur du champ magnétique (inconnue du problème) au noeud  $i$ .

Le développement de l'opérateur  $\left\{ \vec{\text{rot}} \right\}$  associé à des fonctions [Annexe 1], dans l'expression de  $P_1^K$ , donne:

$$P_1^K = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{r_K}} \left[ \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \phi_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{my}}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \phi_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \phi_{mz}}{\partial x} \right) \right. \\ \left. \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \phi_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{mx}}{\partial y} \right) \right] dV_K - k_0^2 \iiint_{V_K} \mu_{r_K} (H_x \phi_{mx} + H_y \phi_{my} + H_z \phi_{mz}) dV_K \quad (\text{III.5})$$

L'introduction de l'approximation (III.4) dans l'expression (III.5) conduit à un système matriciel, associé à l'élément  $V_K$ , de la forme (III.6):

$$P_1^K = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{r_K}} \sum_{i=1}^{NE} \left[ H_{x_i} \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_{mx_j}}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_{mx_j}}{\partial y} \right) - H_{x_i} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_{my_j}}{\partial x} \right. \\ \left. - H_{x_i} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_{mz_j}}{\partial x} + H_{y_i} \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_{my_j}}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_{my_j}}{\partial x} \right) - H_{y_i} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_{mx_j}}{\partial y} \right. \\ \left. - H_{y_i} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_{mz_j}}{\partial y} + H_{z_i} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_{mz_j}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_{mz_j}}{\partial y} \right) - H_{z_i} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_{mx_j}}{\partial z} \right. \\ \left. - H_{z_i} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_{my_j}}{\partial z} \right] dV_K - k_0^2 \iiint_{V_K} \mu_{r_K} \sum_{i=1}^{NE} \left[ H_{x_i} N_i \phi_{mx_j} + H_{y_i} N_i \phi_{my_j} \right. \\ \left. + H_{z_i} N_i \phi_{mz_j} \right] dV_K \quad (\text{III.6})$$

les fonctions test  $\vec{\phi}_m(\phi_{mx}, \phi_{my}, \phi_{mz})$  sont généralement choisies égales aux fonctions de base;

Soit:  $\forall j \in [1, NE]; \phi_{mx_j} = \phi_{my_j} = \phi_{mz_j} = N_j$



Nous obtenons, avec ce type d'approximation, un système matriciel élémentaire de dimension  $(3 \times NE)^2$  et ayant la forme (III.7):

$$P_1^K = ([A]_K - k_0^2 [B]_K) \{H\} \quad (III.7)$$

Les grandeurs  $\{H\}$ ,  $[A]_K$  et  $[B]_K$  sont définies comme suit:

- $\{H\}^t = (H_{x_1}, H_{y_1}, H_{z_1}, \dots, H_{x_{NE}}, H_{y_{NE}}, H_{z_{NE}})$  représente les valeurs des trois composantes du champ magnétique aux noeuds d'interpolation de l'élément de maillage  $V_K$ .
- $[A]_K$  est une matrice élémentaire symétrique dite "raideur", dont ses termes sont donnés par:

$$[A]_K = \begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] & [A_3] \\ [A_2]^t & [A_4] & [A_5] \\ [A_3]^t & [A_5]^t & [A_6] \end{bmatrix}$$

$$\forall j \in [1, NE] ; \quad \forall i \in [1, NE]$$

$$A_{1_{ij}} = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{rK}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dV_K$$

$$A_{2_{ij}} = - \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{rK}} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV_K$$

$$A_{3_{ij}} = - \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{rK}} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV_K$$

$$A_{4_{ij}} = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{rK}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] dV_K$$

$$A_{5_{ij}} = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{rK}} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} dV_K$$

$$A_{6ij} = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{rK}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dV_K$$

- $[B]_K$  est une matrice élémentaire symétrique dite "masse", dont ses termes sont donnés par:

$$[B]_K = \begin{bmatrix} [B_1] & [0] & [0] \\ [0] & [B_1] & [0] \\ [0] & [0] & [B_1] \end{bmatrix}$$

$$\forall i \in [1, NE] ; \quad \forall j \in [1, NE]$$

$$B_{1ij} = \iiint_{V_K} \mu_{rK} N_i N_j dV_K$$

En tenant compte de la relation (III.2), nous pouvons écrire:

$$P_1 = \sum_{K=1}^{NE} ([A]_K - k_0^2 [B]_K) \{H\} = ([A] - k_0^2 [B]) \{H'\}$$

ce qui donne:

$$[A] = \sum_{K=1}^{NE} [A]_K ; \quad [B] = \sum_{K=1}^{NE} [B]_K$$

$\{H'\}$  est le vecteur  $\{H\}$  étendu à l'ensemble des noeuds du maillage. Cette technique est appelée assemblage des matrices élémentaires.

### III.1.2. SOLUTIONS PARASITES [12], [23], [24], [25]

Lorsque les plans des différents accès sont court-circuités (donc pas d'excitation), la structure résonnante est alors en oscillation libre.

L'équation à résoudre se réduit dans ce cas au système (III.8):

$$P_1 = ([A] - k_0^2 [B]) \{H'\} = 0 \tag{III.8}$$

C'est un système à valeurs propres  $k_0^2 = \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0$  et à vecteurs propres  $\{H'\}$ .



$\omega_0$  donne la fréquence de résonance des modes et le vecteur  $\{H^i\}$  correspond aux valeurs des composantes  $(H'_x, H'_y, H'_z)$  aux noeuds d'interpolation du maillage.

Nous rappelons que ce système est obtenu par discrétisation de l'équation suivante:

$$\forall \bar{\phi}_m \in (D(\mathcal{R}^3))^3; \bar{\phi}_m \text{ continue et } \bar{n}_m \times \bar{\phi}_m = \bar{0} \quad \text{sur } S_m;$$

$$\iiint_V \frac{1}{\epsilon_r} \left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \bar{H} \cdot \left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \bar{\phi}_m dV - k_0^2 \iiint_V \mu_r \bar{H} \bar{\phi}_m dV = 0 \quad (\text{III.9})$$

L'équation (I.20) relative à la divergence de  $\bar{H}$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \iiint_V \text{div}(\bar{B}) \cdot \phi dV = 0 \text{ or } \bar{B} = \mu \bar{H} = \mu_0 \mu_r \bar{H} \\ \Rightarrow \iiint_{V_k} \mu_r \bar{H} \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi dV = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Les équations (III.9) et (III.10) sont équivalentes si on peut écrire:

$$\bar{\phi}_m = \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi \quad (\text{III.11})$$

Soit  $\phi$  une fonction continue. Le gradient d'une fonction continue, n'ayant que sa composante tangentielle toujours continue, nous ne pouvons plus écrire de façon générale  $\bar{\phi} = \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi$ .

Par conséquent, dans le cadre d'une discrétisation utilisant les éléments de Lagrange, l'équation de Maxwell portant sur le rotationnel de  $\bar{H}$  (respectivement de  $\bar{E}$ ) n'entraîne pas systématiquement l'équation de Maxwell relative à la divergence de  $\bar{B}$  (respectivement de  $\bar{D}$ ). La loi de conservation de la charge, n'est de ce fait plus vérifiée.

La non vérification simultanée des équations de Maxwell, conduit à l'apparition de modes de résonance non physiques, dits parasites.

Pour éliminer ces solutions non physiques, nous proposons la discrétisation de l'équation (III.1) par des éléments finis mixtes, assurant la continuité des composantes tangentielles du champ.





### III.1.3. DISCRETISATION PAR ELEMENT FINI MIXTE

L'approximation du champ  $\vec{H}$  par des éléments finis mixtes, sur un élément de maillage K, s'écrit:

$$\vec{H} = \sum_{K=1}^{N\ell} H_i \vec{N}_i \quad (\text{III.12})$$

$N\ell$  est le nombre total de degrés de liberté sur un élément K (*Paragraphe II.7.*).

$H_i$  est la valeur du champ  $\vec{H}$  associé au degré de liberté numéro i.

$\vec{N}_i$  représente le polynôme d'interpolation de Nedelec développé au (*Paragraphe II.7.*).

En introduisant cette approximation dans le premier membre  $P_1$  de l'équation (III.1), nous obtenons:

$$P_1 = \sum_{K=1}^{NE} P_1^K ; \text{ NE étant le nombre total d'éléments du maillage.}$$

$$\forall j \in [1, N\ell] ; \quad \forall \vec{\phi}_m \in (D(\mathcal{R}^3))^3 ; \text{ telle que } (\vec{n}_m \times \vec{\phi}_m) = \vec{0} \quad \text{sur } S_m;$$

$$P_1^K = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{rK}} \sum_{i=1}^{N\ell} H_i \left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \vec{N}_i \cdot \left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \vec{\phi}_{m_j} dV_K - k_0^2 \iiint_{V_K} \mu_{rK} \sum_{i=1}^{N\ell} H_i \vec{N}_i \cdot \vec{\phi}_{m_j} dV_K \quad (\text{III.13})$$

Comme précédemment, on pose  $\vec{\phi}_{m_j} = \vec{N}_j$

L'expression de  $P_1$  peut se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$P_1^K = ([AA]^K - k_0^2 [BB]^K) \{H_i\} \quad (\text{III.14})$$

$\{H_i\}^t = (H_1, H_2, \dots, H_{N\ell})$  représente les valeurs du champ  $\vec{H}$  associées aux  $N\ell$  degrés de liberté de l'élément K.

A un couple (i,j) de degrés de liberté de l'élément K du maillage, correspondent les termes  $AA_{ij}^K$  et  $BB_{ij}^K$  tels que:

$$AA_{ij}^K = \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{rK}} \left[ \left( \left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{rot} \end{matrix} \right\} \bar{N}_i \right)_x \cdot \left( \left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{rot} \end{matrix} \right\} \bar{N}_j \right)_x + \left( \left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{rot} \end{matrix} \right\} \bar{N}_i \right)_y \cdot \left( \left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{rot} \end{matrix} \right\} \bar{N}_j \right)_y + \left( \left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{rot} \end{matrix} \right\} \bar{N}_i \right)_z \cdot \left( \left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{rot} \end{matrix} \right\} \bar{N}_j \right)_z \right] dV_K$$

avec  $\left( \left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{rot} \end{matrix} \right\} \bar{N}_i \right)_u$  est la composante du vecteur  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{rot} \end{matrix} \right\} \bar{N}_i$  dans la direction  $u$ .

$$BB_{ij}^K = \iiint_{V_K} \mu_{rK} \bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot dV_K$$

les expressions des termes de ces matrices sont calculées en effectuant la transformation d'un élément de maillage réel en un élément de référence (*Paragraphe II.7.*).

Enfin, par assemblage des matrices élémentaires  $[AA]^K$  et  $[BB]^K$ , pour  $K$  variant de 1 à NE (nombre d'élément total du maillage), nous obtenons le système global à valeurs et vecteurs propres, à résoudre par des techniques numériques adéquates.

Soit

$$P_1 = ([AA] - k_0^2 [BB]) \{H_i'\}$$

- $\{H_i'\}$  est le vecteur ayant pour composantes les valeurs de  $\bar{H}$  en tous les degrés de liberté du maillage.  $\{H_i\}$  est obtenu par extension de  $\{H_i'\}$  à tous les degrés de liberté du maillage.

- $[AA] = \sum_{K=1}^{NE} [AA]^K$

- $[BB] = \sum_{K=1}^{NE} [BB]^K$

### III.2. DISCRETISATION DU SECOND MEMBRE DE L'EQUATION (I.22)

Le second membre de l'équation (I.22) s'écrit:

$$P_2 = -j\omega\epsilon_0 \sum_{p=1}^{N_p} \iint_{S_p} \vec{J}_{ms_p} \cdot \vec{\phi}_m dS_p$$

ou encore:



$$P_2 = -j\omega\epsilon_0 \sum_{p=1}^{N_p} \iint_{S_p} (a_p + b_p) (\bar{n}_p \times \bar{E}_t) \cdot \bar{\phi}_m dS_p \quad (\text{III.15})$$

La discrétisation de l'expression de  $P_2$  par la méthode des éléments finis, nécessite le maillage de la surface  $S_p$  du plan d'accès  $p$ . Ce maillage en deux dimensions (2D) est conçu de façon à coïncider avec la face du maillage (3D) reposant sur la surface  $S_p$ . Nous avons donc au préalable à calculer les valeurs du vecteur  $(\bar{n}_p \times \bar{E}_t)$  aux noeuds d'interpolation du maillage (2D) du plan d'accès  $p$ , avant d'appliquer la technique de discrétisation.

Le calcul du champ électromagnétique  $(\bar{E}_t, \bar{H}_t)$ , nécessaire à la détermination des densités de courants surfaciques sur un plan d'accès  $p$ , sera développé plus loin dans le **(Paragraphe III.5.A)**.

Les valeurs des champs  $\bar{E}_t$  et  $\bar{H}_t$  étant connues aux noeuds d'interpolation du maillage relatif à l'accès  $p$ , nous allons discrétiser l'expression (III.15).

Pour cela, développons  $\bar{J}_{ms_p}$  et  $\bar{E}_t$  dans le repère local  $(\bar{u}'_x, \bar{u}'_y, \bar{u}'_z)$  de l'accès  $p$ .

$$\bar{J}_{ms_p} = J_{m_{xs_p}} \bar{u}'_x + J_{m_{ys_p}} \bar{u}'_y; \quad \bar{E}_t = E_x \bar{u}'_x + E_y \bar{u}'_y$$

La normale à l'accès  $p$  étant  $\bar{n}_p = \bar{u}'_z$ , nous obtenons:

$$\bar{J}_{ms_p} = -(\bar{n}_p \times \bar{E}_t) = -(\bar{u}'_z \times \bar{E}_t) \Rightarrow \begin{cases} J_{m_{xs_p}} = +E_y \\ J_{m_{ys_p}} = -E_x \end{cases}$$

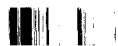
La phase du champ dans les plans de référence est à imposer

soit  $\bar{E}'_t = -j\bar{E}_t = E'_x \bar{u}'_x + E'_y \bar{u}'_y$ ;  $j$  étant le nombre complexe.

Le second membre  $P_2$  (III. 15) s'écrit alors dans le repère local:

$$\forall \bar{\phi}_m \in (D(\mathbb{R}^3))^3; (\bar{n}_m \times \bar{\phi}_m) = \bar{0} \text{ sur } S_m$$

$$\bar{\phi}_m = \phi_{mx} \bar{u}'_x + \phi_{my} \bar{u}'_y + \phi_{mz} \bar{u}'_z$$



$$P_2 = \sum_{p=1}^{N_p} \omega \epsilon_0 \iint_{S_p} (a_p + b_p) (\bar{u}'_z \times \bar{E}_t) \bar{\phi}_m dS_p$$

$$\Rightarrow P_2 = \omega \epsilon_0 \sum_{p=1}^{N_p} (a_p + b_p) \iint_{S_p} (E'_y \phi_{mx} - E'_x \phi_{my}) dx' dy'$$

L'introduction de l'approximation de  $\bar{E}'$  par l'élément fini de Lagrange

(  $E'_{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} = \sum_{i=1}^{NN} E'_{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} N_i$  ), sur chaque élément  $K'$  du maillage (2D) du plan d'accès  $p$ , dans cette

expression, conduit à l'équation (III. 16)

$$\forall j \in [1, NN]; \phi_{m \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} = N_j$$

$$P_2 = \omega \epsilon_0 \sum_{p=1}^{N_p} (a_p + b_p) \sum_{K'=1}^{N'_E} \sum_{i=1}^{NN} \left( \iint_{K'} (E'_{y_i} N_i N_j - E'_{x_i} N_i N_j) dx' dy' \right) \quad (III. 16)$$

$N'_E$  est le nombre d'élément du maillage (2D) de la surface  $S_p$ .

$NN$  est le nombre de noeuds d'interpolation sur un élément  $K'$  de ce maillage et  $N_p$  représente le nombre d'accès du dispositif.

On écrit  $P_2$  sous la forme:

$$P_2 = \sum_{p=1}^{N'_p} (a_p + b_p) \sum_{K'=1}^{N'_E} \left\{ J'_{ms_p} \right\}_{K'}$$

$$\forall j \in [1, NN];$$

$$\left\{ J'_{ms_p} \right\}_{K'} = \omega \epsilon_0 \sum_{i=1}^{NN} \left( \iint_{K'} (E'_{y_i} N_i N_j - E'_{x_i} N_i N_j) dx' dy' \right) \quad (III. 17)$$

$\left\{ J'_{ms_p} \right\}_{K'}$  s'écrit alors sous la forme matricielle suivante:

$$\left\{ J'_{ms_p} \right\}_{K'} = \omega \epsilon_0 \begin{bmatrix} [C_1] & [0] \\ [0] & [C_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E'_y\} \\ -\{E'_x\} \end{Bmatrix} \quad (III.18)$$

les termes  $C_{1ij}$  de cette matrice élémentaire sont donnés par:



$$C_{lij} = \iint_K N_i N_j dx' dy' \quad (III.19)$$

$\begin{Bmatrix} (E'_y) \\ -(E'_x) \end{Bmatrix}$  est un vecteur colonne tel que le  $i^{\text{ème}}$  terme est formé de  $(E'_{yi})$  et de  $(-E'_{xi})$ .

En suivant ce procédé, nous aboutissons finalement au vecteur  $\{J'_{ms_p}\}$  obtenu par assemblage des vecteurs élémentaires  $\{J'_{ms_p}\}_K$ , ( $K \in [1, N^E]$ ).

La dimension du vecteur  $\{J'_{ms_p}\}$  est égale au nombre de noeuds d'interpolation du maillage (2D) de la surface  $S_p$  de l'accès  $p$ .  
 Il reste alors, pour chaque plan d'accès ( $p \in [1, Np]$ ), à convertir chaque vecteur  $\{J'_{ms_p}\}$  de la base du repère local dans la base du repère global associé au maillage de la structure étudiée.

### III.3. FORME GENERALE DE L'EQUATION (I. 22) DISCRETISEE PAR L'ELEMENT DE LAGRANGE

Après discrétisation, l'équation (I. 22) s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$([A] - k_0^2[B])\{H\} = \sum_{p=1}^{Np} (a_p + b_p)\{J''_{ms_p}\} \quad (III.20)$$

- $\{J''_{ms_p}\}$  est le vecteur  $\{J'_{ms_p}\}$  étendu à l'ensemble des noeuds d'interpolation du maillage (3D) de la structure étudiée.
- $\{\bar{H}\}$  est un vecteur contenant les trois composantes du champ magnétique sur chaque noeud d'interpolation.
- La fréquence  $f$  (donc  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ) étant imposée, les variables inconnues du système (III. 20) sont les ondes  $a_p$  et  $b_p$  et le vecteur  $\{H\}$ . La résolution de (III.20) conduit à la détermination de la matrice  $[S]$  du dispositif en suivant les étapes ci-après.
- Calculons  $[M] = [A] - k_0^2[B]$ .
- $[M]$  est généralement inversible, on calcule ensuite:
 
$$\{H\} = \sum_{p=1}^{Np} (a_p + b_p)[M]^{-1}\{J''_{ms_p}\}.$$
- Calculons  $\{\psi_p\} = [M]^{-1}\{J''_{ms_p}\}$  pour  $p=1$  à  $Np$ ,
- Le courant électrique surfacique sur l'accès  $j$  s'écrit alors:



$$\bar{n}_j \times \{\bar{H}\} = \sum_{p=1}^{Np} (\bar{n}_j \times (a_p + b_p) \{\psi_p\}_j)$$

- Or ce courant prend la forme suivante sur l'accès j:

$$\bar{n}_j \times \{\bar{H}\} = (a_j - b_j) \{J_{es,j}\}$$

$\{J_{es,j}\}$  représente le courant électrique surfacique sur l'accès j.

Nous obtenons finalement:

$$\forall j \in [1, Np]; \quad (a_j + b_j) \{J_{es,j}\} = \sum_{p=1}^{Np} (a_p + b_p) (\bar{n}_j \times \{\psi_p\}_j) \quad (III.21)$$

$\{\psi_p\}_j$  est obtenu par réduction du vecteur  $\{\psi_p\}$  au plan d'accès j, en ne considérant que ses composantes associées aux noeuds d'interpolation du maillage (2D) de ce plan.

Le développement du système (III. 21) donne:

$$(a_1 - b_1) \{J_{es_1}\} = (a_1 + b_1) (\bar{n}_1 \times \{\psi_1\}_1) + \dots + (a_{Np} + b_{Np}) (\bar{n}_1 \times \{\psi_{Np}\}_1)$$

·  
·  
·

$$(a_{Np} - b_{Np}) \{J_{es_{Np}}\} = (a_1 + b_1) (\bar{n}_{Np} \times \{\psi_1\}_{Np}) + \dots + (a_{Np} + b_{Np}) (\bar{n}_{Np} \times \{\psi_{Np}\}_{Np})$$

On multiplie ensuite chaque équation j, ( $j \in [1, Np]$ ), par  $\{J_{es,j}\}^*$  et nous arrangeons le système obtenu sous la forme (III.22):

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{Np} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{Np} \end{Bmatrix} \quad (III.22)$$



D'où l'on déduit du système (III.22), les termes de la matrice de répartition [S] du dispositif.

Cette méthode présente l'avantage d'inverser une seule fois la matrice [M].

### III.4. VALIDATION DE LA METHODE D'ANALYSE DES STRUCTURES RESONNANTES EN OSCILLATION LIBRE

En oscillation libre, les plans des différents accès sont court-circuités.

Ainsi, l'absence de courants imposés sur ces plans, permet d'annuler le second terme  $P_2$  de l'équation (III.20)

Dans ces conditions, la structure à analyser devient une cavité métallique composée de  $d$  milieux  $\Omega_i$ , linéaires, homogènes, isotropes, de permittivité  $\epsilon_i$  et de perméabilité  $\mu_i$  comme le montre la figure (III.1)

Nous supposons les milieux  $\Omega_i$  sans charges et sans courants. Nous rappelons dans ces conditions, les deux équations à résoudre par la méthode des éléments finis.

$$\iiint_V \frac{1}{\epsilon_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \cdot \left\{ \text{rot} \right\} \vec{\Phi}_m dv - k_0^2 \iiint_V \mu_r \vec{H} \cdot \vec{\Phi}_m dv = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{E} \cdot \left\{ \text{rot} \right\} \vec{\Phi}_e dv - k_0^2 \iiint_V \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{\Phi}_e dv = 0 \quad (\text{III.24})$$

$$\text{Avec } \vec{n}_m \times \vec{\Phi}_m = \vec{0} \text{ sur } S_m, \quad \vec{n}_e \times \vec{\Phi}_e = \vec{0} \text{ sur } S_e \text{ et } k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

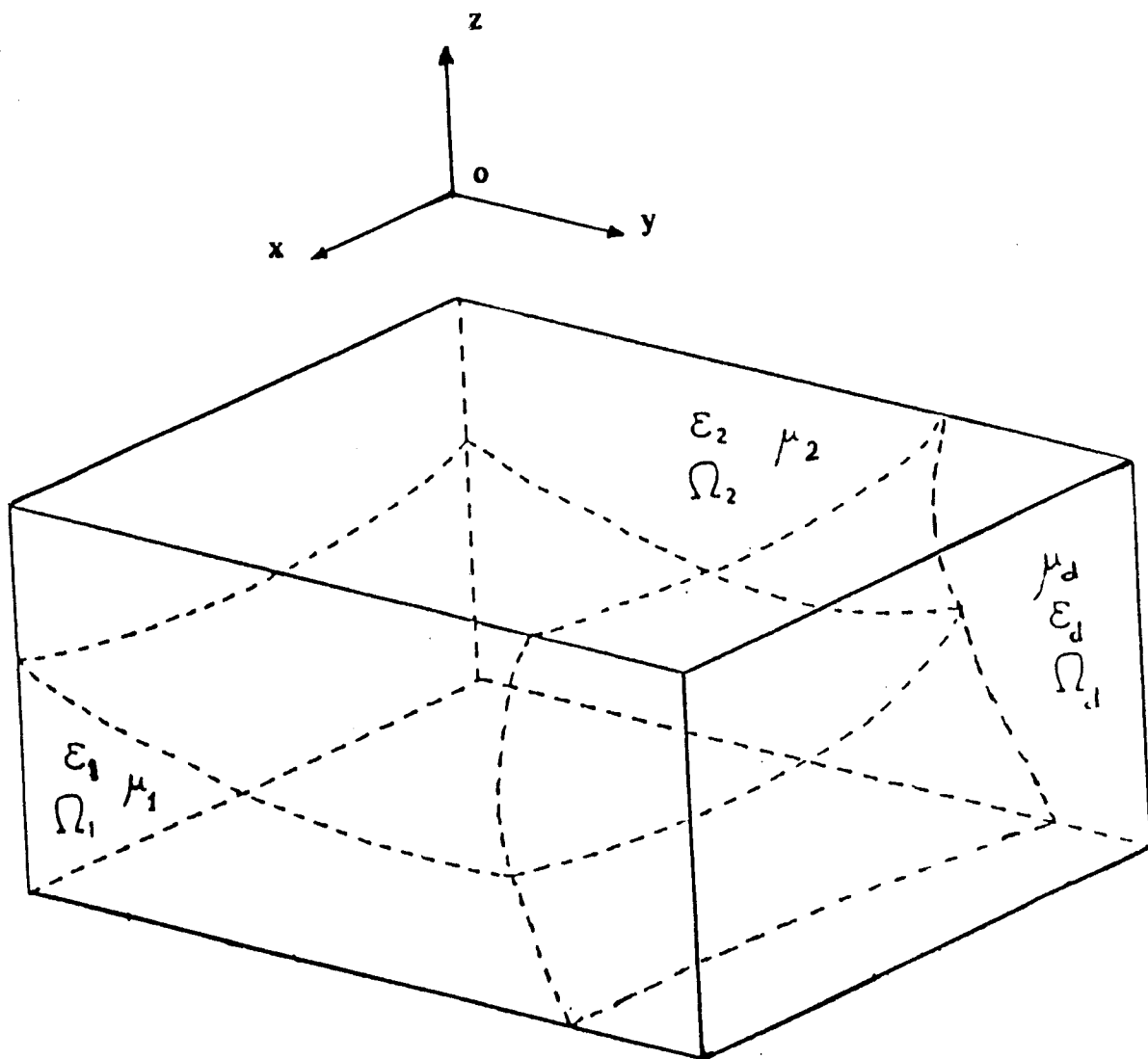
Si les milieux  $\Omega_i$  sont inhomogènes en  $\epsilon_i$  seulement ( $\mu_i = \text{constante}$ ), nous utilisons la formulation en champ magnétique (III.23); puisque toutes les composantes du champ magnétique  $\vec{H}$  seront continues. Dans le cas contraire; c'est la formulation en champ électrique  $\vec{E}$  (III.24) qui sera utilisée pour caractériser cette structure résonnante.

Dans le cas général, l'étude de ces structures peut être établie dans le système de coordonnées cartésiennes (o,x,y,z). La caractérisation de ces dispositifs consiste à déterminer pour chaque mode de résonance de nature  $TE_{nmp}$ ,  $TM_{nmp}$  ou  $HEM_{nmp}$  (n, m et p désignant respectivement le nombre de demi-ondes selon les axes  $o\vec{x}$ ,  $o\vec{y}$ , et  $o\vec{z}$ ):

- sa fréquence de résonance,
- la distribution de son champ électromagnétique,
- ses pertes et ses énergies,
- son facteur de qualité à vide.

Si la structure à analyser ne présente aucune symétrie pouvant réduire l'étude en deux dimensions, c'est la méthode des éléments finis en trois dimensions, utilisant un maillage avec des éléments cubiques, qui sera employée pour discrétiser les équations (III.23) et (III.24).





cavité résonnante métallique  
contenant d milieux  $\Omega_i$

figure III-1





Le résultat de cette discrétisation est un système à valeurs et vecteurs propres de la forme  $([A] - \lambda[B]) \{\psi\} = 0$ , dont les termes des matrices  $[A]$  et  $[B]$  sont calculés précédemment (paragraphes (III.1.1) et (III.1.3))

A chaque valeur propre  $\lambda = \omega_0 \epsilon_0 \mu_0$ , définissant une fréquence de résonance, correspond un vecteur propre  $\{\psi\}$  dont les composantes représentent les valeurs des composantes du champ électrique  $\vec{E}$  ou magnétique  $\vec{H}$  considéré dans la formulation, en tous les noeuds du maillage.

#### III.4.1. CALCUL DES COMPOSANTES RESTANTES DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE [12], [19].

Les composantes restantes du champ électromagnétique sont ensuite obtenues de la relation (III.25) déduite des équations de Maxwell.

$$\text{Soit } \vec{L} = j\ell A \left( \frac{1}{a} \left\{ \begin{array}{c} \vec{\phantom{\psi}} \\ \text{rot} \end{array} \right\} \vec{\psi} \right) \quad (\text{III.25})$$

le tableau (III.1) montre la signification de chacune des variables impliquées dans la relation (III.25)

TABLEAU III.1

Formulation $\vec{E}$	Formulation $\vec{H}$
$\vec{\psi} = \vec{E}$	$\vec{\psi} = \vec{H}$
$\vec{L} = \vec{H}$	$\vec{L} = \vec{E}$
$\ell = +1$	$\ell = -1$
$a = \mu_r$	$a = \epsilon_r$
$A = \frac{1}{\omega \mu_0}$	$A = \frac{1}{\omega \epsilon_0}$

Nous explicitons à ce niveau, le calcul des composantes du vecteur  $\vec{L}$  en fonction de celle de  $\vec{\psi}$  pour une approximation par des éléments finis de Lagrange. Les vecteurs  $\vec{L}$  et  $\vec{\psi}$  s'écrivent dans le système de coordonnées cartésiennes (o,x,y,z) de vecteurs unitaires  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ .

$$\vec{L} = L_x \vec{u}_x + L_y \vec{u}_y + L_z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{\psi} = \psi_x \vec{u}_x + \psi_y \vec{u}_y + \psi_z \vec{u}_z:$$

L'équation (III.25) permet d'écrire:



$$\begin{cases} L_x = j\ell A \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) & \text{(III.26.a)} \\ L_y = j\ell A \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) & \text{(III.26.b)} \\ L_z = j\ell A \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) & \text{(III.26.c)} \end{cases}$$

Nous introduisons ensuite dans ce système, l'approximation de chaque composante de  $\bar{\psi}$  sur un élément de maillage:

$$\text{soit } \psi \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \sum_{i=1}^{Nd} \psi \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} N_i ; \quad \text{(III.27)}$$

$N_d$  est le nombre de noeuds d'interpolation sur un élément de maillage.  
 $N_i$  est le polynôme d'interpolation de Lagrange au noeud  $i$ .  
Finalement, sur un noeud  $i$  du maillage, les composantes de  $\bar{L}$  s'écrivent:

$$\begin{cases} L_{x_i} = j\ell A \sum_{i=1}^{Nd} \left( \psi_{z_i} \frac{\partial N_i}{\partial y} - \psi_{y_i} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) & \text{(III.28.a)} \\ L_{y_i} = j\ell A \sum_{i=1}^{Nd} \left( \psi_{x_i} \frac{\partial N_i}{\partial z} - \psi_{z_i} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) & \text{(III.28.b)} \\ L_{z_i} = j\ell A \sum_{i=1}^{Nd} \left( \psi_{y_i} \frac{\partial N_i}{\partial x} - \psi_{x_i} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) & \text{(III.28.c)} \end{cases}$$

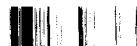
### III.4.2 CALCUL DU FACTEUR DE QUALITE A VIDE $Q_0$ , [12], [19], [26]

Le coefficient de qualité à vide  $Q_0$  est un paramètre essentiel à définir en vue de la caractérisation du comportement des structures résonnantes. Il est défini par la relation (III.29).

$$Q_0 = \omega_0 \frac{\bar{W}}{\bar{P}} \quad \text{(III.29)}$$

Où  $\omega_0$  est la pulsation de résonance et  $\bar{P}$  est la puissance moyenne dissipée.  $\bar{W}$  représente l'énergie moyenne emmagasinée dans la structure résonnante, regroupant les énergies moyennes électrique  $\bar{W}_e$  et magnétique  $\bar{W}_m$ .

$$\text{Soit } \bar{W} = \bar{W}_e + \bar{W}_m$$



Les énergies  $\overline{W}_e$  et  $\overline{W}_m$  sont données par les formules respectives (III.30) et (III.31)

$$\overline{W}_e = \frac{1}{4} R_e \left( \iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E}^* dV \right) = \frac{1}{4} \epsilon_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \iiint_{V_K} R_e(\epsilon_{r_K}) \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV_K \right) \quad (III.30)$$

$$\overline{W}_m = \frac{1}{4} R_e \left( \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H}^* dV \right) = \frac{1}{4} \mu_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \iiint_{V_K} R_e(\mu_{r_K}) \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV_K \right) \quad (III.31)$$

$V_K$  est le volume de l'élément de maillage numéro K et NE représente le nombre total de ces éléments. Pour  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  réelles pures (cas des matériaux sans pertes) et sachant que  $\vec{E} = \frac{1}{j\omega_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H}$ , les relations (III.30) et (III.31) deviennent:

$$\overline{W}_e = \frac{1}{4\epsilon_0 \omega_0^2} \sum_{K=1}^{NE} \left( \iiint_{V_K} \frac{1}{\epsilon_{r_K}} \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H} \cdot \left\{ \text{rot} \right\} \vec{H}^* dV_K \right) \quad (III.32)$$

$$\overline{W}_m = \frac{1}{4} \mu_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \iiint_{V_K} \mu_{r_K} \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV_K \right) \quad (III.33)$$

Nous rappelons que la discrétisation de l'équation (III.23) par la méthode des éléments finis conduit au système matriciel global suivant:

$$((A) - \lambda[B])\{H\} = 0$$

$$\text{Avec } [A] = \sum_{K=1}^{NE} [A]_K \quad \text{et} \quad [B] = \sum_{K=1}^{NE} [B]_K$$

les expressions des termes des matrices  $[A]_k$  et  $[B]_k$  calculées auparavant (*Paragraphe III.1.1.*), sont retrouvées dans les expressions de  $\overline{W}_e$  et de  $\overline{W}_m$ .

Ainsi le calcul des énergies  $\overline{W}_e$  et  $\overline{W}_m$  se réduit à:

$$\overline{W}_e = \frac{1}{4\epsilon_0 \omega_0^2} \sum_{K=1}^{NE} \left( \{H\}_K^* [B]_K \{H\}_K \right) \quad (III.34)$$



$$\bar{W}_m = \frac{1}{4} \mu_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \{H\}_K^{t*} [A]_K \{H\}_K \right) \quad (III.35)$$

$\{H\}_K$  est le vecteur champ magnétique sur les noeuds d'interpolation de l'élément numéro K. Avec une formulation en champ électrique (III.24), les expressions des énergies électrique et magnétique sont obtenues en suivant la même démarche.

Soient:

$$\bar{W}_e = \frac{1}{4} \epsilon_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \iiint_{V_K} \epsilon_{r_K} \bar{E} \cdot \bar{E}^* dV_K \right) \quad (III.36)$$

$$= \frac{1}{4} \epsilon_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \{E\}_K^{*t} [B]_K \{E\}_K \right)$$

$$\bar{W}_m = \frac{1}{4} \mu_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \iiint_{V_K} \mu_{r_K} \bar{H} \cdot \bar{H}^* dV_K \right) \quad (III.37)$$

$$= \frac{1}{4 \epsilon_0 \omega_0^2} \mu_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \{E\}_K^{*t} [A]_K \{E\}_K \right)$$

Il est à noter qu'à la résonance, il y'a équipartition des énergies moyennes électrique et magnétique emmagasinées dans la structure fermée.

Soit  $\bar{W}_e = \bar{W}_m$

La puissance moyenne dissipée  $\bar{P}$  dans la structure regroupe les pertes métalliques  $\bar{P}_{met}$  sur le blindage et les pertes diélectriques  $\bar{P}_d$  dans les matériaux.

Soit  $\bar{P} = \bar{P}_{met} + \bar{P}_d$

$\bar{P}_{met}$  est calculée sur les surfaces métalliques  $S_{met}$  de la structure en utilisant la relation (III.38).

$$\bar{P}_{met} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0 \epsilon_0}{2}} \iint_{S_{met}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{met}}} \bar{H}_t \cdot \bar{H}_t^* dS_{met} \quad (III.38)$$



$\sigma_{\text{met}}$  est la conductivité métallique de la surface  $S_{\text{met}}$ . Le champ magnétique  $\vec{H}$  étant connu sur les parois métalliques de la structure, il suffit de repérer  $md$  éléments du maillage ayant une face commune avec cette paroi, pour calculer cette intégrale.

$\overline{P}_{\text{met}}$  s'écrit alors:

$$\overline{P}_{\text{met}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0 \epsilon_0}{2}} \sum_{i=1}^{md} \iint_{S_{i_{\text{met}}}} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_{i_{\text{met}}}}} \vec{H}_t \cdot \vec{H}_t^* \right) dS_{i_{\text{met}}} \quad (\text{III.39})$$

$S_{i_{\text{met}}}$  est la surface de la face du  $i^{\text{ème}}$  élément, en contact avec la paroi métallique du blindage de la structure.

Dans le cas général, les pertes dans les matériaux sont de deux natures:

- Pertes électriques  $\overline{P}_{d_e}$  dues à la partie imaginaire  $\epsilon_r''$  non nulle de la permittivité relative  $\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$ ,

$$\text{soit } \overline{P}_{d_e} = \frac{1}{2} \omega_0 \epsilon_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \iiint_{V_K} \epsilon_{rK}'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV_K \right) \quad (\text{III.40})$$

- Pertes magnétiques  $\overline{P}_{d_m}$  dues à la partie imaginaire  $\mu_r''$  non nulle de la perméabilité relative  $\mu_r = \mu_r' - j\mu_r''$ ,

$$\text{soit } \overline{P}_{d_m} = \frac{1}{2} \omega_0 \mu_0 \sum_{K=1}^{NE} \left( \iiint_{V_K} \mu_{rK}'' \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV_K \right) \quad (\text{III.41})$$

Ainsi  $\overline{P}_d = \overline{P}_{d_e} + \overline{P}_{d_m}$ .

Finalement, la connaissance des grandeurs  $\overline{W}$  et  $\overline{P}$  permet de calculer aisément le coefficient de qualité à vide  $Q_0$  de la structure étudiée.

### III.4.3. ANALYSE D'UNE CAVITE PARALLELIPIPEDIQUE HOMOGENE PAR LE MEF-3D

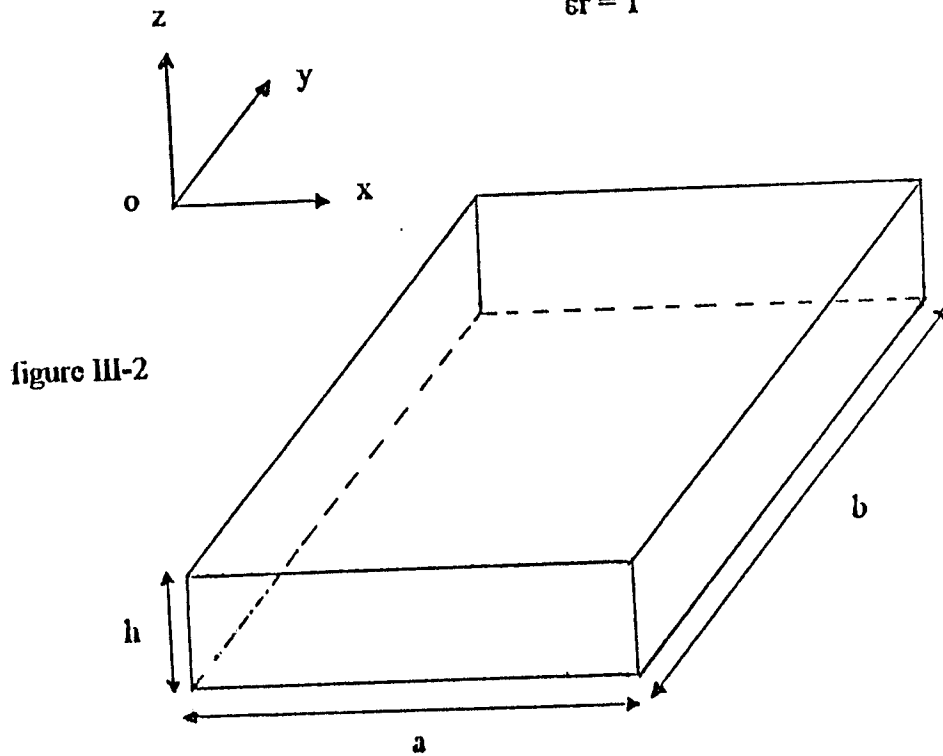
Le logiciel MEF-3D développé est appliqué à la cavité parallépipédique vide de la figure (III.2); dont on sait calculer analytiquement les fréquences  $f_{th}$  de résonance des modes  $TE_{nmp}$  et  $TM_{nmp}$ .

$$\text{Soit } f_{th} = \frac{C_0}{2\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2} \quad (\text{III.42})$$



cavité métallique parallépipédique vide

$a = 10 \text{ mm}$   
 $b = 12 \text{ mm}$   
 $h = 1 \text{ mm}$   
 $\epsilon_r = 1$



Pour des fréquences inférieures à 25 GHz, le calcul théorique montre la présence d'un seul mode  $TE_{010}$  ayant une fréquence de 19,512 GHz.

Les résultats obtenus par la MEF-3D, dans la bande de fréquences (18-25) GHz, utilisant des approximations de degrés 1 du type Lagrange et du type élément mixte, sont présentés sur le tableau (III-2).



TABLEAU III-2

Elément de Lagrange	Elément mixte		Nature du mode
	Formulation en $\vec{E}$ (f en GHz)	Formulation en $\vec{H}$ (f en GHz)	
19,517	/	/	Parasite
19,672	19,654	19,627	TE <sub>010</sub>
21,230	/	/	Parasite
22,785	/	/	Parasite

Nous remarquons de ces résultats, la cohérence des trois méthodes, malgré le faible degré des polynômes d'interpolation.

L'utilisation d'une approximation par des éléments finis de Lagrange pour discrétiser une formulation vectorielle, provoque l'apparition de modes parasites; ce qui engendre une perte considérable de temps de calcul.

Par contre, l'utilisation d'une approximation du type élément fini mixte ne délivre que des modes physiques.

#### III.4.4. ANALYSE DES STRUCTURES CYLINDRIQUES PAR LA MEF-2D

La méthode des éléments finis étant une méthode numérique, alors par soucis d'économie de place mémoire dans l'ordinateur, nous exploitons toujours les symétries possibles dans la structure étudiée. En effet, si la structure à analyser est cylindrique, le système de coordonnées cylindropolaires  $(\rho, r, \theta, z)$  est le plus adapté, et l'étude se réduit à la section droite  $(r, z)$  puisque le champ électromagnétique varie en  $\exp(jn\theta)$  (périodique) selon la direction azimutale  $\theta$ .

Une structure ayant cette géométrie, ainsi que sa section droite  $(r, z)$ , ont été présentées sur les figures (I.2) et (I.3) du *Chapitre I*.

Dans ce cas, nous utilisons la MEF-2D pour analyser ces dispositifs. Cette étude a été longuement détaillée dans l'article [12]. Nous la reprenons brièvement dans ce travail pour concevoir des filtres millimétriques à structures cylindriques.

##### a. ANALYSE DES STRUCTURES CYLINDRIQUES SANS PERTES

Les équations fondamentales (III.23) et (III.24) restent encore valables.

Pour une valeur de  $n$  fixée, leur discrétisation par les MED-2D en coordonnées cylindriques [12] conduit également à un système à valeurs et vecteurs propres de la forme:



$$([A] - k_0^2 [B]) \{\Psi\} = 0$$

$k_0^2 = \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0 \mu_{\text{eff}}$  ;  $\omega_0$  est la pulsation de résonance.

$\{\Psi\} = (\Psi_{r_i}, \Psi_{\theta_i}, \Psi_{z_i} \dots \Psi_{r_e}, \Psi_{\theta_e}, \Psi_{z_e})^t$  représente les valeurs des composantes du champ électrique  $\vec{E}$  ou celle des composantes du champ magnétique  $\vec{H}$  sur les nœuds d'interpolation du maillage 2D de la section droite (r,z) de la structure étudiée. Les termes des matrices [A] et [B] ont été développés dans les références [12] et [19].

### a.1. DESCRIPTION DES MODES DE RESONANCE

Dans ces structures, les modes de résonance sont de trois natures:

- $TE_{\text{omp}}$  caractérisé par les composantes  $E_\theta$ ,  $H_r$  et  $H_z$  non nulles,
- $TM_{\text{omp}}$  caractérisé par les composantes  $H_\theta$ ,  $E_r$  et  $E_z$  non nulles,
- $HEM_{\text{omp}}$  défini par les six composantes ( $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $E_z$ ,  $H_r$ ,  $H_\theta$ ,  $H_z$ ) non nulles.

Les paramètres n, m et p représentent respectivement le nombre de demi-onde selon les directions  $\theta$ , r et z.

Les modes à symétrie de révolution TE et TM apparaissent dans ces structures pour une valeur nulle de n ( $n = 0$ ). Les valeurs de n différentes de zéro ( $n \neq 0$ ) conduisent à la détermination des modes hybrides HEM. Les différentes possibilités de caractérisation de ces modes sont décrites dans le tableau (III-3).

TABLEAU III-3

Nature du mode	ELEMENT FINI DE LAGRANGE	
	Formulation en $\vec{E}$ $\vec{\Psi} = \vec{E}$	Formulation en $\vec{H}$ $\vec{\Psi} = \vec{H}$
$TE_{\text{omp}}$	$E_\theta \neq 0$ ☺	$H_r \neq 0 ; H_z \neq 0$ ☹
$TM_{\text{omp}}$	$E_r \neq 0 ; E_z \neq 0$ ☹	$H_\theta \neq 0$ ☺
$HEM_{\text{omp}}$	$(E_r, E_\theta, E_z) \neq 0$ ☹	$(H_r, H_\theta, H_z) \neq 0$ ☹

☺: Absence de modes parasites.

☹: Présence de modes parasites.





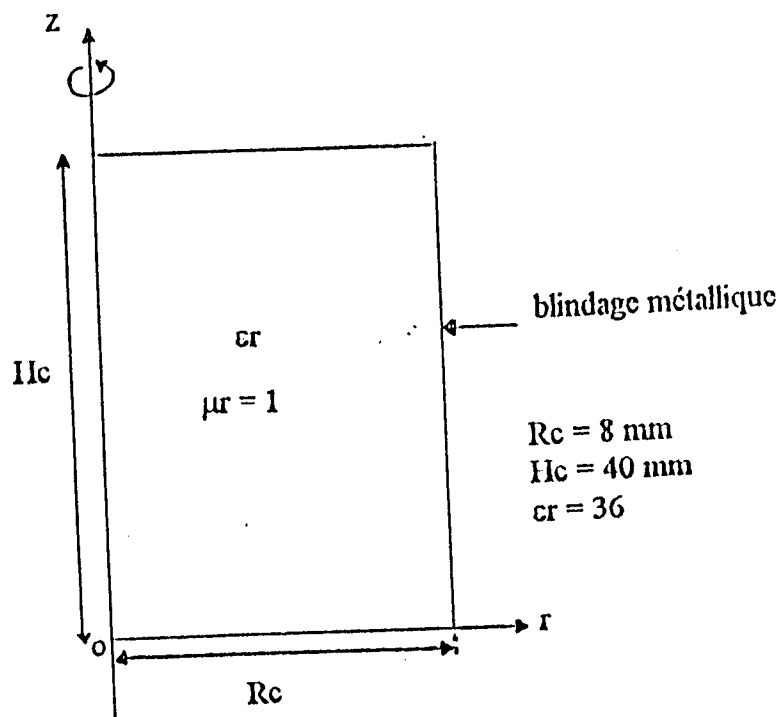
L'approximation par des éléments finis mixtes en deux dimensions éliminant les modes parasites n'est pas encore développée.

La relation (III.25) donnant les composantes restantes du champ et celles (III.29 , III.34 à III.39) donnant les pertes, les énergies et le coefficient de qualité à vide de ces modes restent encore valables pour ce type de problème. Toutefois, ces expressions devront être développées dans le système de coordonnées cylindriques. Le calcul de ces grandeurs est explicité dans la référence [12].

**a.2. APPLICATION DE LA MEF-2D A L'ANALYSE DES CAVITES CYLINDRIQUES  
 HOMOGENES**

Le logiciel MEF-2D développé dont la structure générale est présentée en *annexe 5*, est appliqué à une cavité métallique cylindrique, remplie de façon homogène par un diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  et de perméabilité relative  $\mu_r = 1$ . La section droite de cette structure est présentée sur la figure (III.3).

figure III-3



Section droite d'une cavité métallique  
 cylindrique homogène



a.2.1. FREQUENCE DE RESONANCE

Les fréquences de résonance des modes TE<sub>0mp</sub> et TM<sub>0mp</sub> sont déduites des formules analytiques exactes suivantes:

$$f_{TE_{0mp}} = \frac{C_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{x'_{0m}}{R_c}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{H_c}\right)^2} \quad (III.43)$$

$$f_{TM_{0mp}} = \frac{C_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{x_{0m}}{R_c}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{H_c}\right)^2} \quad (III.44)$$

C<sub>0</sub> est la célérité de la lumière dans le vide.

x'<sub>0m</sub> est la m<sup>ième</sup> racine de la première dérivée de la fonction de Bessel d'ordre 0.

x<sub>0m</sub> est la m<sup>ième</sup> racine de la fonction de Bessel d'ordre 0.

Le maillage de cette structure en éléments triangulaires est illustré sur la figure (III.4).

Les résultats de la méthode analytique et ceux de la MEF-2D pour différents maillages, concernant les premiers modes TE<sub>0mp</sub> et TM<sub>0mp</sub> sont confrontés dans les tableaux (III.4) et (III.5).

TABLEAU III-4

Nombre de noeuds	Nombre d'éléments	f (GHz) TE <sub>011</sub>	f (GHz) TE <sub>012</sub>	f (GHz) TE <sub>013</sub>
120	196	3,9139	4,2142	4,7247
165	280	3,8897	4,1129	4,4809
315	560	3,8725	4,0418	4,3142
Méthode Analytique (M.A.)		3,8624	4,0112	4,2477
Δf/f (%)		0,26	0,76	1,56

TABLEAU III-5

Nombre de noeuds	Nombre d'éléments	f (GHz) TM <sub>010</sub>	f (GHz) TM <sub>011</sub>	f (GHz) TM <sub>012</sub>
120	196	2,3940	2,4780	2,7225
165	280	2,3935	2,4769	2,7190
315	560	2,3935	2,4747	2,7054
Méthode Analytique (M.A.)		2,3921	2,4724	2,6990
Δf/f (%)		0,06	0,09	0,24

Ces tableaux montrent systématiquement la convergence de la méthode des éléments finis pour un maillage de plus en plus fin et la cohérence des résultats des deux méthodes, en particulier pour les premiers modes de résonance.

Pour un maillage fixé, l'erreur relative des fréquences de résonance augmente avec le rang du mode. Ce phénomène est dû à la limite de validité d'un maillage à une bande de fréquence; phénomène que nous décrivons plus loin.

L'analyse de cette structure par la MEF-2D conduit à la détermination de la valeur du champ en tous les noeuds (sommets des triangles) du maillage de sa section droite (figure (III.4)); ce qui permet de dresser une cartographie de ce champ. Les isovaleurs et le tracé en trois dimensions des champs de quelques modes  $TE_{0mp}$  et  $TM_{0mp}$  sont présentés sur les figures (III.5) à (III.10).

Sachant que la nature du mode à symétrie de révolution (TE ou TM) et sa variation azimutale  $n$  ( $n = 0$ ) sont imposées lors de la formulation du problème, l'identification des modes est complétée par la connaissance des paramètres  $m$  et  $p$  décrivant respectivement les variations radiale et longitudinale du champ.

Le nombre de maximum (ou de minimum) selon les axes radial et longitudinal indique les valeurs respectives des indices  $m$  et  $p$ .

#### a.2.2. FACTEUR DE QUALITE A VIDE

Pour valider le facteur de qualité à vide, nous considérons la structure de la figure (III.3) avec une permittivité relative  $\epsilon_r = 1$ .

Les fréquences de résonance des premiers modes TE et TM calculées par la méthode analytique et la MEF-2D sont présentées sur le tableau (III-6).

TABLEAU III-6

Mode	MEF-2D $f$ (GHz)	M.A. $f$ (GHz)	$\Delta f/f$ (%)
$TM_{010}$	14,361	14,353	0,06
$TM_{011}$	14,848	14,835	0,09
$TM_{012}$	16,232	16,194	0,23
$TE_{011}$	23,235	23,174	0,26
$TE_{012}$	24,251	24,067	0,76
$TE_{013}$	15,885	25,486	1,57

Dans cette structure vide, les coefficients de qualité à vide  $Q_0$  des modes  $TE_{0mp}$  sont donnés par la formule théorique (III.45).



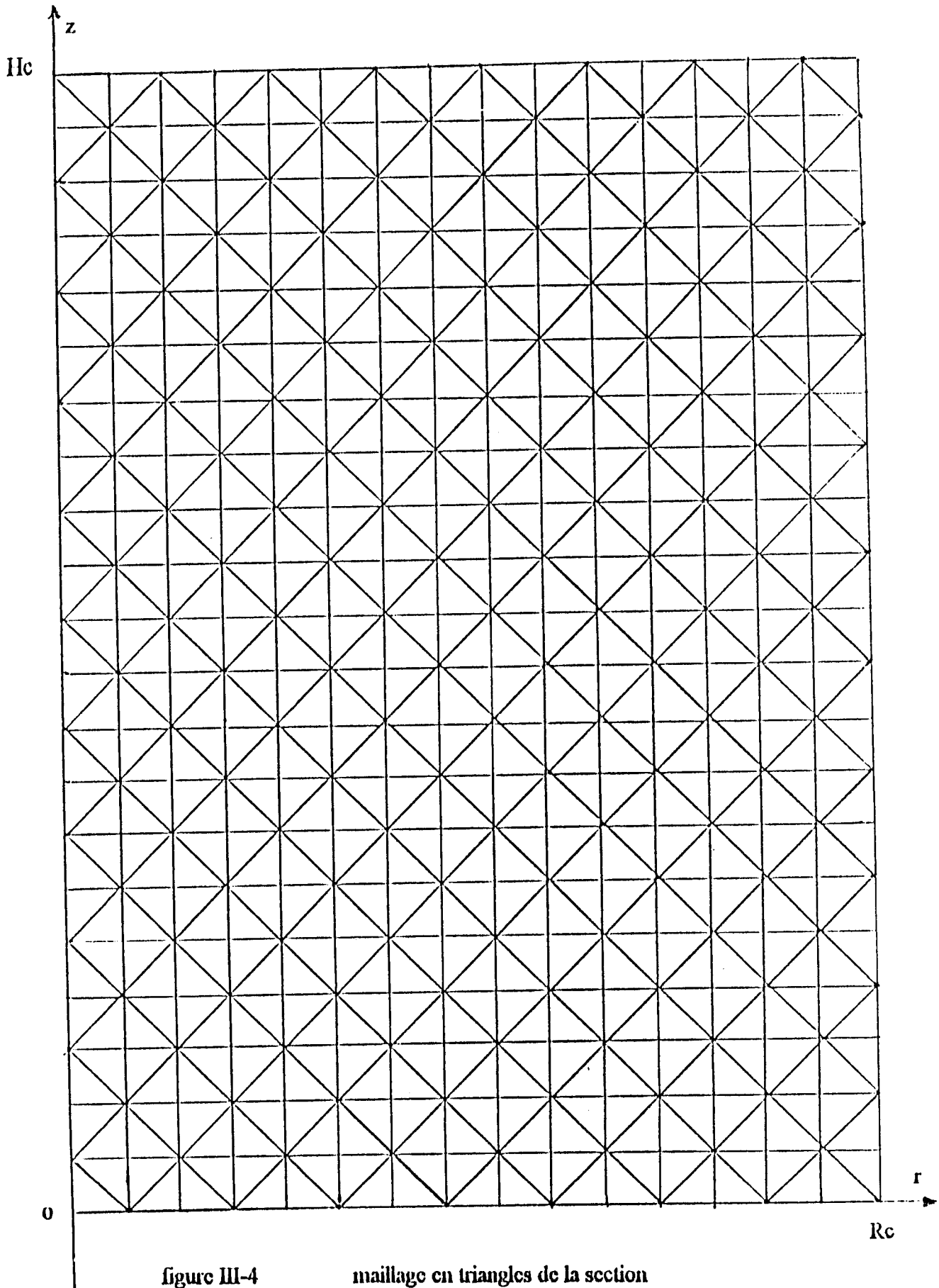
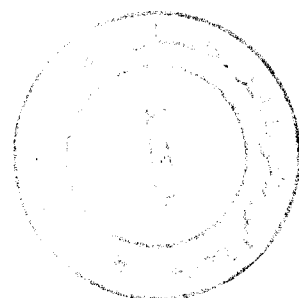
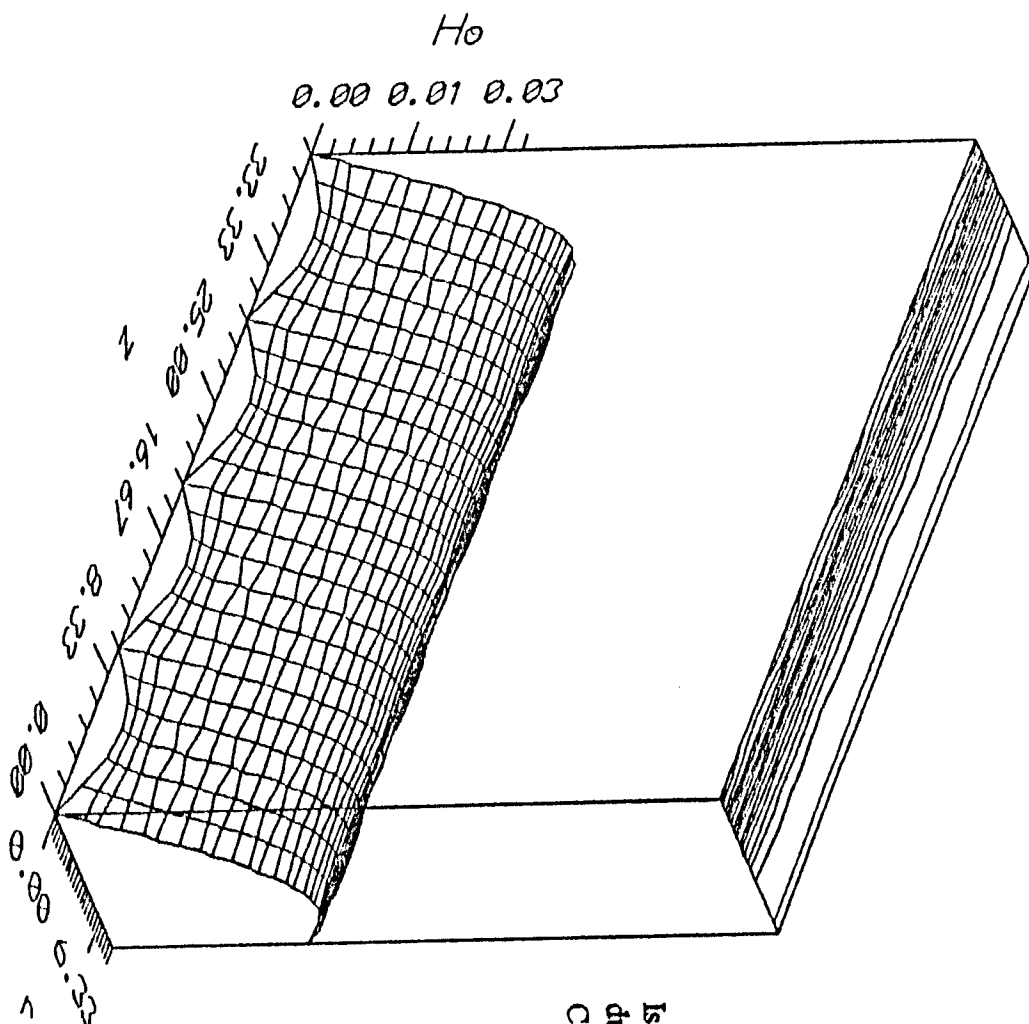


figure III-4

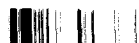
maillage en triangles de la section  
droite d'une cavité cylindrique



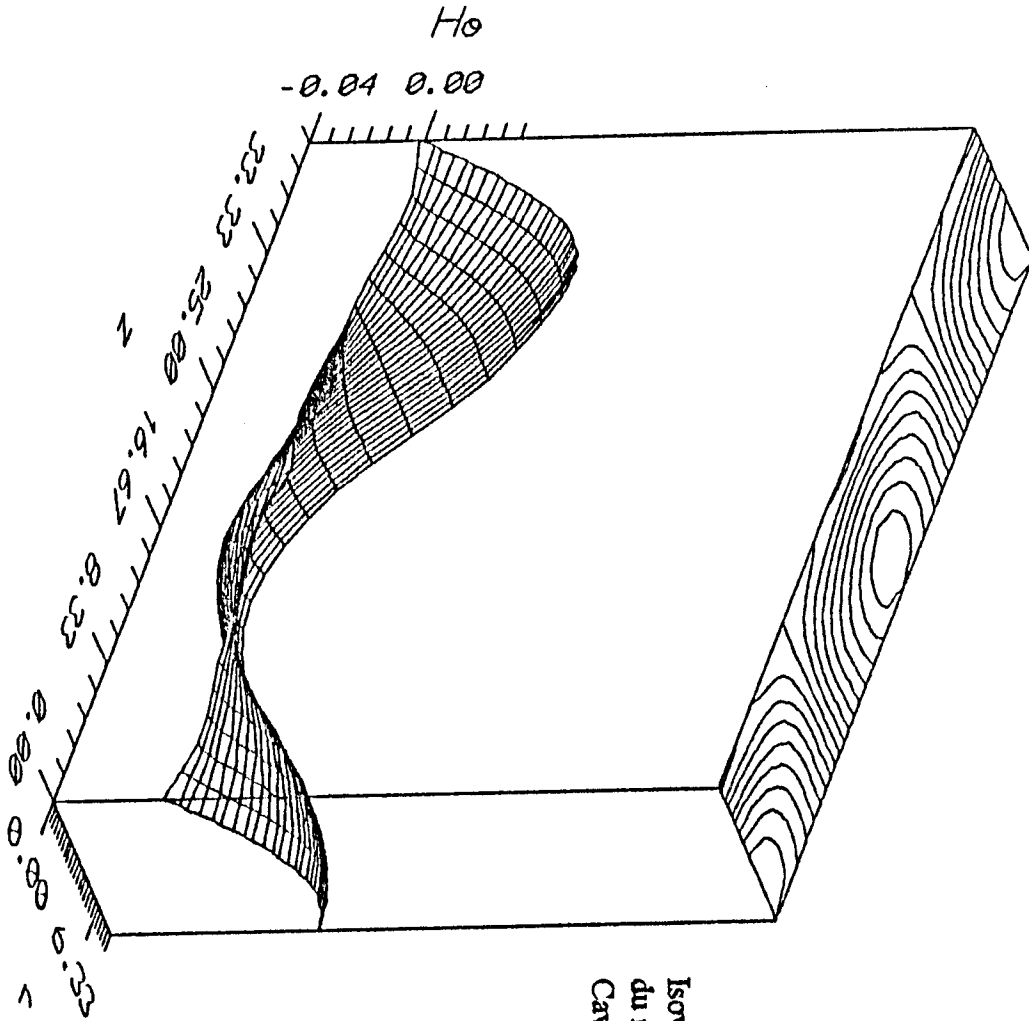


Isovaleurs et perspectives du Champ  $H_0$   
du mode TM010 (  $f = 2.3935$  Ghz )  
Cavité homogène (  $sr = 36$  )

figure III-5



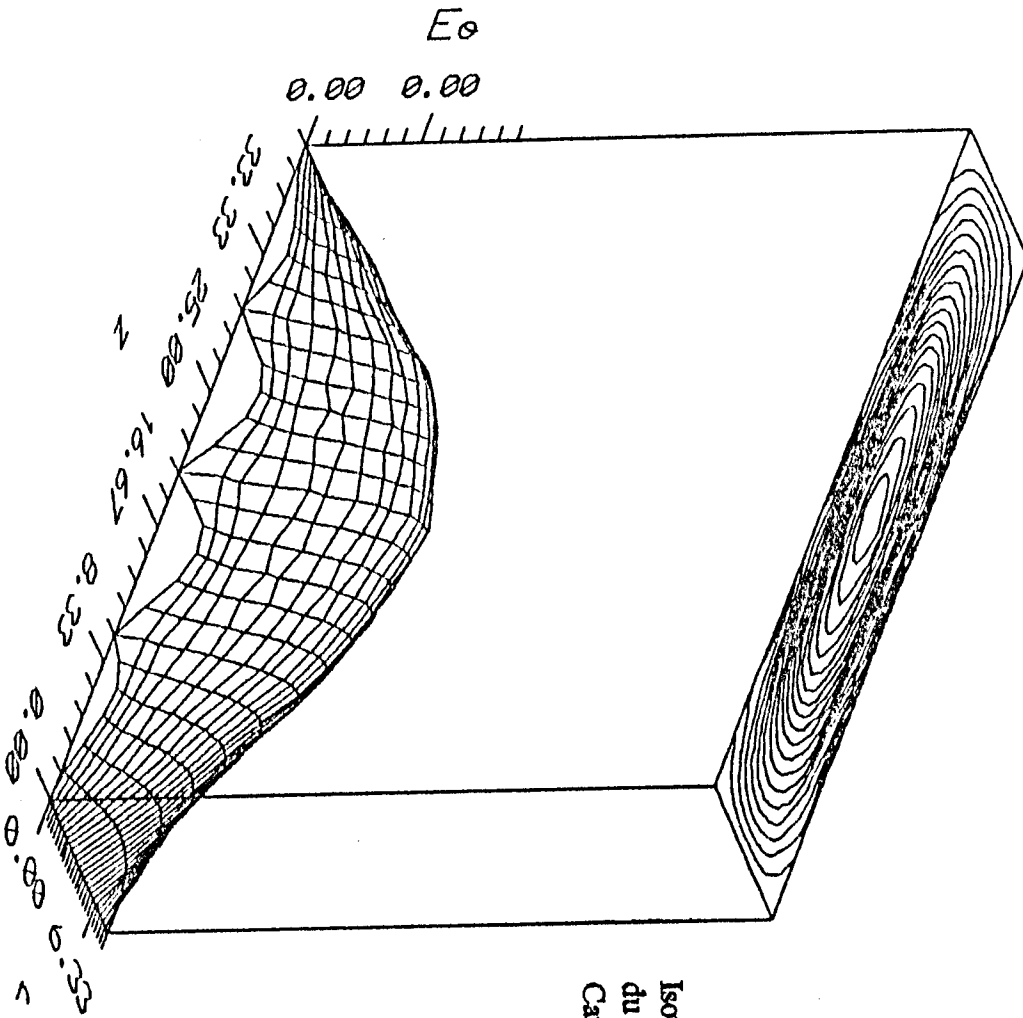




Isovaleurs et perspectives du Champ  $H_0$   
du mode  $TM_{012}$  ( $f = 2.7054$  Ghz )  
Cavité homogène (  $sr = 36$  )

figure III-7



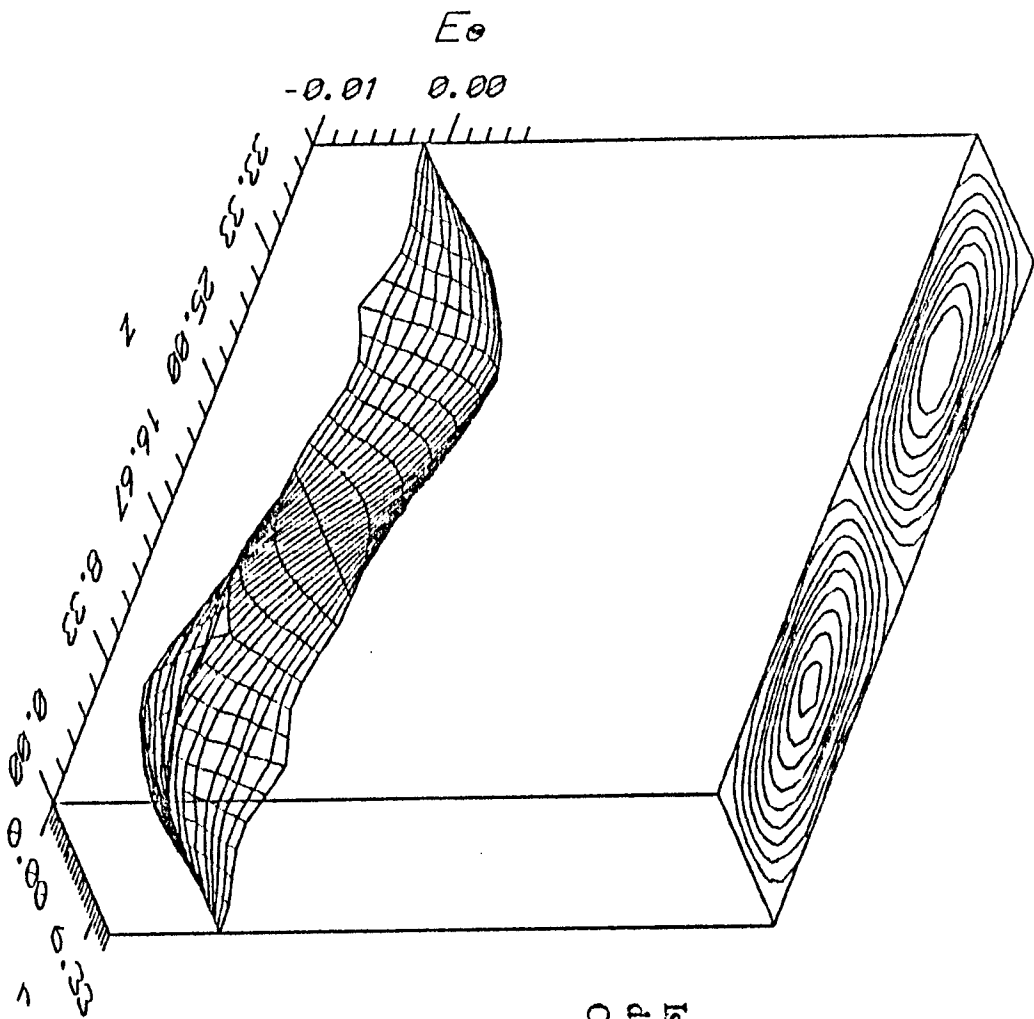


Isovaleurs et perspectives du Champ  $E_0$   
du mode TE011 (  $f = 3.8725$  Ghz )  
Cavité homogène (  $sr = 36$  )

figure III-8



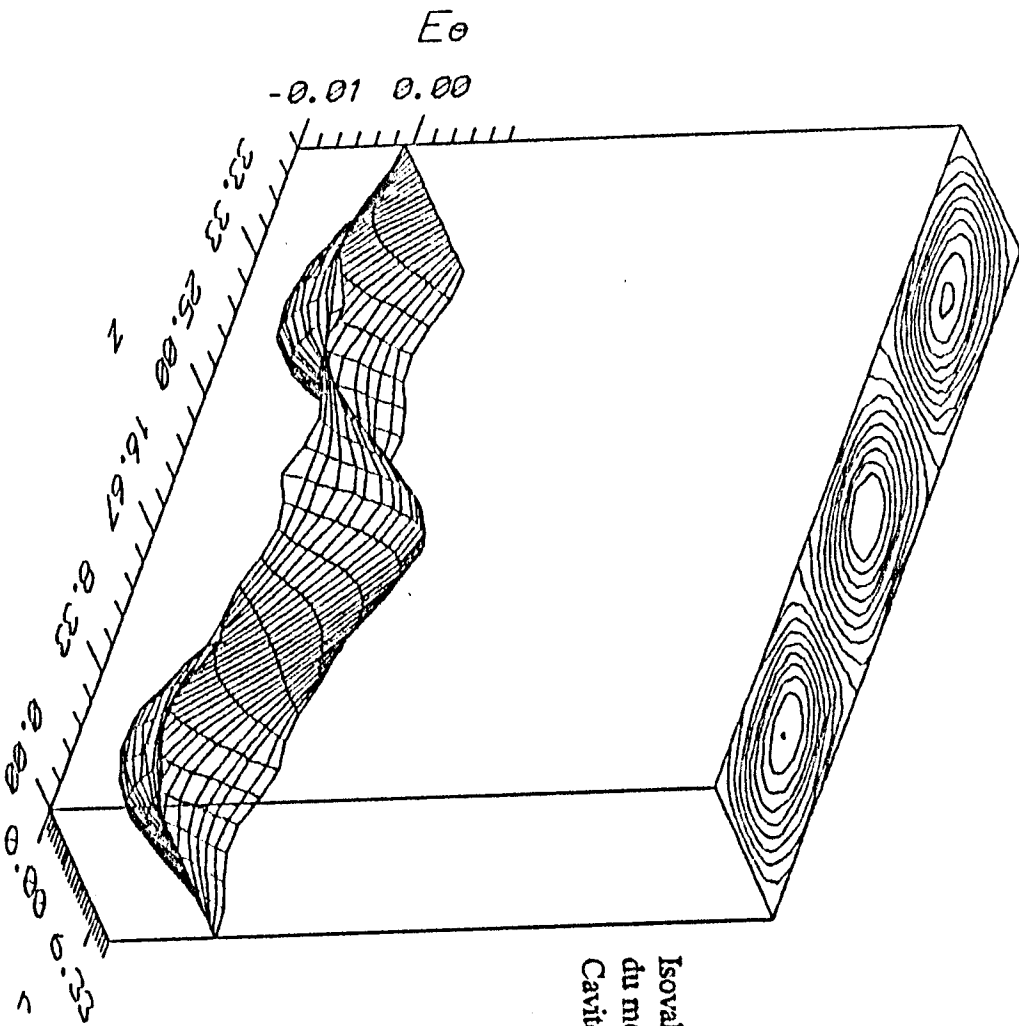




Isovaleurs et perspectives du Champ  $E_0$   
du mode TE012 (  $f = 4.0418$  Ghz )  
Cavité homogène (  $sr = 36$  )

figure III-9





Isovaleurs et perspectives du Champ  $E_0$   
du mode TE013 (  $f = 4.3142$  Ghz )  
Cavité homogène (  $sr = 36$  )

figure III-10



$$Q_{0TE_{omp}} = \frac{\lambda_0}{2\pi\delta_S} \frac{\left( x_{0m}^2 + \left( \frac{p\pi R_C}{H_c} \right)^2 \right)^{3/2}}{\left( x_{0m}^2 + \frac{2R_c}{H_c} \left( \frac{p\pi R_C}{H_c} \right)^2 \right)} \quad (III.45)$$

où  $\delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \mu_0 \sigma_m}}$  est la profondeur de pénétration,  $\omega_0$  la pulsation de résonance et  $\sigma_m$  représente la conductivité métallique.

Nous portons sur le tableau (III-7), les valeurs de  $Q_0$  calculées par la méthode analytique et par la MEF-2D, pour différentes valeurs de la conductivité  $\sigma_m$ .

Nous remarquons sur le tableau (III-7) que les résultats des deux méthodes concordent et que le coefficient de qualité à vide  $Q_0$  augmente avec la conductivité  $\sigma_m$ .

TABLEAU III-7

Conductivité $\sigma_{met}$ (s/m)	MEF-2D $Q_0$	M.A. $Q_0$	$\Delta Q_0 / Q_0$
$0,4 \cdot 10^{+7}$	4827,0	4914,0	1,80
$1,00 \cdot 10^{+7}$	7631,0	7770,0	1,82
$1,57 \cdot 10^{+7}$	9560,0	9736,0	1,84
$3,00 \cdot 10^{+7}$	13223,0	13459,0	1,78
$5,00 \cdot 10^{+7}$	17075,0	17375,0	1,76
$6,17 \cdot 10^{+7}$	18965,0	19301,0	1,77

#### b. ANALYSE DES STRUCTURES CYLINDRIQUES A FAIBLES PERTES [10], [27]

Dans toute l'étude menée précédemment, nous avons considéré des matériaux diélectriques sans pertes, caractérisés par une permittivité et une perméabilité réelles pures.

Dans la réalité, ces matériaux présentent des pertes même si elles sont minimales. Afin de se rapprocher de cette réalité, nous envisageons dans un premier temps l'analyse des modes TE et TM des structures résonnantes cylindriques avec pertes. Dans ces conditions, la permittivité et la perméabilité relatives des matériaux sont complexes et s'écrivent [3], [10].

$$\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' \text{ et } \mu_r = \mu_r' - j\mu_r'' ; j^2 = -1$$



Il est donc intéressant d'étudier l'influence de ces pertes sur les fréquences de résonance et sur le facteur de qualité à vide de ces dispositifs.

**b.1. FORMULATION DU PROBLEME**

Le domaine d'étude est celui de la figure (III.3), constitué de  $d$  milieux  $\Omega_i$  à permittivité et à perméabilité relatives complexes.

Dans le cas général, l'équation fondamentale à résoudre par la MEF-2D est décrite par la relation (III.46):

$$\iint_{\Omega} \left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \Psi \cdot \left\{ \vec{\text{rot}} \right\} \Psi^* d\Omega - \left( \frac{\omega p}{C_0} \right)^2 \iint_{\Omega} (p - jq) \Psi \cdot \Psi^* d\Omega = 0 \quad (\text{III.46})$$

La signification des paramètres  $\Psi$ ;  $p$  et  $q$  pour chacun des modes TE et TM est présentée sur le tableau (III.8).

TABLEAU III-8

Modes	$\Psi$	$p$	$q$
TE	$E_{\theta}$	$\epsilon_r' \mu_r' - \epsilon_r'' \mu_r''$	$-(\epsilon_r' \mu_r'' - \epsilon_r'' \mu_r')$
TM	$H_{\theta}$		

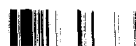
La discrétisation par la méthode des éléments finis de l'équation (III.46) nécessite la subdivision de la section droite  $(r,z)$  de la structure en éléments triangulaires à permittivité et à perméabilité relatives constantes. La composante azimutale  $\Psi$  est ensuite approximée par des polynômes de Lagrange sur chaque élément de maillage.

Soit 
$$\Psi = \sum_{i=1}^{Nd} \Psi_i N_i$$

$N_d$  est le nombre de noeuds d'interpolation sur l'élément.

$N_i$  représente le polynôme de Lagrange et  $\Psi_i$  la valeur du champ  $E_{\theta}$  ou  $H_{\theta}$  sur le noeud  $i$ .

L'introduction de cette approximation dans l'équation (III.46) écrite sur chaque élément  $K$ , conduit au système complexe (III.7) à valeurs et vecteurs propres.



$$([\text{SS}]^K - \lambda[\text{T}]^K - j\lambda[\text{U}]^K)\{\Psi\} = 0 \quad (\text{III.47})$$

Les termes de ces matrices élémentaires sont donnés par:

$$\begin{aligned} \text{SS}_{i\ell}^K = \iint_K \left[ \frac{9}{4} N_i N_\ell + r^2 \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_\ell}{\partial r} + r^2 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_\ell}{\partial z} \right. \\ \left. + \frac{3r}{2} \left( N_i \frac{\partial N_\ell}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial r} N_\ell \right) \right] dr dz \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

$$\text{T}_{i\ell}^K = \iint_K p r^2 N_i N_\ell dr dz \quad (\text{III.49})$$

$$\text{U}_{i\ell}^K = \iint_K q r^2 N_i N_\ell dr dz \quad (\text{III.50})$$

Ces matrices élémentaires sont ensuite assemblées et modifiées par les conditions aux limites pour obtenir un système généralisé à valeurs et vecteurs propres ayant la forme (III.51).

$$([\text{SS}] - \lambda[\text{R}])\{\Psi\} = 0 \quad (\text{III.51})$$

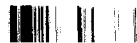
avec  $[\text{R}] = [\text{T}] + j[\text{U}]$

La résolution de ce système complexe par des techniques numériques adéquates telles que la méthode  $Q_Z$  [28], [29], conduit à la détermination des valeurs propres  $\lambda = \omega_p^2 / C_0^2$  et les vecteurs propres  $\{\Psi\}$  correspondants.

La pulsation de résonance  $\omega_p$  déduite de la valeur propre  $\lambda$ , peut être complexe et s'écrit:

$$\omega_p = \omega_{pr} + j \left( \frac{1}{\tau} \right) \quad (\text{III.52})$$

- $\omega_{pr}$  est la pulsation propre de la cavité résonnante, qui apparait lors de la relaxation des champs, en l'absence d'excitation.
- $\tau$  est le temps de relaxation de la résonance.



Afin de saisir le sens physique d'une pulsation complexe, notons par exemple le champ électrique  $\vec{E}$  périodique dans le temps, comme suit:

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = \vec{E}'(r, \theta, z) \exp(j\omega_p t) = \vec{E}'(r, \theta, z) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp(j\omega_p t); \quad (III.53)$$

La variation de  $\vec{E}$  dans le temps est représentée sur la figure (III.11) d'où l'on peut déduire aisément la signification de  $\omega_p$  et de  $\tau$ .

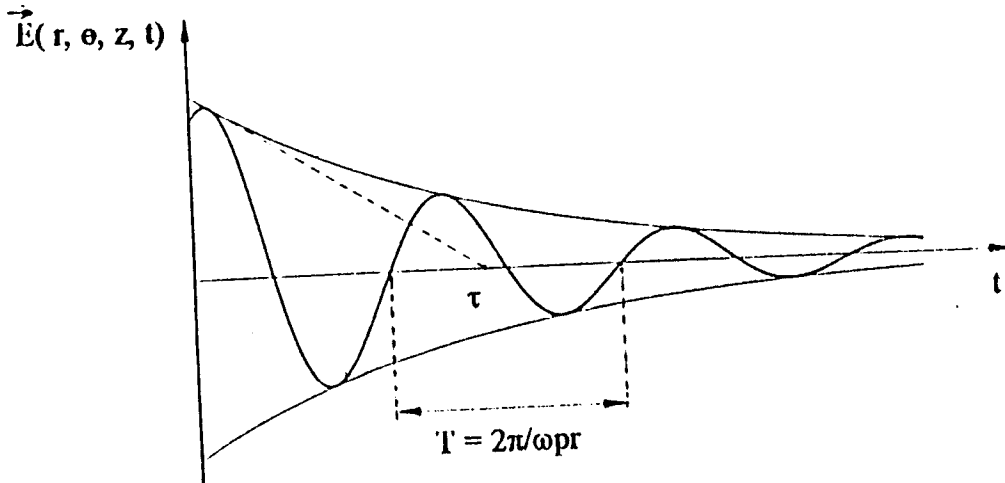


figure III-11

Ainsi, la résonance de cette structure tend à disparaître rapidement pour des petites valeurs de  $\tau$ , puisque les pertes deviennent infinies.

Le facteur de qualité à vide d'une telle structure est défini par:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_m} \quad (III.54)$$

avec :  $Q_d$ : le facteur de qualité diélectrique.

$Q_m$ : le facteur de qualité métallique.

Lorsque les pertes dans une cavité métallique remplie de diélectrique sont dûes uniquement aux pertes diélectriques (c'est à dire  $\epsilon'' \neq 0$ ,  $\mu'' = 0$  et les pertes métalliques négligeables), alors nous avons les relations suivantes [Annexe 3]:

Pour autant que  $\omega_0 \tau > 1$ :

$$\omega_{pr} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} \quad (III.55)$$

$$\tau = \frac{2\varepsilon_r'}{\omega_{pr}\varepsilon_r''} \quad (III.56)$$

$$Q_0 = Q_d = \frac{\omega_{pr}\tau}{2} = \frac{\varepsilon_r'}{\varepsilon_r''} \quad (III.57)$$

$\omega_0$  est la pulsation de résonance de la cavité en l'absence de la relaxation (régime entretenu).

### b.2. APPLICATION

Afin de tester le logiciel éléments finis développé, nous l'appliquons à une tige diélectrique blindée avec pertes dont la section droite (r,z) est présentée sur la figure (III.12).

La résolution de ce problème par ce logiciel conduit à la détermination de la pulsation de résonance  $\omega_p$ , de la distribution du champ électromagnétique sur cette section et du facteur de qualité diélectrique  $Q_d$  des modes  $TE_{omp}$  et  $TM_{omp}$ .

Les relations (III.55) et (III.57) permettent de déterminer la fréquence ( $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ) de résonance en l'absence des pertes et du temps de relaxation  $\tau$ . La fréquence  $f_0$  d'une telle structure sans relaxation peut être déduite des formules analytiques exactes (III.43) et (III.44).

Les relations (III.56) et (III.57) permettent le calcul théorique du temps de relaxation  $\tau$  et du facteur de qualité diélectrique  $Q_d$ .

Nous présentons sur les Tableaux (III.9) et (III.10) les résultats de ces deux méthodes, où nous observons une très bonne corrélation.

TABLEAU III-9

Mode	TM <sub>010</sub>	TM <sub>011</sub>	TE <sub>011</sub>	TE <sub>012</sub>
MEF-2D (f GHz)	4786,4	5418,9	8123,8	9253,4
M.A. (f GHz)	4784,6	5398,4	8023,0	9116,9
$\Delta f/f$ (%)	0,04	0,4	1,3	1,5

TABLEAU III-10

Modes	TM <sub>010</sub>	TM <sub>011</sub>	TE <sub>011</sub>	TE <sub>012</sub>
MEF-2D ( $\tau$ )	2,394.10 <sup>-3</sup>	2,115.10 <sup>-3</sup>	1,410.10 <sup>-3</sup>	1,20.10 <sup>-3</sup>
M.A. ( $\tau$ )	2,395.10 <sup>-3</sup>	2,123.10 <sup>-3</sup>	1,428.10 <sup>-3</sup>	1,257.10 <sup>-3</sup>
MEF-2D (Q <sub>d</sub> )	35,983.10 <sup>+6</sup>	41,067.10 <sup>+6</sup>	35,169.10 <sup>+6</sup>	33,413.10 <sup>+6</sup>
M.A. (Q <sub>d</sub> )	36.10 <sup>+6</sup>	36.10 <sup>+6</sup>	36.10 <sup>+6</sup>	36.10 <sup>+6</sup>

Afin d'identifier les modes de résonance, nous dressons sur les figures (III.13) à (III.16), les graphes en deux et trois dimensions des composantes azimutales  $E_{\theta}$  des modes TE<sub>0mp</sub> et  $H_{\theta}$  des modes TM<sub>0mp</sub>.

### III.5. VALIDATION DE LA METHODE D'ANALYSE DES STRUCTURES RESONNANTES EN OSCILLATION FORCEE

En oscillation forcée, les courants imposés sur les plans des différents accès de la structure, sont calculés à partir des composantes du champ électromagnétique  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  tangentiels à ces plans (I.25.a) et (I.25.b).

Nous présentons dans la suite, la méthode de calcul des champs  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  de différents modes (TEM, Quasi-TEM, TM et HEM) guidés dans des structures de formes variées. Nous appliquons ensuite la méthode de calcul de la matrice de répartition [S] à des structures simples afin de valider ses résultats.

#### III.5.A. ETUDE DE LA PROPAGATION GUIDEE

Le calcul des courants surfaciques  $\vec{J}_{es_p}$  et  $\vec{J}_{ms_p}$  sur l'accès p, ne peut être accompli qu'à partir de la connaissance des champs  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  tangents à ce plan. La nature des ondes transmises étant différentes selon le type d'accès considéré, nous allons établir le procédé de calcul de  $\vec{E}_t$  et de  $\vec{H}_t$  dans le cas:

- d'une ligne coaxiale ou d'une ligne homogène propageant le mode fondamental TEM,
- d'une ligne microruban ou de l'une de ses variantes (milieux inhomogènes) propageant le mode fondamental Quasi-TEM,
- des guides d'ondes homogènes propageant les modes TE et TM,
- des guides diélectriques propageant le mode fondamental HEM.





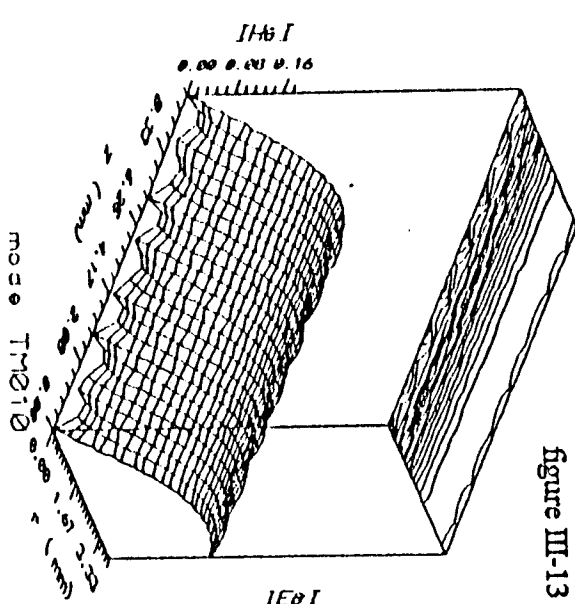


figure III-13

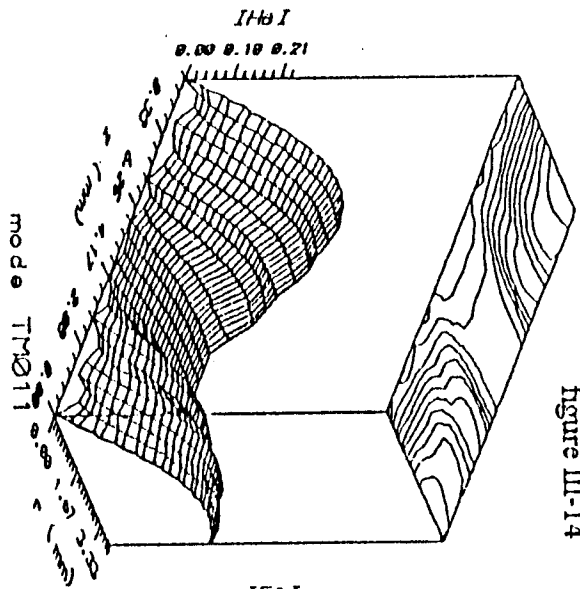


figure III-14

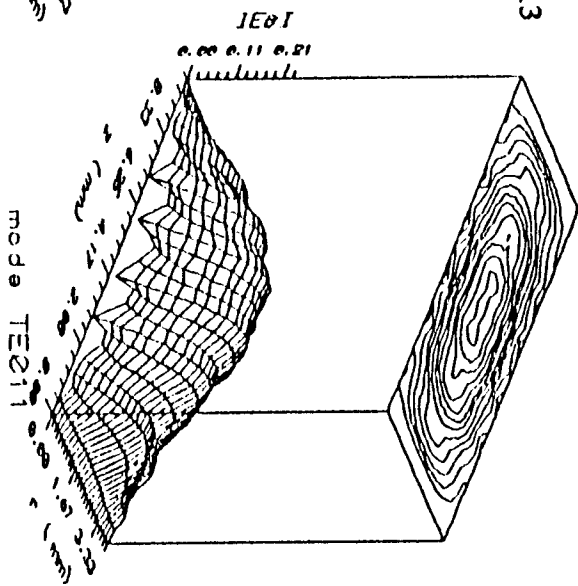


figure III-15

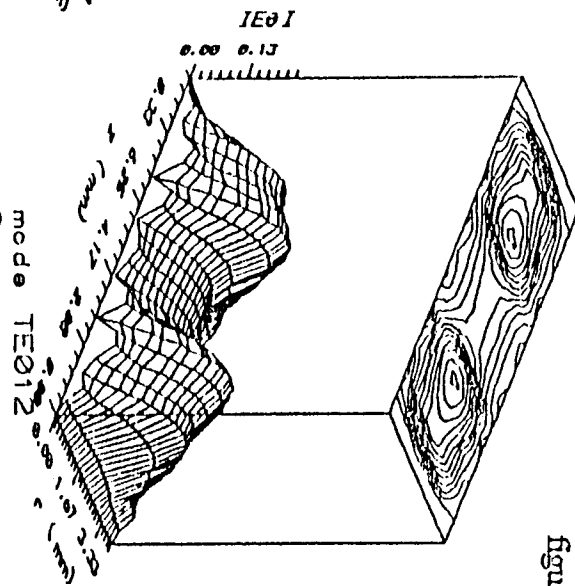


figure III-16

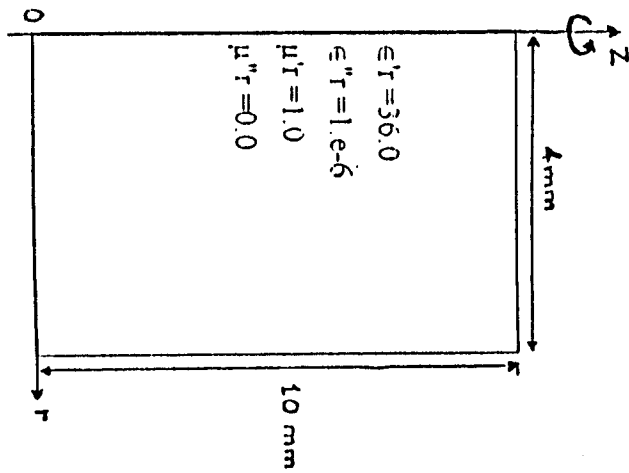


figure III-12

### A.1. MODES TEM ET QUASI-TEM [30], [31], [32]

Un mode est dit transverse électromagnétique TEM si les composantes longitudinales (selon la direction de propagation)  $E_z$  et  $H_z$  de son champ électromagnétique sont nulles. Ce mode est le mode fondamental des structures homogènes comportant deux ou plusieurs conducteurs portés à des potentiels différents. C'est le cas de la ligne coaxiale présentée sur la figure (III.17).

Dans une structure inhomogène, contenant deux ou plusieurs conducteurs portés à des potentiels différents, le mode fondamental est un mode hybride caractérisé par des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$  négligeables devant les composantes transversales. C'est le cas de la ligne microruban blindée, présentée sur la figure (III.18).

On montre [10] à partir de son diagramme de dispersion, que jusqu'aux fréquences inférieures à la fréquence de coupure  $fc_1$  du premier mode hybride supérieur, le régime de propagation du mode fondamental est analogue à celui d'une onde TEM. On parle alors de mode Quasi-TEM dans cette bande de fréquence.

L'approximation Quasi-TEM consiste à identifier le champ des ondes TEM et quasi-TEM dans cette bande de fréquence. L'analogie entre le mode TEM et le mode Quasi-TEM est décrite par les points suivants:

- pas de fréquence de coupure,
- les champs électrique et magnétique sont transverses et dérivent de potentiels,
- on peut définir une capacité par unité de longueur et une impédance caractéristique.

La différence entre les deux formes d'ondes réside dans l'orthogonalité des champs électrique et magnétique. En effet, pour le mode TEM qui se propage dans un milieu homogène, les lignes de champ électrique et magnétique sont orthogonales. Par contre dans les milieux inhomogènes, où la permittivité relative  $\epsilon_r$  varie, les lignes de champ électrique et magnétique ne sont plus orthogonales.

#### A.1.1. APPROXIMATION QUASI-TEM

Les guides d'ondes inhomogènes possédant au moins un conducteur interne disjoint du blindage, telles que les lignes microstrip, admettent un mode fondamental Quasi-TEM sans fréquence de coupure.

L'approximation Quasi-TEM consiste à remplacer le guide inhomogène propageant ce mode, par un guide homogène équivalent de permittivité relative effective  $\epsilon_{r\text{eff}}$  à déterminer. Pour ce faire, on va considérer que le champ électromagnétique de la bande de fréquences micro-ondes ( $0 \leq f \leq fc_1$ ) est identique au champ statique ( $f = 0$ ) limite.

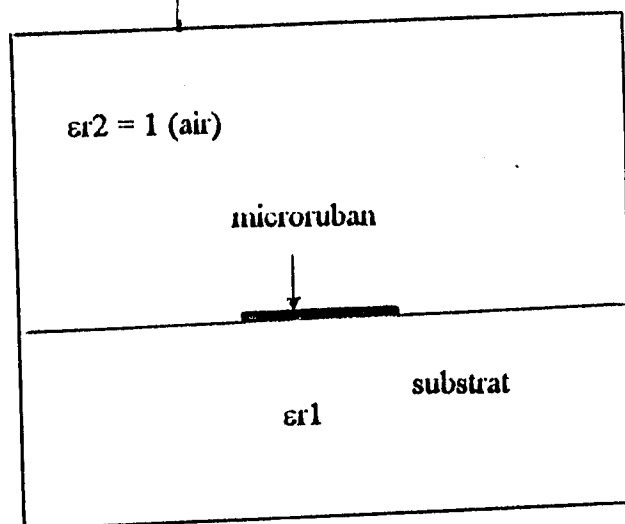
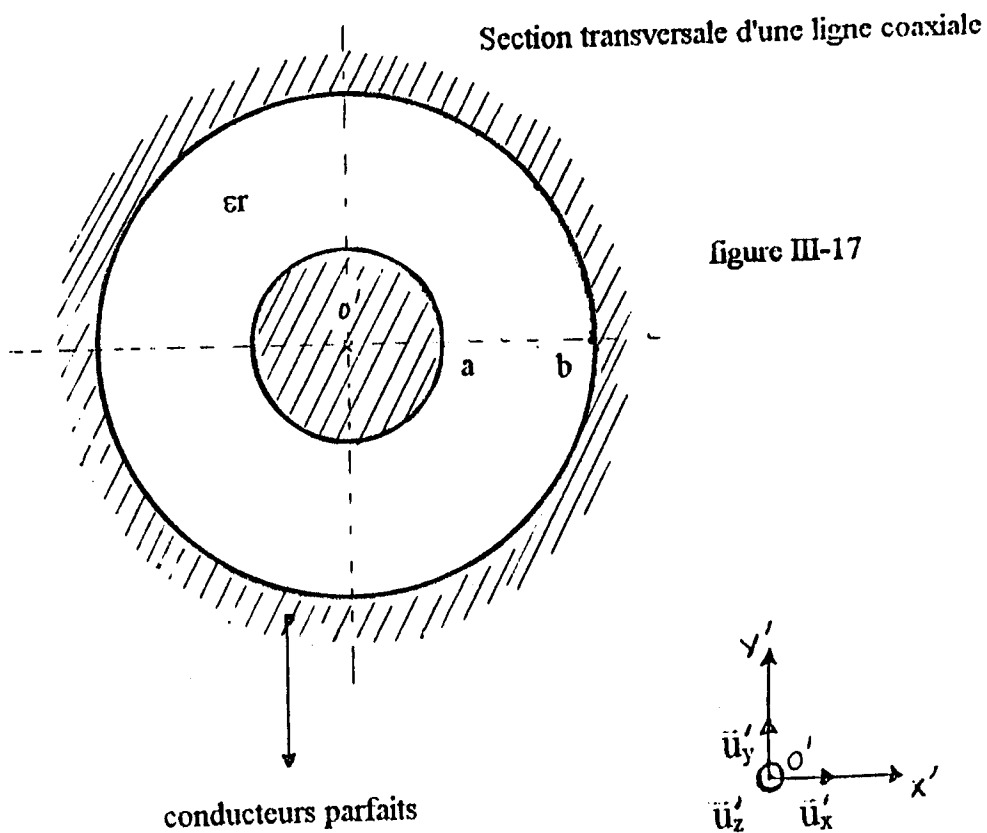


figure III-18

Dans le guide, le champ électromagnétique défini dans le repère local  $(o', x', y', z')$ , s'écrit:

$$\vec{E}(x', y', z') = \vec{E}(x', y') e^{-j\beta z'} \quad (\text{III.58})$$

$$\vec{H}(x', y', z') = \vec{H}(x', y') e^{-j\beta z'} \quad (\text{III.59})$$

Posons:

$$\vec{E}(x', y') = \vec{E}_t(x', y') + E_z(x', y') \vec{u}'_z \quad (\text{III.60})$$

$$\vec{H}(x', y') = \vec{H}_t(x', y') + H_z(x', y') \vec{u}'_z \quad (\text{III.61})$$

- $\beta = \frac{\omega}{v_\phi}$  est la constante de propagation longitudinale (selon  $o'z'$ ) du mode.
- $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $v_\phi$  représente sa vitesse de phase.
- $\vec{u}'_z$  est le vecteur unitaire de la direction de propagation.

Le milieu considéré étant sans charges et sans courants, les équations de Maxwell conduisent aux relations (III.62.a) et (III.62.b) liants le champ électromagnétique et les potentiels scalaire  $V$  et vecteur  $\vec{A}$ .

Soient:

$$\vec{E}(x', y') e^{-j\beta z'} = -\vec{\text{grad}}(V(x', y') e^{-j\beta z'}) - j\omega \vec{A}(x', y') e^{-j\beta z'} \quad (\text{III.62.a})$$

$$\mu \vec{H}(x', y') e^{-j\beta z'} = \vec{\text{rot}}(\vec{A}(x', y') e^{-j\beta z'}) \quad (\text{III.62.b})$$

En décomposant les vecteurs en une somme de composantes transversale et longitudinale, on obtient:

$$\vec{E}_t(x', y') = -\vec{\text{grad}} V(x', y') - j\omega \vec{A}_t(x', y') \quad (\text{III.63.a})$$

$$\vec{E}_z(x', y') = j[\beta V(x', y') - \omega A_z(x', y')] \quad (\text{III.63.b})$$

$$\mu \vec{H}_t(x', y') = \left[ \vec{\text{grad}} A_z(x', y') \times \vec{u}'_z \right] + j\beta (\vec{A}_t(x', y')) \times \vec{u}'_z \quad (\text{III.63.c})$$

$$\mu H_z(x', y') = \vec{\text{rot}}(\vec{A}_t(x', y')) \cdot \vec{u}'_z \quad (\text{III.63.d})$$

Le champ électromagnétique à la limite  $\omega = 0$ , est défini par:

$$\vec{E}_{t_0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \vec{E}_t(x', y') = -\text{grad } V_0 \quad (\text{III.64.a})$$

$$\mu \vec{H}_{t_0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} (\mu \vec{H}_t(x', y')) = \left( \text{grad } A_{z_0} \right) \times \vec{u}'_z \quad (\text{III.64.b})$$

Les vitesses de phase  $v_{\varphi_0}$  et de groupe  $v_g$  sont alors égales et valent:

$$v_g = v_{\varphi_0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{\beta} = \frac{C_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}}$$

L'onde Quasi-TEM se propage donc sans dispersion autour de l'origine du diagramme de dispersion.

Dans le cadre de l'approximation Quasi-TEM, les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \left( \left\{ \text{grad} \right\} V_0 \right) = \vec{0} \end{array} \right. \quad (\text{III.65.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \left( \left\{ \text{grad} \right\} A_{z_0} \times \vec{u}'_z \right) = \vec{0} \end{array} \right. \quad (\text{III.65.b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \left( \left\{ \text{grad} \right\} A_{z_0} \times \vec{u}'_z \right) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.65.c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \left( \epsilon_r \left\{ \text{grad} \right\} V_0 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.65.d})$$

Les opérateurs  $\text{rot}$  et  $\text{div}$  sont considérés au sens des distributions et l'opérateur  $\left\{ \text{grad} \right\}$  est pris au sens des fonctions [Annexe I].

Les équations (III.65.b) et (III.65.d) nous permettent la détermination des potentiels scalaire et vecteur dans le milieu étudié. Ces deux équations s'écrivent sur la surface  $S_p$  d'un accès  $p$  comme suit:



$\forall \phi \in D(\Omega_p)$  ;  $\phi$  fonction test continue et dérivable;

$$\iint_{S_p} \text{div} \left( \epsilon_r \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \right) \cdot \phi \, dS_p = \iint_{S_p} \epsilon_r \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi \, dx' dy' = 0 ; \quad (\text{III.66})$$

$$\iint_{S_p} \vec{\text{rot}} \left( \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} A_{z_0} \times \vec{u}'_z \right) \cdot \phi \, dS_p = \iint_{S_p} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} A_{z_0} \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi \, dx' dy' = 0 ; (\text{III.67})$$

Sachant que  $E_z = 0$  pour l'onde Quasi-TEM, l'équation (III.63.b) conduit à la relation (III.68) liant le potentiel scalaire  $V_0$  et la composante longitudinale  $A_{z_0}$  du potentiel vecteur.

$$\text{Soit: } V_0 = v_{\phi_0} A_{z_0} \quad (\text{III.68})$$

Cette relation permet de vérifier l'équipartition des énergies électrique et magnétique (relation III.69) de l'onde quasi-TEM, sur la section droite  $S_p$  de la ligne.

$$\text{Soit } \iint_{S_p} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_{t_0} \cdot \vec{E}_{t_0}^* \, dx' dy' = \iint_{S_p} \mu_0 \mu_r \vec{H}_{t_0} \cdot \vec{H}_{t_0}^* \, dx' dy' \quad (\text{III.69})$$

### A.1.2. GRANDEURS CARACTERISTIQUES DE L'ONDE QUASI-TEM. [13] , [33]

#### a. PERMITTIVITE EFFECTIVE

Elle définit la permittivité relative d'un guide homogène équivalent au guide inhomogène propageant l'onde quasi-TEM.

La vitesse de phase d'une onde se propageant dans un guide homogène de permittivité relative  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  est donnée par:

$$v_{\phi_0} = \frac{C_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} ; C_0 \text{ étant la célérité de la lumière dans le vide.}$$

Le guide homogène de permittivité  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  constitue l'approximation quasi-TEM du guide inhomogène.

Soient  $(\vec{E}_{t_0}, \vec{H}_{t_0})$  le champ électromagnétique de l'onde quasi-TEM et  $(\vec{E}_{t_1}, \vec{H}_{t_1})$  celui de l'onde TEM équivalente.

Notons que  $\vec{H}_{t_1} = \vec{H}_{t_0}$  si la ligne est constituée de milieux inhomogène en  $\epsilon_r$  uniquement, c'est à dire la perméabilité relative  $\mu_r$  est constante.

Soit  $V_1$  le potentiel scalaire qui dérive de  $\vec{E}_{t_1}$ .

Du fait de l'équipartition des énergies des ondes TEM et quasi-TEM, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \iint_{S_p} \epsilon_0 \epsilon_r \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 dx' dy' &= \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} A_{z_0} \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} A_{z_0} dx' dy' \\ &= \iint_{S_p} \epsilon_0 \epsilon_{r_{\text{eff}}} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_1 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_1 dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

D'où on obtient:

$$\epsilon_{r_{\text{eff}}} = \frac{\iint_{S_p} \epsilon_r \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 dx' dy'}{\iint_{S_p} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_1 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_1 dx' dy'} \quad (\text{III.71})$$

Le numérateur de l'expression (III.71) correspond à l'énergie électrique moyenne par unité de longueur du guide inhomogène et son dénominateur représente l'énergie électrique du même guide vide.

#### b. PUISSANCE ET ENERGIE

Les énergies moyennes électrique et magnétique sont données par les relations (III.72) et (III.73).

$$\overline{W}_e = \frac{1}{4} \iint_{S_p} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E}^* dS_p = \frac{1}{4} \iint_{S_p} \epsilon_0 \epsilon_r \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 dx' dy' ; \quad (\text{III.72})$$

$$\overline{W}_m = \frac{1}{4} \iint_{S_p} \mu_0 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{H}^* dS_p = \frac{1}{4} \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} A_{z_0} \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} A_{z_0} dx' dy' \quad (\text{III.73})$$

La puissance transportée selon  $\vec{u}'_z$ , est défini par le flux du vecteur de Poynting

$$\text{Soit } \overline{P}_0 = \frac{1}{2} \iint_{S_p} (\vec{E}_{t_0} \times \vec{H}_{t_0}) \cdot \vec{u}'_z dx' dy' \quad (\text{III.74})$$

$$\text{or } \vec{E}_{t_0} = - \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 ; \mu \vec{H}_t = \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} A_{z_0} \times \vec{u}'_z \text{ et } V_0 = v_{\varphi_0} A_{z_0}$$

$$\text{Donc } \vec{E}_{t_0} = \mu v_{\varphi_0} \vec{H}_{t_0} \times \vec{u}'_z$$



$$\text{d'où } \bar{P}_0 = v_{\phi_0} \bar{W}_m \quad (\text{III.75})$$

Le calcul de cette puissance sur les accès nous permet la normalisation de l'onde sur chaque accès  $p$  ( $p \in [1, Np]$ ).

*c. CAPACITE PAR UNITE DE LONGUEUR ET IMPEDANCE CARACTERISTIQUE*

- La capacité  $C$  peut être calculée entre deux conducteurs portés à des potentiels différents  $V_1'$  et  $V_2'$ . Elle est définie par:

$$C = \frac{4\bar{W}_e}{|V_1' - V_2'|^2} = \frac{1}{|V_1' - V_2'|^2} \iint_{S_p} \epsilon_0 \epsilon_r \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \, dx' \, dy' \quad (\text{III.76})$$

- L'impédance caractéristique  $Z_c$  est reliée à la capacité  $C$  à travers la relation (III.77)

$$Z_c = \frac{1}{v_{\phi_0} C} \quad (\text{III.77})$$

**A.1.3. CALCUL DES POTENTIELS  $V_0$  ET  $A_{z_0}$ :**

Le problème à résoudre par la méthode des éléments finis sur chaque plan d'accès  $p$ , est le suivant:

$$\forall \phi \in D(\Omega_p);$$

$$\iint_{S_p} \epsilon_r \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi \, dx' \, dy' = 0 \quad (\text{III.78.a})$$

$$\iint_{S_p} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} A_{z_0} \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi \, dx' \, dy' = 0 \quad (\text{III.78.b})$$

$V_0$  et  $A_{z_0}$  vérifient les conditions aux limites définies par:

$$\begin{cases} V_0 = V_\ell & \text{sur le } \ell^{\text{ème}} \text{ conducteur} \\ A_{z_0} = A_{z_\ell} & \text{sur le } \ell^{\text{ème}} \text{ conducteur} \end{cases}$$



Notons que la méthode de résolution des équations (III.78.a) et (III.78.b) est identique. Nous présentons alors la résolution de l'équation (III.78.a) par la méthode des éléments finis.

Nous subdivisons la surface  $S_p$  de l'accès p, en triangles  $K'$  ( $K' = 1$  à  $N'E$ );  $N'E$  étant le nombre d'élément triangulaire sur  $S_p$ .  
 L'équation (III.78.a) s'écrit alors:

$$\iint_{S_p} \varepsilon_r \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi \, dx' \, dy' = \sum_{K'=1}^{N'E} \iint_{K'} \varepsilon_{r_{K'}} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} V_0 \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} \phi \, dx' \, dy' = 0$$

Nous approximons ensuite  $V_0$  et  $\phi$  sur chaque triangle  $K'$ , par:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{NN} V_{0i} N_i \text{ et } \phi_j = N_j; \text{ NN étant le nombre de noeuds d'interpolation sur l'élément } K'$$

Ainsi, nous obtenons sur chaque triangle  $K'$ , un système matriciel linéaire, simple, de la forme (III.79).

$$\forall j \in [1, NN];$$

$$\sum_{i=1}^{NN} \iint_{S_p} \varepsilon_{r_{K'}} V_{0i} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} N_i \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} N_j \, dx' \, dy' = 0 \tag{III.79}$$

$$\Rightarrow [R_v]_{K'} \{V_0\} = 0$$

Les termes de la matrice  $[R_v]_{K'}$ , sont:

$$R_{V_{ij}} = \iint_{K'} \varepsilon_{r_{K'}} \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} N_i \cdot \left\{ \vec{\text{grad}} \right\} N_j \, dx' \, dy' \tag{III.80}$$

L'assemblage de toutes les matrices élémentaires pour  $K'=1$  à  $N'E$ , conduit au système linéaire global suivant:

$$[R_v] \{V_0\} = 0 \tag{III.81}$$

$\{V_0\} = {}^t(\dots, V_{0i}, \dots)$ , représente les valeurs du poentiel scalaire  $V_0$  en tous les noeuds du maillage de la surface  $S_p$  de l'accès p.



La discrétisation par la MEF-2D de l'équation (III.78.b), relative au potentiel vecteur, conduit à un système linéaire de la forme:

$$[A_v]\{A_{z_0}\} = 0 \quad (\text{III.82})$$

La résolution de ce système donne la distribution de la composante  $A_{z_0}$  du potentiel vecteur, en tous les noeuds du maillage de la surface  $S_p$ .

Les champs transverses  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  définis sur  $S_p$  de l'accès p, sont calculés aisément à partir des solutions  $\{V_0\}$  et  $\{A_{z_0}\}$  en utilisant les relations.

$$\vec{E}_t = -\left\{\vec{\text{grad}}\right\}V_0 \text{ et } \mu\vec{H}_t = \left\{\vec{\text{grad}}\right\}A_{z_0} \times \vec{u}'_z$$

Par la suite, nous déduisons de  $\vec{E}_t$  et de  $\vec{H}_t$ , les valeurs des densités de courants surfaciques électrique  $\vec{J}_{es_p}$  et magnétique  $\vec{J}_{ms_p}$  sur tous les noeuds d'interpolation du maillage de la surface  $S_p$  de chaque plan d'accès p, en utilisant les relations (I.19.b) et (I.22.b).

#### A.1.4. APPLICATION DE LA MEF-2D A LA CARACTERISATION DE QUELQUES LIGNES DE TRANSMISSION

Afin de valider les résultats relatifs à l'étude par la MEF-2D des modes TEM et Quasi-TEM des lignes de transmission nous présentons les applications suivantes:

##### a. LIGNE COAXIALE

La ligne coaxiale, d'utilisation très répandue en électronique, est composée de deux conducteurs séparés par un diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$ . Le conducteur interne est porté en potentiel V1 et le conducteur externe est généralement à la masse ( $V_2 = 0$ ). Une telle structure est homogène et propage le mode fondamental TEM. La détermination de ses grandeurs caractéristiques ( $Z_c$ ,  $\epsilon_{\text{eff}}$ , capacité, ...) peut être établie à partir de la théorie des lignes de transmission; ce qui constitue un bon exemple pour valider les résultats de notre logiciel MEF-2D.

L'étude théorique de la ligne coaxiale sans pertes présentée sur la figure (III.19) conduit à la valeur de son impédance caractéristique  $Z_c$  donnée par:

$$Z_c = \left(\ln \frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{10^{-7}}{\pi\epsilon}} \text{ en } (\Omega)$$

L'application de la MEF-2D à cette structure nécessite le maillage du quart de la section droite en éléments triangulaires comme le montre la figure (III.20) et donne les grandeurs caractéristiques de cette ligne.

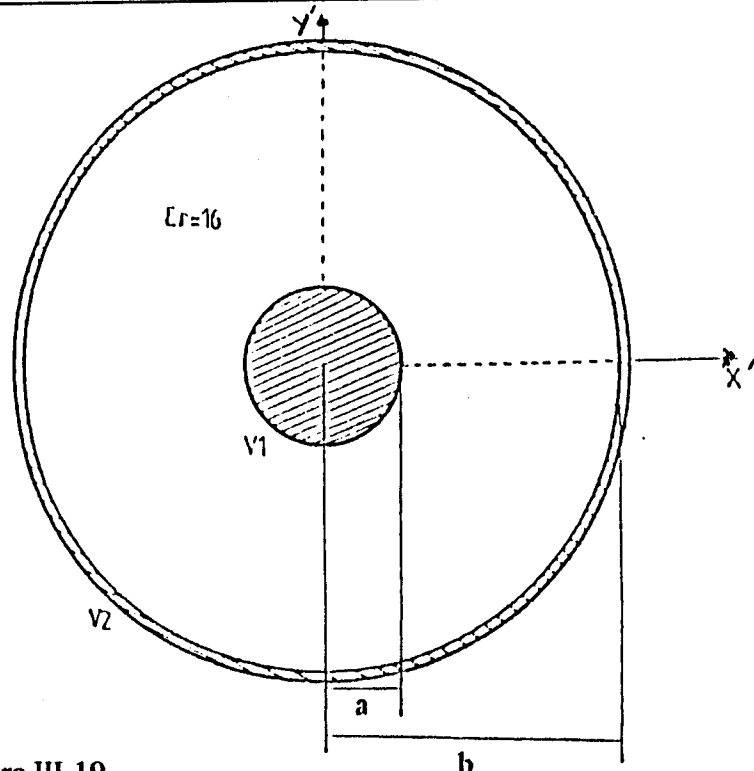
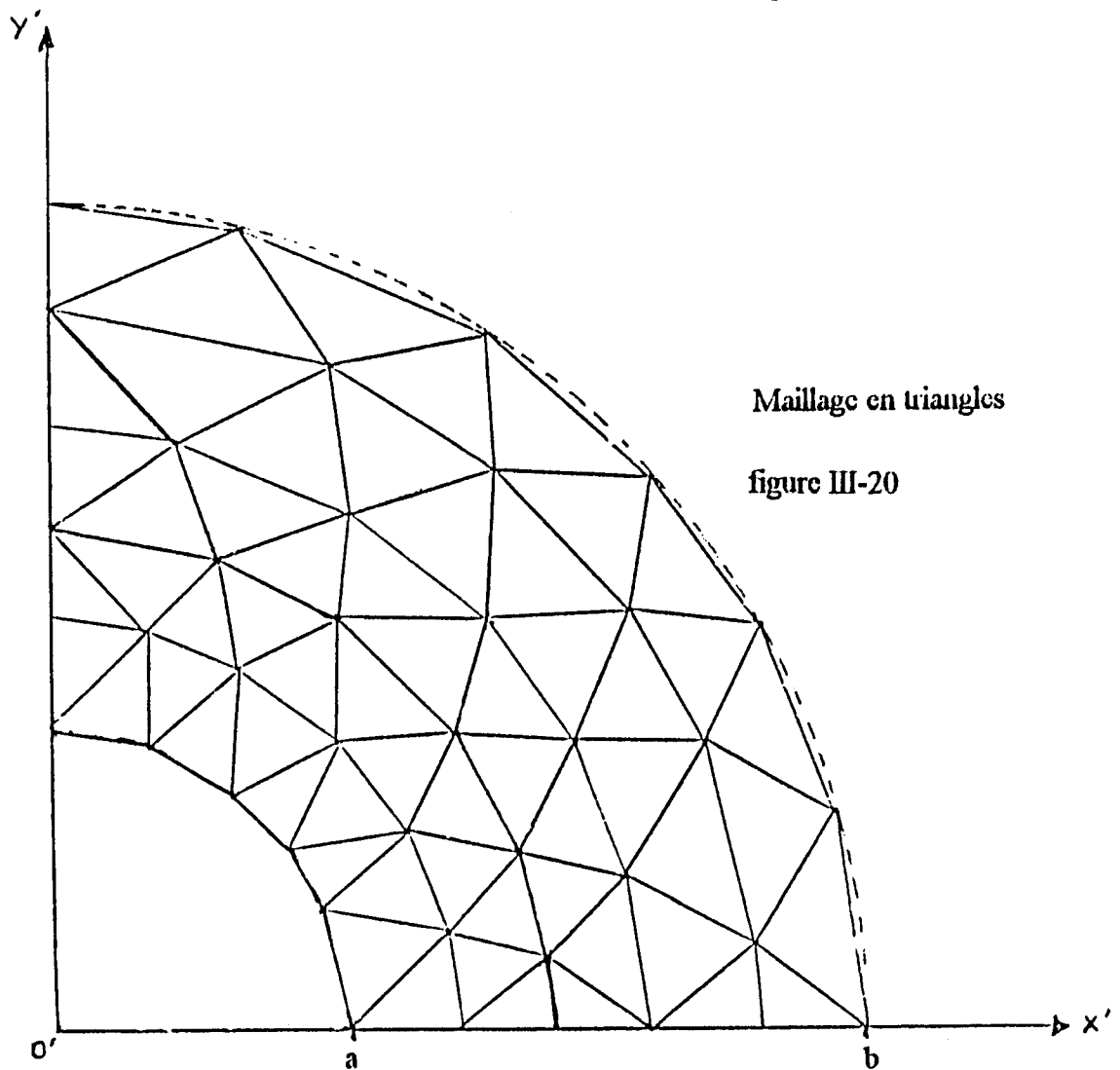


figure III-19

Section droite d'une ligne coaxiale



Maillage en triangles

figure III-20

Le tableau comparatif (III-11) montre une très bonne cohérence des deux méthodes:

TABLEAU III-11

$\epsilon_{r_{eff}}$	16	16
$Z_c (\Omega)$	21,30	20,79

**b. ANALYSE DE LA LIGNE MICRO-RUBAN SUSPENDUE**

Soit la ligne microruban suspendue blindée d'épaisseur nulle, présentée sur la figure (III.21).

La géométrie de cette ligne présente une symétrie par rapport à l'axe o'y'. L'étude de la moitié de la structure suffit pour sa caractérisation. Son analyse par la MEF-2D donne les variations de  $Z_c$  et de  $\epsilon_{r_{eff}}$  en fonction de la largeur  $W$  du micro-ruban. Ces résultats sont comparés à ceux d'une méthode approximative (fonction de Green [13]) sur le tableau (III.12) où nous observons un léger écart.

TABLEAU III-12

W (mm)	$Z_c$		$\epsilon_{r_{eff}}$	
	MEF-2D	Fonction de Green	MEF-2D	Fonction de Green
0,2	115,4	118,07	3,08	3,13
0,4	97,3	100	2,82	2,86
0,8	79,1	81	2,49	2,52
1,2	67,9	69,6	2,28	2,30
2	54,5	55,2	1,98	2,01

Les distribution du potentiel scalaire  $V_0$  et du champ électrique  $\vec{E}_t$  sur la section  $S_p$  pour une ligne micro-ruban de longueur  $W = 0,2$  mm, sont présentées sur les figures (III.22) à (III.25). Nous présentons également sur la figure (III.26) la variation de l'impédance caractéristique  $Z_c$  en fonction du rapport  $W/H$  et pour différentes valeurs de  $H_1=H_2$ . Ce diagramme est très utile pour la synthèse des lignes micro-rubans suspendues.

**A.2 Mode TE, TM et HEM: [34], [35]**

Lorsque la structure de l'accès p est un guide d'ondes formé d'un blindage métallique contenant un ou plusieurs diélectriques de permittivité réelle  $\epsilon$  et de perméabilité réelle  $\mu$ , les

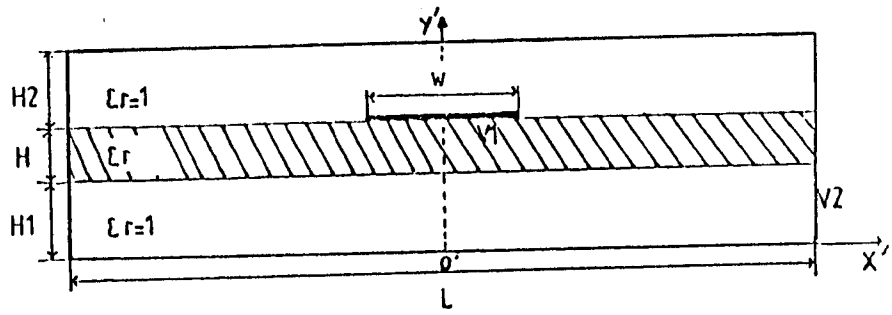


figure III-21  
 $V1 = 1 \text{ volt} ; V2 = 0 \text{ volt}$   
 $L = 10 \text{ mm} ; H1 = H2 = 1 \text{ mm}$   
 $\epsilon_r = 9.6 ; H = 0.635 \text{ mm}$

section droite d'une ligne microruban  
 suspendue blindée

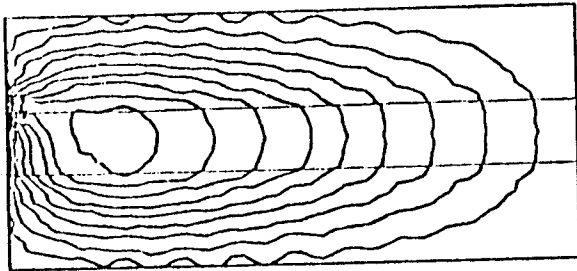


figure III-22

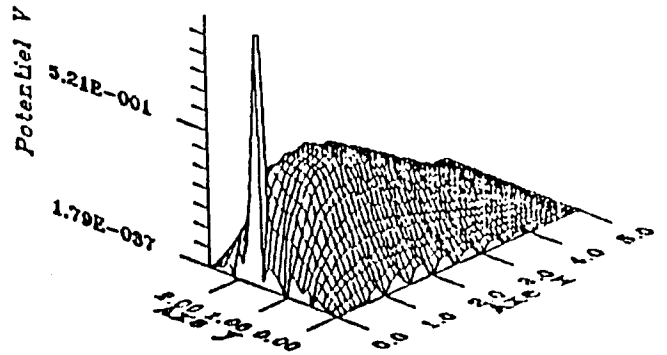


figure III-23

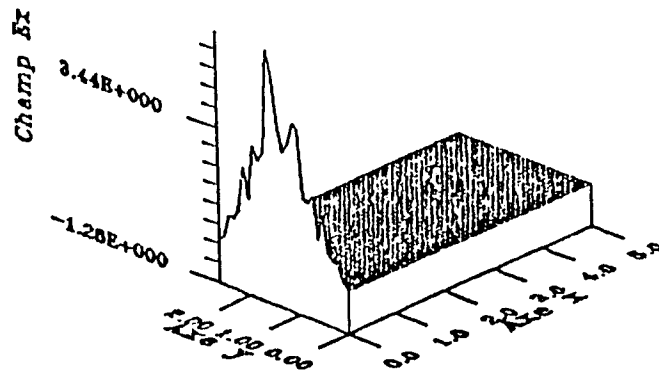


figure III-24

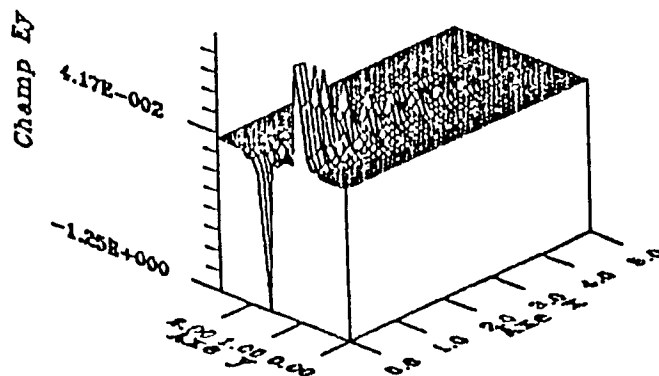


figure III-25

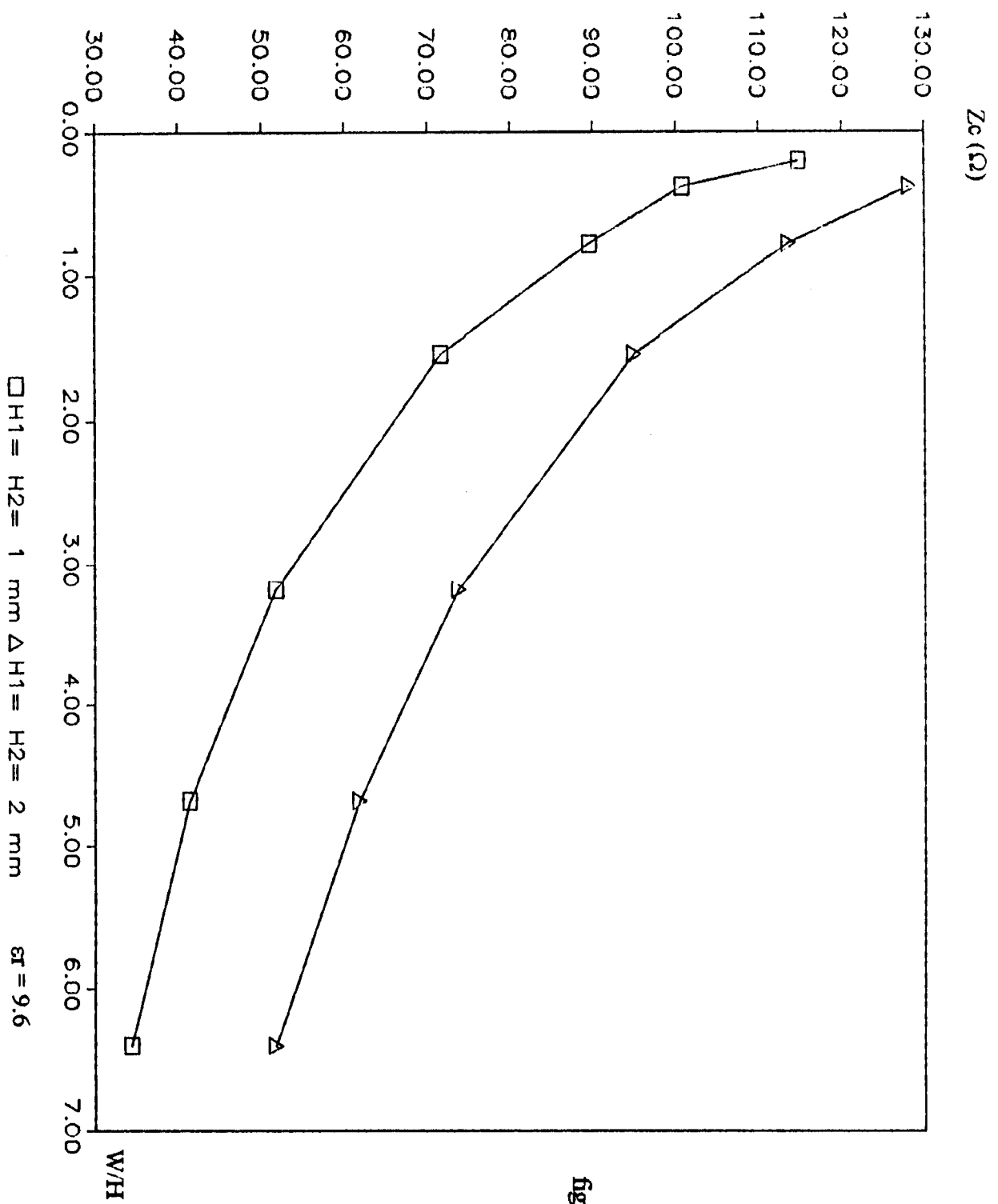


figure III-26



ondes électromagnétiques s'y propagent dans la direction longitudinale notée ( $o'z'$ ), sous différentes forme:

- transverse électrique (TE) caractérisé par  $E_z = 0, H_z \neq 0$ ,
- transverse magnétique (TM) caractérisé par  $E_z \neq 0, H_z = 0$ ,
- hybride électromagnétique (HEM) caractérisé par  $E_z \neq 0$  et  $H_z \neq 0$ .

Les grandeurs spécifiques à chaque mode sont la fréquence de coupure, le diagramme de dispersion et la distribution du champ électromagnétique sur la section droite du guide.

### A.2.1 FORMULATION DU PROBLEME

Sachant que les modes TE, TM et HEM peuvent être définis à partir de leurs composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ , la formulation du problème de propagation consiste à déduire des équations de Maxwell, des équations ne dépendant que de ces composantes. Le phénomène de propagation des ondes électromagnétique est régi par les équations de Maxwell.

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{D} = \rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Nous supposons que ces milieux de propagation sont linéaires, sans pertes, sans charges ( $\rho = 0$ ), sans courants ( $\vec{J} = \vec{0}$ ) et le champ électromagnétique qui s'y propage est périodique dans le temps en  $\exp(j\omega t)$ .

Ces équations deviennent:

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E}(x', y', z') = -j\omega\mu\vec{H}(x', y', z') & \text{(III.83.a)} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H}(x', y', z') = j\omega\epsilon\vec{E}(x', y', z') & \text{(III.83.b)} \\ \text{div} \vec{D}(x', y', z') = 0 & \text{(III.83.c)} \\ \text{div} \vec{B}(x', y', z') = 0 & \text{(III.83.d)} \end{cases}$$

Les opérateurs  $\vec{\text{rot}}$  et  $\text{div}$  sont associés à des distributions vectorielles  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ , et  $\vec{B}$  [Annexe I].



Le milieu de propagation étant sans pertes, l'onde électromagnétique s'y propage donc selon l'axe (o'z') en  $\exp(-j\beta z')$  avec la constante de propagation longitudinale  $\beta$ .

Nous décomposons ensuite les opérateurs ( $\vec{\text{rot}}$ ,  $\vec{\text{div}}$ ) et les champs ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ) en une composante transversale définie sur la section droite (x', y') et une composante longitudinale suivant la direction de propagation o'z' de vecteur unitaire  $\vec{u}'_z$ .

Les équation (III.83.a) et (III.83.b) donnent:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_t = -j\omega\mu H_z \vec{u}'_z \quad (\text{III.84.a})$$

$$\vec{\text{rot}}(E_z \vec{u}'_z) - j\beta(\vec{u}'_z \times \vec{E}_t) = -j\omega\mu \vec{H}_t \quad (\text{III.84.b})$$

$$\vec{\text{rot}}_t \vec{H}_t = j\omega\epsilon E_z \vec{u}'_z \quad (\text{III.84.c})$$

$$\vec{\text{rot}}_t(H_z \vec{u}'_z) - j\beta(\vec{u}'_z \times \vec{H}_t) = j\omega\epsilon \vec{E}_t \quad (\text{III.84.d})$$

("t" désigne "transverse")

$$\text{or } \vec{\text{rot}}_t(E_z \vec{u}'_z) = \vec{\text{grad}}_t E_z \times \vec{u}'_z \quad \text{et} \quad \vec{\text{rot}}_t(H_z \vec{u}'_z) = \vec{\text{grad}}_t H_z \times \vec{u}'_z$$

Ce qui donne:

$$\left( \vec{\text{grad}}_t E_z + j\beta \vec{E}_t \right) \times \vec{u}'_z = -j\omega\mu \vec{H}_t \quad (\text{III.85.a})$$

$$\left( \vec{\text{grad}}_t H_z + j\beta \vec{H}_t \right) \times \vec{u}'_z = j\omega\epsilon \vec{E}_t \quad (\text{III.85.b})$$

L'expression de  $\vec{E}_t$  (respectivement  $\vec{H}_t$ ) en fonction de  $E_z$  et de  $H_z$  est déduite immédiatement des équations (III.85.a) et (III.85.b) en procédant par élimination de  $\vec{H}_t$  (respectivement  $\vec{E}_t$ ). Les expressions de  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  s'obtiennent en utilisant les opérations respectives:

$$\left( j\omega\epsilon(\text{III.85.a}) + j\beta(\text{III.85.b}) \times \vec{u}'_z \right) \text{ et } \left( j\beta(\text{III.85.a}) \times \vec{u}'_z + (-j\omega\mu)(\text{III.85.b}) \right)$$



$$\text{soient: } \vec{E}_t = \frac{-j}{k_c^2} \left[ \beta \text{grad}_t E_z + \omega \mu \left( \text{grad}_t H_z \times \vec{u}'_z \right) \right] \quad (\text{III.86.a})$$

$$\vec{H}_t = \frac{-j}{k_c^2} \left[ \beta \text{grad}_t H_z - \omega \varepsilon \left( \text{grad}_t E_z \times \vec{u}'_z \right) \right] \quad (\text{III.86.3})$$

$$\text{avec } k_c^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \left( \varepsilon_r \mu_r - \frac{\beta^2 C_0^2}{\omega^2} \right) = k_0^2 (\varepsilon_r \mu_r - \varepsilon_{r\text{eff}})$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \text{ et } \varepsilon_{r\text{eff}} = \beta^2 / (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0)$$

Afin d'obtenir des grandeurs de dimensions comparables nous posons:

$$\psi = \sqrt{\varepsilon_0} E_z \text{ et } \phi = \sqrt{\mu_0} H_z$$

Ainsi  $\psi^2$  et  $\phi^2$  ont des valeurs homogènes à une densité volumique d'énergie.

Les équations (III.86.a) et (III.86.b) s'écrivent alors:

$$j \left( \frac{k_0^2}{\omega \sqrt{\mu_0}} \right) \vec{E}_t = (\varepsilon_r \mu_r - \varepsilon_{r\text{eff}})^{-1} \left( \mu_r \text{grad}_t \phi \times \vec{u}'_z + \sqrt{\varepsilon_{r\text{eff}}} \text{grad}_t \psi \right) \quad (\text{III.87.a})$$

$$j \left( \frac{k_0^2}{\omega \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \vec{H}_t = (\varepsilon_r \mu_r - \varepsilon_{r\text{eff}})^{-1} \left( \varepsilon_r \text{grad}_t \psi \times \vec{u}'_z - \sqrt{\varepsilon_{r\text{eff}}} \text{grad}_t \phi \right) \quad (\text{III.87.b})$$

De même les équations (III.84.a) et (III.84.c) deviennent:

$$\vec{\text{rot}}_t \left( j \left( \frac{k_0^2}{\omega \sqrt{\mu_0}} \right) \vec{E}_t \right) = k_0^2 \mu_r \phi \vec{u}'_z \quad (\text{III.88.a})$$

$$\vec{\text{rot}}_t \left( -j \left( \frac{k_0^2}{\omega \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \vec{H}_t \right) = k_0^2 \varepsilon_r \psi \vec{u}'_z \quad (\text{III.88.b})$$

L'écriture des équations (III.88.a) et (III.88.b) au sens des distributions [annexe I], donne:

- Soit  $\Omega_e$ : l'espace des fonctions test  $\phi_e$  continues et dérivables telles que  $\phi_e = 0$  sur un C.C.E.

- Soit  $\Omega_m$ : l'espace des fonctions test  $\phi_m$  continues et dérivables telles que  $\phi_m = 0$  sur un C.C.M.

Alors:

$$\begin{aligned} \forall \phi_e \in D(\Omega_e) \text{ et } \forall \phi_m \in D(\Omega_m); \\ \iint_{S_p} j \left( \frac{k_0^2}{\omega \sqrt{\mu_0}} \right) \vec{E}_t \cdot \left( \left\{ \text{grad} \right\}_t \phi_m \times \vec{u}_z' \right) dx' dy' = k_0^2 \iint_{S_p} \mu_r \phi \cdot \phi_m dx' dy' \\ \iint_{S_p} j \left( \frac{k_0^2}{\omega \sqrt{\epsilon_0}} \right) \vec{H}_t \cdot \left( \left\{ \text{grad} \right\}_t \phi_e \times \vec{u}_z' \right) dx' dy' = k_0^2 \iint_{S_p} \epsilon_r \psi \cdot \phi_e dx' dy' \end{aligned}$$

Nous remplaçons ensuite  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  par leurs expressions respectives (III.87.a) et (III.87.b), pour obtenir un système d'équations dépendant uniquement de  $\psi$  et  $\phi$ , donc de  $E_z$  et de  $H_z$ . Soient:

$$\begin{aligned} \forall \phi_e \in D(\Omega_e) \text{ et } \forall \phi_m \in D(\Omega_m); \\ \iint_{S_p} (\epsilon_r \mu_r - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\mu_r \nabla_t \phi \times \vec{u}_z') \cdot (\nabla_t \phi_m \times \vec{u}_z') dx' dy' \\ + \sqrt{\epsilon_{r_{\text{eff}}}} \iint_{S_p} (\epsilon_r \mu_r - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\nabla_t \psi) \cdot (\nabla_t \phi_m \times \vec{u}_z') dx' dy' \\ = k_0^2 \iint_{S_p} \mu_r \phi \phi_m dx' dy' \quad \text{(III.89.a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_p} (\epsilon_r \mu_r - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\epsilon_r \nabla_t \psi \times \vec{u}_z') \cdot (\nabla_t \phi_e \times \vec{u}_z') dx' dy' \\ - \sqrt{\epsilon_{r_{\text{eff}}}} \iint_{S_p} (\epsilon_r \mu_r - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\nabla_t \phi) \cdot (\nabla_t \phi_e \times \vec{u}_z') dx' dy' \\ = k_0^2 \iint_{S_p} \epsilon_r \psi \phi_e dx' dy' \quad \text{(III.89.b)} \end{aligned}$$



Ces équations peuvent être simplifiées en utilisant:

$$\begin{aligned} (\nabla_t \phi \times \bar{u}'_z) \cdot (\nabla_t \phi_m \times \bar{u}'_z) &= \nabla_t \phi \cdot \nabla_t \phi_m \\ (\nabla_t \psi \times \bar{u}'_z) \cdot (\nabla_t \phi_e \times \bar{u}'_z) &= \nabla_t \psi \cdot \nabla_t \phi_e \\ \nabla_t \psi \cdot (\nabla_t \phi_m \times \bar{u}'_z) &= (\nabla_t \psi \times \nabla_t \phi_m) \cdot \bar{u}'_z \\ \nabla_t \phi \cdot (\nabla_t \phi_e \times \bar{u}'_z) &= (\nabla_t \phi \times \nabla_t \phi_e) \cdot \bar{u}'_z \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement les deux équations à résoudre par la MEF-2D

$\forall \phi_e \in D(\Omega_e)$  et  $\forall \phi_m \in D(\Omega_m)$ ;

$$\begin{aligned} \iint_{S_p} (\epsilon_r \mu_r - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} \mu_r \nabla_t \phi \cdot \nabla_t \phi_m dx' dy' + \sqrt{\epsilon_{r_{\text{eff}}}} \iint_{S_p} (\epsilon_r \mu_r - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\nabla_t \psi \times \nabla_t \phi_m) \cdot \bar{u}'_z dx' dy' \\ = k_0^2 \iint_{S_p} \mu_r \phi \phi_m dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{III.90.a})$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_p} (\epsilon_r \mu_r - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} \epsilon_r \nabla_t \psi \cdot \nabla_t \phi_e dx' dy' + \sqrt{\epsilon_{r_{\text{eff}}}} \iint_{S_p} (\epsilon_r \mu_r - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\nabla_t \phi_e \times \nabla_t \phi) \cdot \bar{u}'_z dx' dy' \\ = k_0^2 \iint_{S_p} \epsilon_r \psi \phi_e dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{III.90.b})$$

Ce système est constitué de deux équations couplées.

Nous constatons que lorsque  $\epsilon_{r_{\text{eff}}} = 0$  (c'est-à-dire  $\beta = 0$  ce qui correspond à la coupure), les deux équations (III.90.a) et (III.90.b) se découplent.

Ainsi, nous obtenons à la coupure ( $\beta = 0$ ):

$$\iint_{S_p} \epsilon_r^{-1} (\nabla_t \phi \cdot \nabla_t \phi_m) dx' dy' - k_0^2 \iint_{S_p} \mu_r \phi \phi_m dx' dy' = 0 \quad (\text{III.91.a})$$

$$\iint_{S_p} \mu_r^{-1} (\nabla_t \psi \cdot \nabla_t \phi_e) dx' dy' - k_0^2 \iint_{S_p} \epsilon_r \psi \phi_e dx' dy' = 0 \quad (\text{III.91.b})$$

A l'aide de ces deux équations, nous mettons en évidence deux familles de solutions: les modes TE ( $\psi = 0$ ) et les modes TM ( $\phi = 0$ ). Ces deux équations sont utilisées pour calculer les fréquence de coupure des modes TE et TM d'un guide de section droite quelconque.

### A.2.2 DISCRETISATION PAR LA MEF-2D

Après maillage de la section droite  $(x',y')$  du guide d'ondes en éléments triangulaires, nous approximons les fonctions inconnues sur chaque triangle par:

$$\psi = \sum_{i=1}^{NN} \psi_i N_i \text{ et } \phi = \sum_{i=1}^{NN} \phi_i N_i$$

NN est le nombre de noeud sur l'élément  $K'$  ( $K' \in [1, N'E]$ ),  $N_i$  est le polynôme d'interpolation de Lagrange au noeud  $i$  et le couple  $(\psi_i, \phi_i)$  représente les valeurs nodales des champs électrique et magnétique en ce noeud.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange  $N_i$  de degré  $d$  et la position des noeuds d'interpolation sont décrits dans le *chapître II*.

Les fonctions test  $\phi_e$  et  $\phi_m$  sont considérées égales à:

$$\forall j \in [1, NN]; \phi_{ej} = N_j \text{ et } \phi_{mj} = N_j \text{ sur un triangle } K'$$

Nous obtenons finalement le système discrétisé sur un élément  $K'$  du maillage.

$$\forall j \in [1, NN];$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{NN} \phi_i \iint_{K'} (\epsilon_{r_{K'}} \mu_{r_{K'}} - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\mu_{r_{K'}} \nabla_t N_i \cdot \nabla_t N_j) dx' dy' \\ & + \sum_{i=1}^{NN} \psi_i \sqrt{\epsilon_{r_{\text{eff}}}} \iint_{K'} (\epsilon_{r_{K'}} \mu_{r_{K'}} - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\nabla_t N_i \times \nabla_t N_j) \cdot \vec{u}'_z dx' dy' \\ & - k_0^2 \sum_{i=1}^{NN} \phi_i \iint_{K'} \mu_r N_i N_j dx' dy' = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.92.a})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{NN} \psi_i \iint_{K'} (\epsilon_{r_{K'}} \mu_{r_{K'}} - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\epsilon_{r_{K'}} \nabla_t N_i \cdot \nabla_t N_j) dx' dy' \\ & + \sum_{i=1}^{NN} \phi_i \sqrt{\epsilon_{r_{\text{eff}}}} \iint_{K'} (\epsilon_{r_{K'}} \mu_{r_{K'}} - \epsilon_{r_{\text{eff}}})^{-1} (\nabla_t N_i \times \nabla_t N_j) \cdot \vec{u}'_z dx' dy' \\ & - k_0^2 \sum_{i=1}^{NN} \psi_i \iint_{K'} \epsilon_{r_{K'}} N_i N_j dx' dy' = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.92.b})$$

Après assemblage sur tous les éléments du maillage de la surface  $S_p$  du plan d'accès  $p$ , les systèmes (III.92.a) et (III.92.b) s'écrivent sous la forme matricielle suivante:

$$[A]\{\phi\} + [C]\{\psi\} = k_0^2[B]\{\phi\}$$

$$[C]^t\{\phi\} + [D]\{\psi\} = k_0^2[G]\{\psi\}$$

Ce qui s'écrit encore:

$$\begin{bmatrix} [A] & [C] \\ [C]^t & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} - k_0^2 \begin{bmatrix} [B] & [0] \\ [0] & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (\text{III.93})$$

C'est un système à valeurs propres  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$  et à vecteurs propres  $(\dots \phi_i, \psi_i, \dots)$  à résoudre par des méthodes numériques.

Le termes des matrices  $[A]$ ,  $[D]$ ,  $[C]$ ,  $[B]$  et  $[G]$  sont:

$$A_{ij} = \iint_{K'} \left( \epsilon_{r_{k'}} \mu_{r_{k'}} - \epsilon_{r_{\text{eff}}} \right)^{-1} \mu_{r_{k'}} (\nabla_t N_i \cdot \nabla_t N_j) dx' dy'$$

$$D_{ij} = \iint_{K'} \left( \epsilon_{r_{k'}} \mu_{r_{k'}} - \epsilon_{r_{\text{eff}}} \right)^{-1} \epsilon_{r_{k'}} (\nabla_t N_i \cdot \nabla_t N_j) dx' dy'$$

$$C_{ij} = \sqrt{\epsilon_{r_{\text{eff}}}} \iint_{K'} \left( \epsilon_{r_{k'}} \mu_{r_{k'}} - \epsilon_{r_{\text{eff}}} \right)^{-1} (\nabla_t N_i \times \nabla_t N_j) \cdot \vec{u}'_z dx' dy'$$

$$B_{ij} = \iint_{K'} \mu_{r_{k'}} N_i N_j dx' dy'$$

$$G_{ij} = \iint_{K'} \epsilon_{r_{k'}} N_i N_j dx' dy'$$

Ces termes sont calculés pour toute valeur de  $\epsilon_{r_{\text{eff}}} = \beta^2 / (\omega^2 \epsilon_0 \mu_0)$ , ce qui permet la détermination du diagramme de dispersion des modes de propagation TE, TM et HEM.

### A.2.3. APPLICATION DE LA MEF-2D A L'ANALYSE DES GUIDES DIELECTRIQUES: [13], [34]

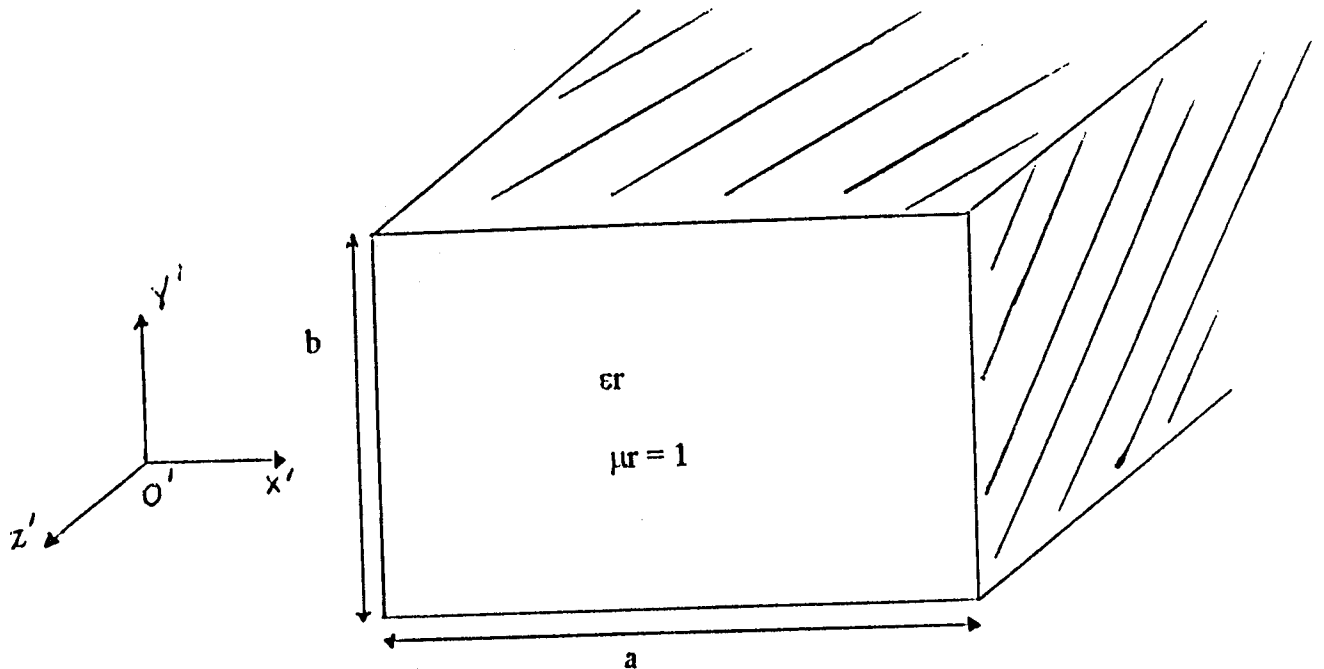
Afin de valider notre logiciel, nous comparons les résultats obtenus par la MEF-2D à ceux obtenus par:



- des méthodes analytiques (M.A.) exactes (c'est le cas des guides d'ondes homogènes),
- des méthodes approximatives (c'est le cas des guides diélectriques inhomogènes).

*a. MODES TE ET TM*

Soit le guide d'onde rectangulaire de la figure (III.27), rempli de façon homogène par un diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  et de perméabilité relative ( $\mu_r = 1$ ).



$a = 8 \text{ mm}$   
 $b = 5 \text{ mm}$   
 $\epsilon_r = 19.3$

Guide métallique rectangulaire homogène

figure III-27

Ce guide étant homogène, nous étudions pour raison de symétrie juste le quart de sa section droite ( $x',y'$ ), par la MEF-2D. Les fréquences de coupure  $f_{c_{mn}}$  des modes  $TE_{mn}$  et  $TM_{mn}$  d'un tel guide sont données par la formule exacte:

$$f_{c_{mn}} = \frac{C_0}{2\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$



$C_0$  est la vitesse de la lumière dans le vide et les entiers  $m, n$  représentent respectivement le nombre de demi-onde du champ électromagnétique selon les axes  $o'x'$  et  $o'y'$ .

Les résultats de ces deux méthodes concernant les premiers modes de ce guide, sont dressés sur le tableau comparatif (III.13), où nous observons une très bonne cohérence.

TABLEAU III-13

Modes	MEF-2D (fc en GHz)	M.A. (fc en GHz)	( $\Delta fc / fc$ ) en (%)
TE <sub>10</sub>	4,2697	4,2680	0,004
TE <sub>01</sub>	6,8358	6,8287	0,1
TE <sub>11</sub> TM <sub>11</sub>	8,0732	8,0528	0,25
TM <sub>31</sub>	14,6090	14,5111	0,67
TM <sub>13</sub>	21.1550	20.9262	1.1

L'identification de ces modes est établie à l'aide des cartographies de leurs champs électromagnétiques, présentées sur les figures (III.28) à (III.39).

#### *b. MODE HEM*

Les modes hybrides HEM sont présents dans les guides diélectriques inhomogènes tels que la fibre optique et le guide image. La fibre est utilisée dans le domaine optique et le guide image trouve ses applications dans les circuits millimétriques micro-ondes.

##### *b.1 FIBRE OPTIQUE A SAUT D'INDICE*

La méthode des éléments finis en deux dimensions est utilisée pour la détermination des modes hybrides d'une fibre optique à saut d'indice. La particularité de ces supports de propagation est que les variations relatives d'indices de réfraction des différents milieux sont très faibles (de l'ordre de 1 %).

La fibre étudiée (figure (III.40)) est constituée d'un coeur de rayon  $a_1$  et d'indice  $n_1$ , d'un milieu intermédiaire de rayon  $a_2$  et d'indice  $n_2$  et enfin d'une gaine de rayon infini et d'indice  $n$ , La figure (III.41) montre les variations d'indice  $\Delta n$  et  $\Delta n'$  définies par:

$$\Delta n = n_1 - n_2; \quad \Delta n' = n_2 - n$$

La méthode des éléments finis nécessitant un domaine borné, nous limitons la gaine par un blindage métallique cylindrique de rayon  $a_3 = 4a_1$ .



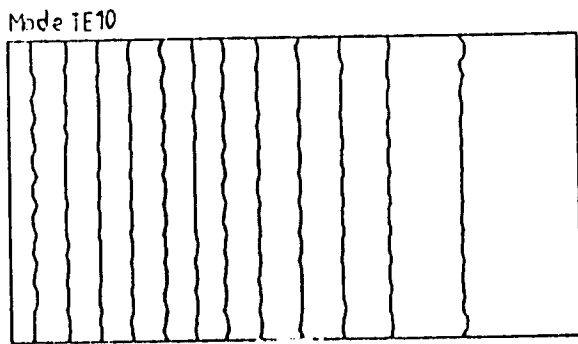


figure III-28

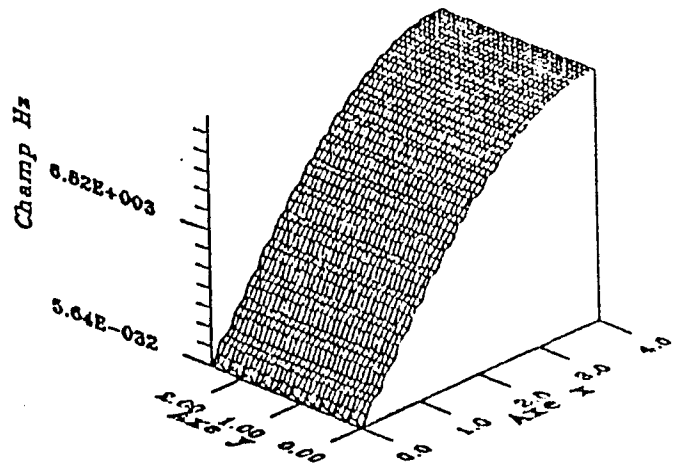


figure III-29

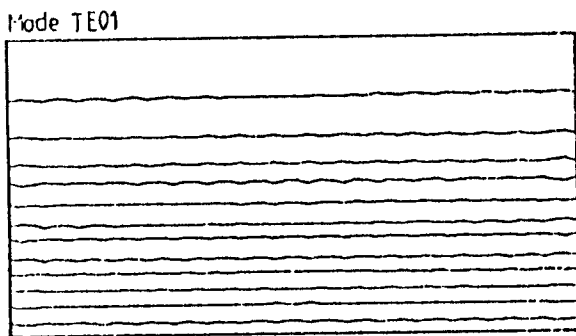


figure III-30

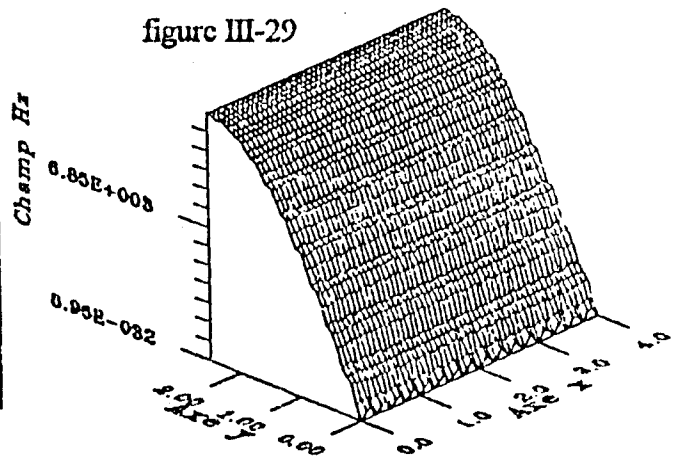


figure III-31

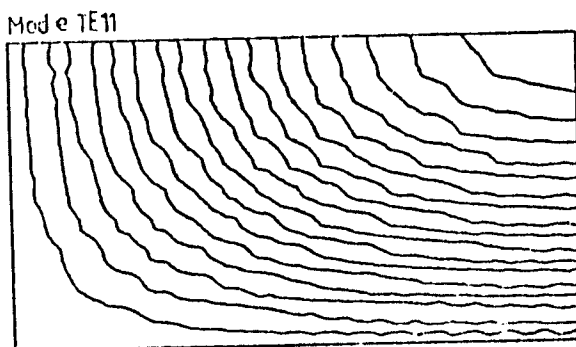


figure III-32

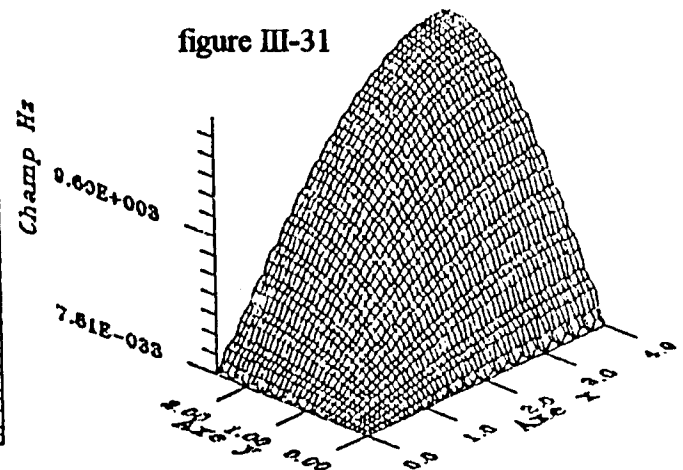


figure III-33





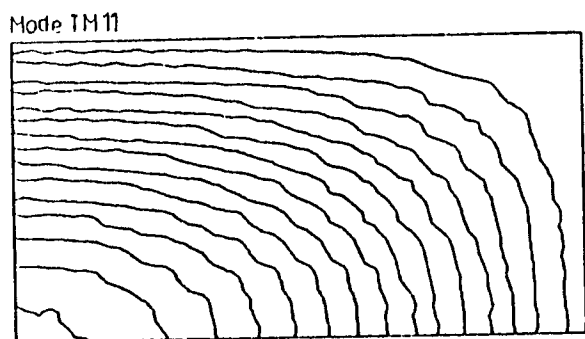


figure III-34

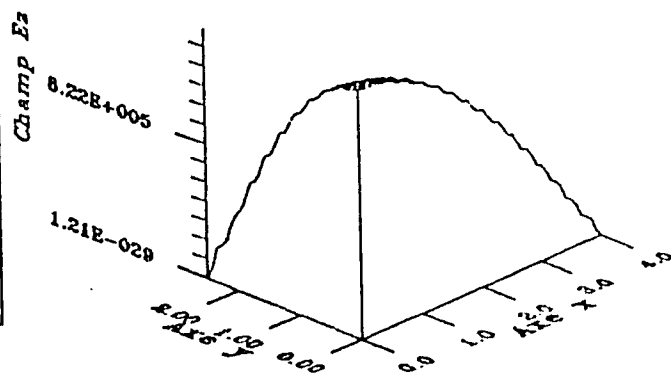


figure III-35

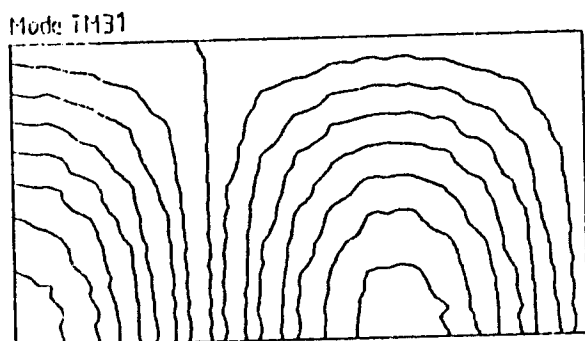


figure III-36

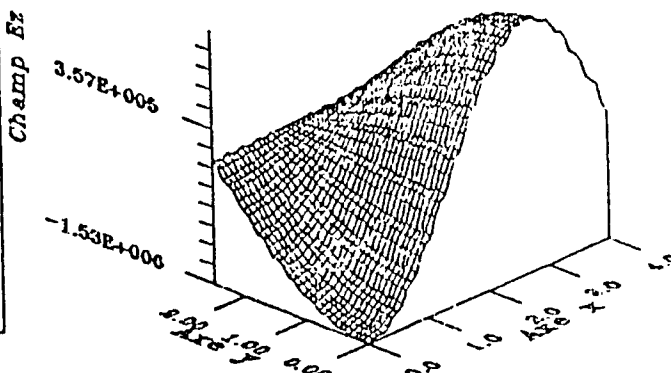


figure III-37

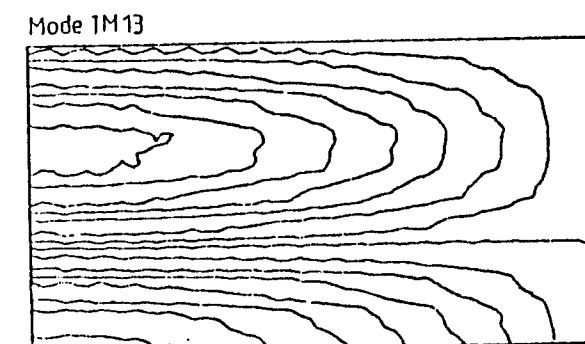


figure III-38

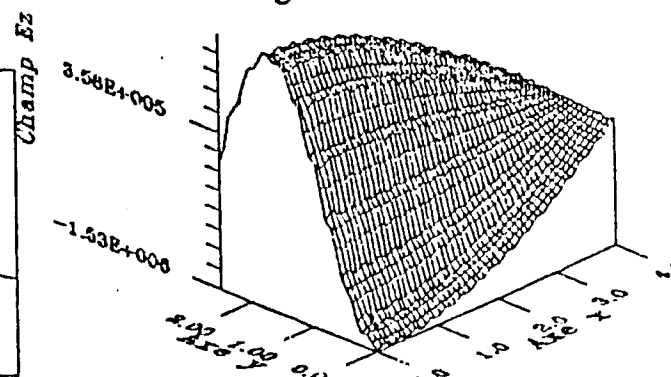
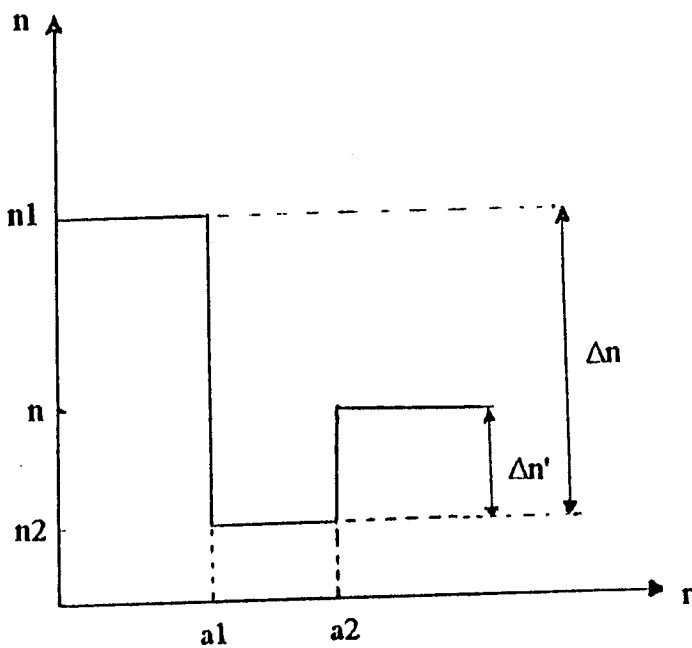
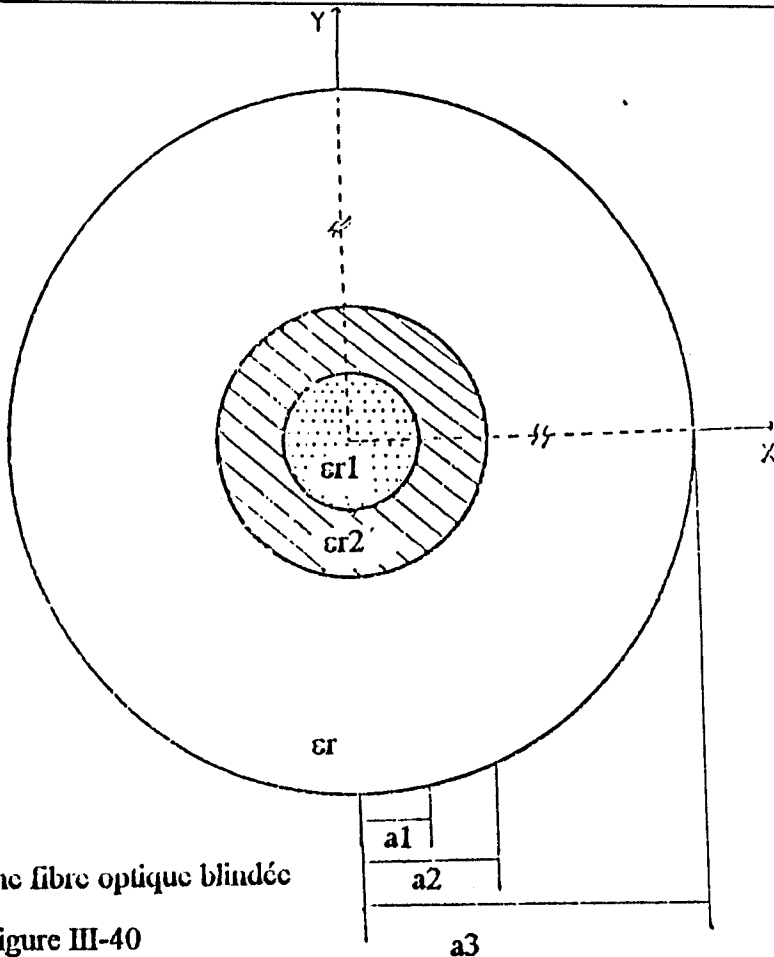


figure III-39





Profil d'indice

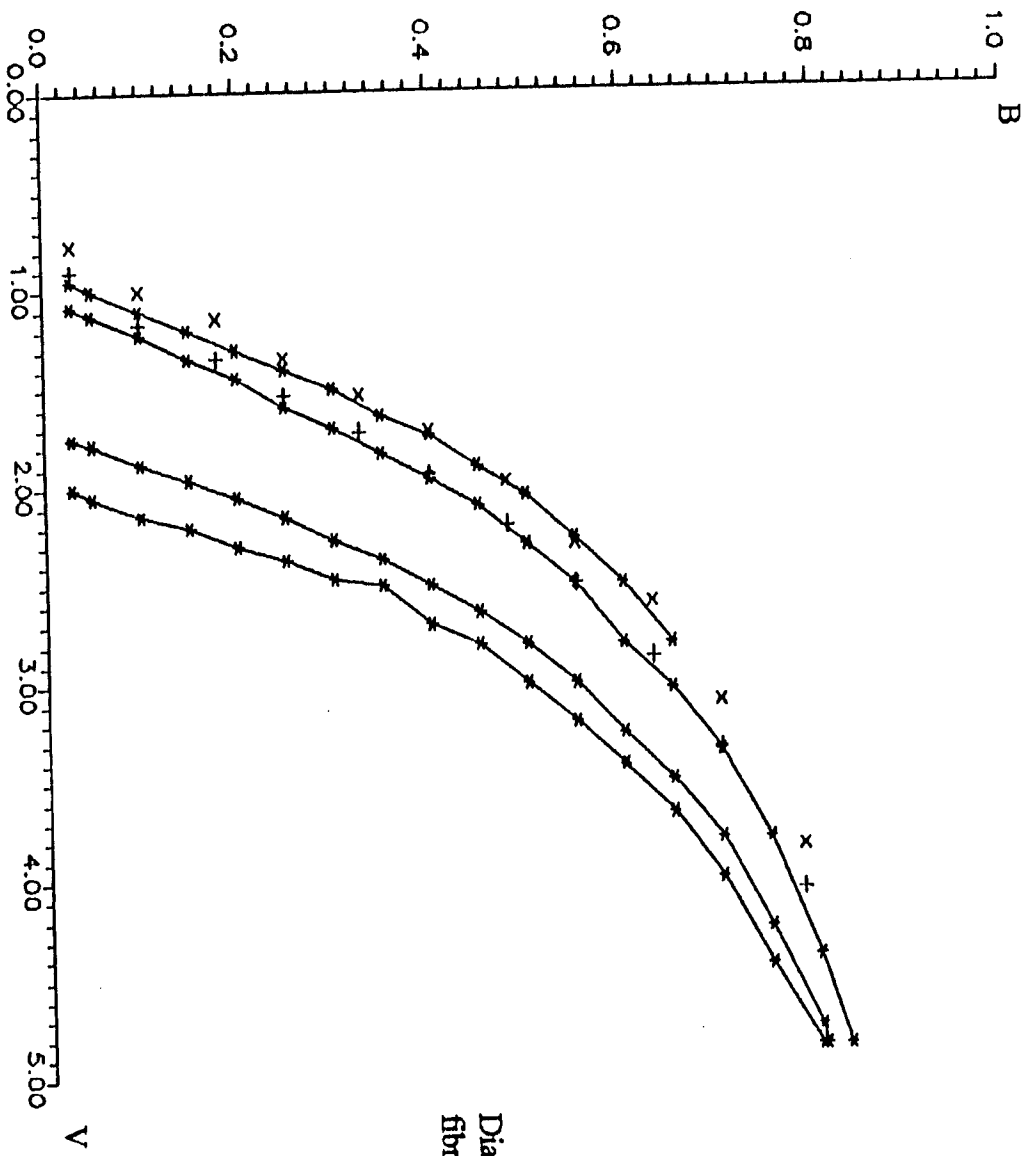
figure III-41

Nous nous sommes intéressés au premier mode hybride obtenu pour des plans de symétrie de types respectifs mur électrique et mur magnétique. Les courbes de dispersion décrivant la variation de la constante de propagation normalisée  $B$  en fonction de la fréquence normalisée  $V$  pour les valeurs respectives de  $\Delta n'/\Delta n$  égales à 0,5; 0; -0,5; -0,75; de ce mode sont présentées sur la figure (III.42)

$$B = \frac{\epsilon_{\text{reff}} - n^2}{n_1^2 - n^2} \quad ; \quad V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n^2} \quad ; \quad k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

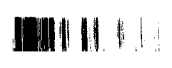
Les courbes relatives à  $\Delta n'/\Delta n = 0,5$  et 0 sont comparées à celles (courbes sous formes de x et de +) obtenues par une méthode semi-analytique [13]. Nous notons sur la figure (III.42), une différence entre ces deux méthodes pour les très faibles valeurs de  $B$ . Pour ces valeurs, le champ électromagnétique pénétrant profondément dans la gaine de dimension infinie, sera très perturbé par la présence du blindage.

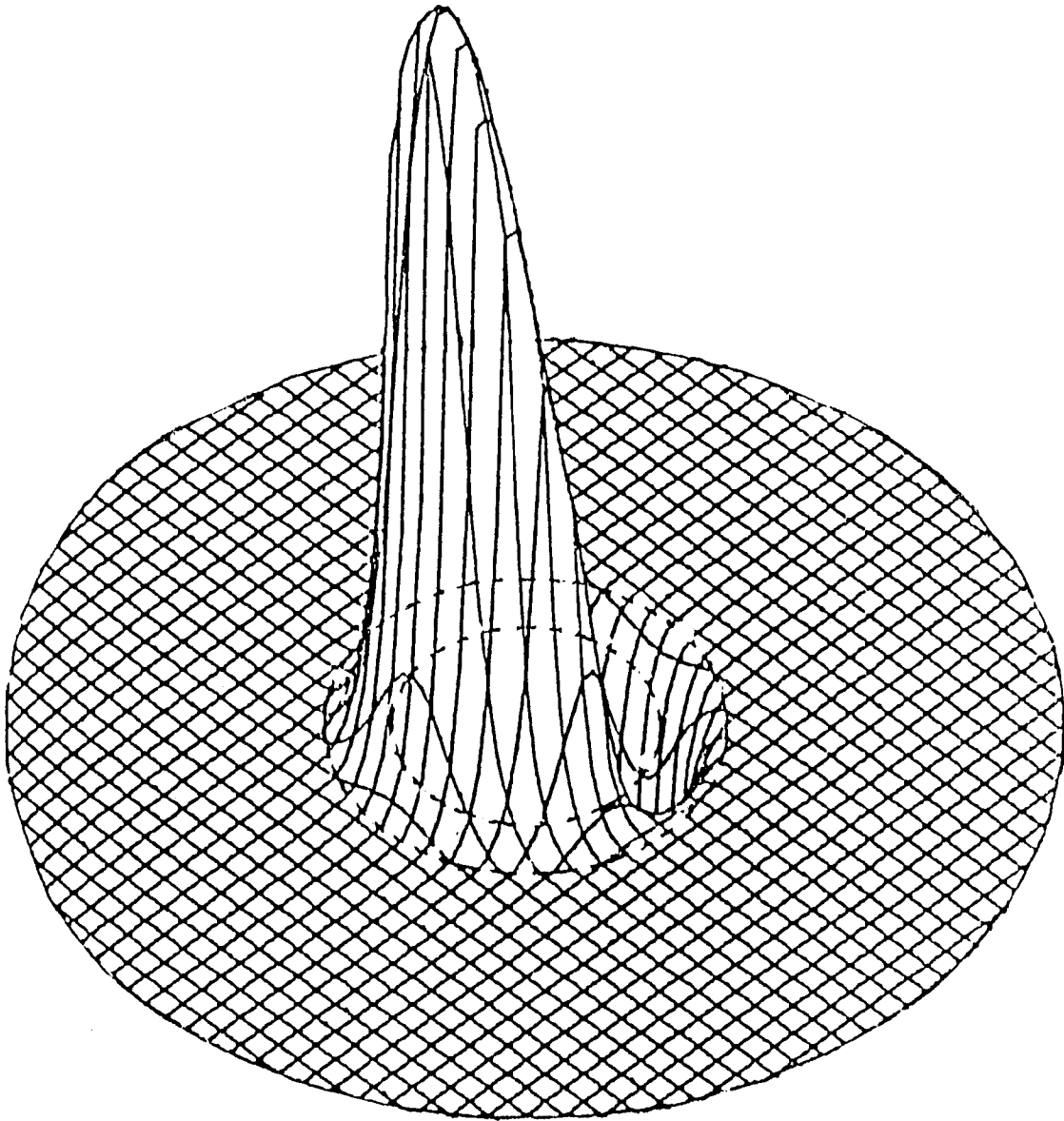
Les cartographies du champ électromagnétique de ce mode sont établies sur les figures (III.43) et (III.44) pour  $\Delta n'/\Delta n = -0,75$  et  $B = 0,64$ .



( x , + ) Expérience  
\* M.E.F.

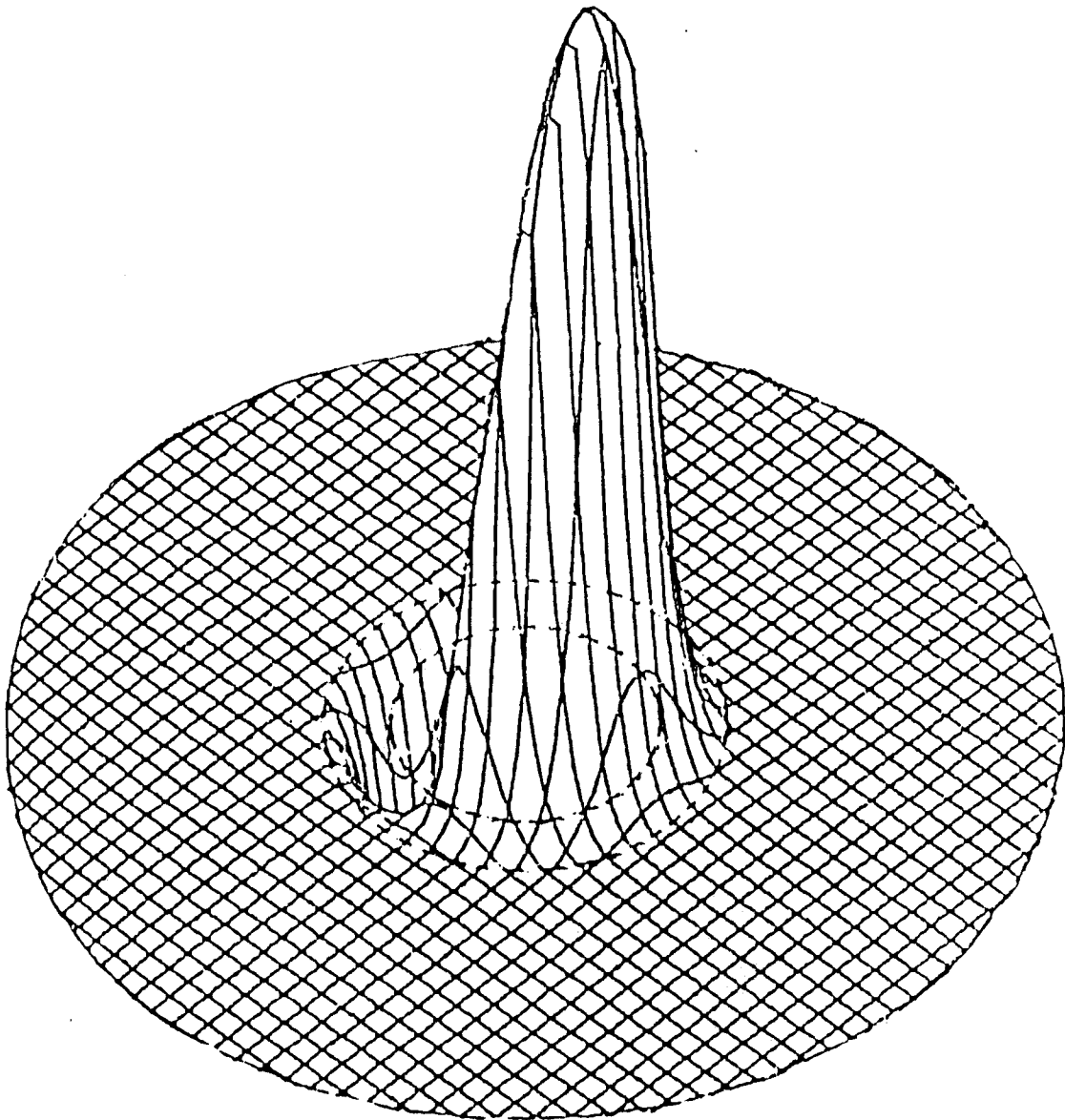
Diagramme de dispersion  $a_2/a_1 = 1.5$   
fibre à saut d'indice  
figure III-42





Variation de  $E_z$  sur la section droite  
 $\Delta n/\Delta n' = -0.75$ ;  $B = 0.64$ ;  $a_2/a_1 = 1.5$

figure III-43



Variation de Hz sur la section droite  
 $\Delta n/\Delta n' = -0.75$ ;  $B = 0.64$ ;  $a_2/a_1 = 1.5$

figure III-44



### b.2. LE GUIDE IMAGE

Le guide image est une structure formée d'un ruban diélectrique placé sur un plan métallique comme présenté sur la figure (III.45). Le diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  ( $\mu_r = 1$ ) est en général entouré d'air ( $\epsilon_r = 1$ ). Physiquement, le ruban diélectrique est supporté par le plan métallique dont la présence rend identique la propagation des ondes électromagnétiques de ce guide image de dimension  $(2a \times b)$  à celle dans un guide diélectrique rectangulaire isolé de même permittivité et de dimension  $(2a \times 2b)$ . Ce plan métallique joue le rôle d'un miroir, d'où l'origine du nom "guide image".

L'utilisation de la méthode des éléments finis comme outil d'analyse des ondes électromagnétiques guidées, nécessite le blindage de cette structure. La structure du guide image étudiée par notre méthode (MEF-2D) est présentée sur la figure (III.46).

Le diagramme de dispersion des deux premiers modes hybrides est présenté sur la figure (III.47).

Les cartographies du champ électromagnétique  $E_z$  et  $H_z$  de ces modes sont illustrées sur les figures (III.48) à (III.51).

### C. MODES PARASITES

Il faut noter, qu'avec cette formulation à deux composantes  $E_z$  et  $H_z$ , permettant de caractériser les modes hybrides, nous obtenons des modes parasites à côté des modes physiques. Le champ électromagnétique des modes parasites ne vérifie pas simultanément les quatre équations de Maxwell. Une solution permettant l'élimination de ces modes indésirables, est l'utilisation des éléments mixtes (*Chapitre II*), assurant la continuité des composantes tangentielles d'un champ au passage d'un élément de maillage à un autre.

Pour cela, nous déduisons des équations de Maxwell, deux équations ne dépendants que des composantes transverses  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$ , que nous discrétisons par l'élément fini mixte. Le développement de ce calcul est détaillé en *annexe 4*.



Guide image

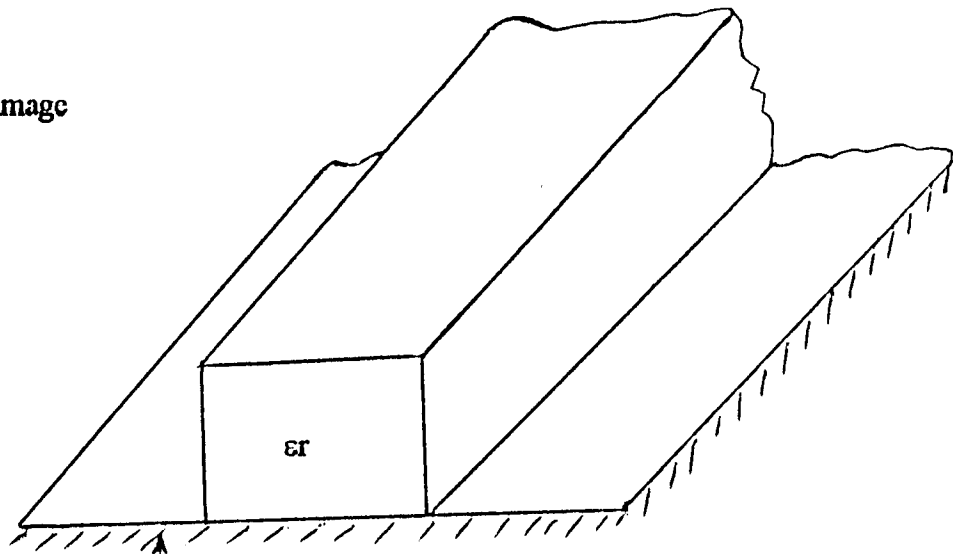
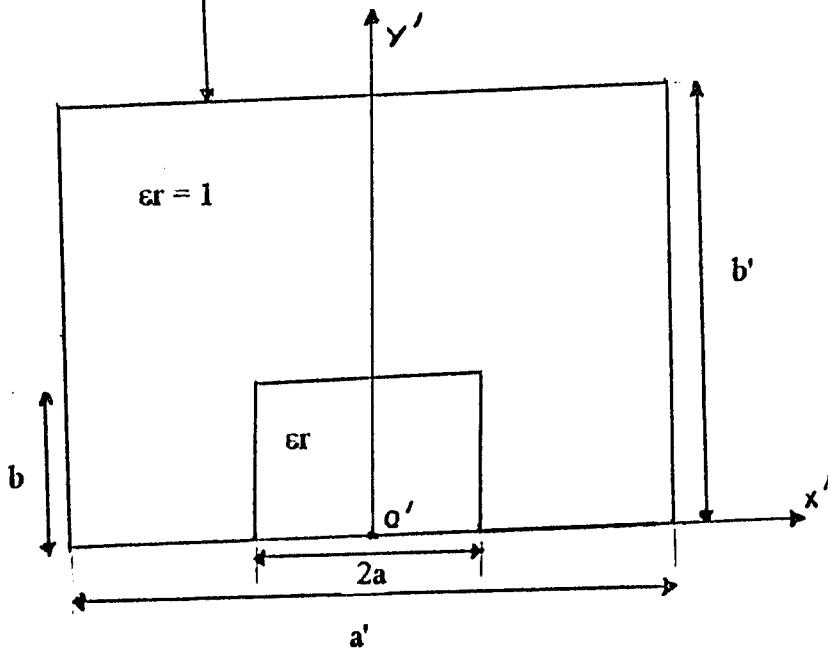


figure III-45

conducteur



$b = 1 \text{ mm}; a = b; \epsilon_r = 11.8$   
 $a' = 8b; b' = 3b$

Guide image blindé

figure III-46





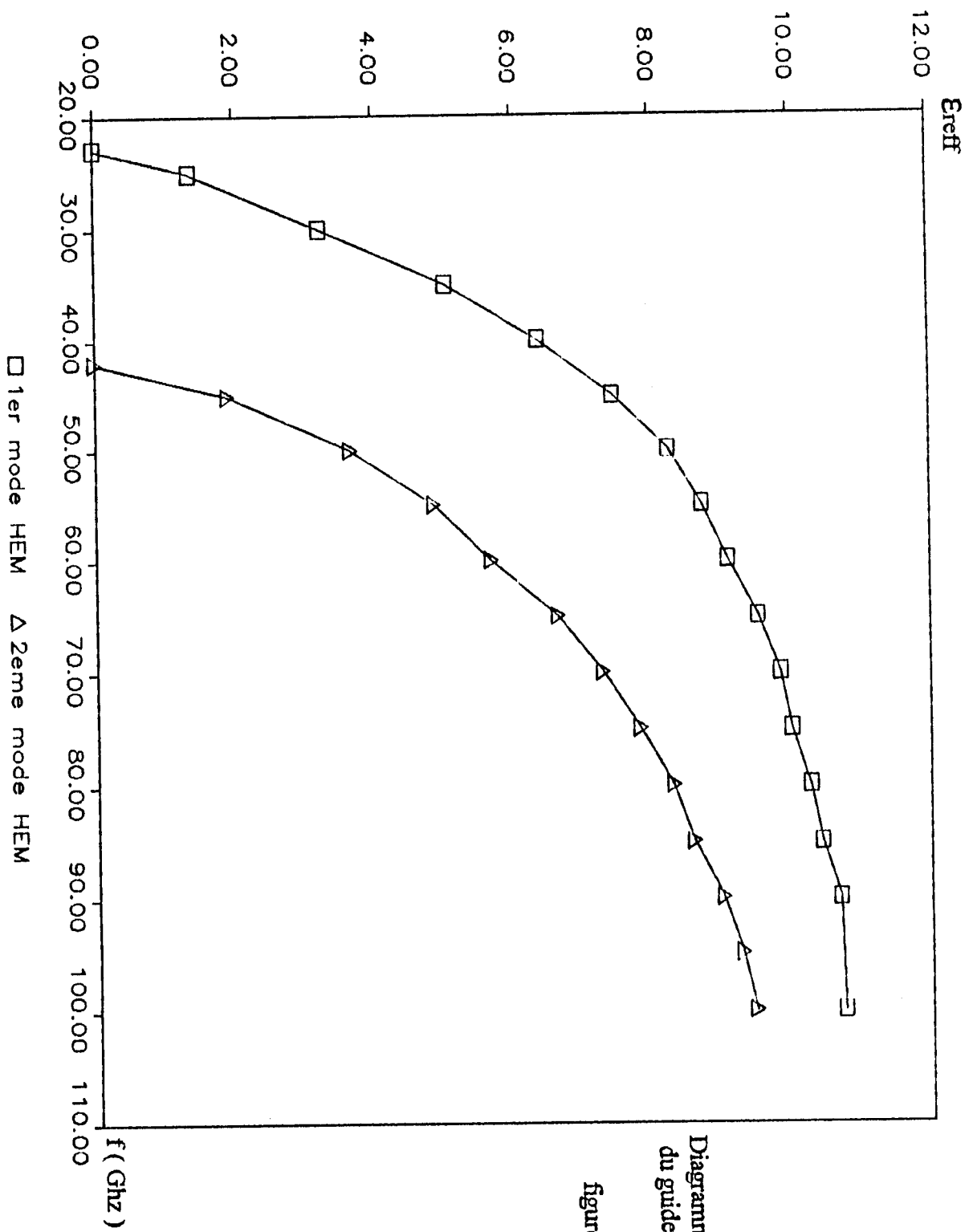
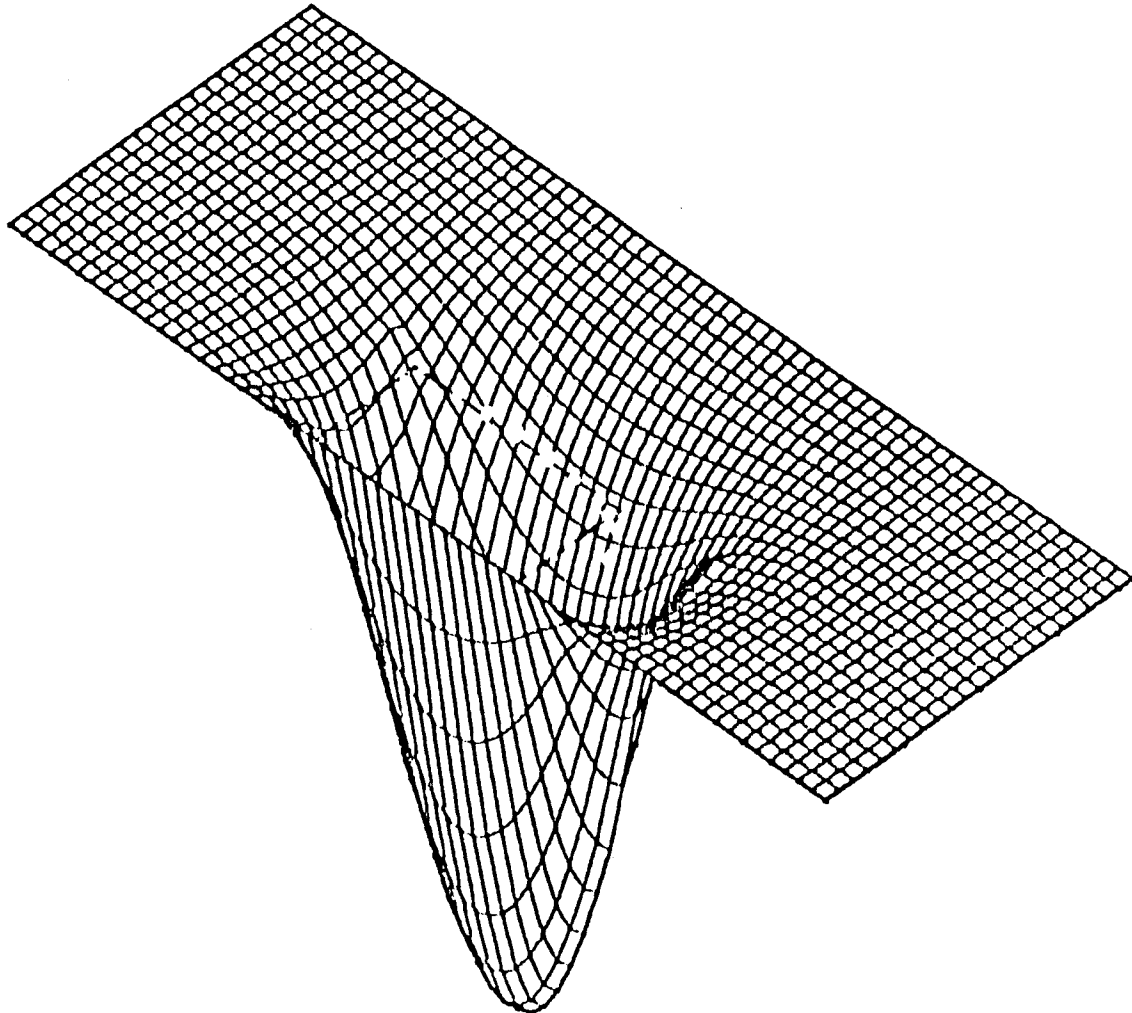


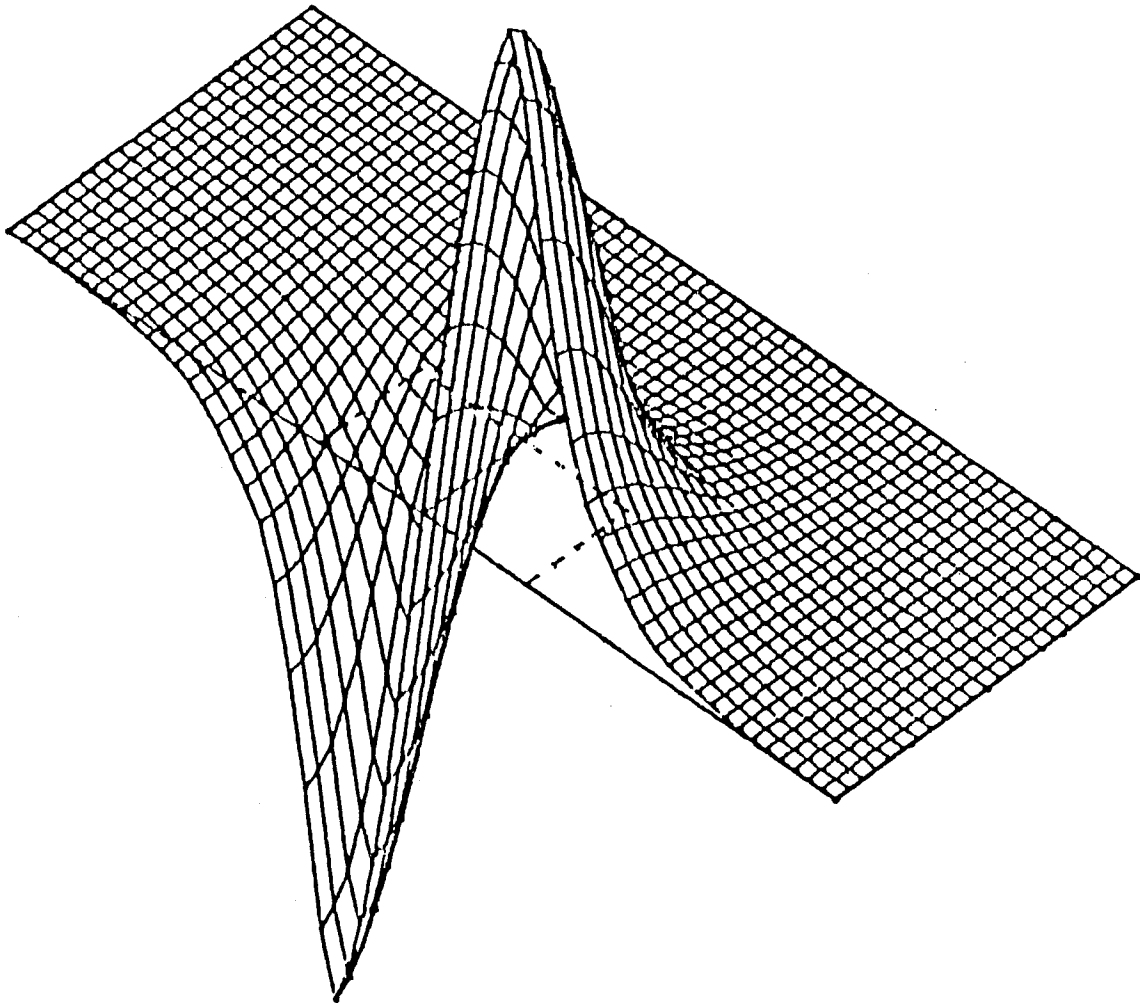
Diagramme de dispersion  
 du guide image blindé  
 figure III-47



Variation de  $E_z$  du 1er mode HEM  
(  $f = 40.5389$  Ghz)

figure III-48

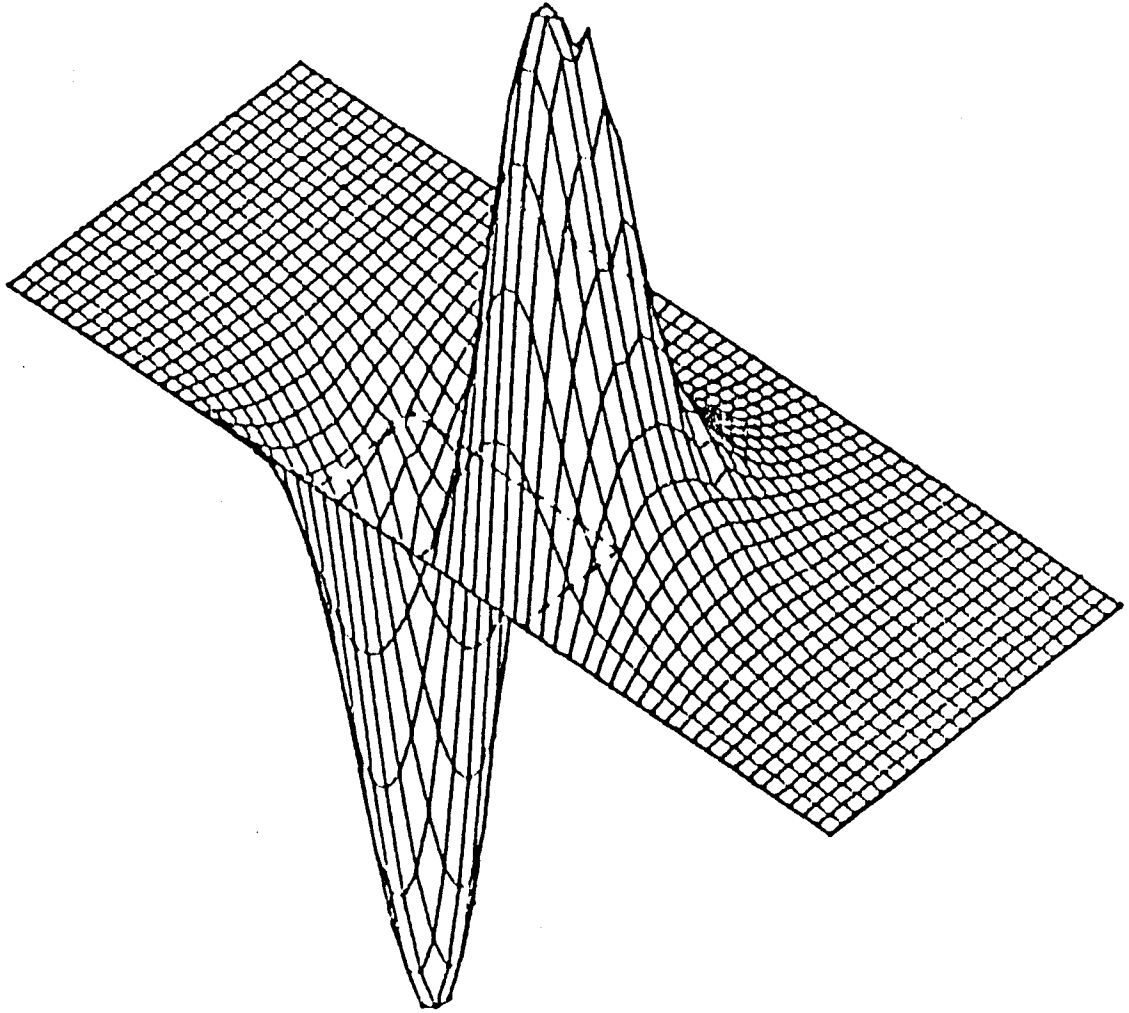




Variation de  $Iz$  du 1er mode HIEM  
( $f = 40.5389$  Ghz)

figure III-49

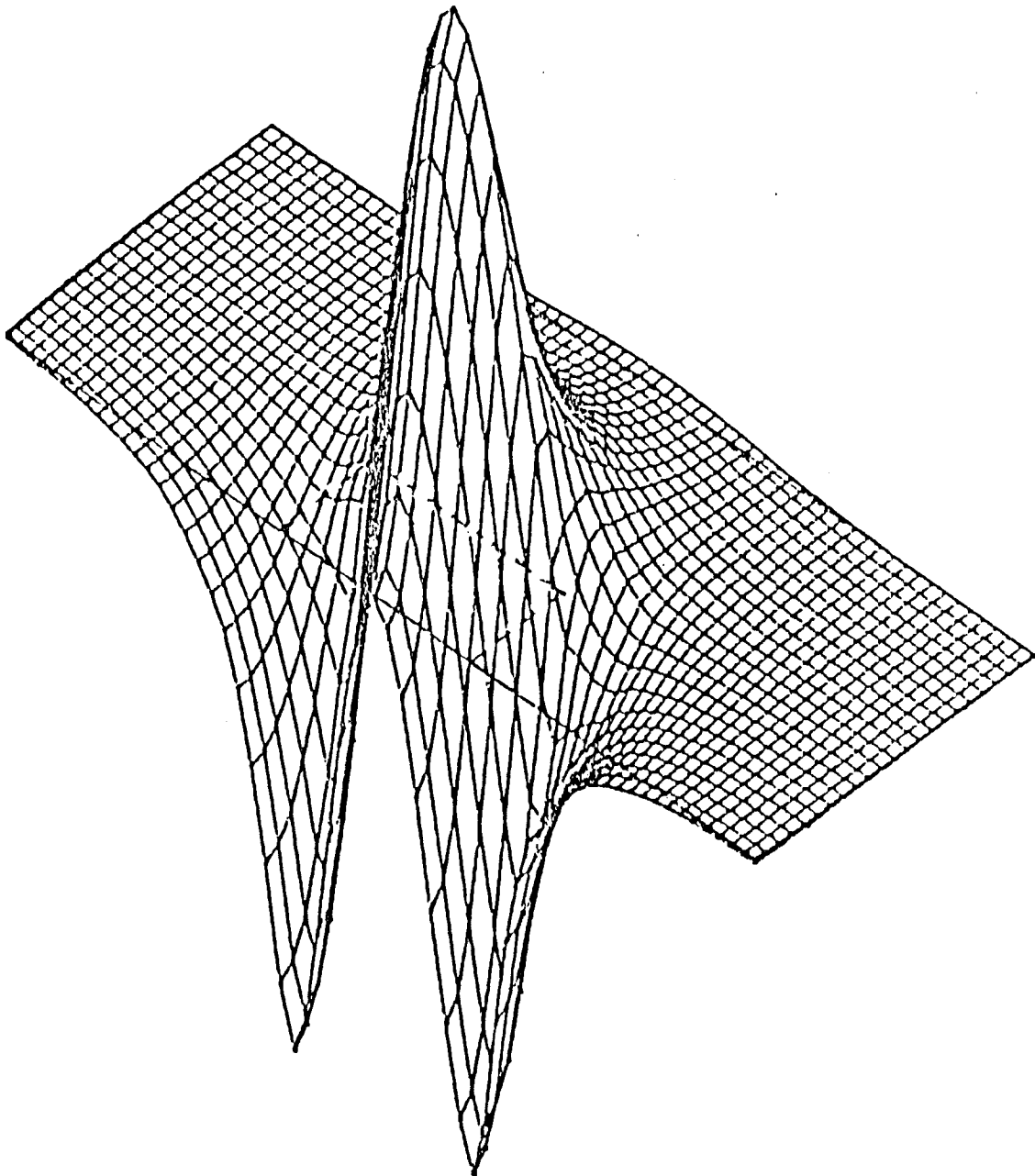




Variation de  $E_z$  du 2eme mode HEM  
(  $f = 48.2104$  Ghz)

figure III-50





Variation de Hz du 2eme mode HEM  
( $f = 48.2104$  GHz)

figure III-51



### III.5.B. CALCUL DE LA MATRICE DE REPARTITION DE QUELQUES STRUCTURES SIMPLES

Après avoir calculé le champ électromagnétique dans les plans des accès propageant des modes TEM, quasi-TEM, TE, TM et HEM par la MEF-2D, nous appliquons maintenant la MEF-3D à des structures simples pour analyser leurs comportement en oscillation forcée. Cette étude conduit à la détermination de la matrice de répartition de ces dispositifs.

#### B.1 STRUCTURE A UN ACCES

Le condensateur plan présenté sur la figure (III.52) est un modèle simple de ligne de transmission homogène propageant une onde TEM. Cette ligne est constituée d'un diélectrique de permittivité relative réelle  $\epsilon_r$ , inséré entre deux plaques métalliques (C.C.E) horizontales et deux plans verticaux de court-circuit magnétique (C.C.M).

Cette structure étant court-circuitée à l'une de ces extrémités (figure (III.53)), nous évaluons dans le plan P l'amplitude et la phase du coefficient de réflexion S11.

L'étude de la propagation de l'onde TEM dans cette structure par la MEF-2D nous à permis de calculer:

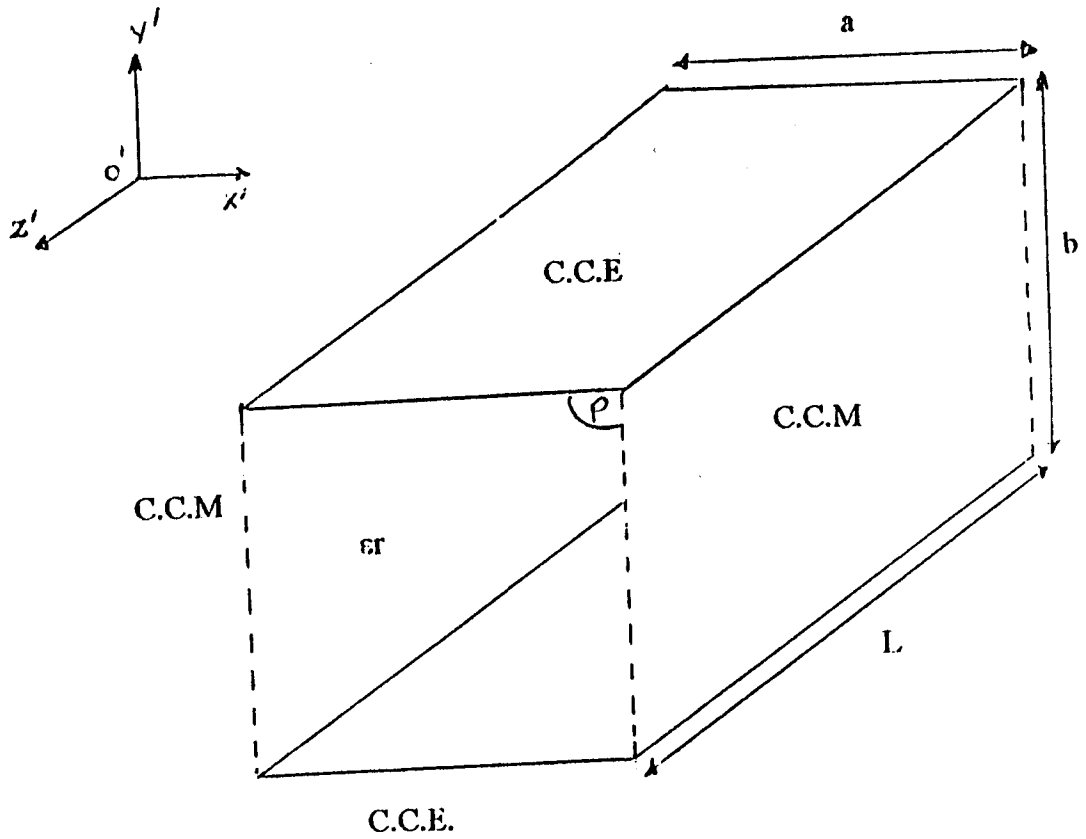
- les courants surfaciques électrique et magnétique sur le plan (P) de l'accès,
- la permittivité effective  $\epsilon_{r_{\text{eff}}} = \epsilon_r = 36$ ,
- l'impédance caractéristique  $Z_c = 30,18\Omega$ .

L'étude théorique de ce condensateur plan court-circuité à l'une de ses extrémités conduit à:

- un coefficient de reflexion  $S_{11} = \frac{b_1}{a_1}$  or  $|b_1| = |a_1| \Rightarrow S_{11} = 1$  quelque soit la fréquence du signal  $a_1$ ,
- une phase de S11 donnée par  $\varphi = \pi - 2\beta L$ ,  $\beta$  étant la constante de propagation de la ligne  $\left( \beta = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{\omega}{C_0} \sqrt{\epsilon_r} \right)$ .

Le calcul du coefficient S11 par la méthode des éléments finis en trois dimensions (MEF-3D), a donné:

- $S_{11} = 1$  quelque soit la fréquence du signal  $a_1$
- la phase de S11 est comparée à sa valeur théorique sur la figure (III.54) où nous observons une cohérence des résultats.



Condensateur plan court-circuité

figure III-52

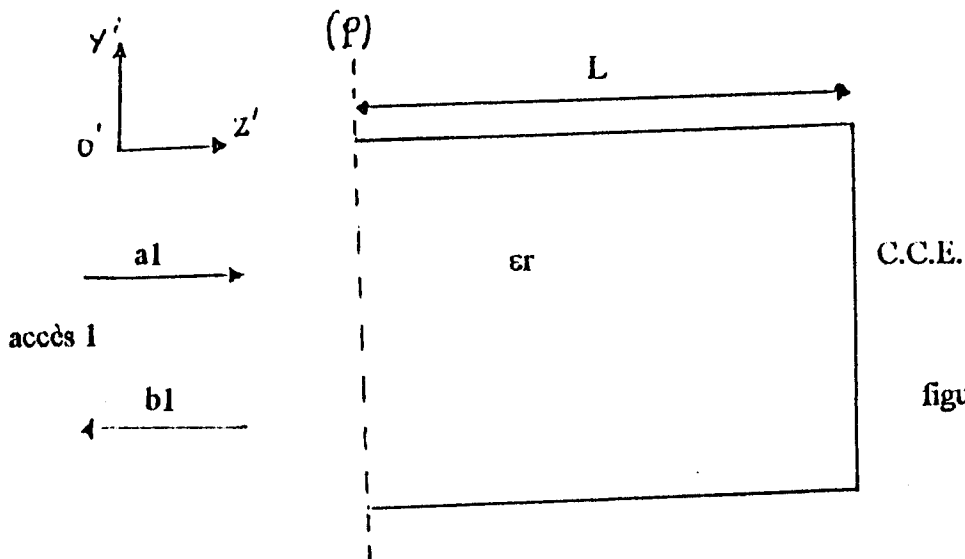
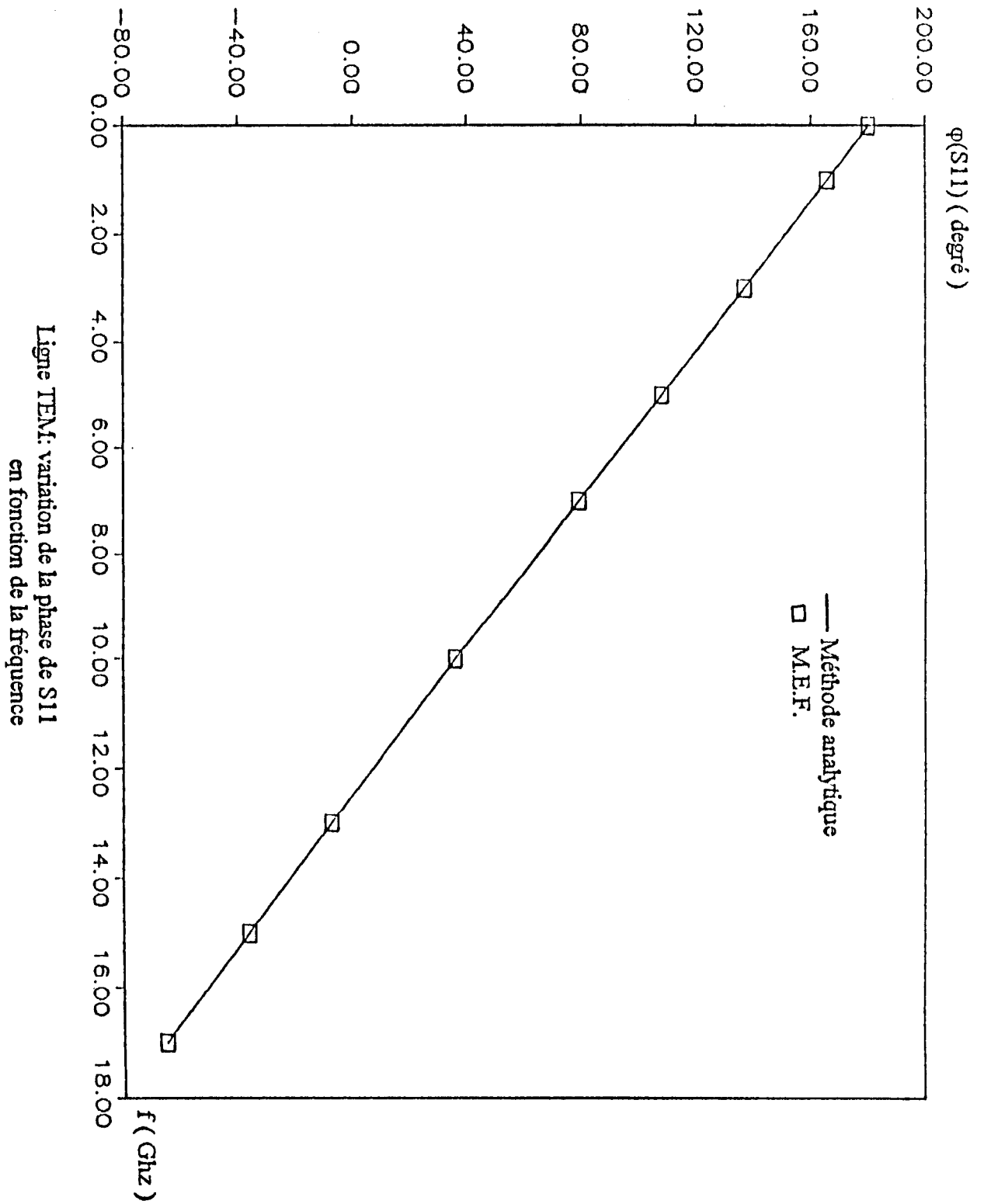


figure III-53

$\epsilon_r = 36 ; L = 1 \text{ mm}$   
 $a = 2.5 \text{ mm} ; b = 1.2 \text{ mm}$

Section longitudinale d'un condensateur plan court-circuité à une extrémité

figure III-54





## B.2. STRUCTURE A DEUX ACCES

### a. CAS D'UNE STRUCTURE UNIFORME SELON L'AXE DE PROPAGATION

Soit une ligne de transmission constituée de la ligne microstrip présentée sur les figures (III.55) et (III.56).

Comme nous l'avons montré précédemment le fondamental de cette structure est une onde quasi-TEM. Son analyse par la MEF-2D appliquée à la surface  $S_p$  du plan (P) conduit au résultats suivants:

- une permittivité effective,  $\epsilon_{\text{eff}} = 6,485$ ,
- une impédance caractéristique  $Z_c = 21,75\Omega$ .

Ce dispositif à deux accès est un système réciproque, admettant une matrice de répartition [S] à deux termes inconnus S11 et S12.

Le logiciel établi nous permet le calcul des paramètres S11 et S12 en module et en phase. Sachant que l'onde est déphasée de  $(-\beta L)$ ; ( $\beta$  étant la constante de propagation) lors de sa propagation d'un accès à l'autre, nous présentons sur le tableau (III.14) les résultats obtenus pour une fréquence  $f$  de 10 GHz.

TABLEAU III-14

$ S_{11} _{\text{dB}}$	$ S_{12} _{\text{dB}}$	$\varphi_{S_{12}}$ en deg	$\varphi_{S_{12_{th}}}$ en deg
- 25,76	- 0,122	- 31,63	- 30,558

### b. ETUDE DES DISCONTINUITES

Ce cas est très couramment rencontré en micro-ondes lors de la connection de deux tronçons de ligne ou de guides ayant des propriétés (permittivité, perméabilité, dimensions) différentes.

L'adaptation des deux tronçons nécessite la connaissance des coefficients de reflexion et de transmission à fin de faire la meilleur optimisation de cette jonction.

Notre logiciel, nous permet entre autres, d'analyser ce type de problème. Pour valider nos résultats, nous considérons la structure des figures (III.57) et (III.58). formée de deux tronçons de guides de permittivité  $\epsilon_{r_1}$ , entre lesquels nous plaçons un troisième tronçon de guide de même section transversale et ayant une permittivité  $\epsilon_{r_2}$ .

Cette structure représente dans la pratique, soit des condensateurs plans propageant le mode TEM on des guides d'ondes propageant les modes TE et TM.

La matrice [S] d'une telle structure peut être déterminée analytiquement en exploitant l'équivalence entre les équations représentant les champs des modes transverses d'un guide et les relations liant les courants et les tensions dans une ligne.

Structure à deux accès:  
ligne microruban blindée

$h1 = 1 \text{ mm}; \quad \epsilon_r = 9.8$   
 $h2 = 2 \text{ mm}; \quad w = 2.5 \text{ mm}$   
 $L1 = L2 = 1.25 \text{ mm}$

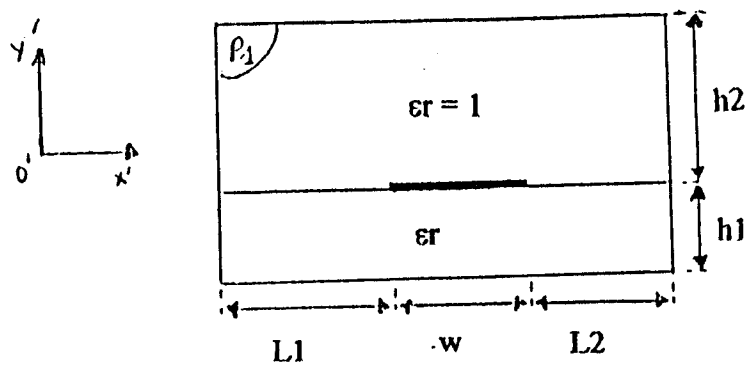
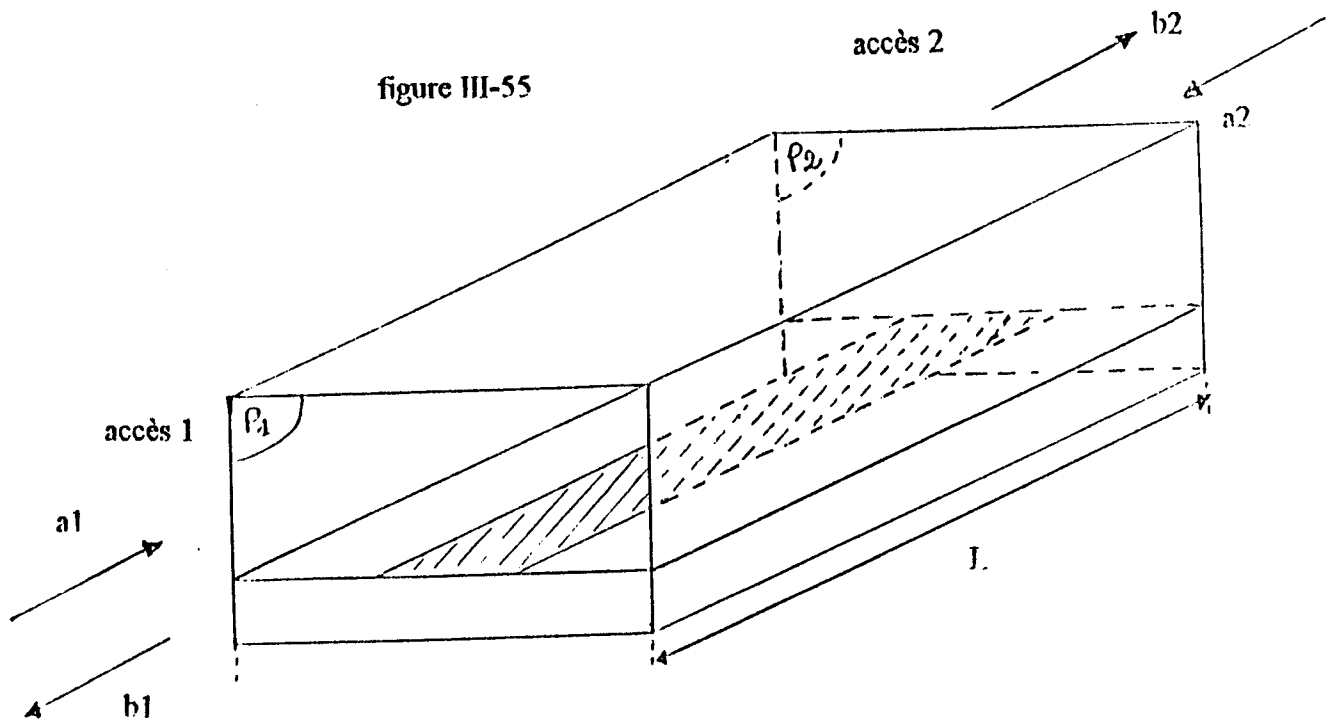
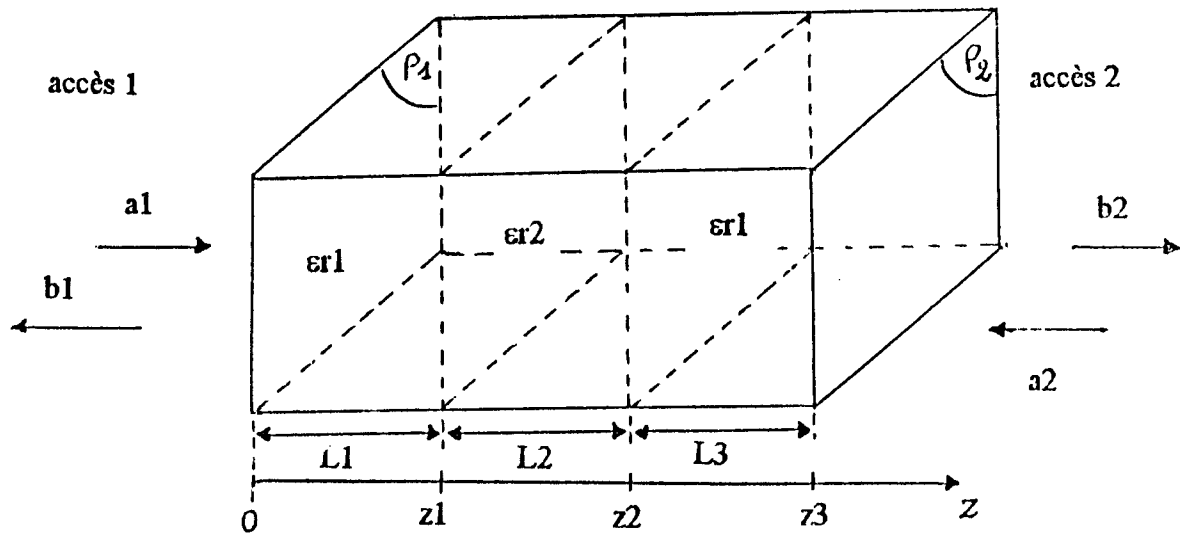
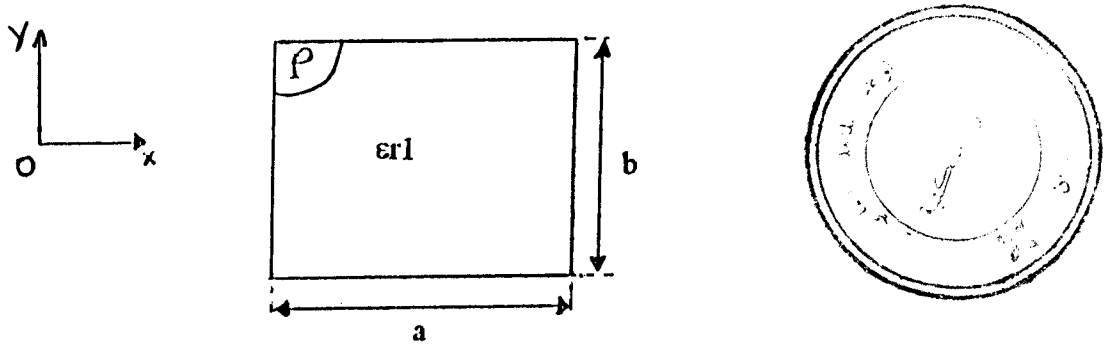


figure III-56



Structure à deux accès constituée de discontinuités

figure III-57



section droite de la discontinuité

figure III-58

En effet, dans les guides d'ondes de longueurs L1 et L2, le champ se décompose en une infinité de modes normaux se propageant dans le sens des z positifs et négatifs. Les champs transversaux s'écrivent alors pour NM modes incidents:

$$z \leq z_1 \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \sum_{i=1}^{NM} a_i \vec{e}_i e^{-j\beta_i(z-z_1)} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \vec{e}_i e^{j\beta_i(z-z_1)} \\ \vec{H} = \sum_{i=1}^{NM} a_i \vec{h}_i e^{-j\beta_i(z-z_1)} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \vec{h}_i e^{j\beta_i(z-z_1)} \end{array} \right.$$

$$z \geq z_2 \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \sum_{i=1}^{NM} c_i \vec{e}_i e^{j\beta_i(z-z_1)} + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \vec{e}_i e^{-j\beta_i(z-z_2)} \\ \vec{H} = \sum_{i=1}^{NM} c_i \vec{h}_i e^{+j\beta_i(z-z_1)} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \vec{h}_i e^{-j\beta_i(z-z_2)} \end{array} \right.$$

Les composantes transversales des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont reliées par la relation:

$$\vec{e}_i = Z_i \vec{h}_i$$

avec  $Z_i \left\{ \begin{array}{l} Z_0 \frac{k_0}{\beta} = \text{impédance d'onde des modes TE} \\ Z_0 \frac{\beta}{k_0} = \text{impédance d'onde des modes TM} \end{array} \right.$

$Z_0$  est l'impédance de l'onde TEM.

Introduisons la notion de courants et de tensions en posant:

$$\text{pour } z \leq z_1 \left\{ \begin{array}{l} a_i = V_{i1}^+ = Z_i I_{i1}^+ \\ b_i = V_{i1}^- = Z_i I_{i1}^- \end{array} \right.$$



$$\text{pour } z \geq z_2 \begin{cases} c_i = V_{i2}^+ = -Z_i I_{i2}^+ \\ d_i = V_{i2}^- = -Z_i I_{i2}^- \end{cases}$$

Plaçons nous dans le cas où l'onde incidente est le mode TE<sub>10</sub> et supposons que ce mode se propage seul dans le guide. Ainsi, les problèmes liés aux guides propageant le TE<sub>10</sub> et aux lignes de transmission propageant le TEM, sont équivalents. La théorie des lignes [9] permet d'écrire:

$$\text{pour } z \leq z_1 \begin{cases} V_1 = V_1^+ e^{-j\beta_1(z-z_1)} + V_1^- e^{+j\beta_1(z-z_1)} \\ I_1 = \frac{1}{Z_1} (V_1^+ e^{-j\beta_1(z-z_1)} - V_1^- e^{+j\beta_1(z-z_1)}) \end{cases}$$

$$\text{pour } z_1 < z < z_2 \begin{cases} V_2 = V_2^+ e^{-j\beta_2(z-z_1)} + V_2^- e^{+j\beta_2(z-z_1)} \\ I_2 = \frac{1}{Z_2} (V_2^+ e^{-j\beta_2(z-z_1)} - V_2^- e^{+j\beta_2(z-z_1)}) \end{cases}$$

$$\text{pour } z \geq z_2 \begin{cases} V_3 = V_3^+ e^{-j\beta_1(z-z_2)} \\ I_3 = \frac{V_3^+}{Z_1} e^{-j\beta_1(z-z_2)} \end{cases}$$

\*  $\beta_1$  et  $Z_1$  sont respectivement la constante de propagation et l'impédance de l'onde dans les tronçons de guide de longueurs L1 et L3.

\*  $\beta_2$  et  $Z_2$  sont respectivement la constante de propagation et l'impédance de l'onde dans le tronçon de guide de longueur L2.

Les conditions de continuité sur les interfaces entre les trois milieux donnent les relations supplémentaires suivantes:

$$z = z_1 \begin{cases} V_1 = V_2 \\ I_1 = I_2 \end{cases} ; \quad z = z_2 \begin{cases} V_2 = V_3 \\ I_2 = I_3 \end{cases}$$

La résolution de ces équations permet d'obtenir la matrice [S] de ce dispositif.

Soient:

$$S_{11} = \frac{(1-R^2)T}{1-R^2T^2} \tag{III.94}$$



$$S_{12} = \frac{(1-T^2)R}{1-R^2T^2} \quad (III.95)$$

avec 
$$T = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \quad (III.96)$$

T représente le coefficient de reflexion entre les milieux  $\epsilon_{r1}$  et  $\epsilon_{r2}$  lorsque le milieu 2 est supposé infini.

$$R = e^{-j\beta_2(z_2-z_1)} = e^{-j\beta_2L_2} \quad (III.97)$$

R représente le terme de propagation dans le milieu 2 de permittivité  $\epsilon_{r2}$  et de longueur L2.

En tenant compte des déphasages introduits par les tronçons de guide de longueurs L1 et L3, nous déduisons la matrice [S] de cette discontinuité.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix};$$

avec 
$$S_{11} = \frac{(1-R^2)}{1-R^2T^2} e^{-2j\beta_1L_1} \quad (III.98)$$

$$S_{12} = \frac{(1-T^2)R}{1-R^2T^2} e^{-j(\beta_1L_1-\beta_1L_3)} \quad (III.99)$$

Afin de comparer les résultats de notre logiciel MEF-3D, avec ceux obtenus des relations (III.98) et (III.99) nous considérons la même structure de la figure (III.57) avec des condensateurs plans ayant les caractéristiques suivantes:

$$\epsilon_{r1} = 1$$

$$\epsilon_{r2} = 36$$

$$a = 2,5\text{mm}$$

$$b = 1,2\text{mm}$$

$$L1 = L2 = L3 = 1\text{mm}$$

La méthode des éléments finis en deux dimensions, nous permet de calculer sur les plans (P) des accès, les paramètres:



$$\varepsilon_{\text{eff}} = 1$$

$$Z_c = Z_0 = 180,823\Omega$$

L'analyse de la structure de la figure (III.57) par la MEF-3D à une fréquence donnée, permet la détermination des paramètres S11 et S12. Les résultats théoriques et ceux de notre méthode sont présentés sur les figures (III.59) à (III.62), où nous observons une nette convergence.

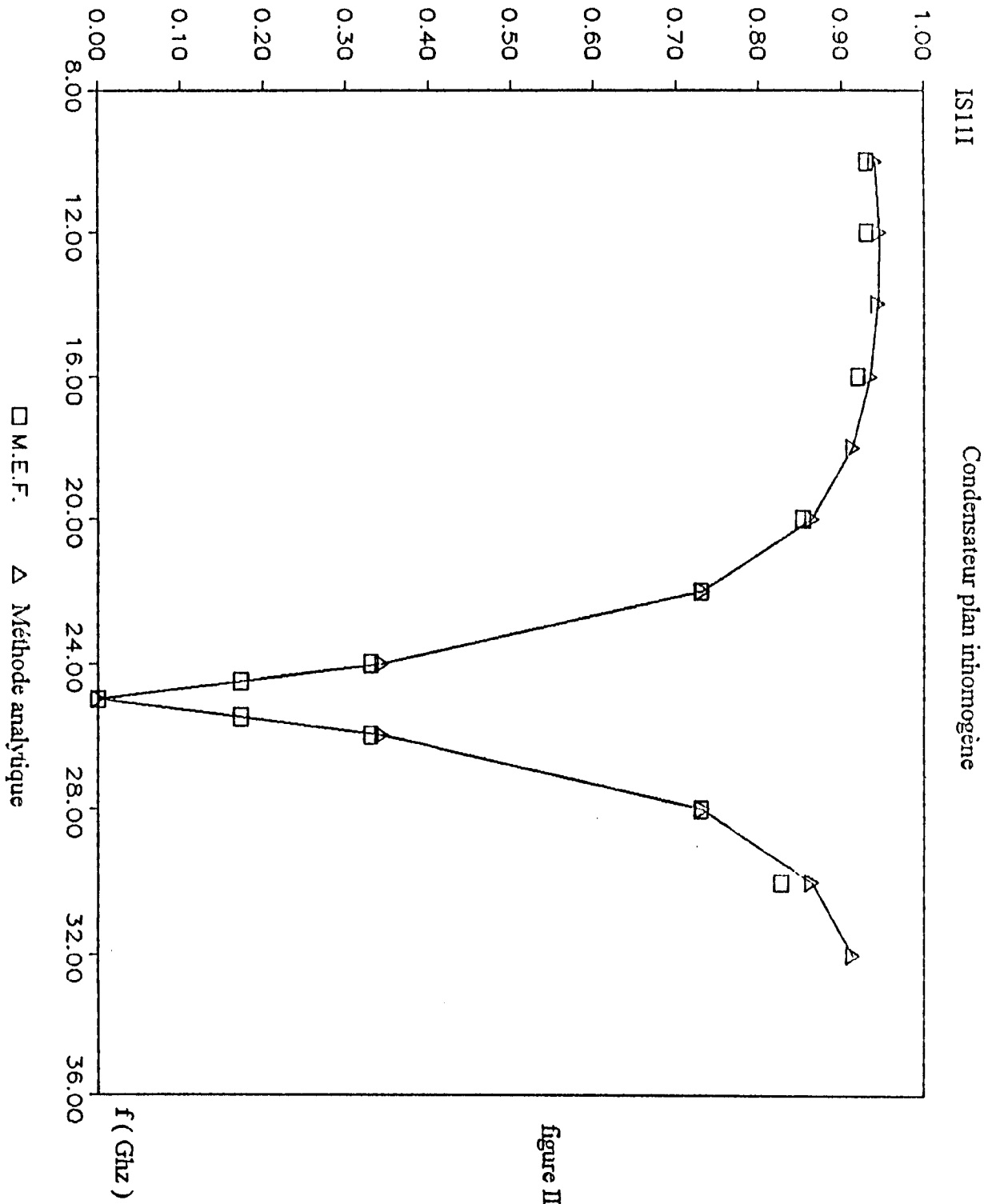


figure III-59



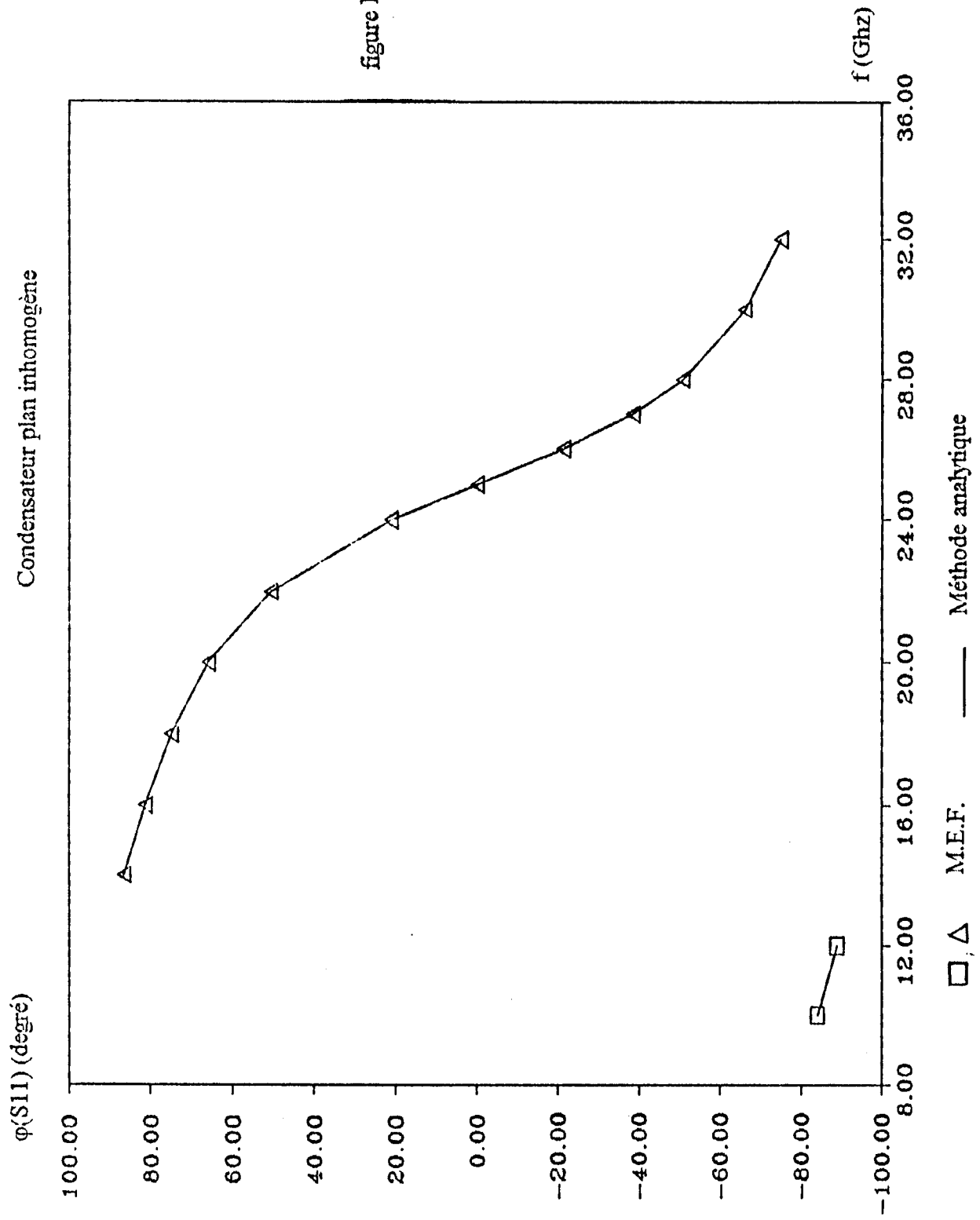


figure III-60

IS12I  
 Condensateur plan inhomogène

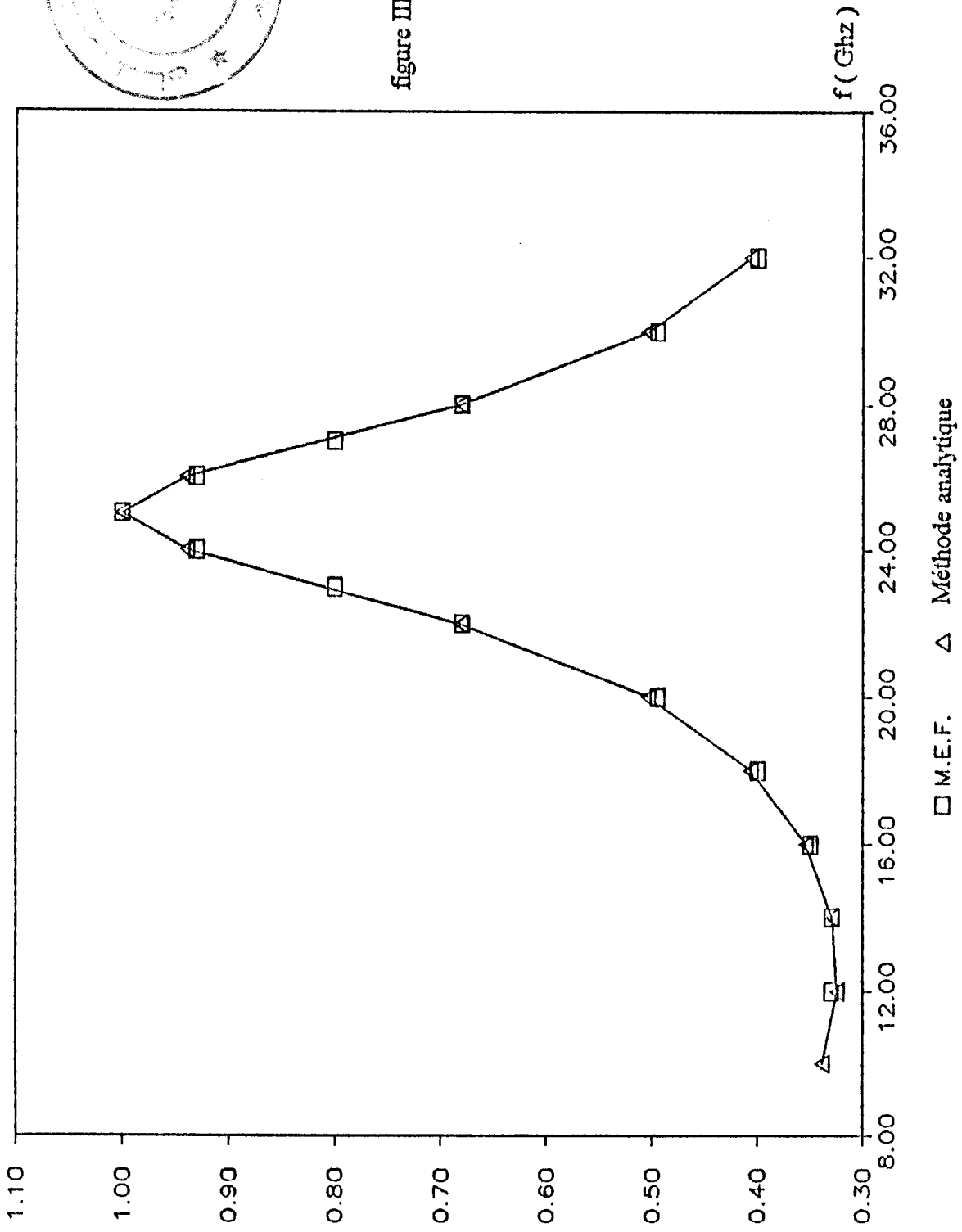
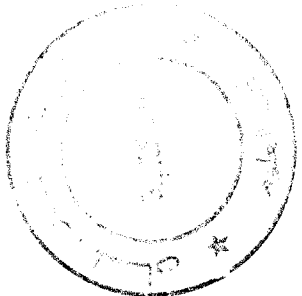


figure III-61



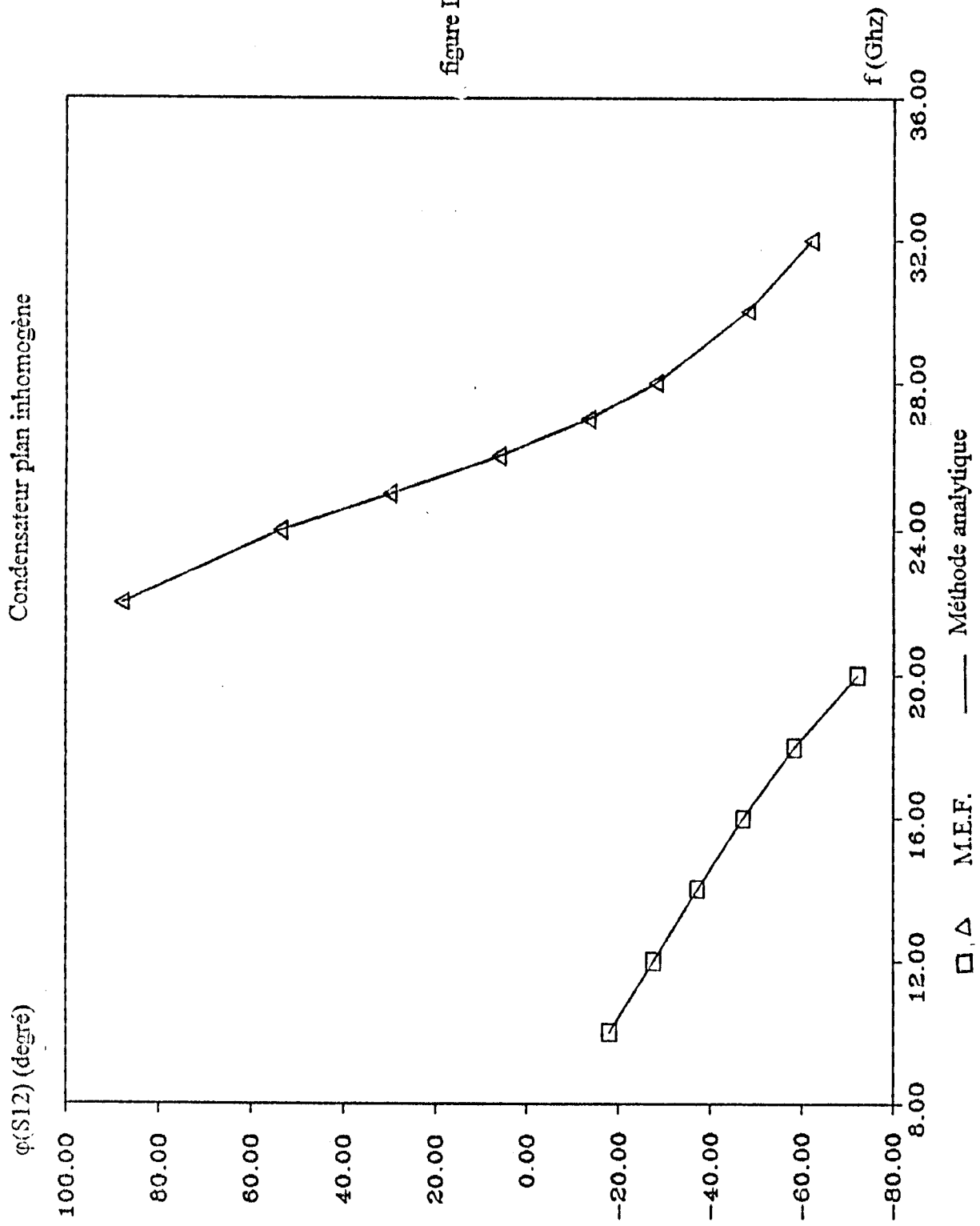


figure III-62

### III.6. LIMITE DE VALIDITE D'UN MAILLAGE

L'utilisation de la méthode des éléments finis en trois dimensions nécessite le maillage de la structure étudiée en éléments cubiques. Lors de la caractérisation de la matrice de répartition des dispositifs passifs micro-ondes avec cette méthode, nous avons remarqué qu'il n'existe qu'une bande de fréquence dans laquelle le maillage établi donne des résultats satisfaisants. Ce phénomène s'explique par la représentation des nombres en machine.

Nous rappelons que nous résolvons un système de la forme (III.20) présenté au niveau du *paragraphe (III.3)* pour calculer la matrice [S].

$$[A] - k_0^2 [B] \{H\} = \sum_{p=1}^{N_p} (a_p + b_p) \{J_{msp}\} \quad \text{(III.20)}$$

pour une fréquence donnée, donc  $k_0^2$  fixée, on a :

$$\{H\} = \sum_{p=1}^{N_p} (a_p + b_p) [M]^{-1} \{J_{msp}\}$$

avec  $[M] = [A] - k_0^2 [B]$

Pour un maillage donné :

- la matrice [A] est indépendante de la fréquence  $f$ ,
- la matrice  $k_0^2 [B]$  suit une variation en  $f^2$ .

Pour des fréquences  $f$  inférieures à une fréquence  $f_{min}$  ( $f < f_{min}$ ) tels que les termes de la matrice  $k_0^2 [B]$  deviennent très petits devant ceux de [A], la représentation des nombres en machine conduit alors à la relation :

$$[A] - k_0^2 [B] \text{ calculé } \approx [A]$$

Nous perdons de ce fait, dans la matrice [M] toute information relative à la fréquence.

Pour des fréquences  $f$  supérieures à une fréquence  $f_{max}$  ( $f > f_{max}$ ) telles que  $k_0^2 [B]$  devient très grand devant [A], nous avons :

$$[A] - k_0^2 [B] \approx -k_0^2 [B]$$



Ainsi dans ces deux cas, nous ne résolvons plus le problème initial (III.20), d'où l'obtention de paramètres  $S$  sans signification. Par conséquent, un maillage établi ne peut être considéré valable que dans une bande de fréquences, dans laquelle les termes de  $[A]$  seront du même ordre de grandeur que ceux de  $k_0^2[B]$ .

### III.7. CONCLUSION

A travers les exemples traités, nous avons validé le principe de calcul de la matrice  $[S]$  de plusieurs dispositifs hyperfréquences simples, par la méthode des éléments finis.

La connaissance de la matrice  $[S]$  d'un circuit permet la déduction de sa matrice d'impédance  $[Z]$  à travers la relation (III.100) et par conséquent sa modélisation

$$[Z] = [F]^{-1}([I] - [S])^{-1}([I] + [S])[F][G] \quad \text{ou} \quad [I] = \text{diag}(1); [G] = \text{diag}(Z_{c_i}) \text{ et } [F] = \text{diag}\left(\frac{2\sqrt{Z_{c_i}}}{1}\right) \quad \text{(III.100)}$$

$Z_{c_i}$  étant l'impédance caractéristique de l'accès  $i$ .

Le logiciel développé reste valable pour la caractérisation de la matrice  $[S]$  de toutes les jonctions (en  $T$ , en  $\Pi$ , en  $Y$ , ...) formant des coupleurs passifs micro-ondes. Cette étude est étendue dans le *chapitre suivant* à la conception de filtres passifs micro-ondes à base de structures complexes, constituées d'un ou plusieurs résonateurs diélectriques excités à travers des lignes de transmission.

**APPLICATION DE LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS A L'ETUDE DES  
RESONNATEURS DIELECTRIQUES EN  
OSCILLATIONS LIBRE ET FORCEE.**

**CHAPITRE IV**



## CHAPITRE IV

### APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS A L'ETUDE DES RESONATEURS DIELECTRIQUES EN OSCILLATIONS LIBRE ET FORCEE

#### INTRODUCTION

Le logiciel éléments finis développé a été validé dans le *chapitre III*, par l'analyse de différentes structures simples en oscillations libre et forcée.

Dans ce chapitre, nous l'appliquons à des structures plus complexes composées d'un ou plusieurs matériaux diélectriques homogènes, linéaires et isotropes. Ces matériaux représentent des résonateurs diélectriques (R.D.), des substrats diélectriques et des lignes de transmission (ligne microstrip, guide image,...).

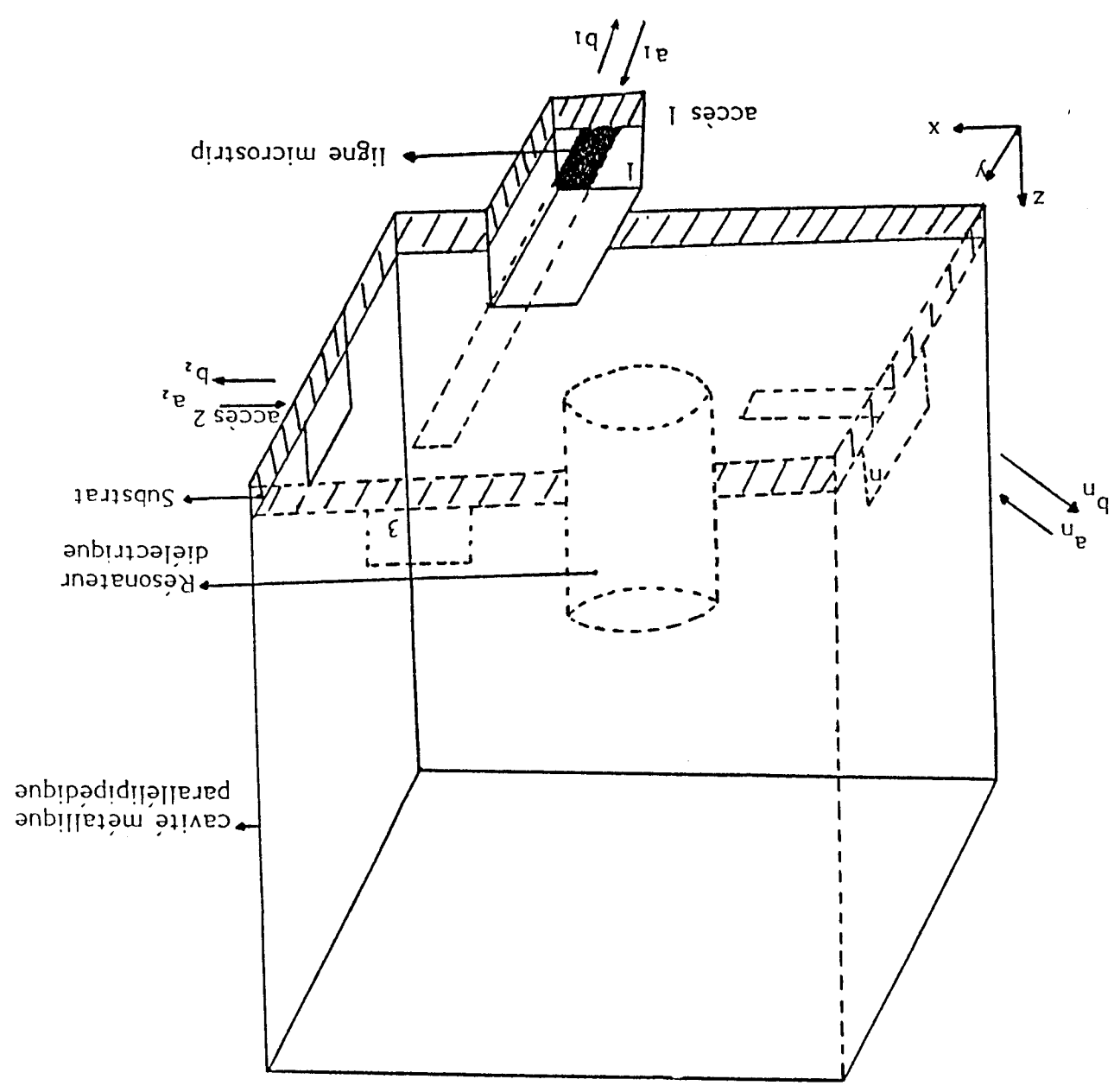
Un résonateur diélectrique est un échantillon en céramique très stable en température de forte permittivité relative (autour de 36), pouvant emmagasiner une énergie électromagnétique à des fréquences bien déterminées dites fréquences de résonance. Dans la pratique, le résonateur diélectrique est placé sur un substrat diélectrique à côté d'une ou plusieurs lignes d'excitation. L'ensemble est ensuite protégé du milieu environnant par un blindage métallique formant une cavité (figure (IV.1)).

L'utilisation de ce composant dans les circuits micro-ondes nécessite la caractérisation électromagnétique de chaque mode de résonance.

Les dimensions du blindage et la valeur de la permittivité relative du substrat doivent être également convenablement choisies afin d'éviter la perturbation des modes de résonance. Il est donc intéressant d'analyser tous ces paramètres par la méthode des éléments finis. L'analyse de ces structures en oscillation libre conduit à caractériser chaque mode de résonance par:

- sa fréquence de résonance,
- la distribution de son champ électromagnétique,
- ses pertes et ses énergies,
- son facteur de qualité à vide.

En oscillation forcée (présence de l'excitation), cette étude permet la conception des filtres micro-ondes à base de résonateurs diélectriques en déterminant leurs réponses fréquentielles à partir des paramètres S.



Structure résonante métallique contenant  
 des diélectriques et excitée à travers n accès

Figure IV-1



**IV.1. ETUDE DE LA STABILITE EN TEMPERATURE DU RESONATEUR DIELECTRIQUE [4], [19], [37]**

Considérons la cavité métallique représentée par sa section (r,z) sur la figure (IV.3) comportant un résonateur diélectrique cylindrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  reposant sur un substrat diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_s$ .

Les fréquences de résonance des modes du R.D. dépendent des paramètres géométriques (a, b,  $H_r$ ,  $H_g$ , Hg) et physiques ( $\epsilon_s, \epsilon_r$ ) de la structure présentée sur la figure (IV.2)

Tout changement de température, entraîne une dilatation ou une compression des éléments de cette structure. Une variation de température  $\Delta T$  engendre une variation de fréquence  $\Delta f$ . La sensibilité fréquentielle notée  $\epsilon_r$  est définie par:

$$\epsilon_r = \frac{1}{\Delta f} \frac{\Delta f}{f}$$

La fréquence étant fonction de (a, b,  $H_r$ ,  $H_g$ , Hg,  $\epsilon_s, \epsilon_r$ ) par différentielle s'écrit

comme suit:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial f}{\partial H_r} \Delta H_r + \frac{\partial f}{\partial H_g} \Delta H_g + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_s} \Delta \epsilon_s + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_r} \Delta \epsilon_r$$

Nous déduisons de cette équation la sensibilité fréquentielle  $\epsilon_r$ :

$$\epsilon_r = C_a \alpha_a + C_b \alpha_b + C_{H_r} \alpha_{H_r} + C_{H_g} \alpha_{H_g} + C_{\epsilon_s} \alpha_{\epsilon_s} + C_{\epsilon_r} \alpha_{\epsilon_r} \quad (IV.1)$$

x: représente tout paramètre physique ou géométrique:

$\alpha_x$ : représente les coefficients de dilatation ou de compression du paramètre x.

$\epsilon_r$ : représente la constante de proportionnalité.

La connaissance des paramètres  $\alpha_x$  et  $C_x$  permet la détermination de la sensibilité

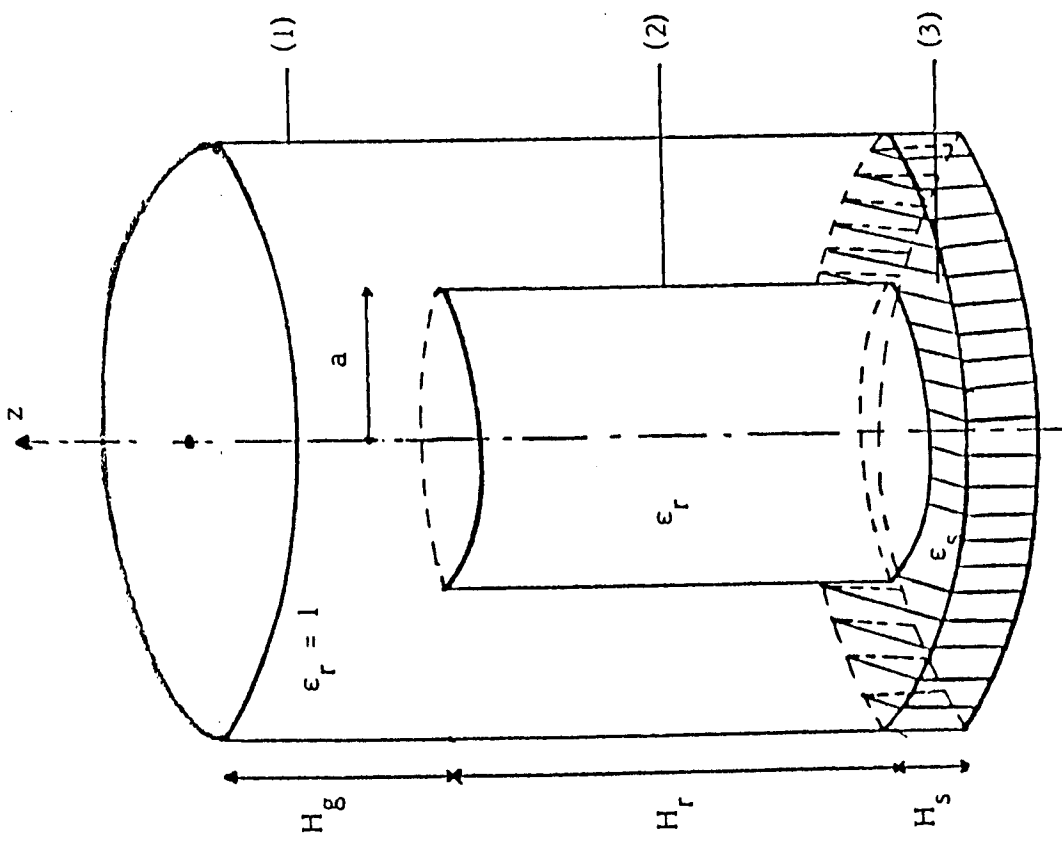
fréquentielle  $\epsilon_r$ .

L'équation (IV.1) montre que  $\epsilon_r$  traduit la variation relative de la fréquence par degré centigrade. Ainsi, à une faible valeur de  $\epsilon_r$  correspond une grande stabilité en température.

Les résonateurs diélectriques à base de matériaux composites [4] présentent une sensibilité de quelques ppm (parts per million =  $10^{-6}$ ). Le tableau (IV.1) montre la sensibilité

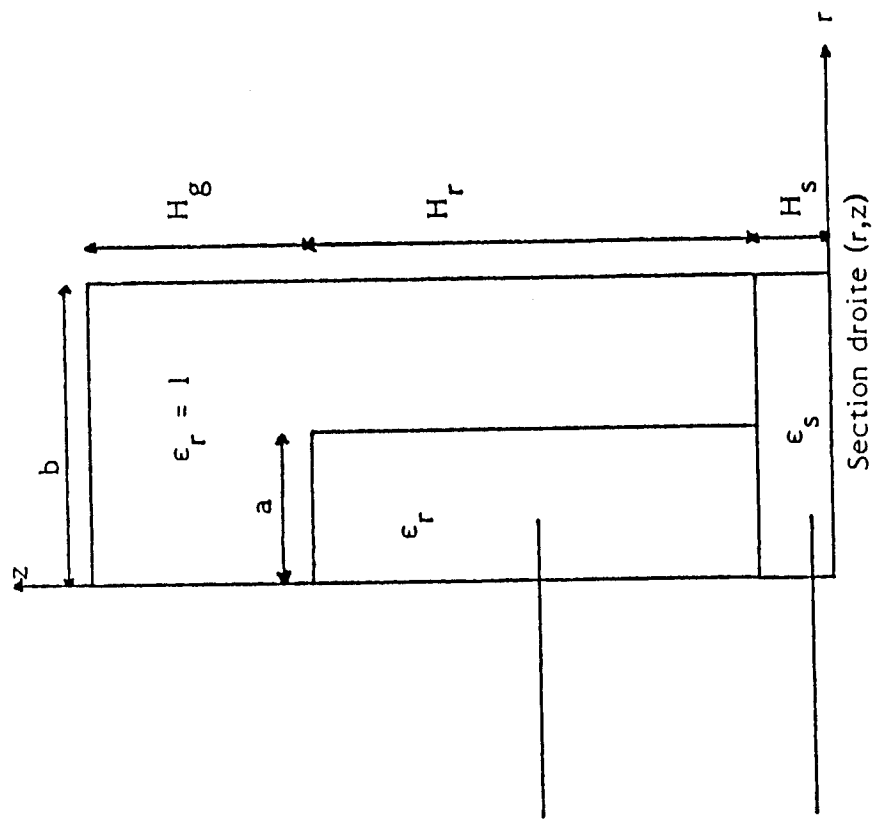
$\epsilon_r$  et la tangente de perte tg $\delta$  de quelques matériaux placés dans une cavité métallique.

Les mesures [4], [19] ont été effectuées sur le mode TE<sub>018</sub> à la fréquence de 10,9 GHz.



(1) : Blindage métallique  
 (2) : Résonateur  
 (3) : Substrat  
 $\epsilon_r = 35.7$  ;  $\epsilon_s = 2.1$

figure IV-2



$a = H_r = 8.0$  mm  
 $b = 15.0$  mm  
 $H_s = 5.5$  mm ;  $H_g = 16.5$  mm

figure IV-3

TABEAU IV.1

matériaux	$\tau$ (ppm/K)	tg $\delta$
Zr, Sn, TiO <sub>2</sub> (Murata)	9,6	3 100
TiZr (Thomson)	9,9	4040
BaTi <sub>4</sub> O <sub>9</sub> Ba <sub>2</sub> Ti <sub>9</sub> O <sub>20</sub>	7,3	2750
BaTi <sub>4</sub> O <sub>9</sub> et TiZr	5,9	2920

Par conséquent la nouvelle génération de R.D. à base de matériaux composites présente une grande stabilité en température et de faibles pertes, ce qui favorise son emploi dans les circuits actifs et passifs micro-ondes, notamment dans le domaine des télécommunications par satellite.

#### IV.2. ANALYSE DES R.D. CYLINDRIQUES SANS PERTES PAR LA MEF-2D [12], [19],[38],[39], [40]

##### IV.2.1. CARACTERISATION DES MODES DE RESONANCE

Soit la structure de la figure (IV.2) composée d'une cavité métallique cylindrique contenant un R.D. cylindrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  reposant sur une cale diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_s$ .

Vue la symétrie axiale de ce dispositif, l'étude par la MEF-2D se ramène à la section droite (r,z) de la figure (IV.3). Pour rechercher les modes de résonance de cette structure, on établit un maillage en éléments triangulaires (figure (IV.4)) de cette section droite. Afin d'approximer correctement le champ électromagnétique, ce maillage doit être assez fin dans les régions de fort champ et faible ailleurs.

Nous utilisons une approximation par des polynômes de Lagrange de degré 1 pour caractériser les modes TE, TM et HEM de cette structure.

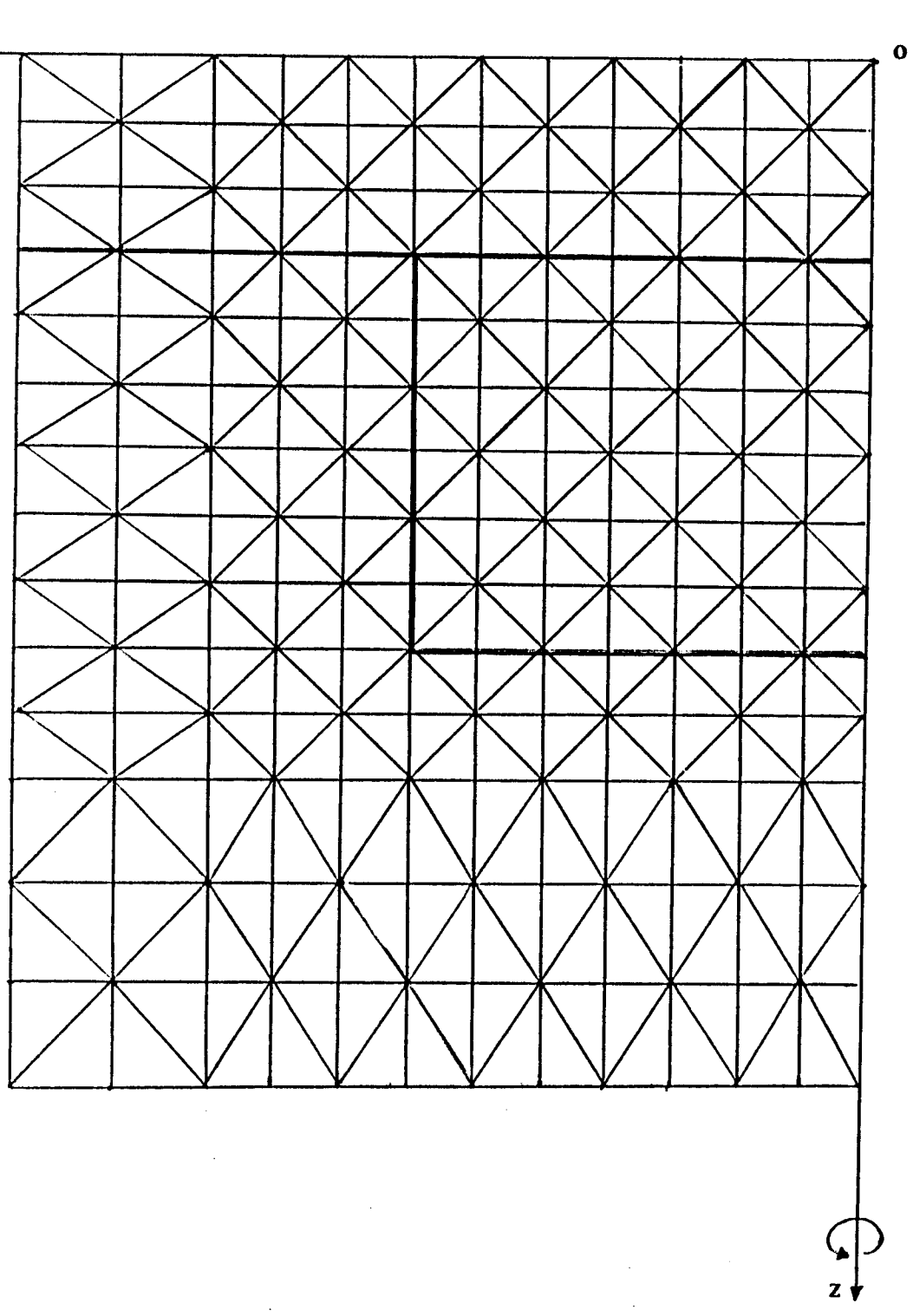
Dans ce type de dispositif, les modes à symétrie de révolution TE<sub>nm</sub> et TM<sub>nm</sub> sont caractérisés par une variation azimutale nulle (n = 0). Les modes hybrides HEM<sub>nm</sub> possèdent une variation azimutale non nulle (n différent de 0), n étant le nombre de demi-onde dans la direction  $\theta$ .

Les résultats obtenus par la MEF-2D sont comparés aux résultats expérimentaux [12], [41] sur le tableau (IV.2).

TABEAU IV.2

Mode	TE <sub>0y8</sub>	TM <sub>0y8</sub>	TE <sub>0y(8+1)</sub>	TM <sub>0y(8+1)</sub>	HE <sub>1y8</sub>	HE <sub>2y8</sub>
M.E.F. : f(GHz)	3,3699	4,5338	5,2554	7,1212	4,1830	5,0378
EXPER. : f(GHz)	3,3272	4,5167	5,1902	7,0580	4,2230	5,0800
$\Delta f / f(\%)$	1,3	0,4	1,3	3,43	1,0	0,85





Maillage de la section droite du R.D. cylindrique blindé

figure IV-4

Une légère différence est observée entre les résultats des deux méthodes, du fait que l'élément d'excitation présent en pratique à côté du R.D., n'est pas pris en compte lors de la formulation par la MEF 2D. Nous présentons sur les figures (IV.5) à (IV.10) les cartographies du champ électromagnétique de quelques modes pour faciliter leur identification (voir procédé d'identification des modes présenté dans le paragraphe (III.4.4.a.2)).



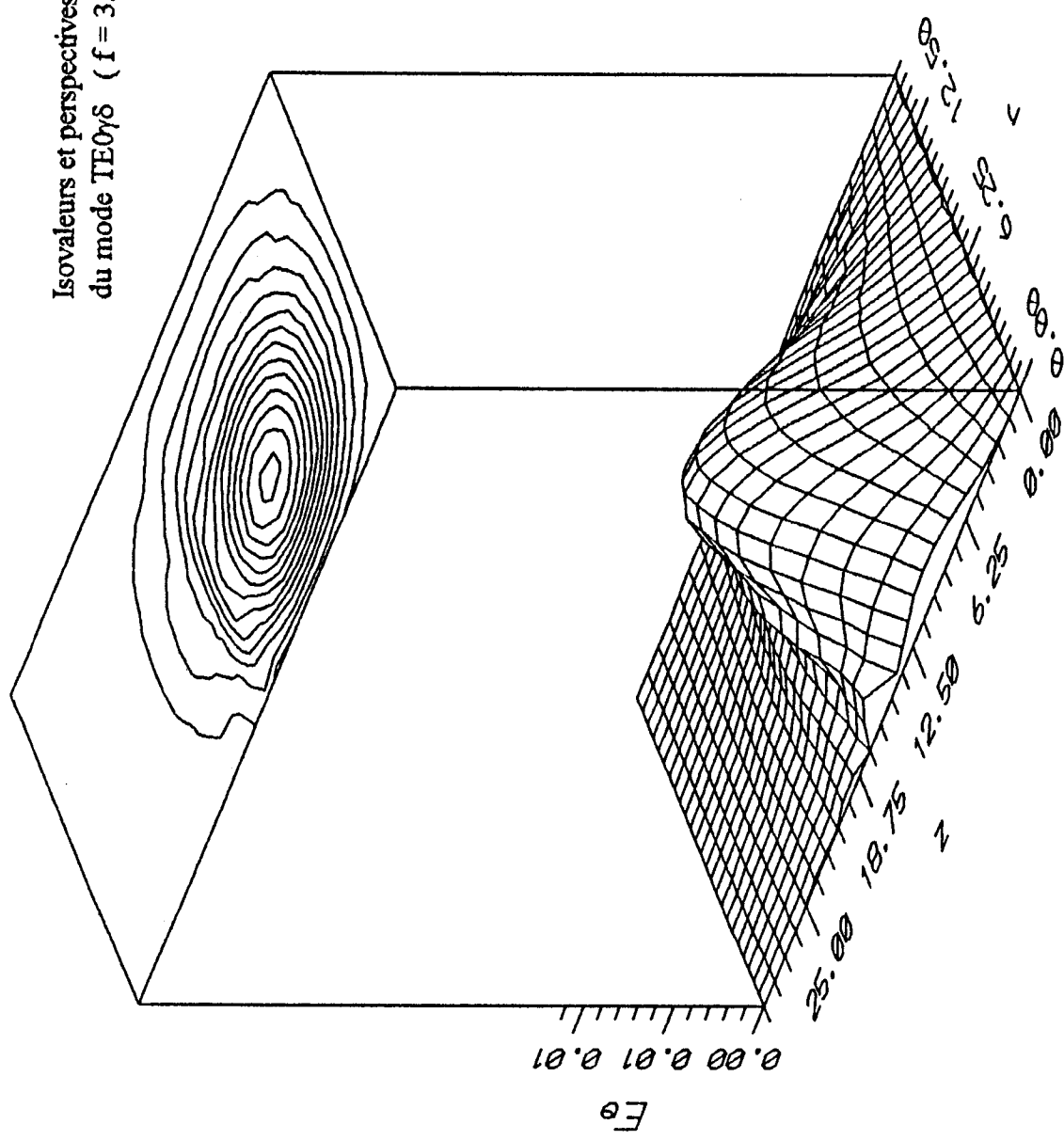


figure IV-5

Isovaleurs et perspectives du Champ  $E_e$   
du mode  $TE_{0y\delta}$  ( $f = 3.3699$  GHz) du R.D.



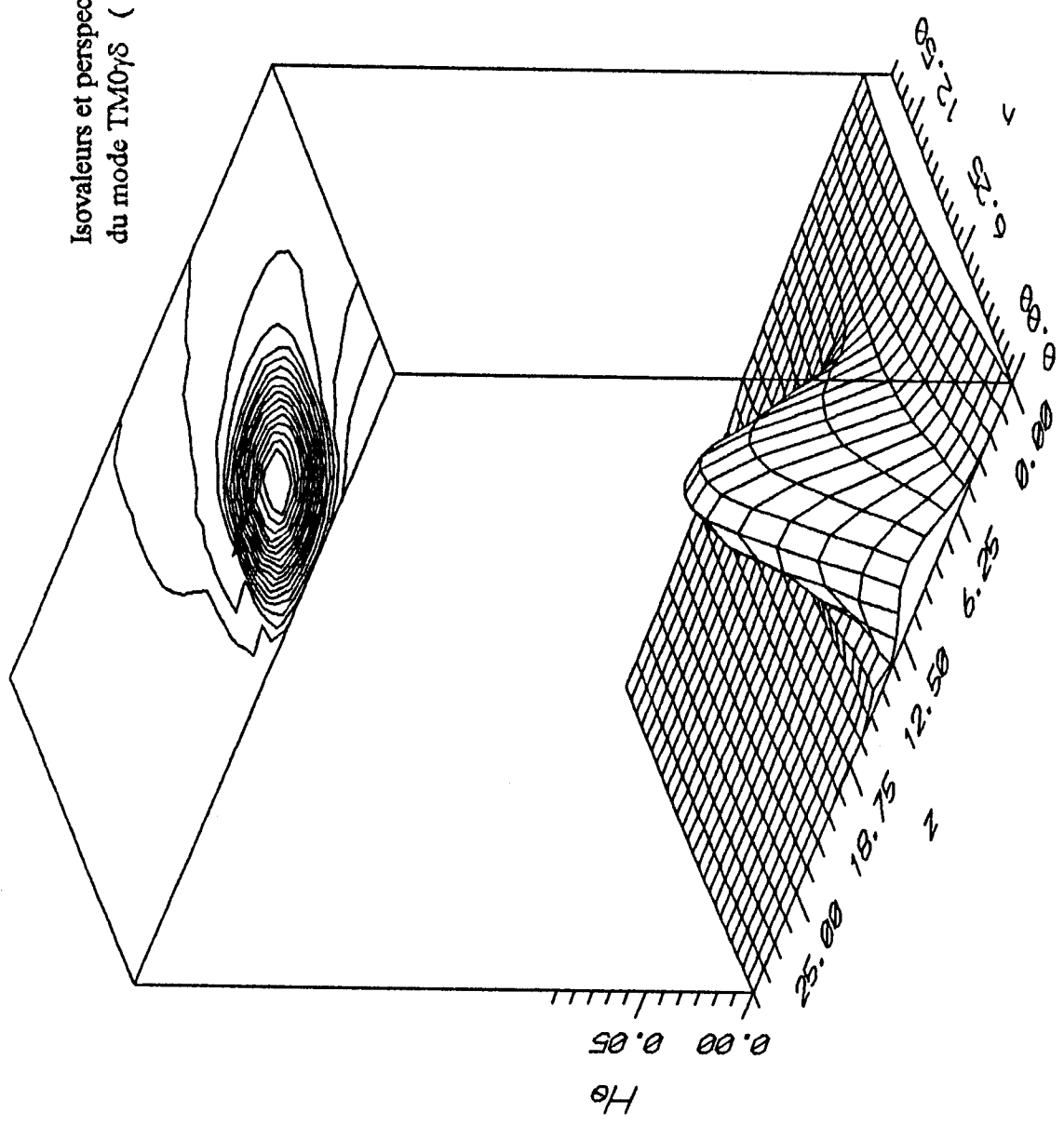


figure IV-6

Isovaleurs et perspectives du Champ  $H_e$   
du mode  $TM_{0\gamma\delta}$  ( $f = 4.5338$  Ghz) du R.D.



Isovaleurs et perspectives du Champ  $E_e$   
du mode  $TE_{0\gamma}(\delta+1)$  ( $f = 5.2554$  Ghz ) du R.D.

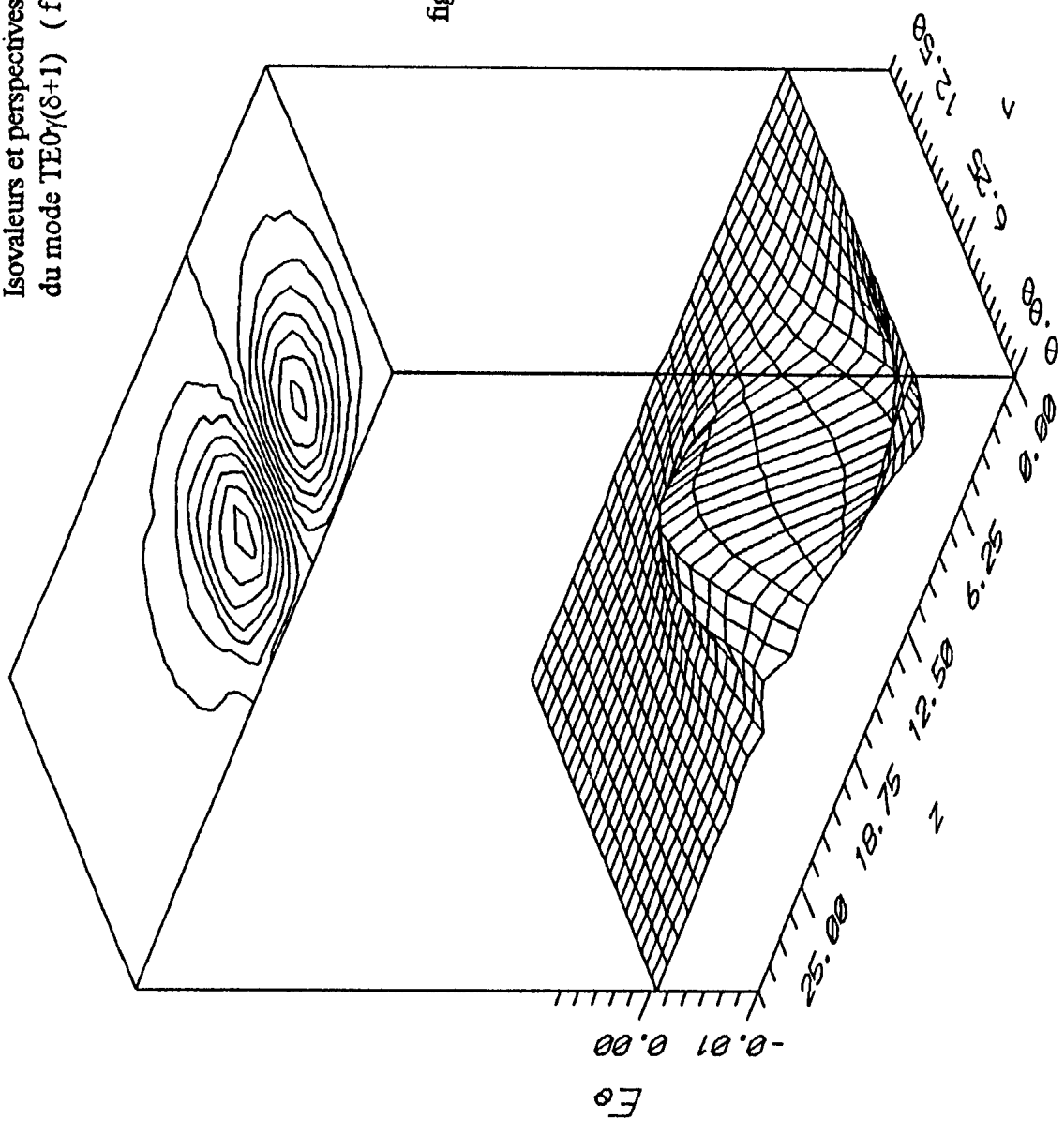


figure IV-7



Isovaleurs et perspectives du Champ  $H_e$   
du mode  $TM_{0\gamma}(\delta+1)$  ( $f = 7.1212$  Ghz ) du R.D.

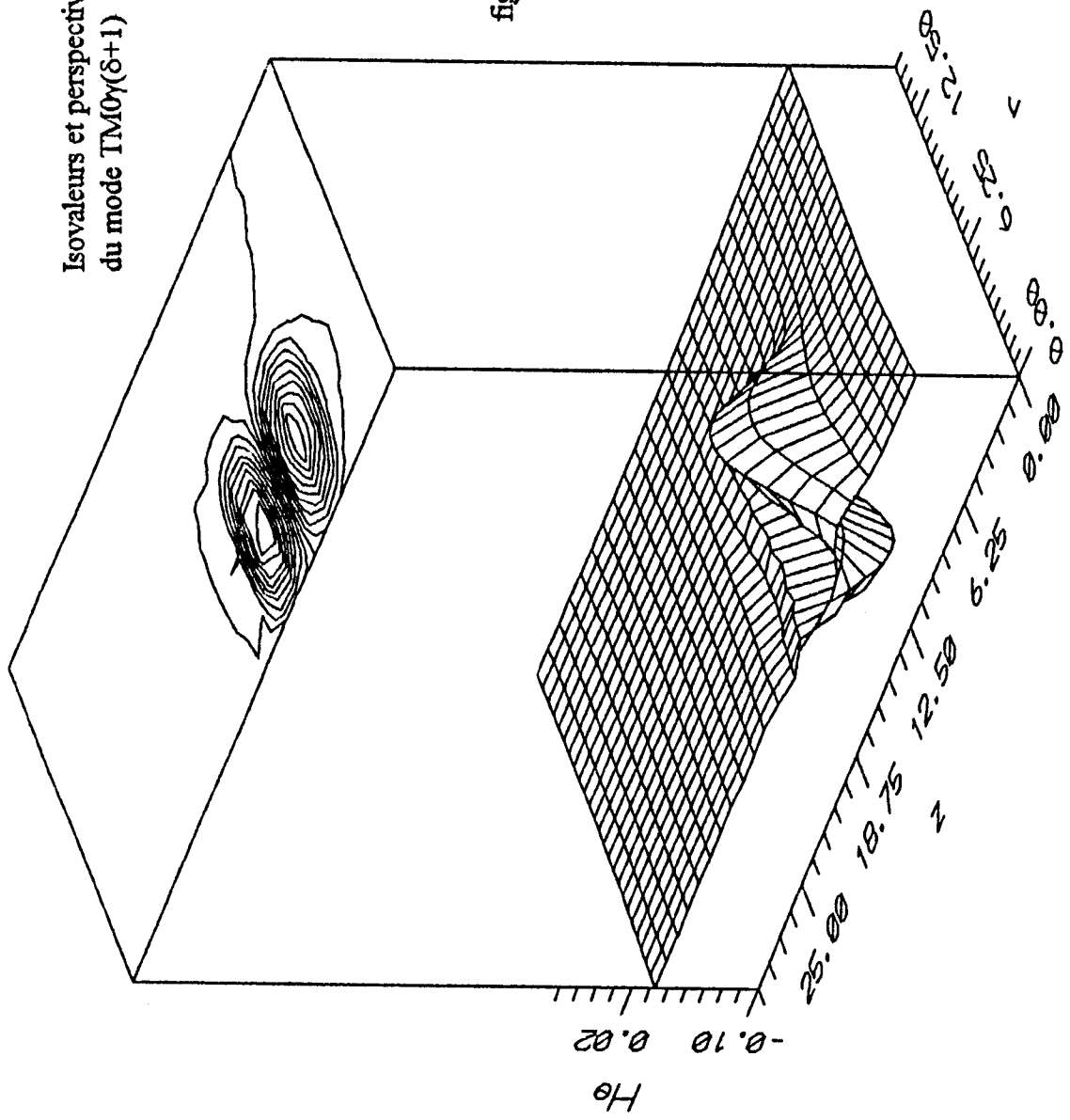
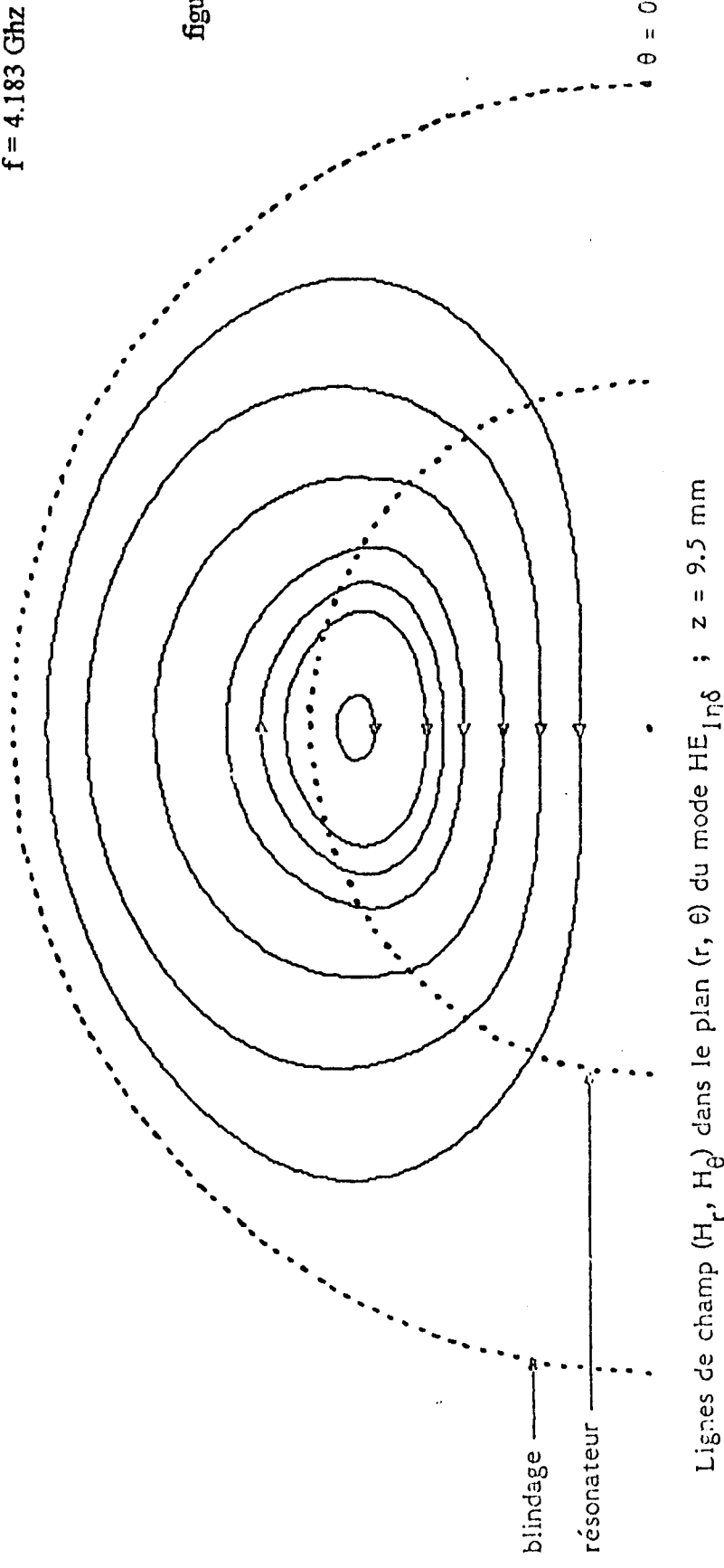
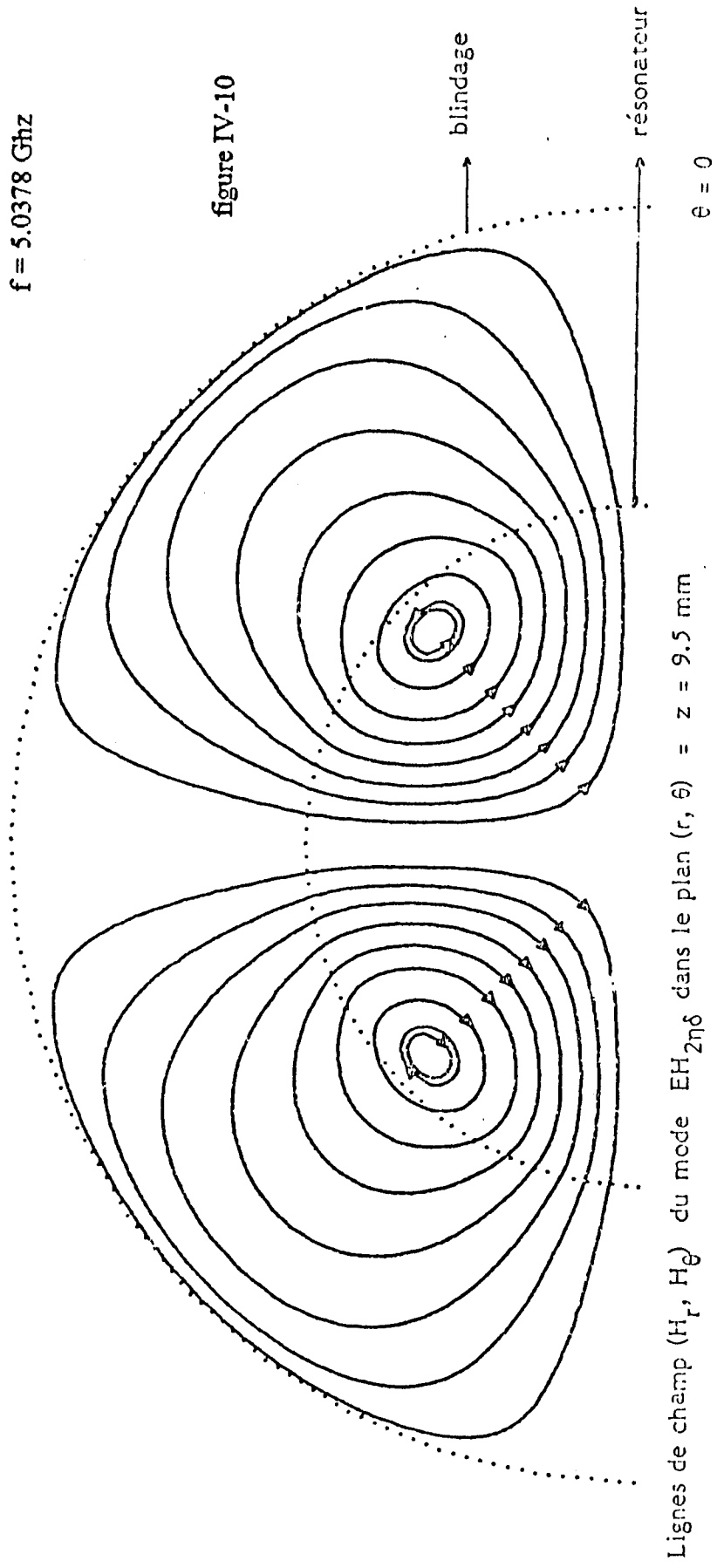


figure IV-8

f = 4.183 GHz

figure IV-9



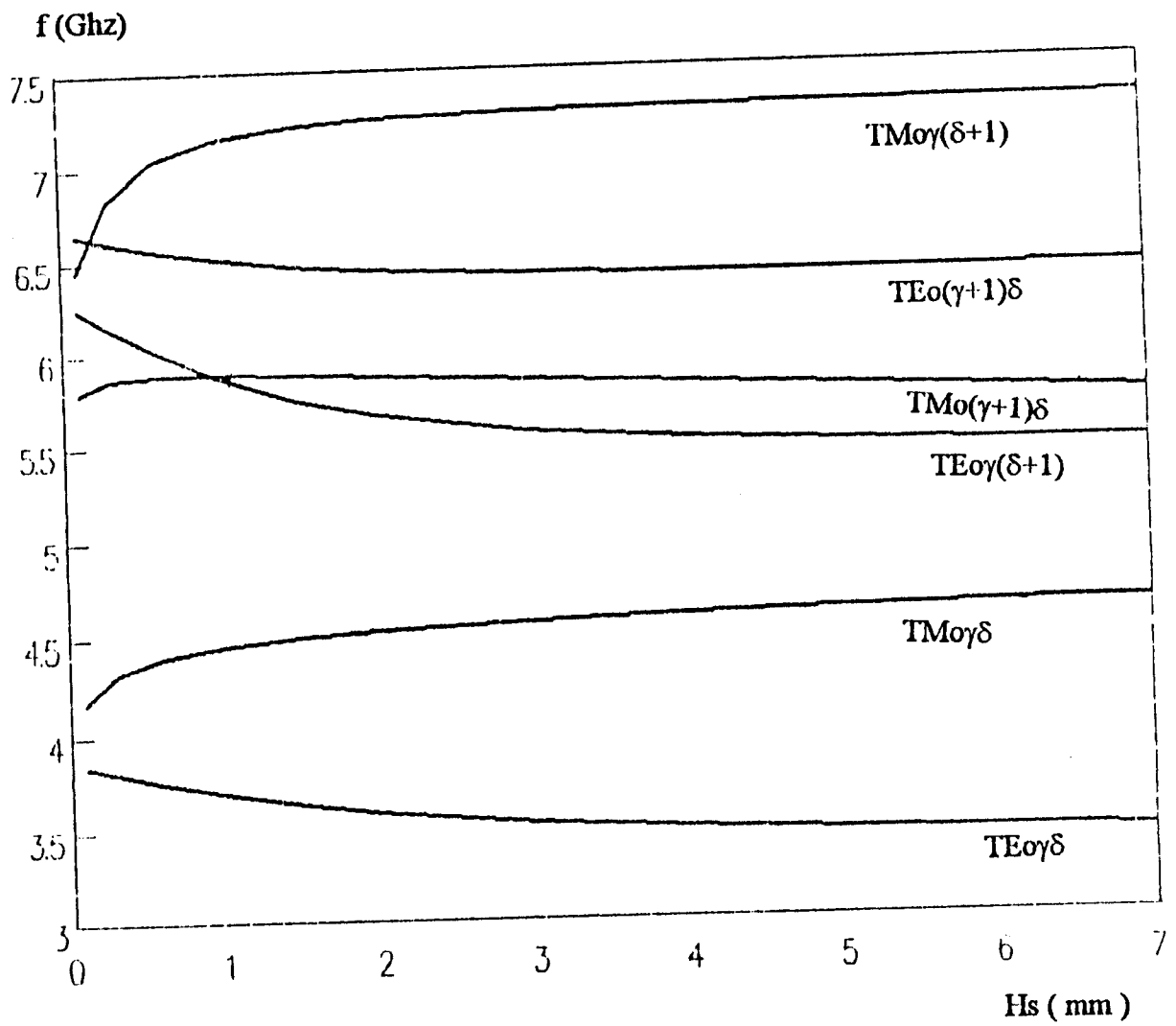


#### IV.2.2. INFLUENCE DE L'ENVIRONNEMENT DU R.D. SUR SON COMPORTEMENT

Les caractéristiques électromagnétiques du R.D. sont très dépendantes de son environnement. Ainsi, l'utilisation d'une méthode rigoureuse telle que la MEF-2D pour le calcul des dimensions du R.D. et de celles de son blindage métallique est nécessaire pour satisfaire la précision exigée des composants lors de leur emploi dans les dispositifs micro-ondes.

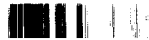
Nous montrons sur les figures (IV.11) à (IV.19) l'influence des paramètres ( $H_s$ ,  $H_g$ ,  $\epsilon_s$ ) sur les fréquences de résonance et sur le facteur de qualité à vide des premiers modes TE et TM. Nous déduisons la règle générale très utilisée en pratique stipulant que le rapprochement des parois métalliques (diminution de  $H_s$  et de  $H_g$ ) au R.D. provoque une augmentation des fréquences des modes TE et une diminution de celles des modes TM. Ce procédé facilite le choix des dimensions du blindage pour garder les fréquences de résonance constantes. L'éloignement des parois métalliques (augmentation de  $H_s$  et de  $H_g$ ) du R.D. entraîne une diminution des pertes métalliques et par conséquent une augmentation du facteur de qualité à vide  $Q_0$ .

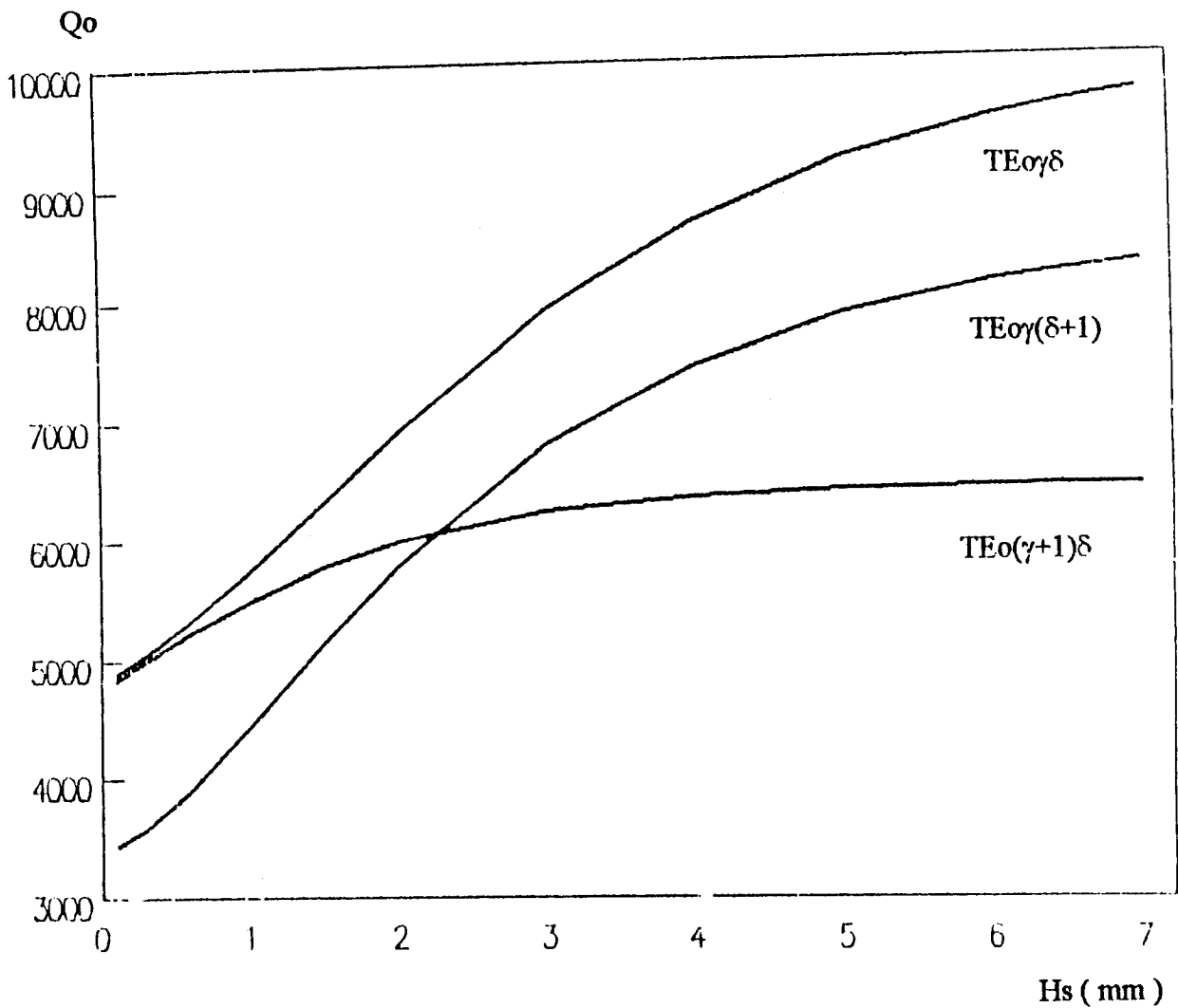
L'augmentation de la permittivité relative  $\epsilon_s$  du substrat entraîne un transfert d'énergie supplémentaire du R.D. vers le substrat donc une diminution de la fréquence de résonance et une diminution du facteur de qualité à vide.



Variation de la fréquence de résonance en fonction de la hauteur du substrat

figure IV-11

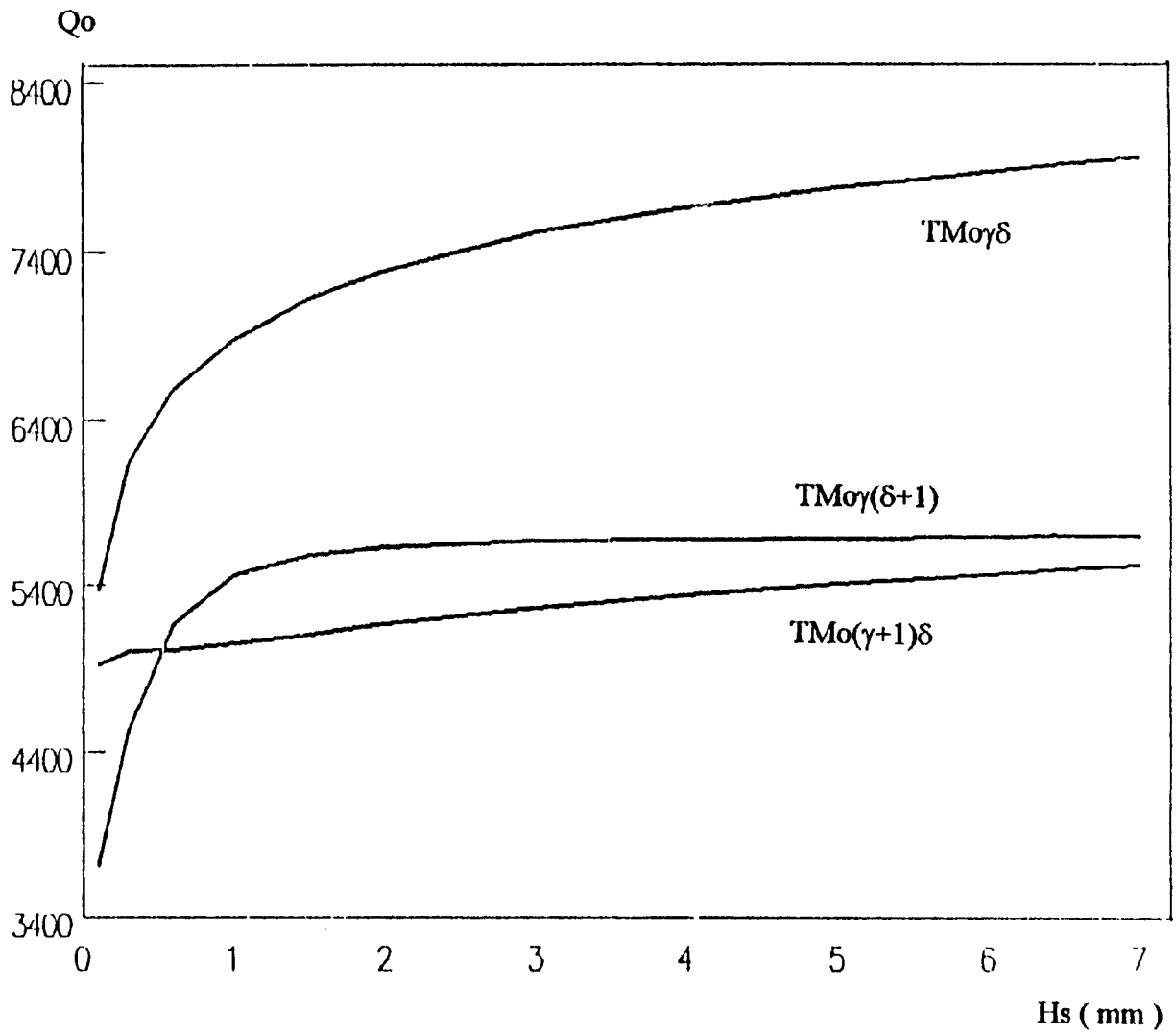




Variation du facteur de qualité à vide  $Q_0$  en fonction de la hauteur du substrat

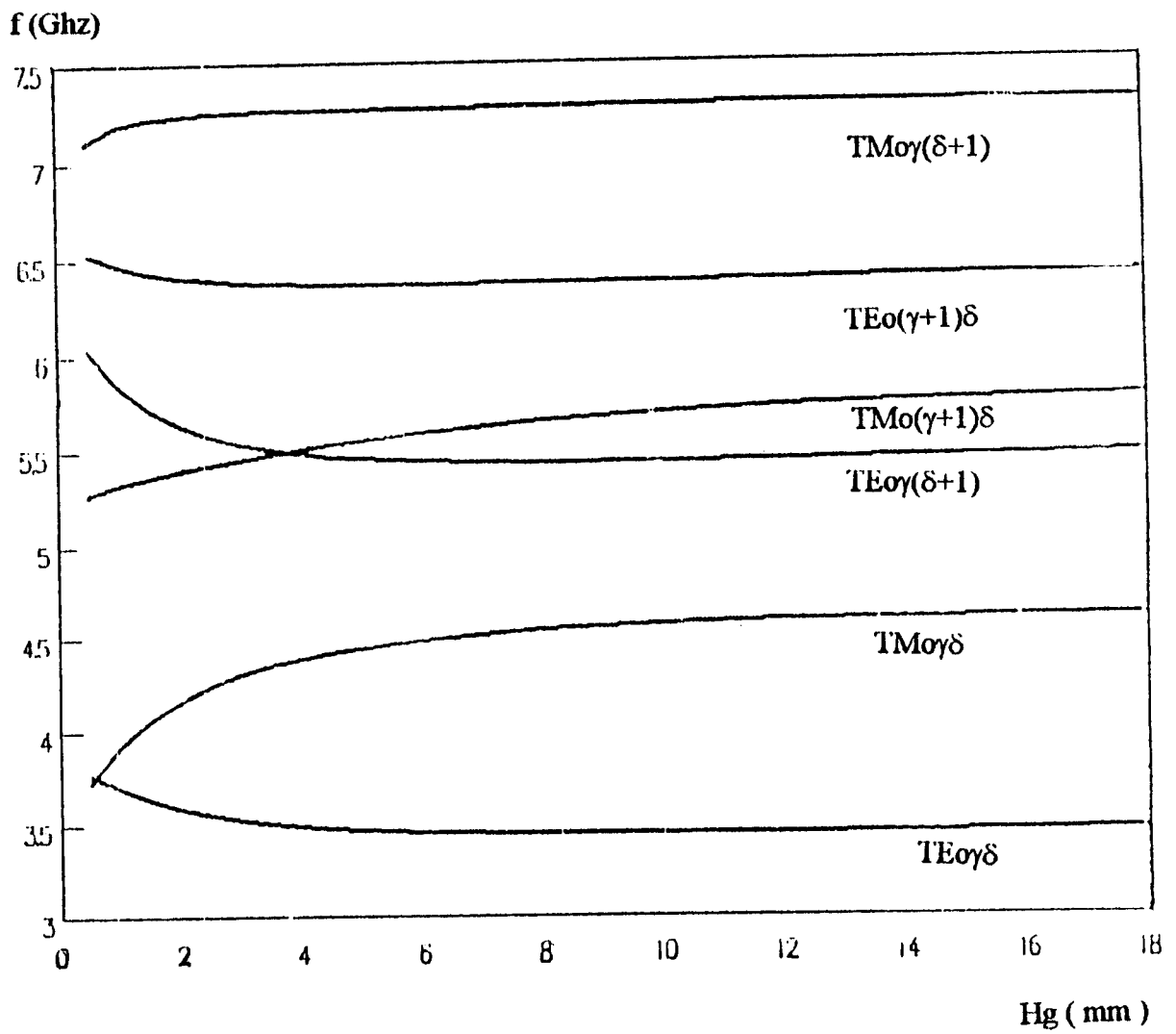
figure IV-12





Variation du facteur de qualité à vide  $Q_o$  en fonction de la hauteur du substrat

figure IV-13

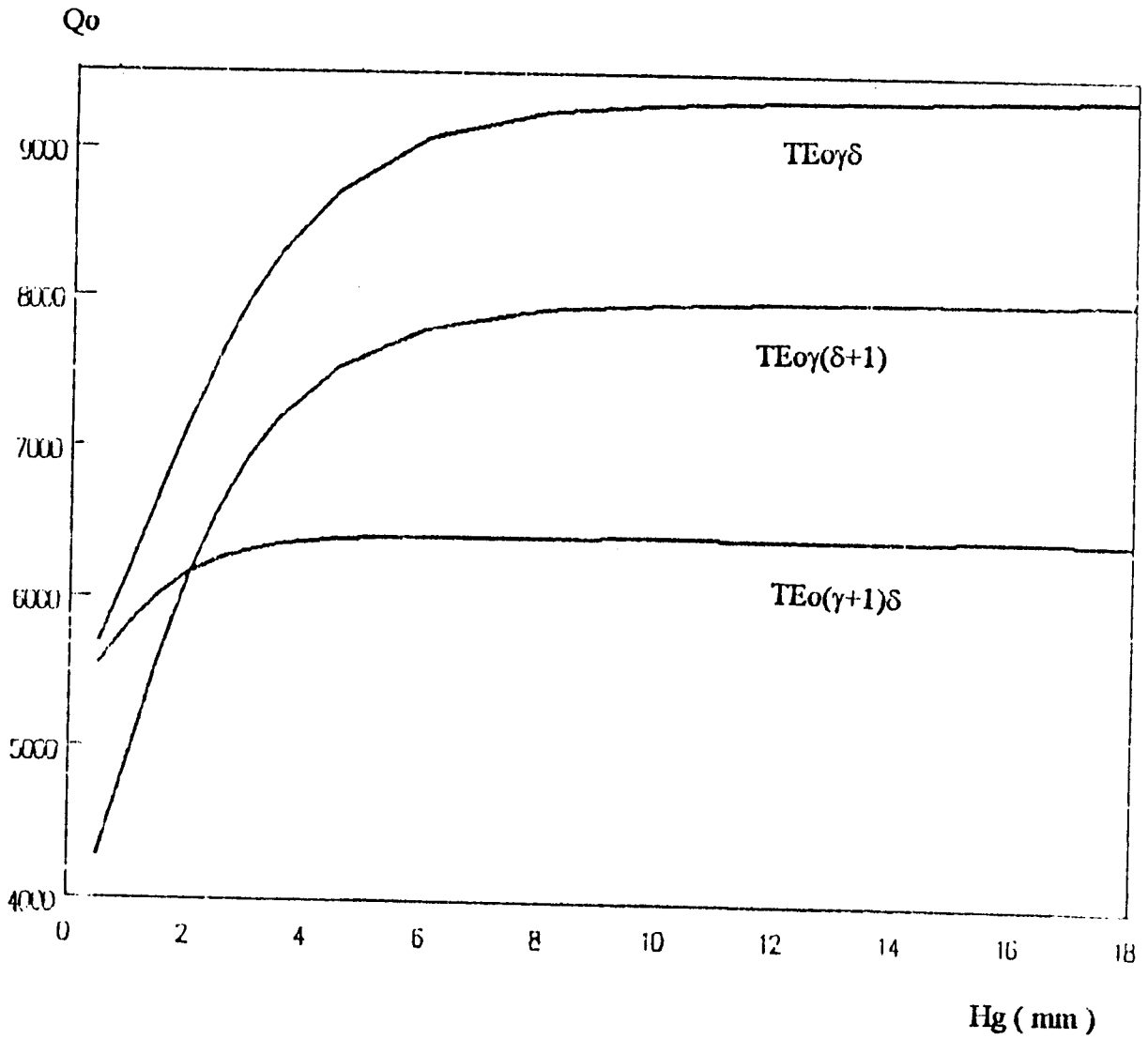


Variation de la fréquence de résonance en fonction de la hauteur  $H_g$

figure IV-14

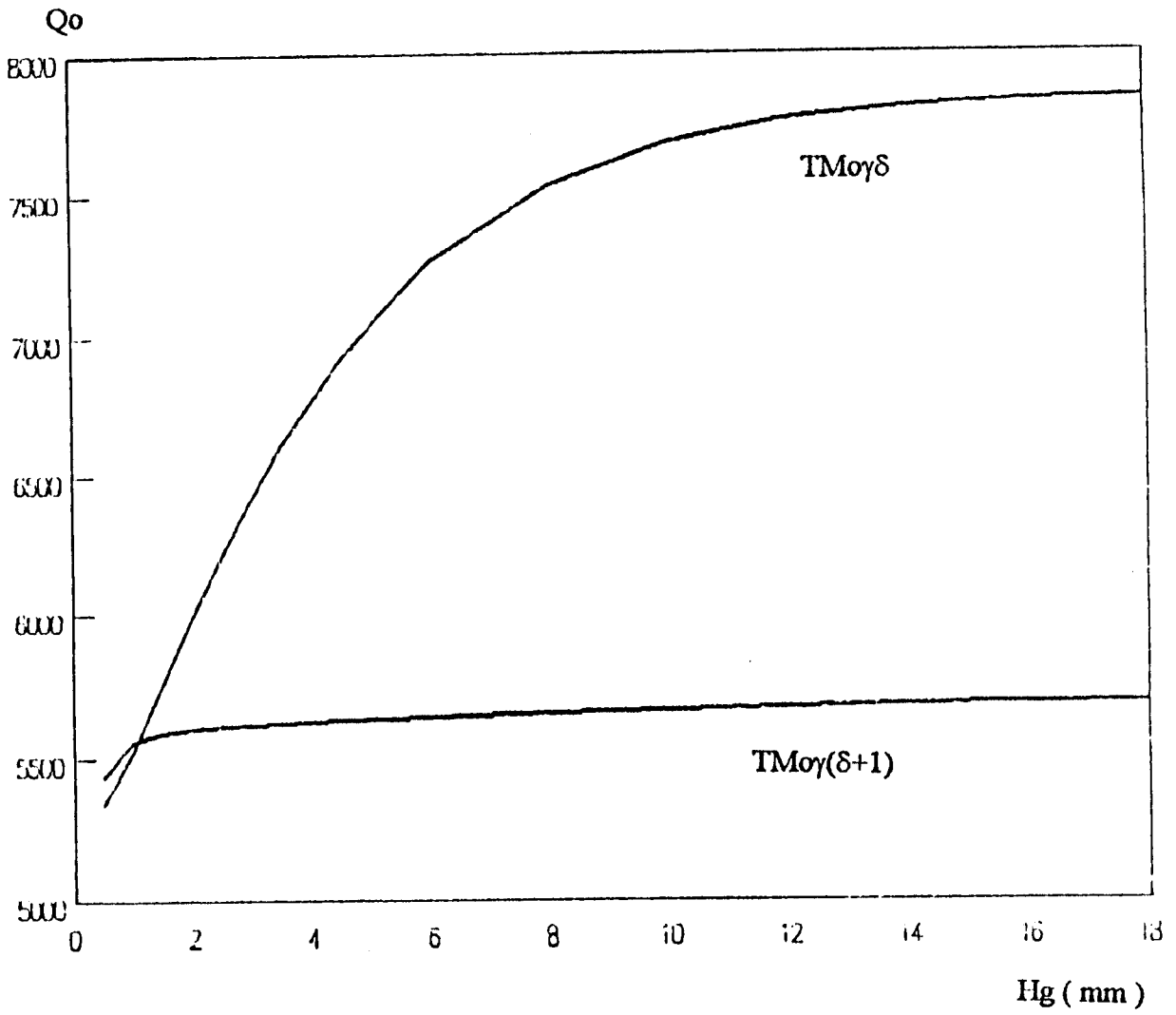






Variation du facteur de qualité à vide  $Q_0$  en fonction de la hauteur  $H_g$

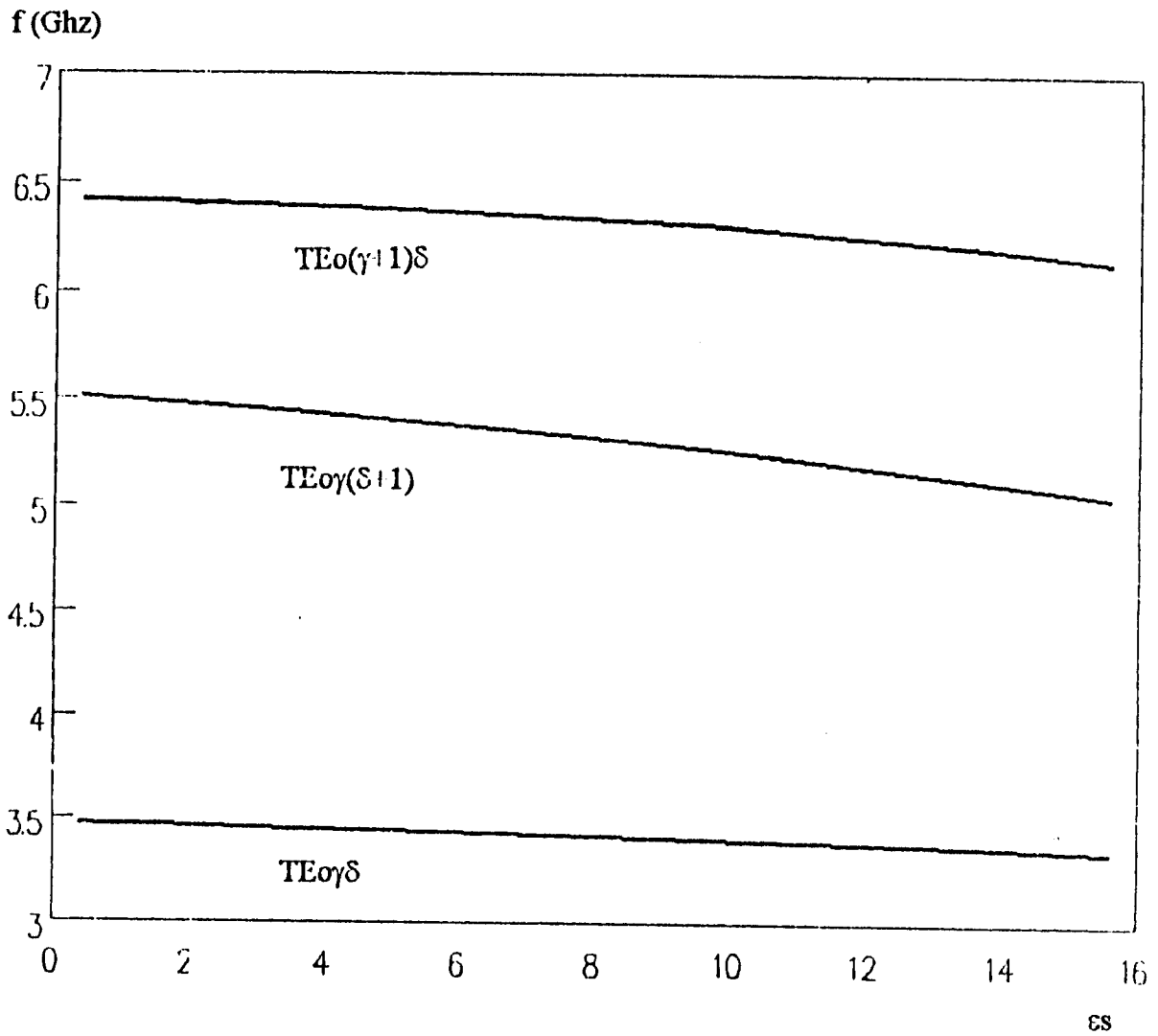
figure IV-15



Variation du facteur de qualité à vide  $Q_0$  en fonction de la hauteur  $H_g$

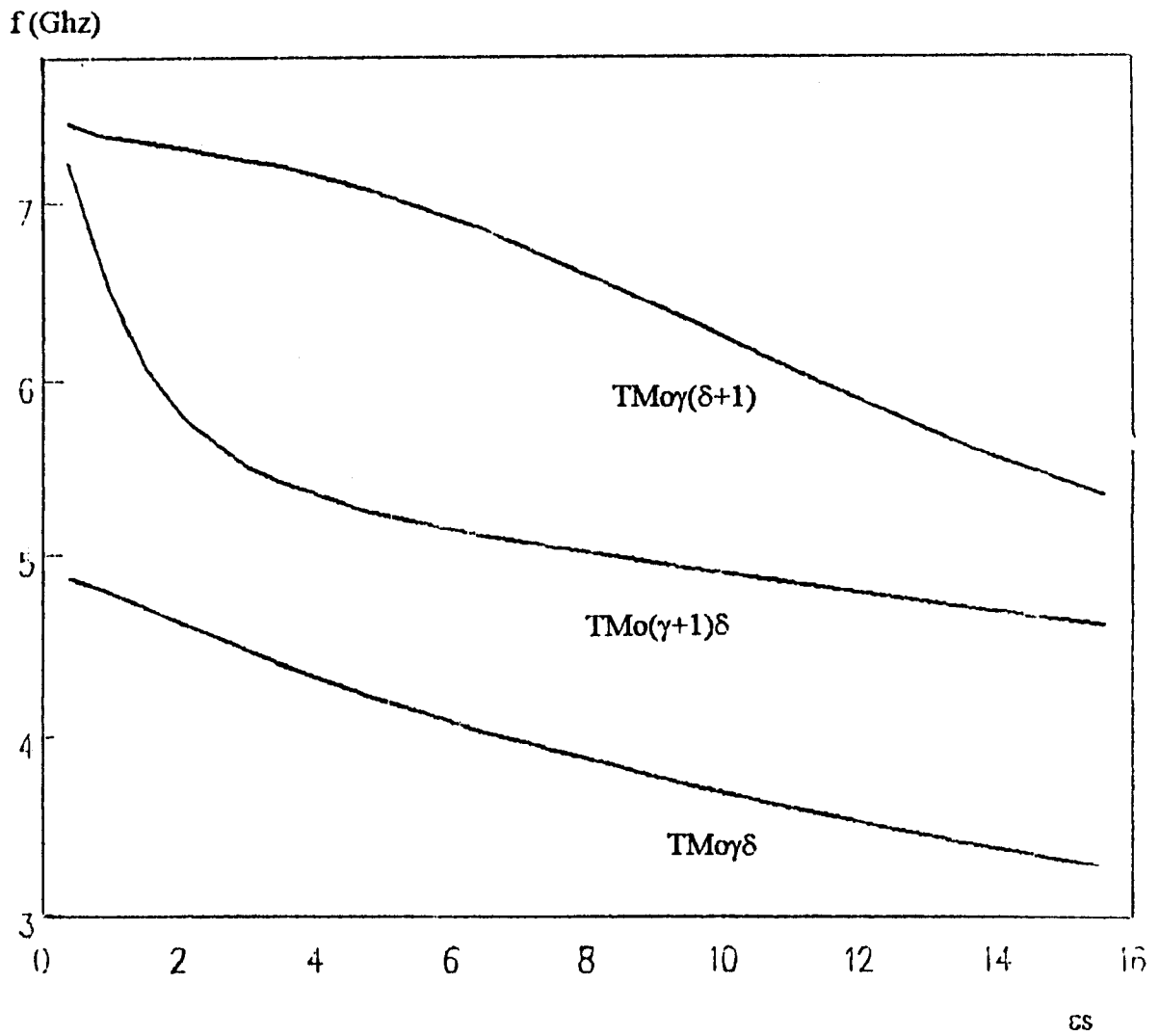
figure IV-16





Variation de la fréquence de résonance  
en fonction de la permittivité du substrat

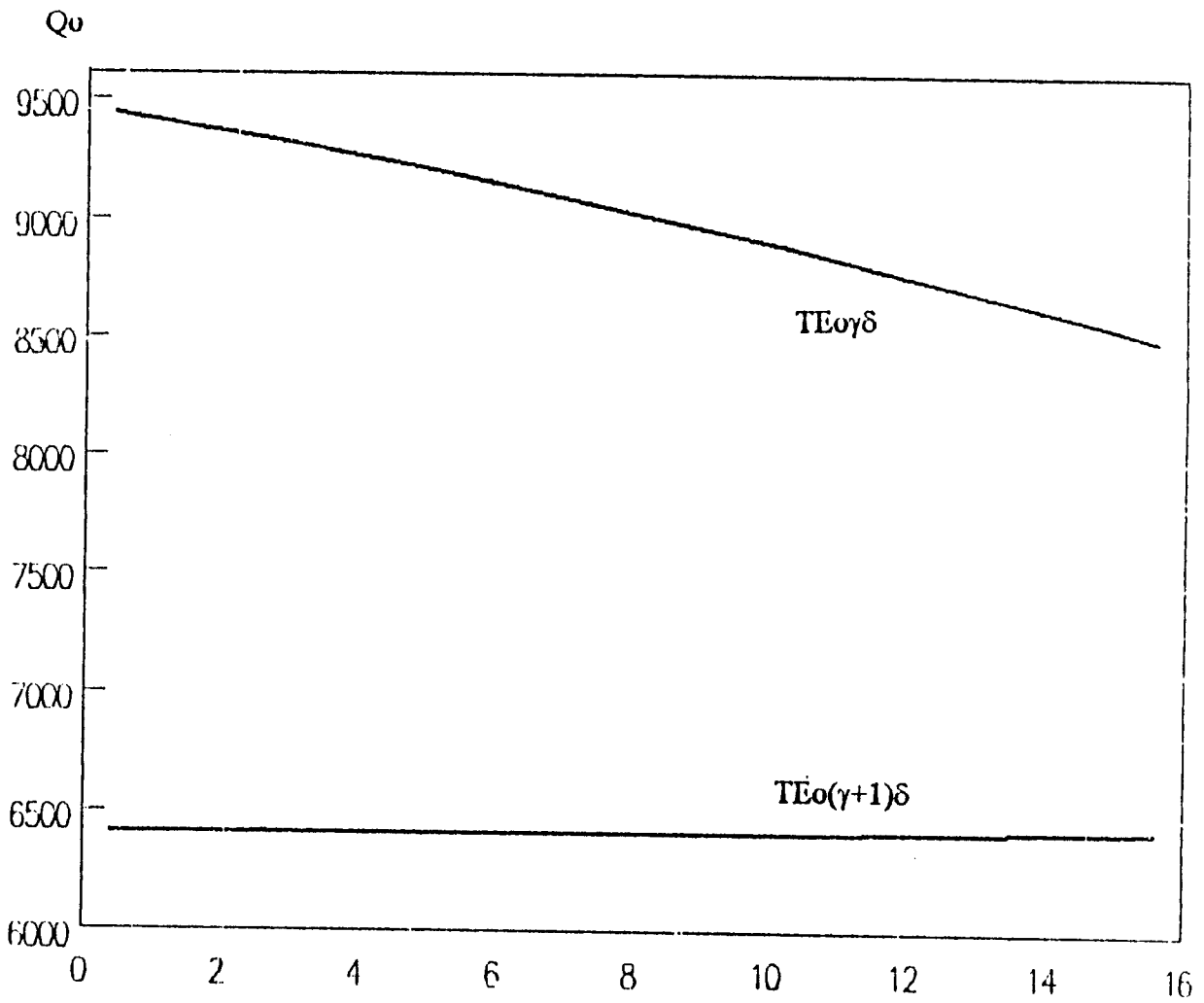
figure IV-17



Variation de la fréquence de résonance en fonction de la permittivité du substrat

figure IV-18





68

Variation du facteur de qualité à vide  $Q_0$  en fonction de la permittivité du substrat

figure IV-19



IV.2.3. INFLUENCE DES PLONGEURS METALLIQUES ET DIELECTRIQUES

Les plongeurs métalliques ou diélectriques sont en général insérés dans la structure du R.D. afin d'affiner le réglage des fréquences de résonance et des facteurs de qualité des modes de résonance. L'avantage de la méthode des éléments finis est qu'elle permet de prendre en compte tous les constituants de la structure.

Nous analysons dans ce paragraphe, l'influence de ces plongeurs sur la fréquence de résonance et sur le coefficient de qualité à vide  $Q_0$  du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  du R.D. de la structure présentée sur la figure (IV.20).

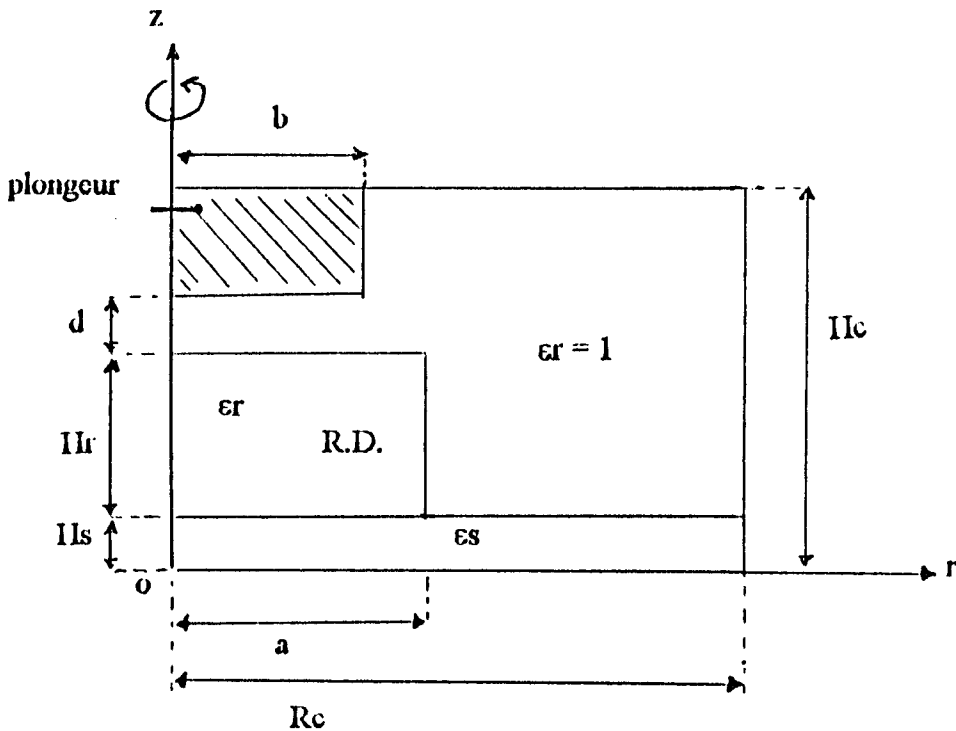


figure IV-20

a. PLONGEUR METALLIQUE

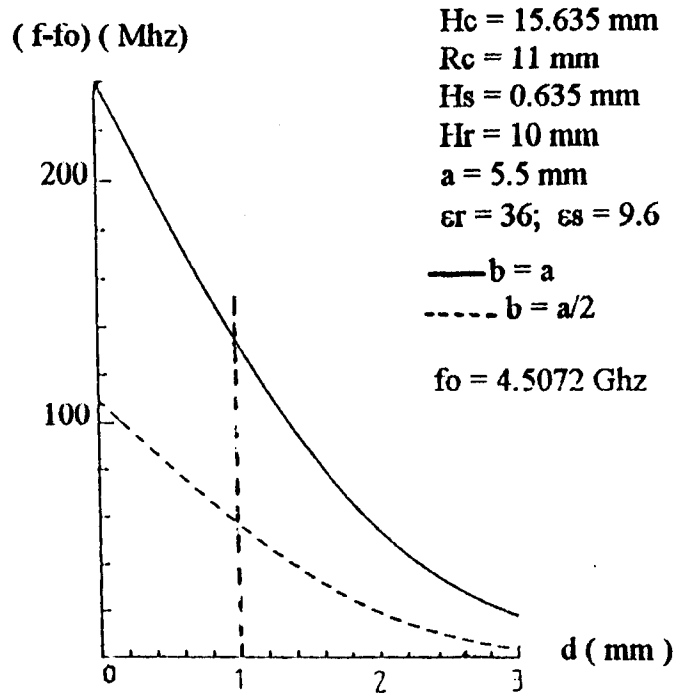
Les figures (IV.21) et (IV.22) présentent les variations de la fréquence de résonance  $f_0$  et du facteur de qualité à vide  $Q_0$  du R.D. fonctionnant sur le mode  $TE_{0\gamma\delta}$  en fonction de la distance  $d$  pour différents rayons  $b$  du plongeur métallique plein.

La fréquence de résonance augmente lorsque le plongeur se rapproche du R.D., ce qui est une caractéristique bien connue du mode  $TE_{0\gamma\delta}$ .

D'autre part rapprocher un plan métallique à proximité du R.D. dans une région où le champ magnétique est important, augmente les pertes métalliques; ce qui contribue à diminuer le facteur de qualité.

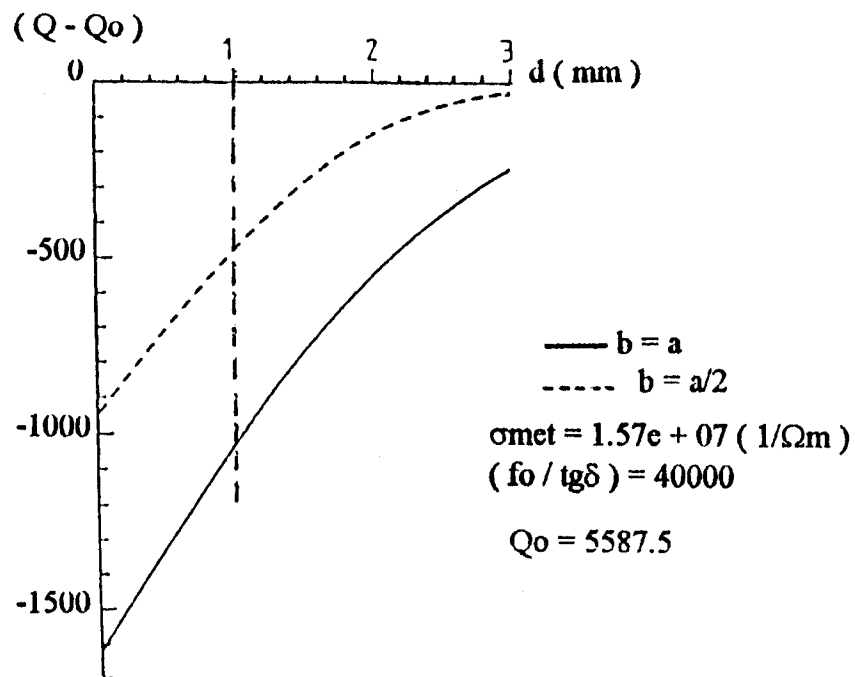
Il est intéressant de noter que pour une distance  $d$  inférieure à 1 mm environ (dans le cas traité) les variations de  $f_0$  et de  $Q_0$  sont quasiment linéaires en fonction de  $d$ . Le réglage de





Variation de la fréquence du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  en fonction de la proximité d'un plongeur métallique

figure IV-21



Variation du facteur de qualité à vide du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  en fonction de la proximité d'un plongeur métallique

figure IV-22



ces paramètres sera donc facilité dans cette zone par l'emploi d'une vice micrométrique dont la position indiquera, à un facteur d'échelle près, les valeurs de  $f_0$  et de  $Q_0$ .

#### b. PLONGEUR DIELECTRIQUE

Nous analysons dans ce cas la même structure de la figure (IV- 20) où l'on change uniquement le plongeur métallique par un plongeur diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_p$ . Les figures (IV.23) et (IV.24) présentent les variations de la fréquence de résonance  $f_0$  et du facteur de qualité à vide  $Q_0$  du R.D. fonctionnant sur le mode  $TE_{0\gamma\delta}$  en fonction de la distance  $d$ , pour différentes valeurs de  $b$  et de  $\epsilon_p$ .

Dans ce cas, la fréquence de résonance diminue lorsque le plongeur se rapproche du R.D. Les variations du facteur de qualité à vide sont très dépendantes des dimensions des plongeurs puisque  $Q_0$  dépend des énergies emmagasinées dans les différents milieux diélectriques.

Remarquons enfin, que les variations de  $f_0$  et de  $Q_0$  en fonction de la distance  $d$  sont, comme dans le cas d'un plongeur métallique, linéaires pour des distances  $d$  inférieures à 1 mm environ (dans ce cas précis).

Cette étude permet de conclure qu'il est possible, à l'aide d'un plongeur métallique, d'affiner le réglage de la fréquence de résonance du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  dans une plage importante. Le plongeur diélectrique permet par rapport au plongeur métallique, de limiter la perturbation apportée au facteur de qualité à vide  $Q_0$  de la structure.

Toutefois, une configuration dans laquelle les pertes métalliques sur la face supérieure du plongeur diélectrique seraient faibles, permettrait d'obtenir de meilleurs résultats au niveau de ce paramètre. Ceci nous conduit à utiliser une pastille diélectrique.





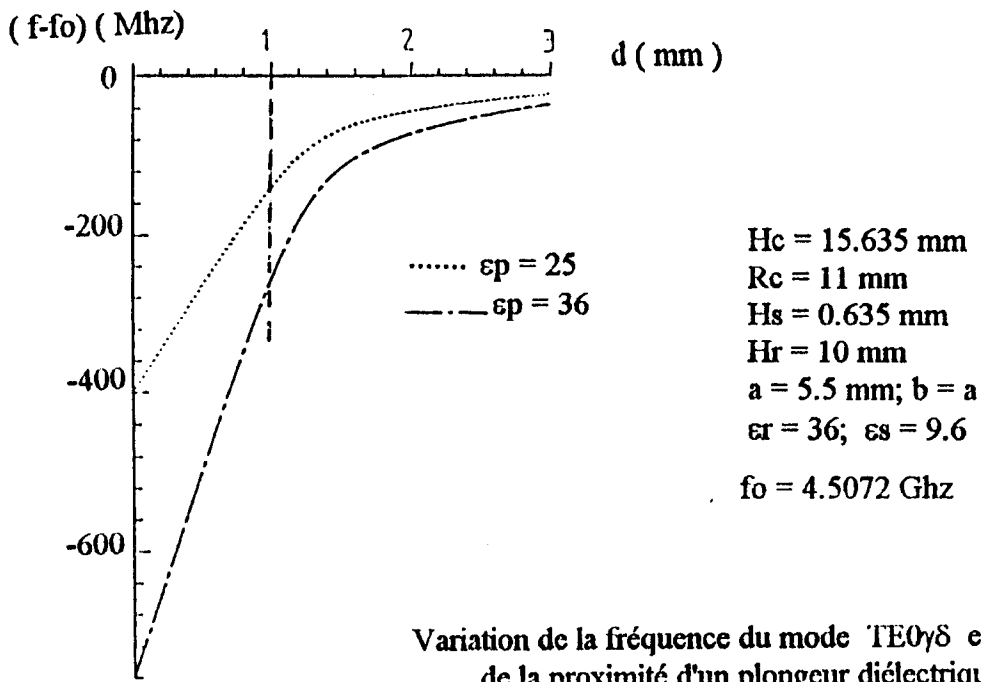


figure IV-23-a

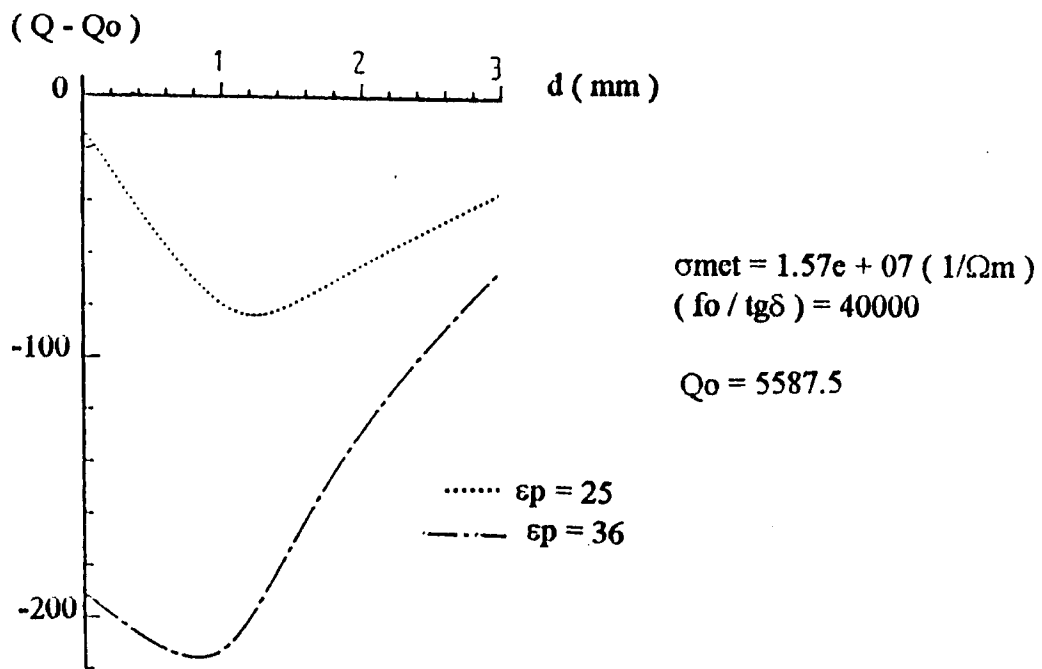
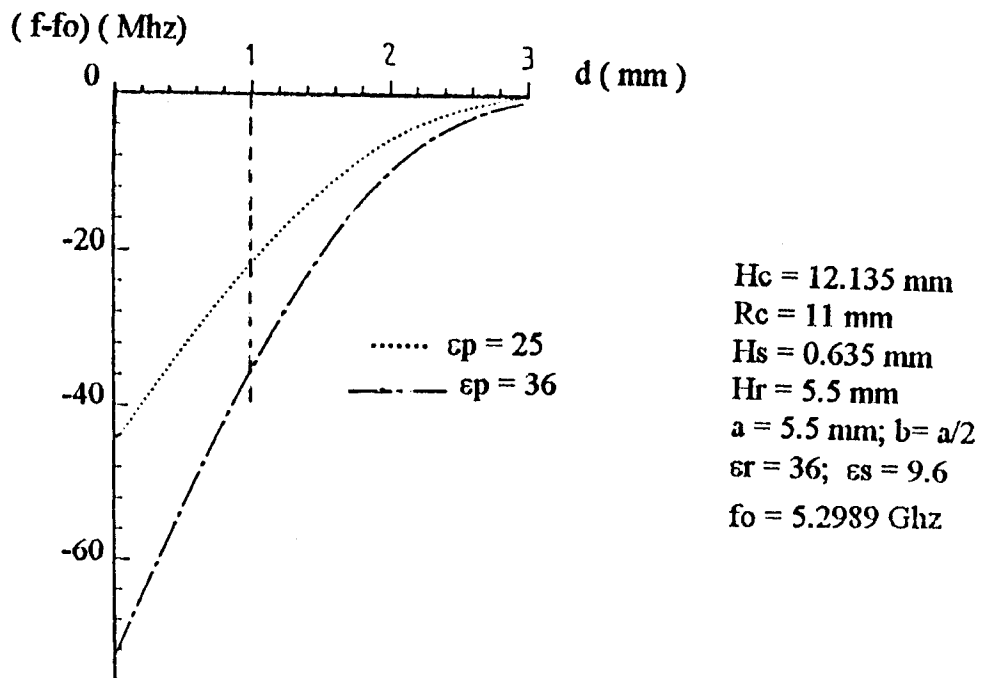


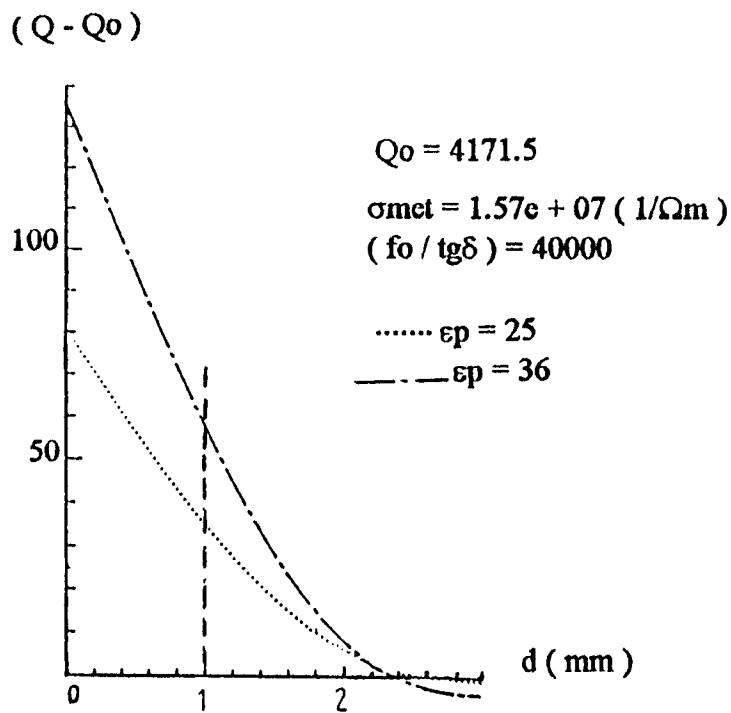
figure IV-23-b





Variation de la fréquence du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  en fonction de la proximité d'un plongeur diélectrique

figure IV-24-a



Variation du facteur de qualité à vide du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  en fonction de la proximité d'un plongeur diélectrique

figure IV-24-b

c. PLONGEUR A PASTILLE DIELECTRIQUE

La structure à analyser est présentée sur la figure (IV.25).

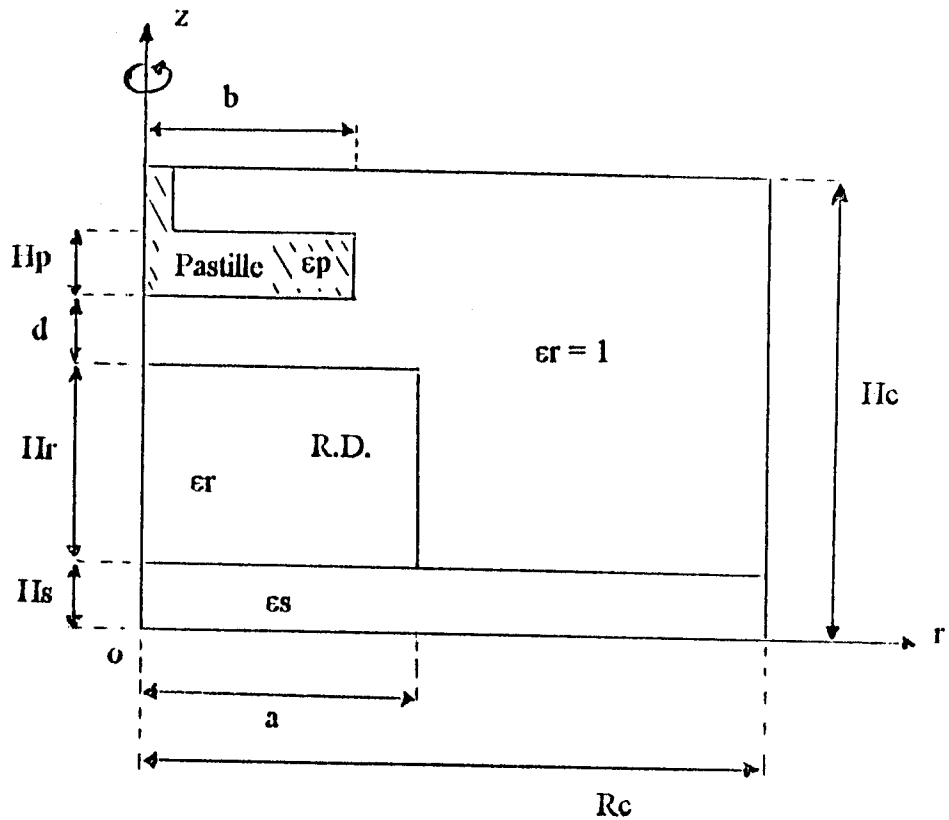
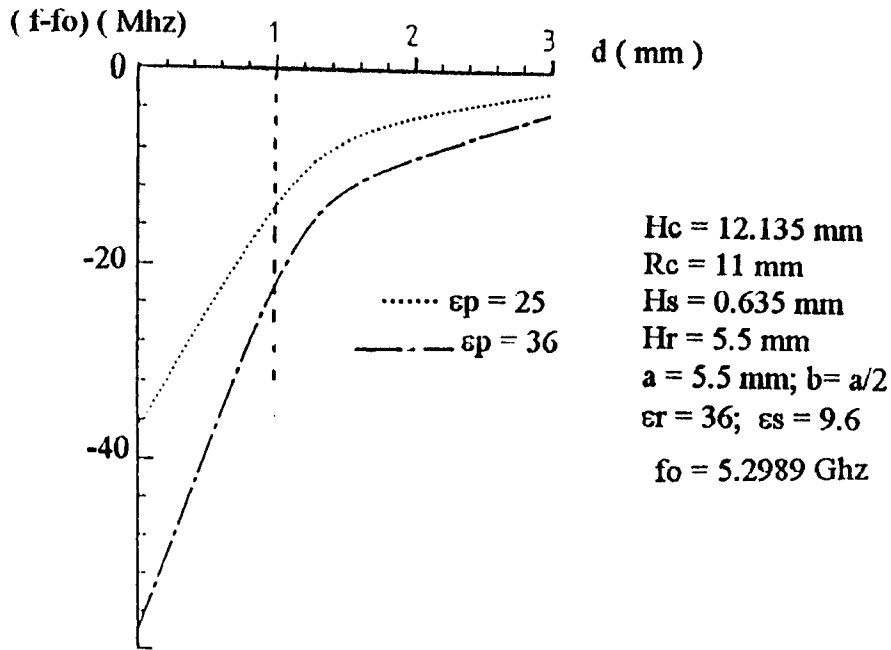


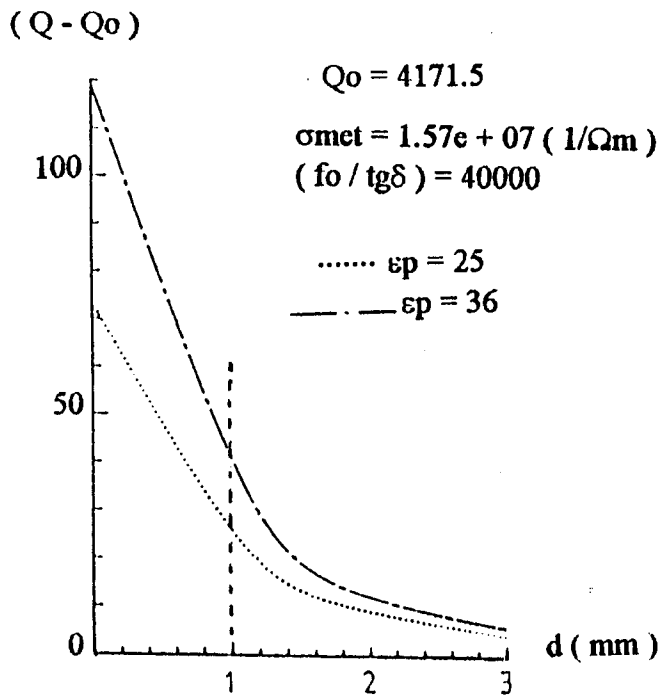
figure IV-25

Les figures (IV.26) et (IV.27) montrent les variations de la fréquence de résonance  $f_0$  et du facteur de qualité à vide  $Q_0$  du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  de cette structure, en fonction de la distance  $d$ , pour différentes valeurs de  $\epsilon_p$ . Il est à noter que les variations de fréquences sont semblables à celles obtenues avec un plongeur diélectrique, tandis que le facteur de qualité  $Q_0$  est sensiblement amélioré. Les variations de fréquence et du facteur de qualité pour une distance  $d$  inférieure à 1 mm environ sont quasiment linéaires.



Variation de la fréquence du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  en fonction de la proximité d'une pastille diélectrique

figure IV-26



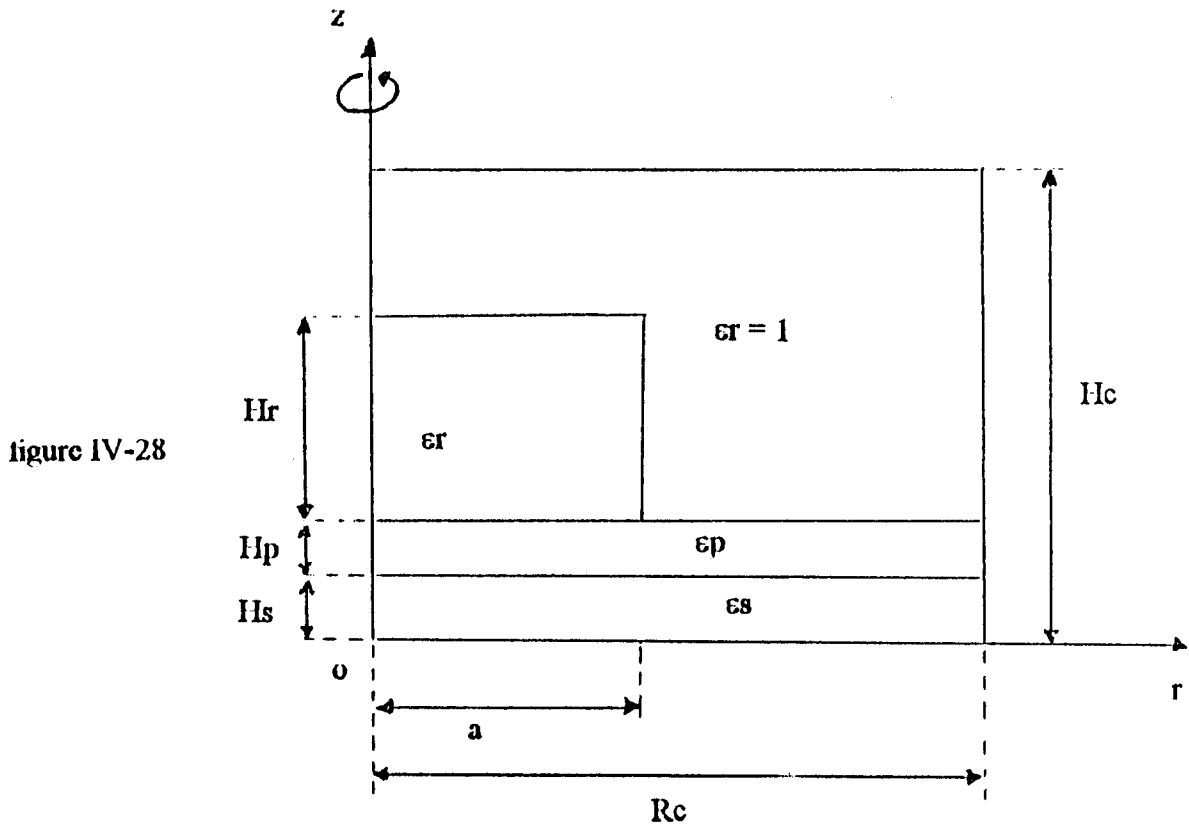
Variation du facteur de qualité à vide du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  en fonction de la proximité d'une pastille diélectrique

figure IV-27



**d. INFLUENCE D'UNE CALE DIELECTRIQUE INSEREE ENTRE LE R.D. ET LE SUBSTRAT**

Le type de montage présenté sur la figure (IV. 28) est très souvent utilisé dans la conception de filtres micro-ondes [24].



Nous évaluons la fréquence de résonance et le facteur de qualité du mode  $TE_{0\gamma\delta}$  de cette structure, pour différentes valeurs de l'épaisseur  $H_p$  et de la permittivité relative  $\epsilon_p$  de la côle diélectrique. Les résultats de cette étude sont présentés sur les figures (IV.29) et (IV.30). L'interprétation de ces courbes reste identique à celle établie dans l'étude de l'influence de la permittivité relative  $\epsilon_p$  du substrat sur la fréquence et sur le facteur de qualité (figures (IV.11) à (IV.13)).

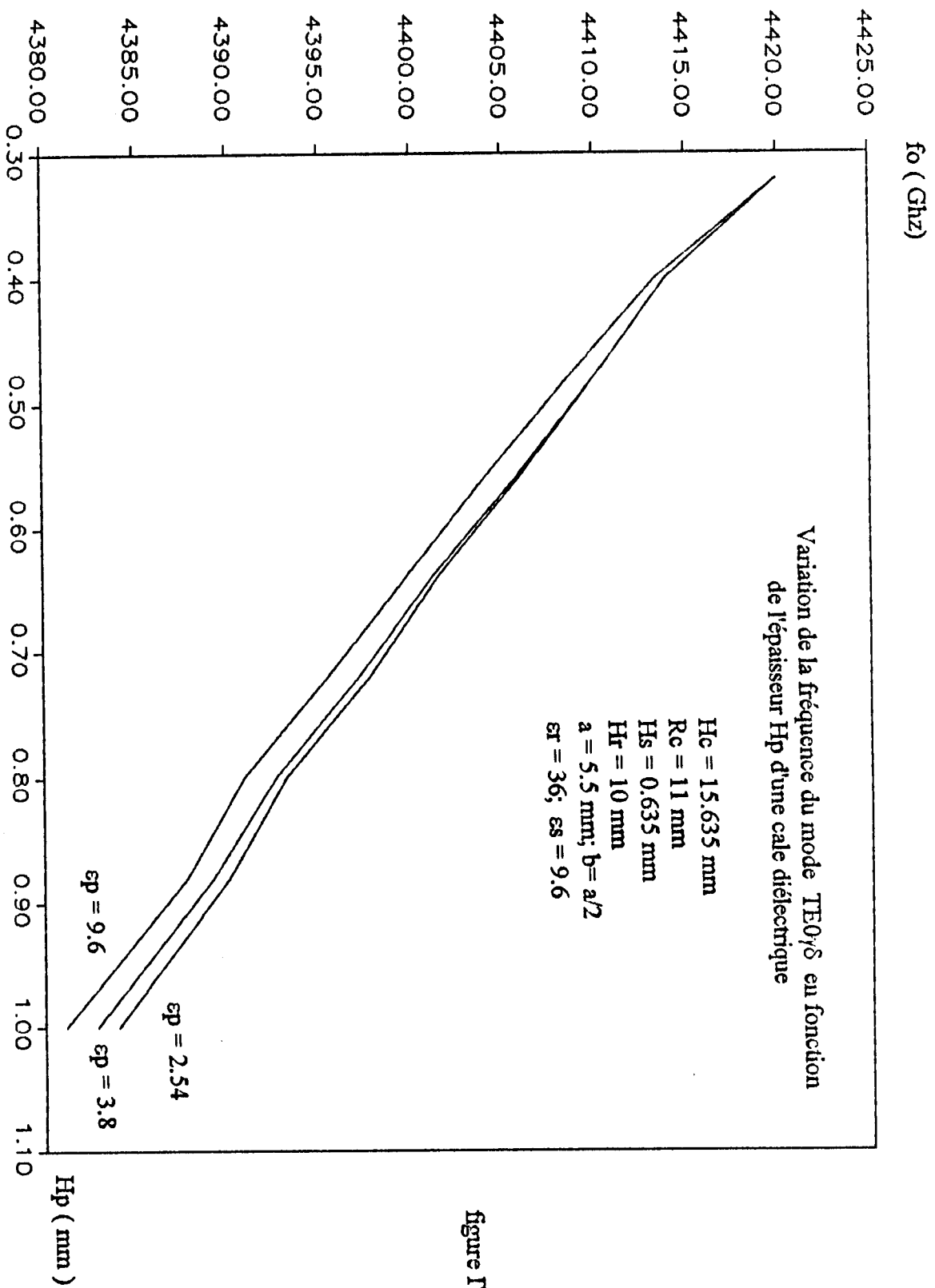


figure IV-29

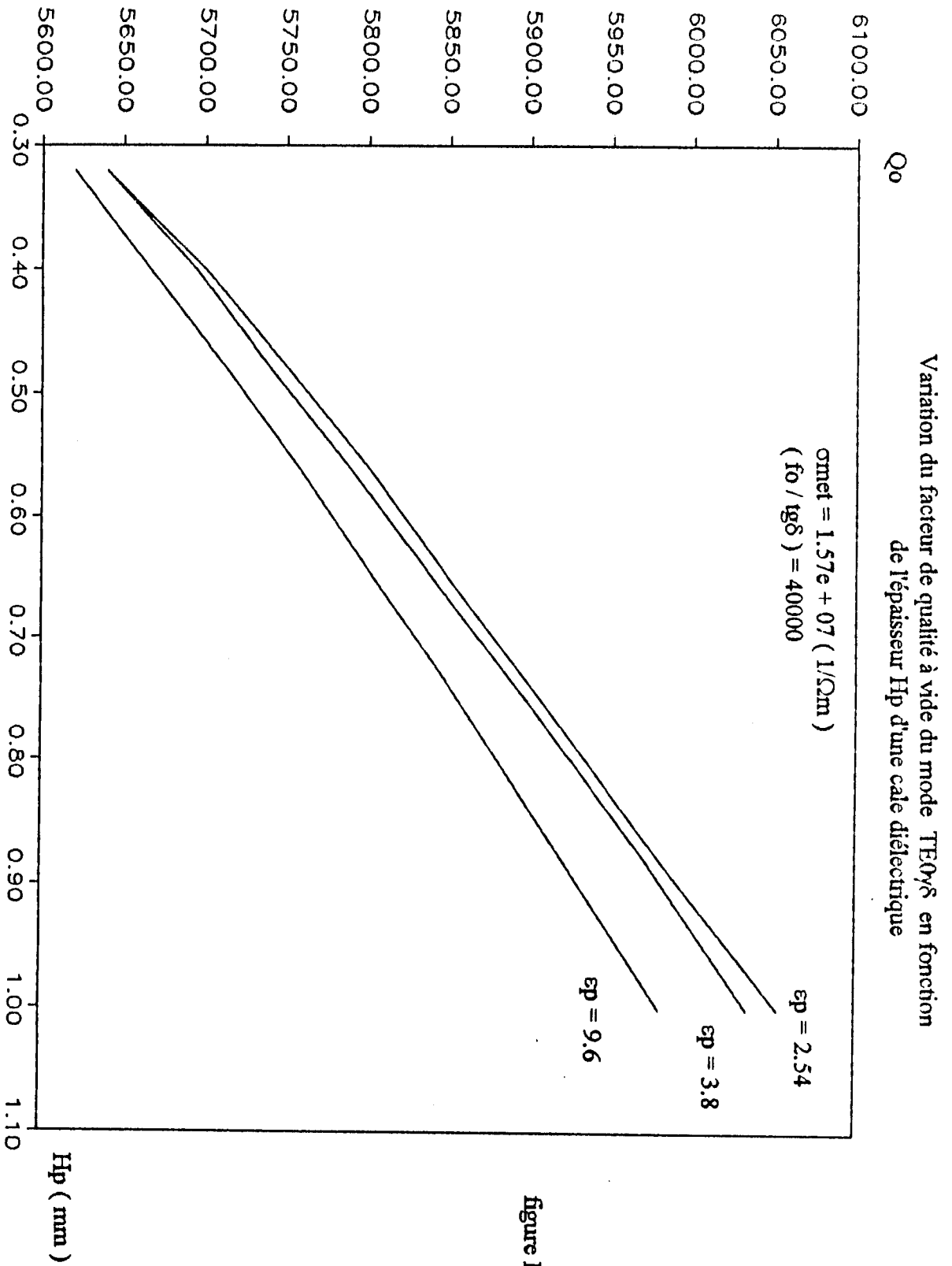


figure IV-30

### IV.3. ANALYSE DU R.D. CONVENTIONNEL A FAIBLES PERTES PAR LA MEF-2D [27], [43]

Les matériaux constituant les diélectriques de la figure (IV. 31) présentent dans la réalité de faibles pertes. Dans ces conditions, les permittivités et les perméabilités relatives du R.D. et du substrat sont des grandeurs complexes indépendantes de la fréquence et s'écrivent  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  et  $\mu = \mu' - j\mu''$ .

Nous considérons dans un premier temps, la présence des pertes diélectriques uniquement dans le R.D. ( $\epsilon_r$  complexes et  $\epsilon_s$  réelle pure) et nous analysons leurs influences sur la fréquence de résonance  $f_0$  et sur le temps de relaxation  $\tau$  des premiers modes  $TE_{0mp}$  et  $TM_{0mp}$  de cette structure.

Les cartographies du champ électromagnétique en deux et trois dimensions des premiers modes  $TE_{0mp}$  et  $TM_{0mp}$  de ce dispositif sont présentées sur les figures (IV.32) à (IV.35).

Les variations des paramètres ( $f_0$ ,  $\tau$ ) en fonction de la tangente de pertes ( $tg\delta$ ) du R.D. sont présentées sur les figures (IV.36) et (IV.37). Nous observons sur la figure (IV.36), une diminution des fréquences des modes TE et TM pour des valeurs de  $tg\delta$  du R.D. supérieures à 0,01. Les modes TE ayant un champ électrique concentré à l'intérieur du R.D., sont beaucoup plus influencés par la présence des pertes que les modes TM.

Nous remarquons également sur la figure (IV.37) une décroissance du temps de relaxation car si la tangente de pertes augmente, la résonance aura tendance à disparaître pour de faibles valeurs de  $\tau$ .

Dans une deuxième étape, nous considérons les pertes diélectriques présentes uniquement dans le substrat ( $\epsilon_s$  complexe et  $\epsilon_r$  réelle pure) et nous analysons leurs influences sur les premiers modes  $TE_{0mp}$  et  $TM_{0mp}$  de cette structure (figure (IV.31)). Les résultats de cette étude sont présentés sur les figures (IV.38) et (IV.39), où nous observons un phénomène similaire au cas précédent.





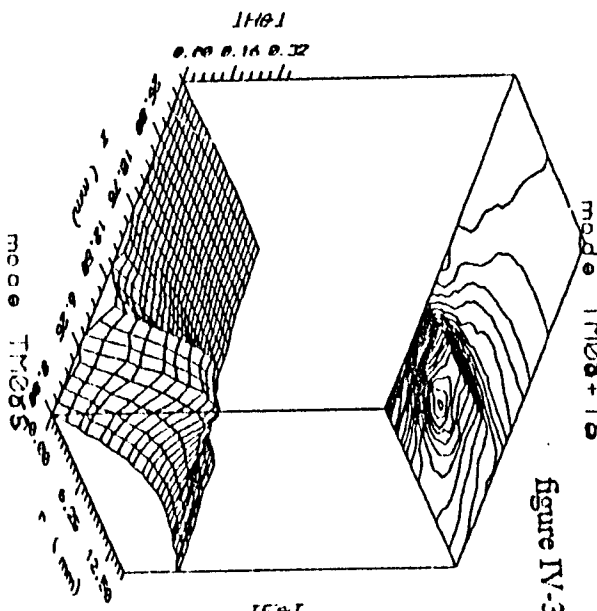


figure IV-32

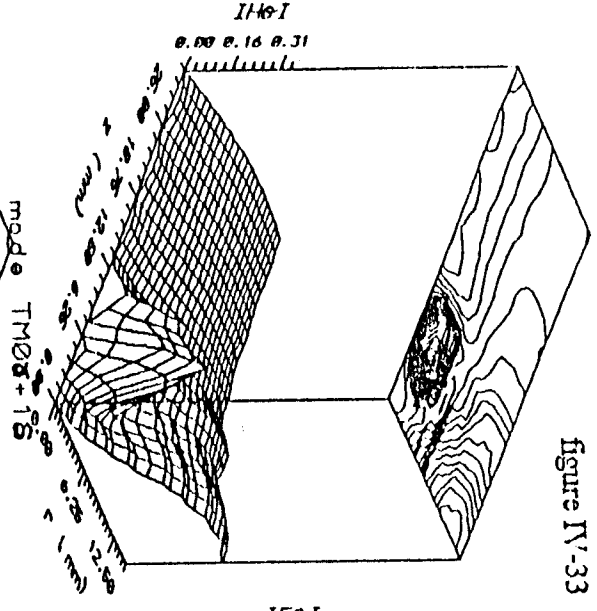


figure IV-33

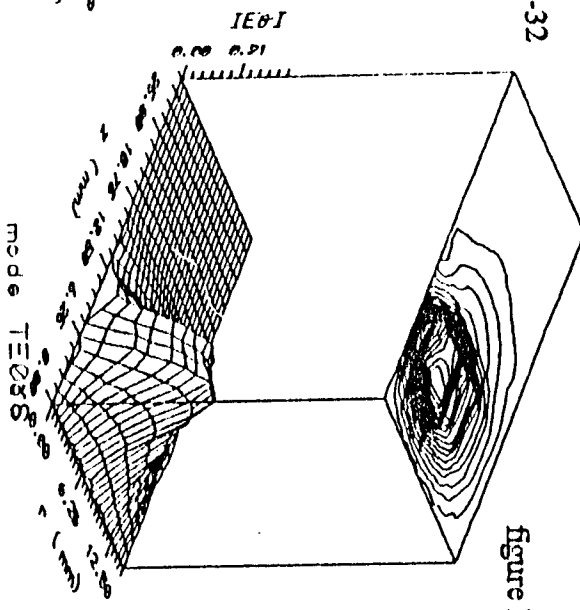


figure IV-34

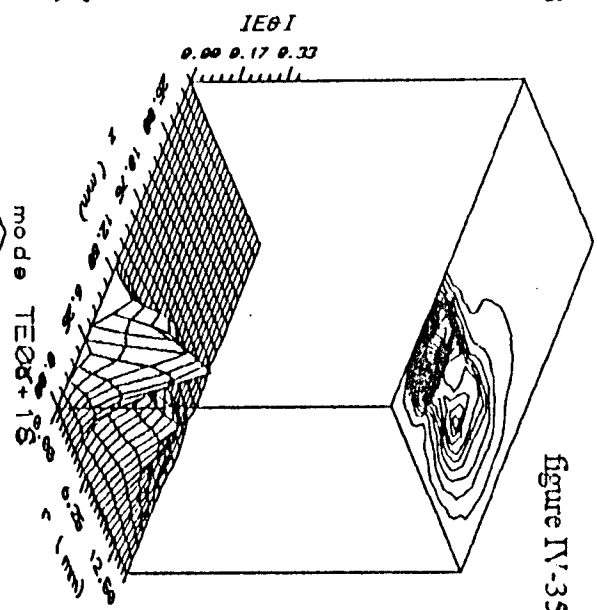


figure IV-35

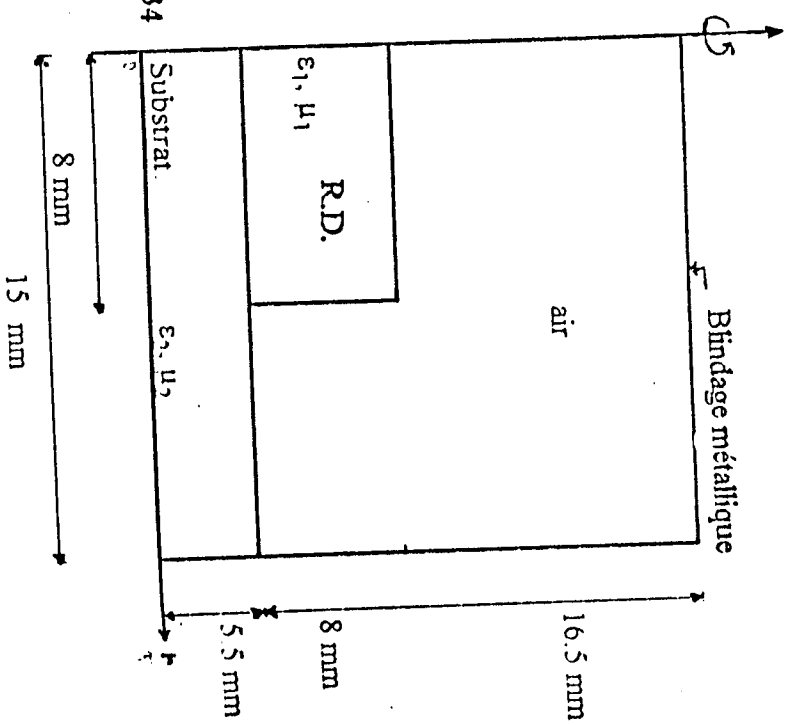


figure IV-31

R.D. : Résonateur Diélectrique

$\epsilon_{r1} = 35.7; \epsilon_{r1} = \text{variable}$

$\epsilon_{r2} = 2.1; \epsilon_{r2} = \text{variable}$

$\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1; \mu_{r1} = \mu_{r2} = 0$

F (MHz)

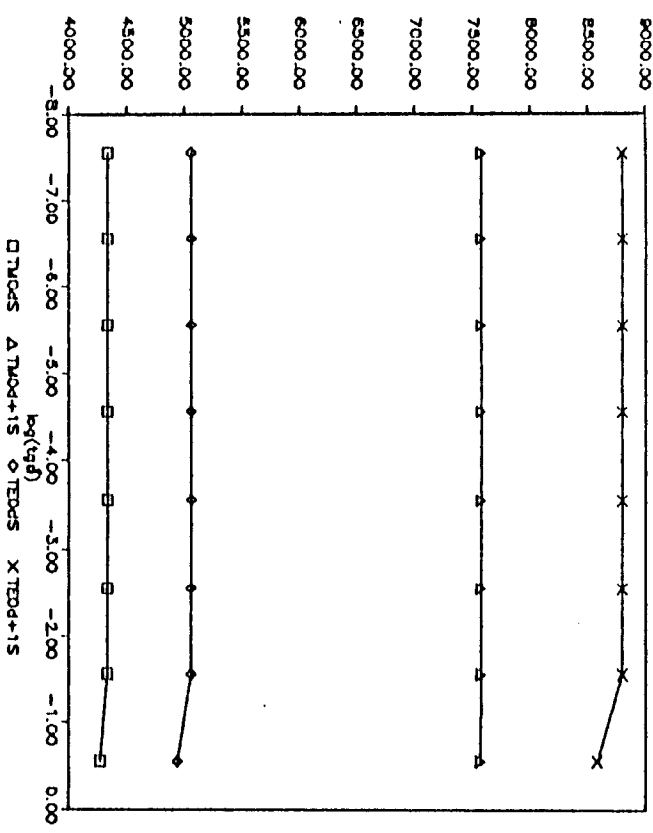


figure IV-36

Variation de la fréquence de résonance en fonction de la tangente de perte du résonateur diélectrique

log(γ/4)

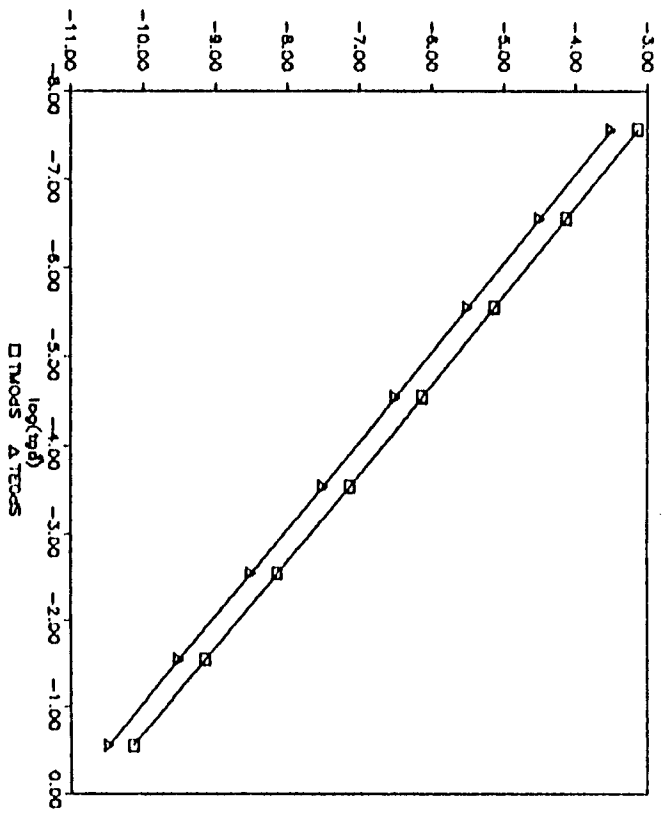


figure IV-37

Variation du temps de relaxation en fonction de la tangente de perte du résonateur diélectrique



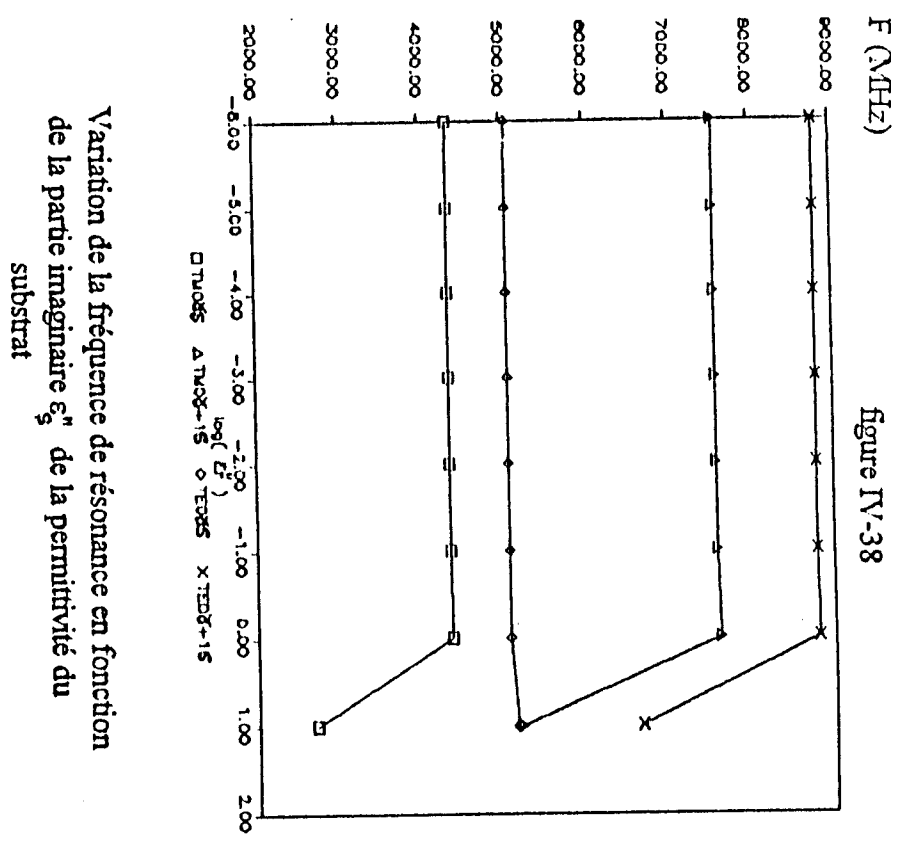


figure IV-38

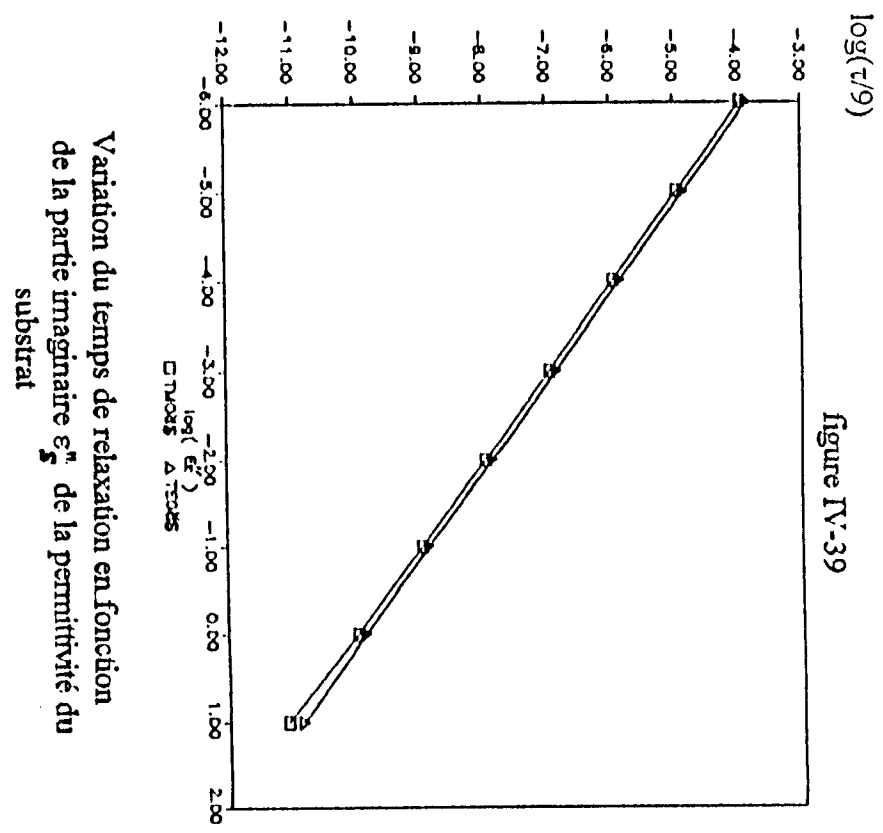


figure IV-39

#### IV.4. ANALYSE DES FILTRES MILLIMETRIQUES A BASE DU R.D. [4], [45], [46], [47], [48]

De nombreux dispositifs micro-ondes utilisent les résonateurs diélectriques. En effet leur emploi permet la réalisation de circuits électroniques intégrés, dont les performances sont comparables à celles des circuits utilisant des cavités métalliques. Cependant, aux ondes millimétriques, les dimensions des R.D. conventionnels qui fonctionnent sur leur mode fondamental  $TE_{0\gamma\delta}$  sont très faibles. A titre d'exemple, un R.D. à permittivité relative  $\epsilon_r$  égale à 36, doit avoir à la fréquence 94 GHz, un diamètre et une hauteur de l'ordre de 500  $\mu\text{m}$ . Par conséquent, l'usinage avec précision suffisante de ce R.D. est difficilement envisageable.

Pour surmonter ce problème, deux possibilités peuvent être exploitées:

- fonctionnement sur le mode fondamental  $TE_{0\gamma\delta}$  d'un R.D. de forme parallépipédique.
- fonctionnement sur les modes supérieurs dits "Whispering Gallery" de R.D. à épaulement ou de R.D. planaires.

Nous présentons dans la suite, l'analyse de filtres passifs millimétriques avec ces deux types de R.D.

##### IV.4.1. ANALYSE DU R.D. PARRALLELIPIPEDIQUE PAR LA MEF-3D

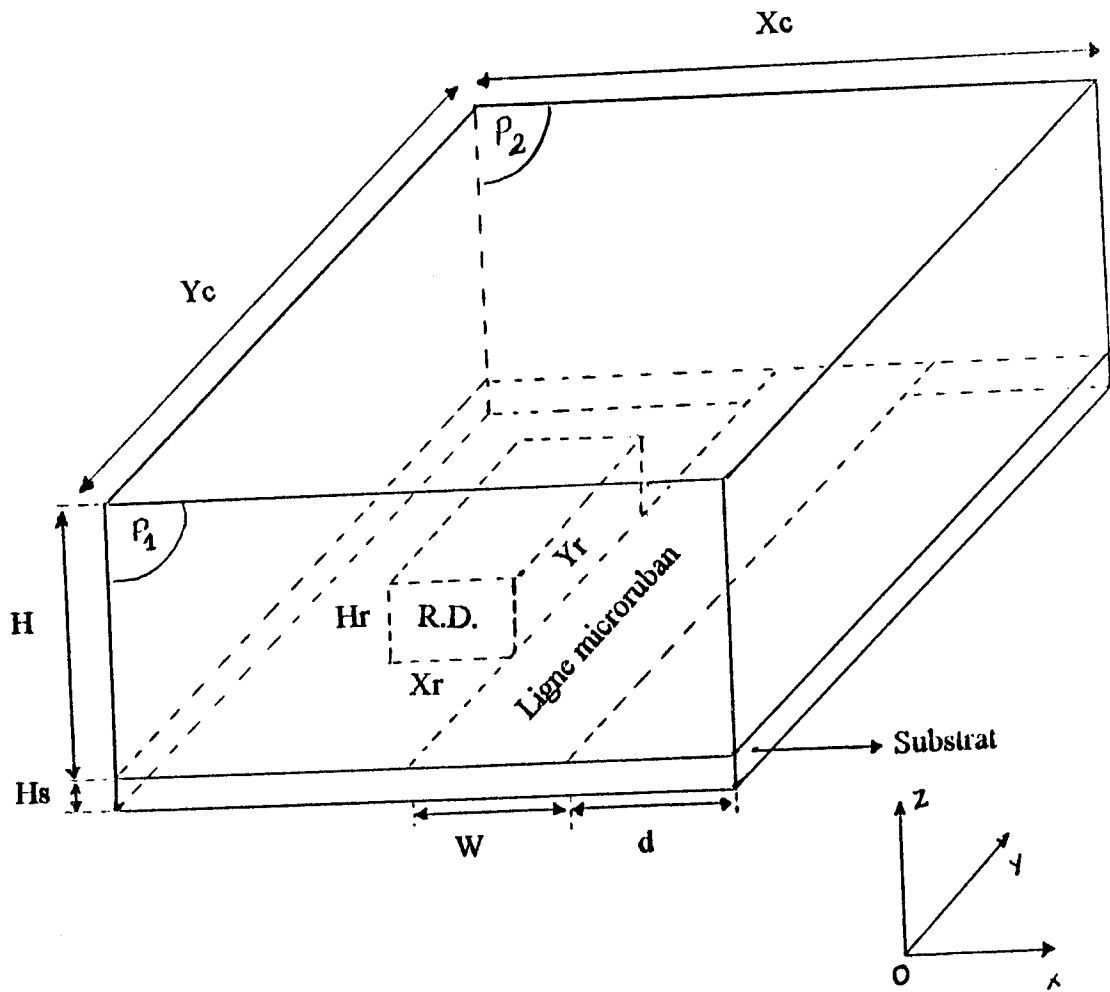
Nous utilisons la MEF-3D pour analyser la structure de la figure (IV.40) qui ne présente aucune symétrie de révolution. Ce dispositif est constitué d'un R.D. parallépipédique de permittivité relative  $\epsilon_r$  ( $\mu_r = 1$ ) reposant sur un substrat de permittivité relative  $\epsilon_s$ . Le R.D. est excité pour une ligne microstrip. L'ensemble des diélectriques est protégé par une cavité métallique parallépipédique.

La caractérisation du mode fondamental  $TE_{0\gamma\delta}$  de cette structure en oscillation libre (absence d'excitation) par la MEF-3D donne:

- une fréquence de résonance:  $f_0 = 77,350$  GHz,
- un facteur de qualité à vide:  $Q_0 = 650$ .

La résolution de ce problème en oscillation forcée conduit à la matrice [S] de cette structure. La variation du module de la fonction de transfert (S12) en fonction de la fréquence, représentant la réponse fréquentielle de ce filtre millimétrique stop-bande est illustrée sur la figure (IV.41). Le décalage observé entre la fréquence  $f_0$  (oscillation libre) et celui du pic de résonance de la figure (IV.41) est dû à la précision de la méthode numérique.





Structure d'un filtre à R.D. parallépipédique

figure IV-40

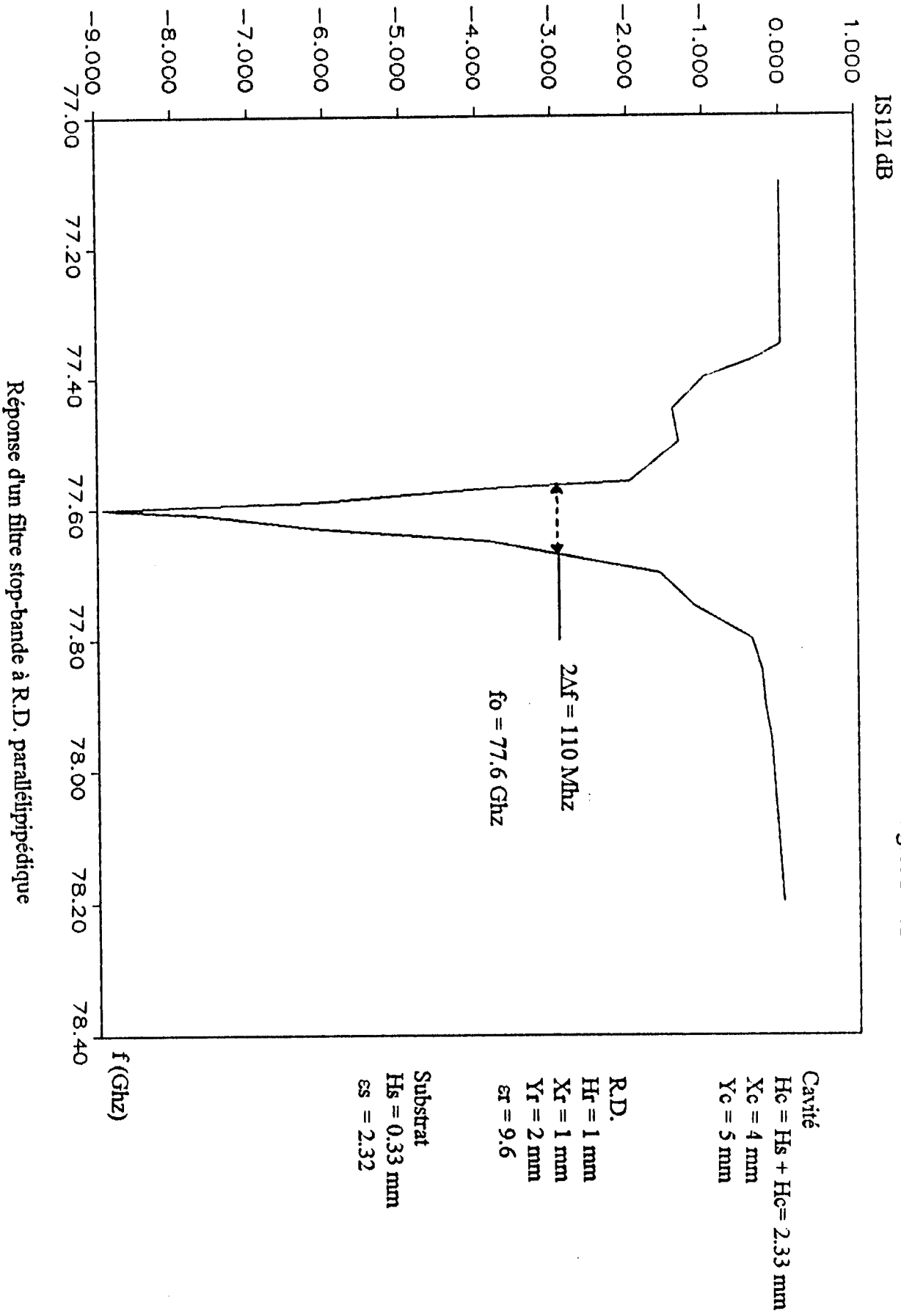


Figure IV-41

#### IV.4.2. ETUDE DU R.D. MILLIMETRIQUE A WHISPERING GALLERY ("W.G") MODES [5], [48]

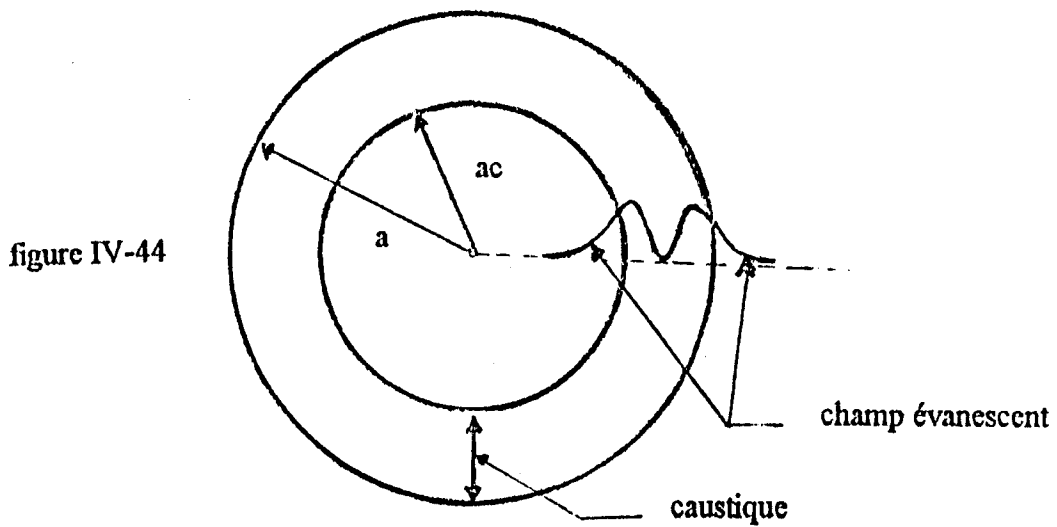
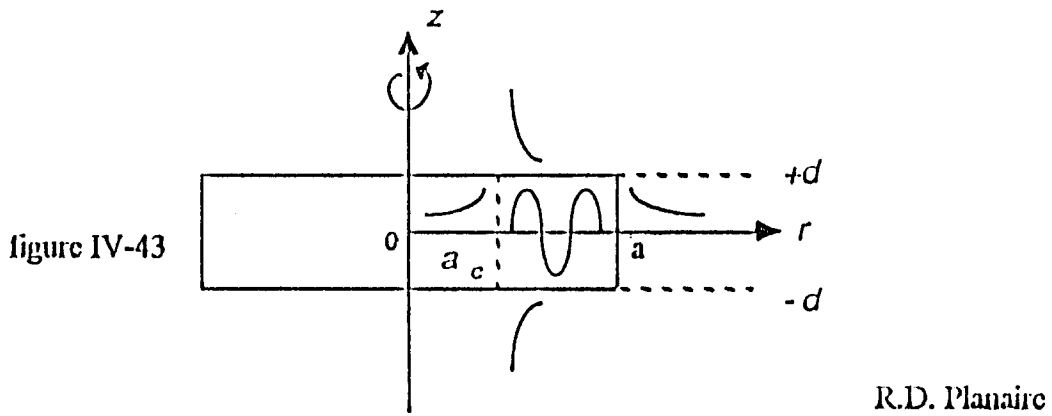
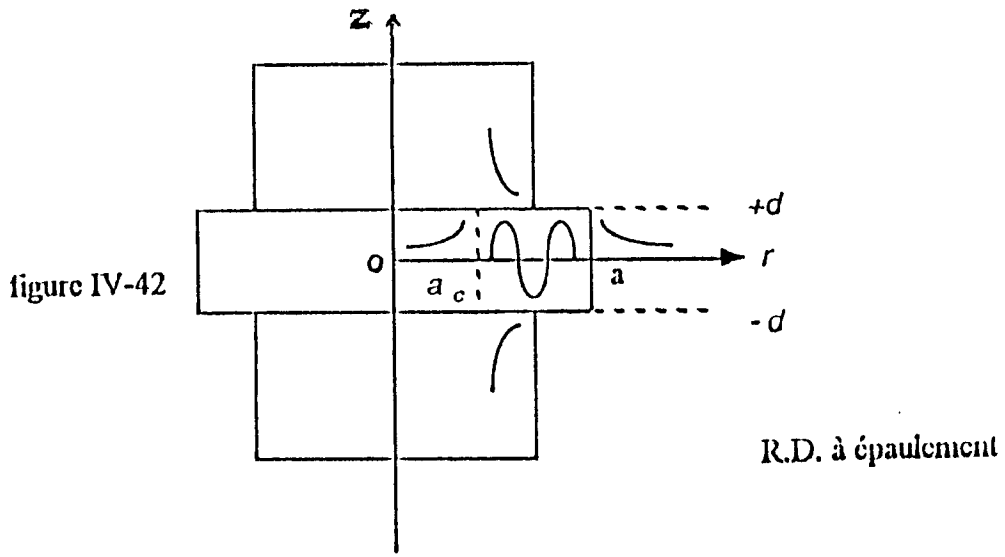
##### IV.4.2.1. CARACTERISTIQUES FONDAMENTALES D'UN R.D. A W.G. MODES a. HISTORIQUE

C'est Lord Rayleigh qui le premier, observa le phénomène de "Whispering Gallery", en s'intéressant à la propagation des ondes acoustiques. Il s'était aperçu que les vibrations sonores ont tendance à se propager le long d'une surface concave [49].

Ensuite J. A. Arnaud [50] a eu l'idée d'étudier ces modes dans les R.D. cylindriques à l'épaulement (figure (IV.42)) et montre que l'onde électromagnétique se propage dans la direction azimutale et qu'elle se confine sur une surface fictive appelée caustique (figure (IV.44)).

Notons également qu'une pastille diélectrique [53], [54], [55] appelée résonateur diélectrique planaire (R.D.P.) (figure (IV.43)), plus facilement usinable que le résonateur diélectrique à épaulement propage des W.G. modes. L'utilisation des R.D.P. est particulièrement intéressante dans la bande millimétrique pour des systèmes conçus en technologie monolithique ou hybride.





Présentation de la caustique

Allure du champ d'un W.G. mode





### b. CLASSIFICATION DES MODES

De façon générale, les Whispering Gallery (W.G.) modes des R.D. sont classés en deux grandes familles:  $WGE_{nmp}$  et  $WGH_{nmp}$ .

Les modes notés  $WGE_{nmp}$  sont caractérisés par un champ magnétique axial ( $H_z \neq 0$ ) et un champ électrique principalement radial ( $E_r \gg E_\theta$ ). De même les modes  $WGH_{nmp}$  sont caractérisés par un champ magnétique radial prépondérant ( $H_r \gg H_\theta$ ) et un champ électrique axiale ( $E_z \neq 0$ ). La figure (IV.45) montre la direction du champ électrique des modes W.G.E. et W.G.H.. Les entiers  $n$ ,  $m$  et  $p$  représentent respectivement les variations azimutale (suivant  $\theta$ ), radiale (suivant  $r$ ) et longitudinale (suivant  $z$ ) du champ électromagnétique de ces modes.

On s'intéresse dans la suite aux modes  $WGE_{n00}$  et  $WGH_{n00}$  car se sont des modes à champ électromagnétique très confiné dans le R.D. et par conséquent peu perturbé par son environnement.

### c. EXCITATION ET DETECTION DES W.G.E. ET DES W.G.H. [5], [51], [52]

Aux fréquences micro-ondes relativement basses (2-10)GHz, les sondes (ou dipôles) électriques et magnétiques sont très utiles et efficaces pour l'excitation des W.G. modes.

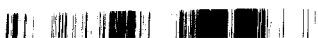
Les modes W.G.E. étant caractérisés par un champ électrique radial dominant, leur excitation et leur détection se font facilement par utilisation de sondes électriques comme le montre la figure (IV.46). De manière similaire, les modes W.G.H. ayant un champ magnétique radial prépondérant, peuvent être excités et détectés par l'utilisation de petites boucles magnétiques, le plan des boucles étant orienté suivant l'axe longitudinal du R.D. de façon qu'elles soient traversées par le champ magnétique des modes qui gravitent à la périphérie du R.D. (figure (IV.47)).

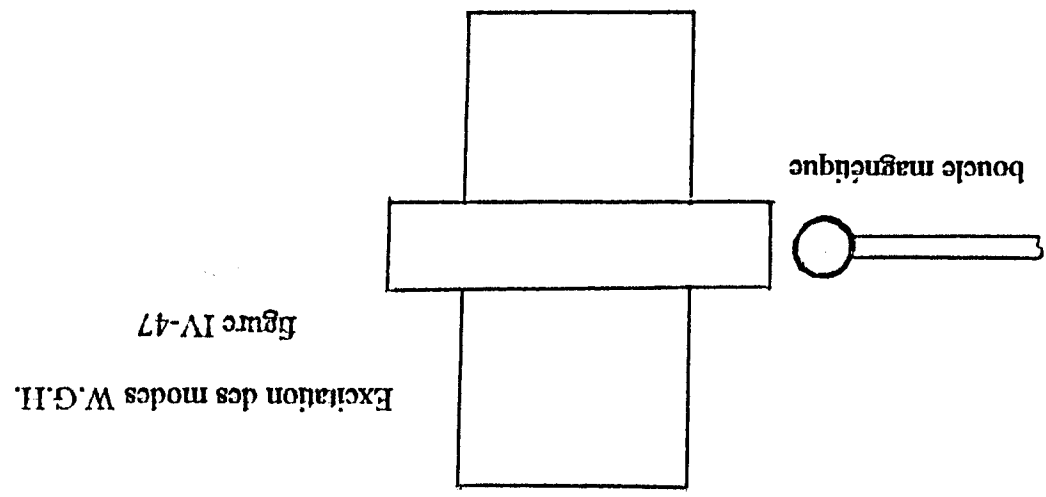
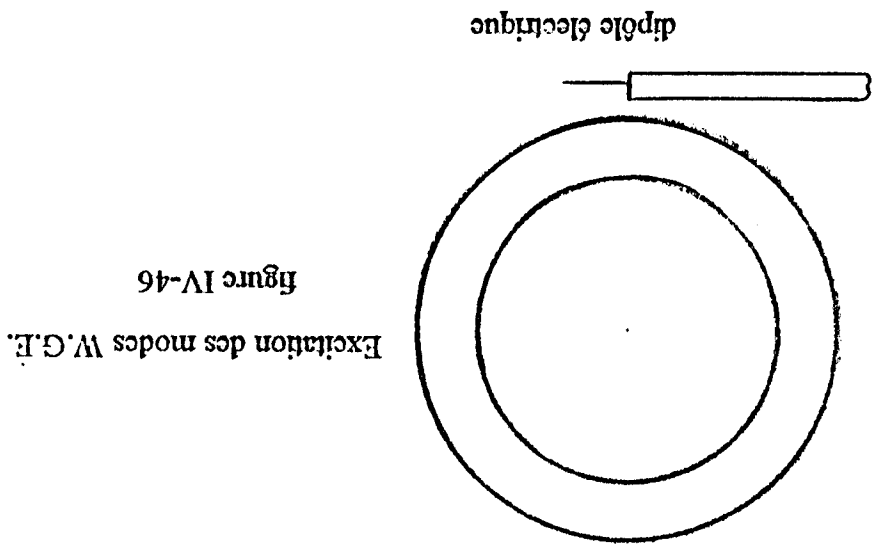
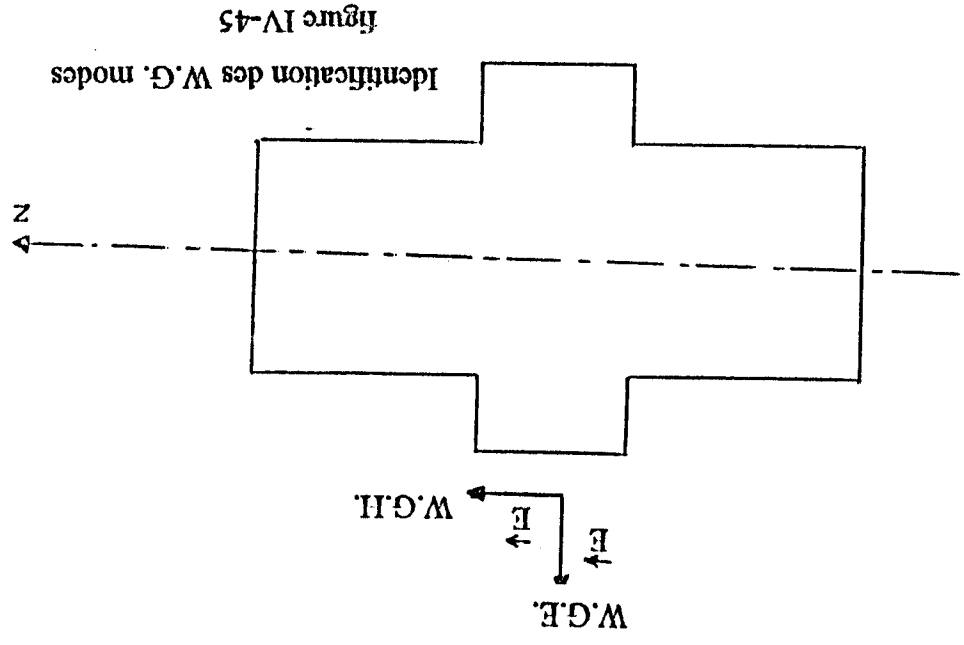
Dans le domaine des ondes millimétriques, les W.G. modes sont excités à l'aide des guides images. Le choix d'un guide image comme ligne d'excitation et de détection est dû au fait que ses lignes de champ représentées sur les figures (IV.48) et (IV.49) sont compatibles avec celles des W.G. modes. En effet, le mode fondamental d'un guide image est un mode hybride possédant essentiellement un champ électrique  $E_y$  et un champ magnétique  $H_x$  qui sont bien adaptés à l'excitation des W.G. modes des R.D.

Pour exciter les W.G.E., le résonateur diélectrique est suspendu au dessus du guide image de telle sorte que le champ magnétique  $H_x$  du guide puisse traverser la section transversale du R.D. comme le montre la figure (IV.50). En utilisant le même principe, on excite les modes W.G.H. lorsqu'on place le R.D. à côté du guide image (figure (IV.51)) de façon que le champ électrique  $E_y$  traverse la section transversale du R.D.

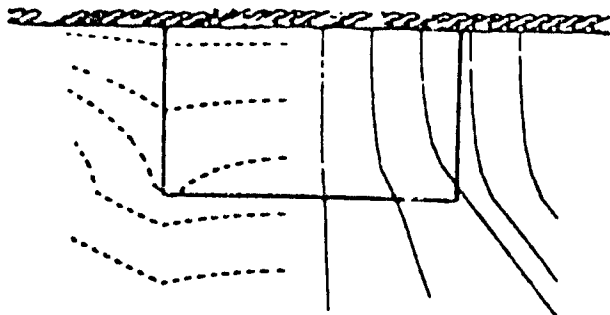
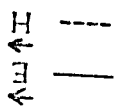
Remarquons également, qu'il faut que la différence entre les permittivités relatives du R.D. et du guide ne soit pas importante, pour qu'il y ait une synchronisation des vitesses de phases entre les W.G. mode et le mode hybride du guide image.

Ainsi, un R.D. ayant une permittivité relative  $\epsilon_r = 9,87$  peut être facilement excité par un guide image en alumine ( $\epsilon'_r = 9,6$ ) que par un guide image en rexolite ( $\epsilon'_r = 2,54$ ).



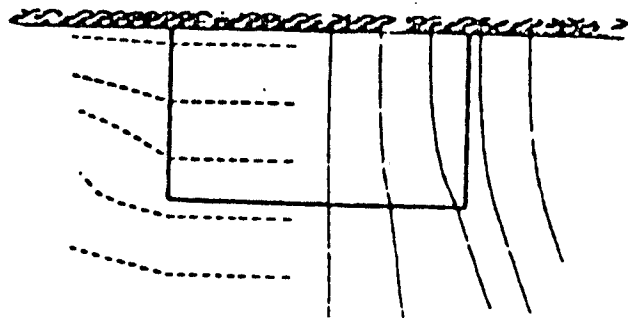


Lignes de champ du 1er mode hybride (  $H_y$  ) du guide image



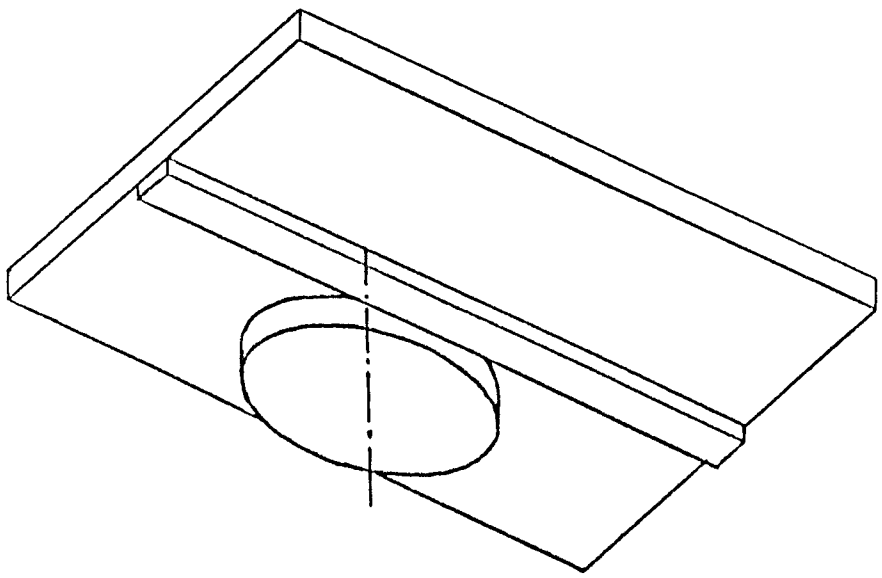
Guide image en alumine:  $\epsilon_r = 9.60$ ;  $2a * b = 2.00 \text{ mm} * 1.00 \text{ mm}$ ;  $f = 35 \text{ GHz}$

figure IV-48

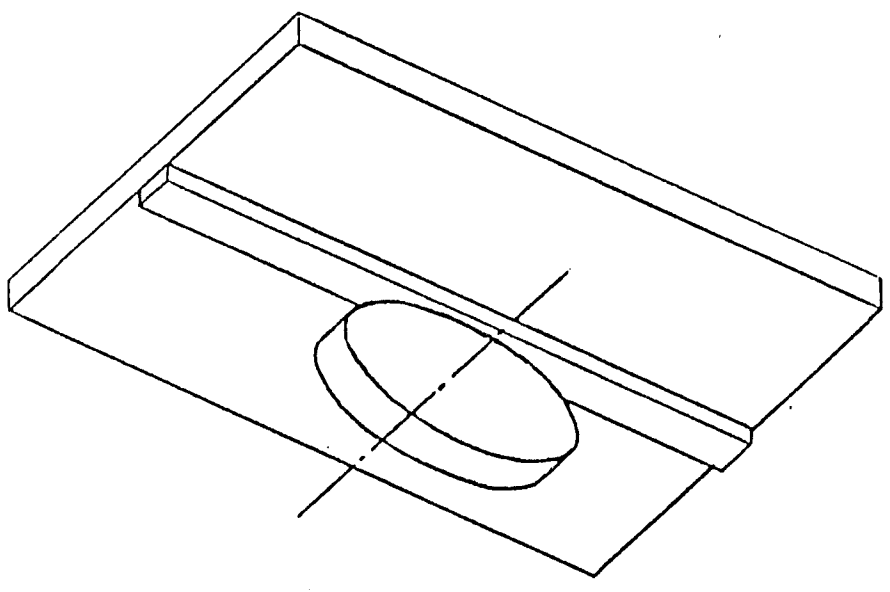


Guide image en rexolite:  $\epsilon_r = 2.54$ ;  $2a * b = 1.50 \text{ mm} * 0.75 \text{ mm}$ ;  $f = 94 \text{ GHz}$

figure IV-49



Excitation des modes W.G.H.  
figure IV-50



Excitation des modes W.G.E.  
figure IV-51



IV.4.2.2. APPLICATION DE LA MEF-2D AU R.D.P.

La méthode des éléments finis en deux dimensions (MEF 2D) exposée dans le chapitre II, permet d'obtenir les fréquences de résonance et les répartitions du champ électromagnétique des W.G. modes d'un R.D. planaire placé sur un substrat comme le montre la figure (IV.52).

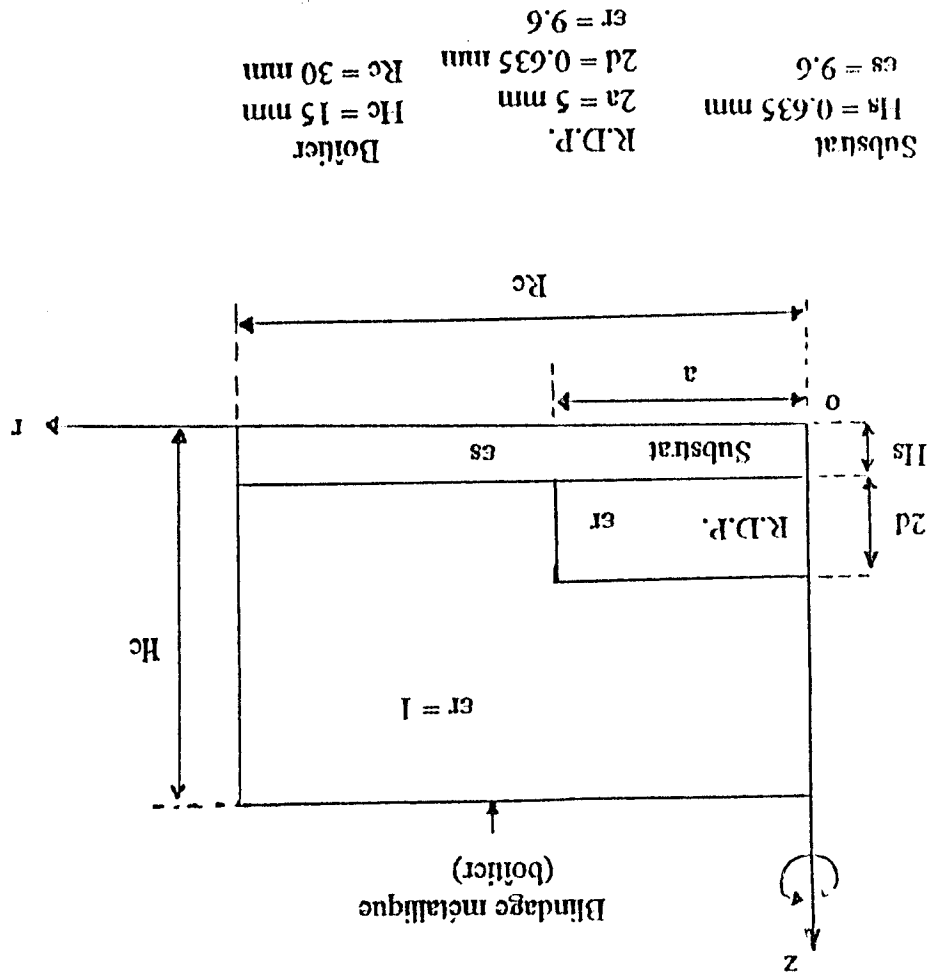


figure IV-52

Les fréquences de résonance de quelques W.G. modes obtenus par la MEF-2D sont comparées aux résultats expérimentaux [5] sur le tableau (IV.3).

TABLÉAU IV.3

W.G. modes	MEF 2D: f (GHz)	EXPER. [5]: f (GHz)	$\Delta f/R(\%)$
WGE <sub>700</sub>	81.863	/	/
WGE <sub>800</sub>	88.520	/	/
WGH <sub>700</sub>	93.537	92.180	1.5
WGH <sub>800</sub>	98.845	97.184	1.7

IV.4.2.3. APPLICATION DES R.D. A W.G. MODES AU FILTRAGE DIRECTIF [5]

L'étude des W.G. modes a pour but de faciliter l'emploi des R.D. dans les systèmes millimétriques. Cette utilisation est possible car le fonctionnement d'un R.D. sur un W.G. mode implique un surdimensionnement de celui-ci.

L'autre avantage des WGE<sub>n00</sub> et WGH<sub>n00</sub> est la propagation de l'onde électromagnétique dans la direction azimutale du R.D., ce qui introduit le phénomène de directivité dans ces circuits.

En exploitant ces caractéristiques, la conception en bande millimétrique de systèmes de télécommunications tels que les filtres directs, les combineurs de puissances [6], peut être actuellement envisagée.

Afin de montrer la faisabilité de tels circuits, nous analysons dans la suite par la MEF-3D la réponse fréquentielle d'un filtre directif utilisant un R.D. à W.G. modes couplé à deux guides images.

a. GENERALITES SUR LES FILTRES DIRECTIFS

Les filtres directs sont des composants possédant des caractéristiques intéressantes telles que:

- ils ont quatre portes (ou accès) (figure (IV.53)) dont l'une est toujours isolée de la porte d'entrée;
- lorsqu'une excitation est faite sur une porte, une partie de l'énergie d'entrée sera récupérée sur une porte avec une réponse de type passe-bande, alors que le reste de l'énergie sera détecté sur une autre porte avec une réponse en fréquence du type stop-bande, comme l'indique la figure (IV.54);
- si toutes les portes sont terminées sur leurs impédances caractéristiques, il n'y aura pas d'énergie réfléchie vers la porte d'entrée. En conséquence, de tels filtres directs ont généralement un taux d'ondes stationnaires (T.O.S.) très faible;
- les caractéristiques précédentes sont vérifiées quelque soit la porte d'entrée choisie;
- la matrice de répartition [S] de cet octopôle réciproque, symétrique, sans pertes et adapté à ses quatre portes est définie par:

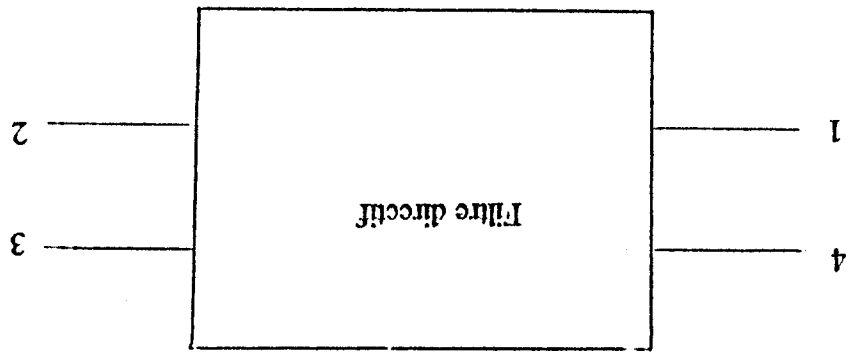


figure IV-53

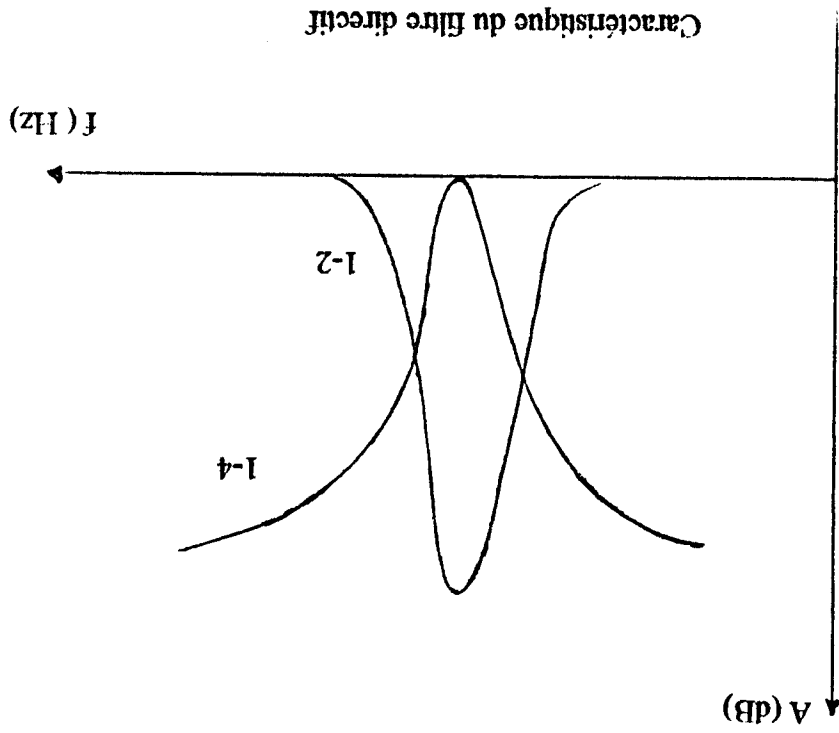


figure IV-54

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S12 & 0 & S14 \\ S12 & 0 & S14 & 0 \\ 0 & S14 & 0 & S12 \\ S14 & 0 & S12 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans la bande des ondes millimétriques, des filtres directs utilisant des guides diélectriques ont été développés [4]. Les résonateurs diélectriques à W.G. modes engendrent une nouvelle solution pour le développement des filtres directs millimétriques à facteur de qualité élevé et à grande stabilité en température. Par ailleurs, l'utilisation des résonateurs diélectriques planaires à W.G. modes permet le développement des filtres directs en technologies hybrides et monolithiques.

#### b. ANALYSE PAR LA MEF-3D D'UN FILTRE DIRECTIF EN BANDE W [56]

Le filtre directif est conçu à l'aide d'un résonateur diélectrique cylindrique planaire (R.D.P.) en alumine ( $\epsilon_r = 9,6$ ) de 5 mm de diamètre et de 0,635 mm de hauteur. Ce résonateur diélectrique est placé entre deux guides images en rexolite de permittivité relative 2,54, d'épaisseur 0,75 mm et de largeur 1,5 mm. L'ensemble de ces composants est placé dans une cavité métallique cubique de 15 mm de côté (figures (IV.55) et (IV.56)).

la caractérisation de cette structure en oscillation forcée pour la MEF-3D, autour de la fréquence de résonance du mode  $WG_{H_{800}}$  du R.D.P. donne la réponse fréquentielle au niveau de chaque accès (figure (IV.57)).



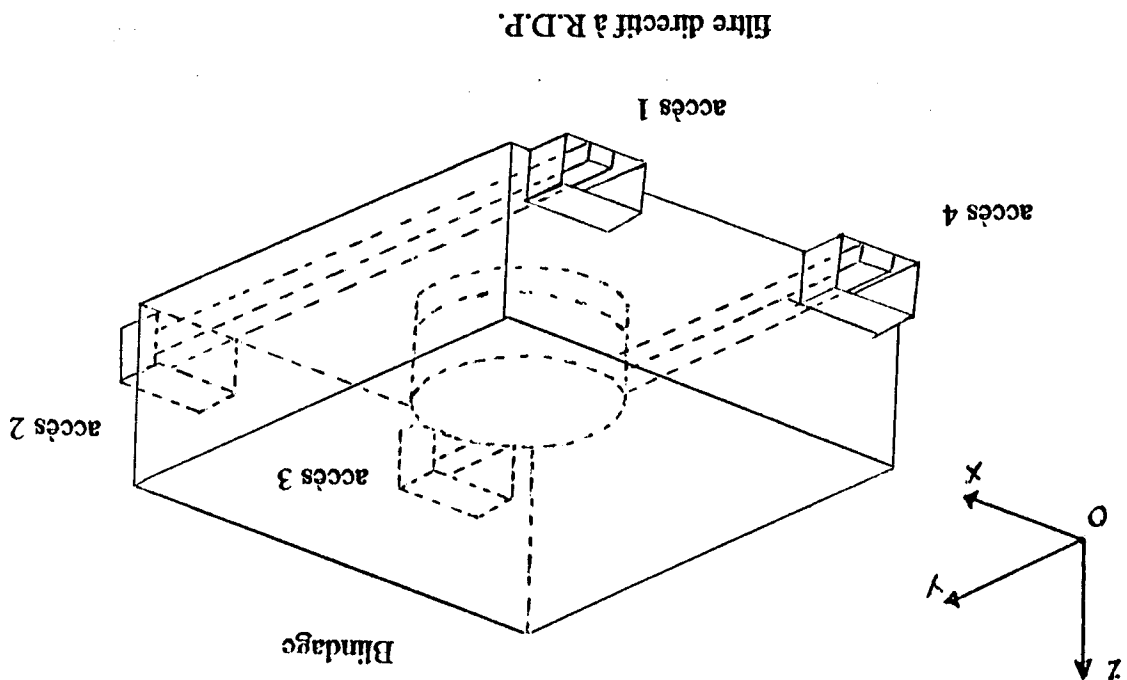


figure IV-55

filtre direct à R.D.P.

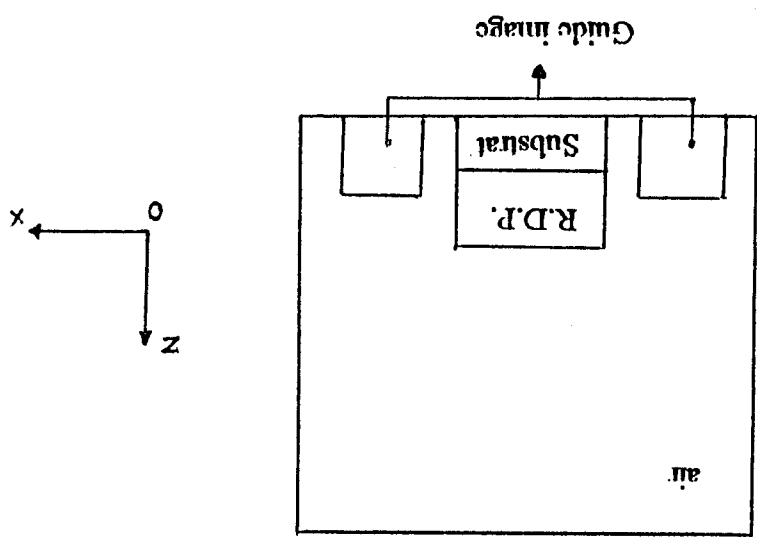


figure IV-56

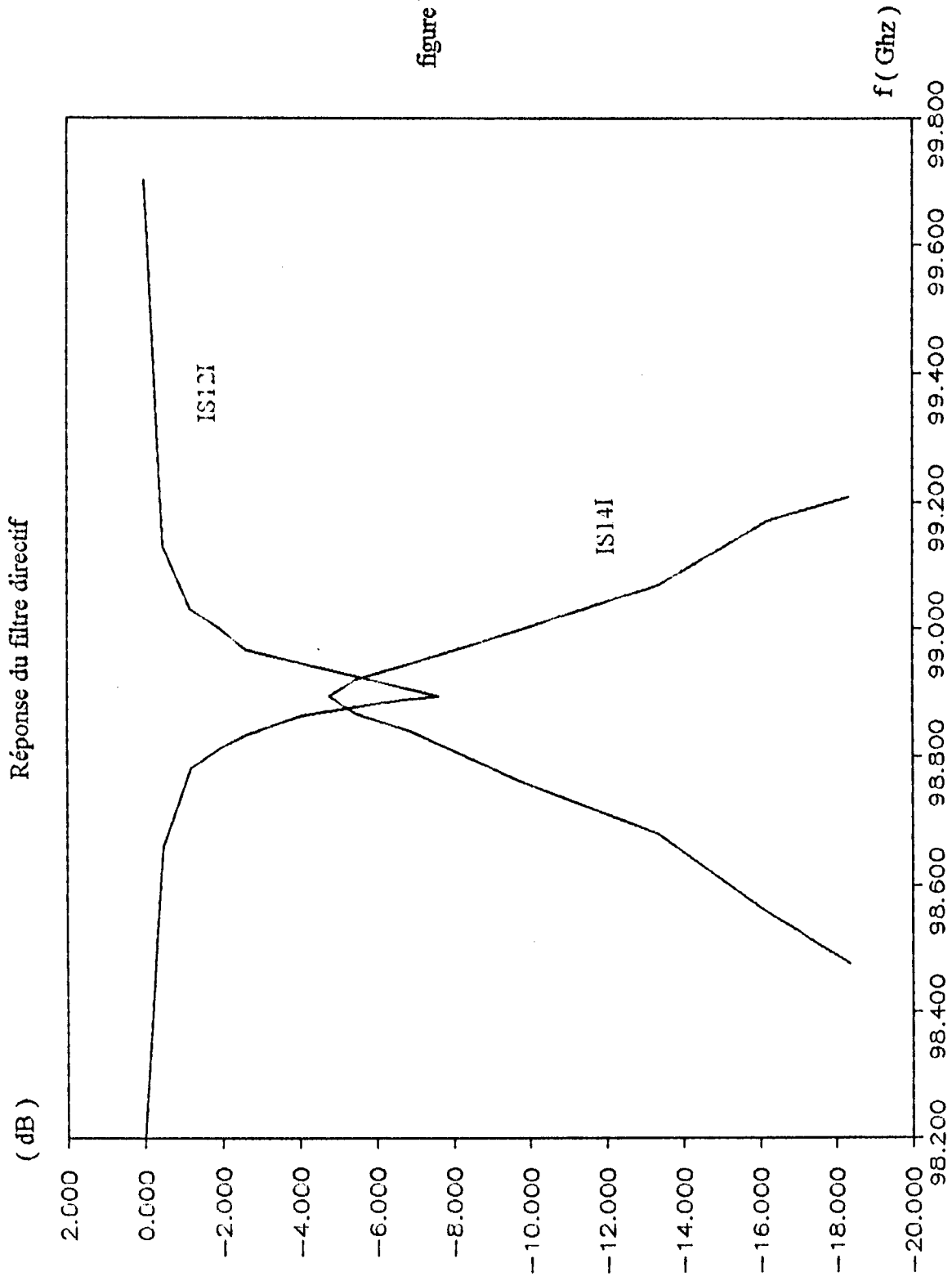


figure IV-57

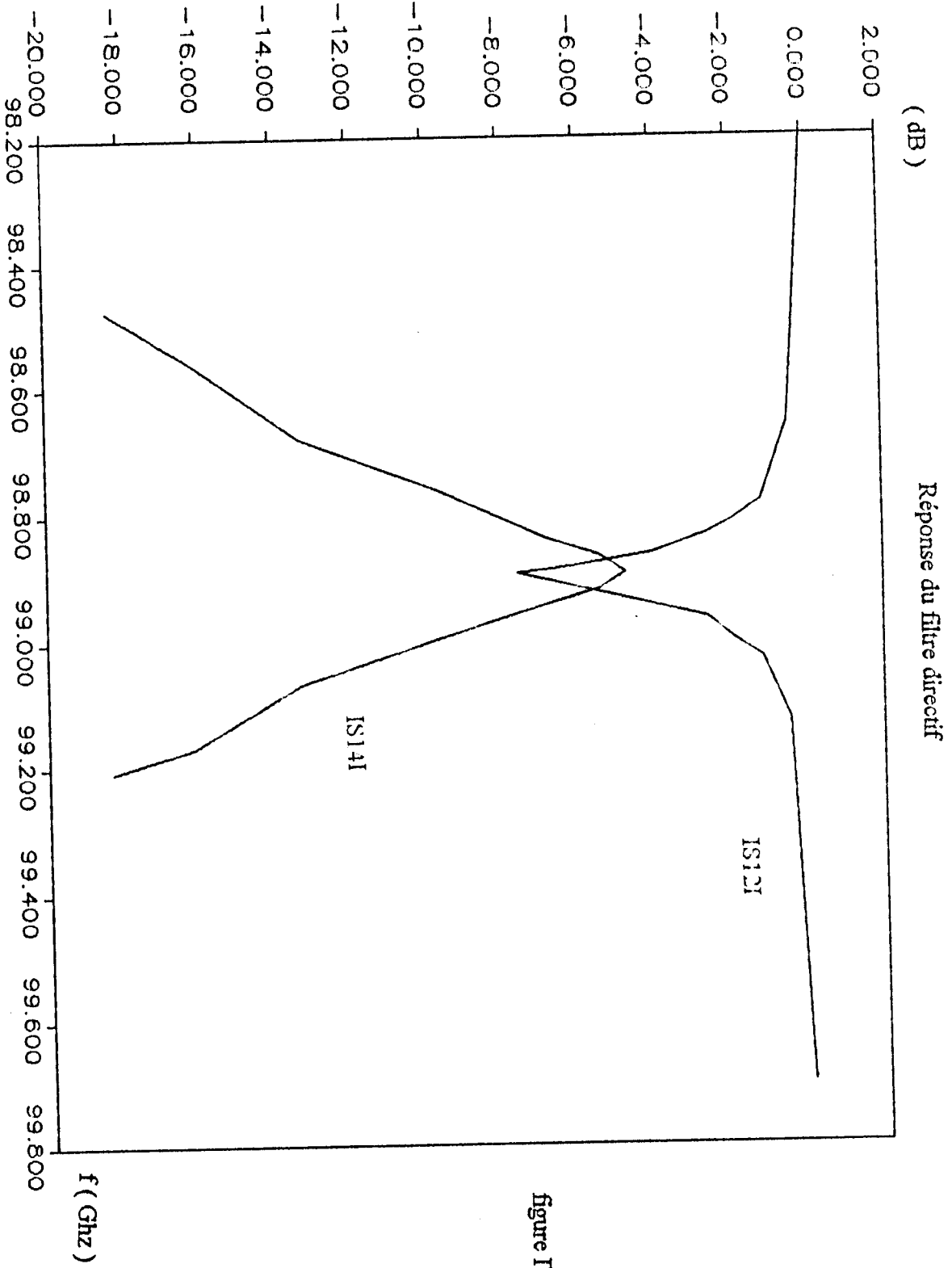


figure IV-57

#### **IV.5. CONCLUSION**

Nous venons de montrer à travers ces exemples, l'application de la MEF 3D à l'analyse des filtres millimétriques passifs micro-ondes à résonateurs diélectriques. Cette méthode reste valable pour l'analyse des filtres à R.D. conventionnels fonctionnant dans des gammes de fréquences plus basses et qui ont été l'objet de nombreuses études [4], [8], [26].

Quant au logiciel MEF-2D développé, il permet l'analyse des structures passives en deux dimensions tels que les éléments de connexions micro-ondes du type ligne coaxiale-ligne coaxiale ou ligne coaxiale-guide cylindrique.

L'inconvénient majeur de la méthode des éléments finis réside dans la disponibilité d'outils informatiques puissants afin de réduire le temps de calcul.

***CONCLUSION GENERALE***



## CONCLUSION GENERALE

L'étude que nous avons menée se caractérise essentiellement par l'utilisation de la méthode des éléments finis en deux dimensions (MEF-2D) et en trois dimensions (MEF-3D) pour l'analyse des paramètres électromagnétiques des structures passives micro-ondes.

Les logiciels développés concernent:

1. L'analyse par la MEF-2D des ondes électromagnétiques se propageant sous les formes de modes TEM, quasi-TEM, TE, TM et HEM dans les lignes de transmission et dans les guides d'ondes sans pertes fonctionnant dans la gamme de fréquences électrostatiques aux fréquences optiques. La caractérisation de chaque mode consiste à déterminer sa fréquence de coupure, son diagramme de dispersion et la distribution de son champ électromagnétique sur la section transversale du guide.
2. L'analyse électromagnétique par la MEF-2D des modes à symétrie de révolution ( $TE_{omp}$ ,  $TM_{omp}$ ) et des modes hybrides  $HEM_{mnp}$ , des structures résonnantes cylindriques sans pertes (cavité métallique homogène, cavité métallique contenant un ou plusieurs résonateurs diélectriques). La caractérisation de chaque mode conduit à la détermination:
  - de sa fréquence de résonance,
  - de la distribution de son champ électromagnétique,
  - de ses pertes et de ses énergies,
  - de son facteur de qualité à vide.
3. Pour se rapprocher des matériaux réels constituant le résonateur diélectrique, une analyse rigoureuse par la MEF-2D des structures résonnantes cylindriques à faibles pertes a été menée. Cette étude concerne la caractérisation des modes  $TE_{omp}$  et  $TM_{omp}$ .
4. Généralement, la présence de la ligne d'excitation à côté des résonateurs diélectriques conventionnels modifie la géométrie de la structure, ainsi il n'y a plus de symétrie de révolution et la MEF-2D ne peut être appliquée. Un logiciel MEF-3D a été conçu pour l'analyse des modes TE, TM et HEM d'une nouvelle génération de résonateurs diélectriques ayant des dimensions raisonnables dans la bande des fréquences millimétriques. Cette nouvelle génération est constituée de:
  - résonateurs diélectriques parallélépipédiques,
  - résonateurs diélectriques cylindriques planaires fonctionnant sur des Whispering Galley modes du type W.G.E. et W.G.H.



En oscillation libre, la MEF-3D permet de caractériser les modes de cette nouvelle génération de composants.

En oscillation forcée, la MEF-3D conduit à la détermination de la matrice de répartition [S] des dispositifs passifs micro-ondes et par conséquent leurs modélisations.

Cette étude nous a permis de montrer la faisabilité de deux filtres millimétriques: l'un stop-bande à base du résonateur diélectrique parallépipédique et l'autre directif à base du résonateur diélectrique planaire.

Pour une variation de la fréquence du signal d'excitation, les logiciels développés permettent d'obtenir avec un maillage convenable, la réponse fréquentielle des dispositifs micro-ondes. Ainsi, l'optimisation de ces programmes conduit à la mise au point d'un simulateur d'analyseur de réseau.

La discrétisation de ces problèmes électromagnétiques par l'élément fini de Lagrange engendre des solutions non physiques. Cette difficulté a été surmontée par l'utilisation de l'élément fini mixte. Par conséquent, les inconvénients majeurs de la méthode des éléments finis résident dans la disponibilité:

- d'un mailleur automatique permettant de subdiviser avec souplesse le domaine d'étude en éléments simples.
- de calculateurs puissants permettant d'augmenter la précision et de réduire le temps de calcul.

En perspectives, les résultats de ce travail ouvrent la voie à de nombreux thèmes de recherche concernant:

- l'étude des matériaux anisotropes tels que les résonateurs à ferrites, les circulateurs, etc...
- l'étude du couplage inter-résonateurs ou entre résonateur et ligne de transmission, en vue de trouver un schéma électronique équivalent du système, ce qui permet ensuite de faire la synthèse de nombreux filtres multipôles;
- les résonateurs diélectriques étant très stables en température, leur analyse en tant qu'élément rayonnant peut être envisagée [57];
- l'application de la méthode des éléments finis aux dispositifs actifs (transistor MESFET, diode...) en vue de concevoir des filtres actifs, des oscillateurs et des amplificateurs;
- la conception de nouveaux résonateurs différents par leurs propriétés et leurs excitation, fonctionnant au delà de 100 Ghz.



***BIBLIOGRAPHIE***





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **P. F. COMBES**: "Composants, dispositifs et circuits actifs en micro-ondes"; Dunod Université, 1985.
- [2] **P.F. COMBES**: "Ondes métriques et centimétriques: guides, circuits passifs et antennes"; Dunod Université, (3ème édition) 1982.
- [3] **R. BADOUAL**: "Les micro-ondes"; édition Masson.
- [4] **D. KAJFEZ, P. GUILLON**: "Dielectric resonators"; Copyright 1986, ARTECH HOUSE.
- [5] **X. H. JIAO**: "Filtres millimétriques à résonateurs diélectriques"; Thèse de doctorat d'électronique, Limoges; Février 1988.
- [6] **D. CROS, PH. AUXEMERY, X. H. JIAO, B. JARRY, P. GUILLON**: "Etudes et expérimentation d'un combineur de puissance à résonateur diélectrique en bandes millimétriques"; J. N. Micro-ondes, Montpellier 1989, pp: 66-69.
- [7] **S.M SAAD**: "Review of numerical methods for the analysis of arbitrarily shaped microwave and optical Dielectric Waveguides"; IEEE; Trans. on MTT., Vol 33; n° 10; October 1985; pp: 894- 899.
- [8] **S. VIGNERON**: "Contribution à l'étude des modes hybrides des résonateurs diélectriques blindés. Application au filtrage micro-ondes"; Thèse de Doctorat, Sept. 1988, Limoges.
- [9] **F. Gardiol**: "Electromagnétisme"; traité d'électricité, vol. III, édition Georgi, 1979.
- [10] **F. Gardiol**: "Hyperfréquences"; traité d'électricité vol. XIII, édition Georgi, 1981.
- [11] **E. RIVIER, R. SARDOS**: "La matrice S: du numérique à l'optique"; édition Masson.
- [12] **M. FEHAM**: "Méthode des éléments finis: Application à l'étude des caractéristiques électromagnétiques des résonateurs diélectriques"; Thèse de Docteur-Ingénieur; Mai 1987, Université de Limoges.

- [13] **M. AUBOURG**: "Méthode des éléments finis appliquée à des problèmes de propagation d'ondes Electromagnétiques guidées"; Thèse de Docteur Es-Sciences, Juillet 1985, Université de Limoges.
- [14] **G. DHATT, G. TOUZOT**: "Une présentation de la méthode des éléments finis"; Collection Université de Compiègne- Maloigne S. A. éditeur; Paris 1984.
- [15] **O. C. ZIENKIEWICZ**: "La méthode des éléments finis"; Traduit de la 3ème édition anglaise, copyright 1979, Mc. Graw- HILL Inc., Paris; pp: 455 - 482.
- [16] **J. C. NEDELEC**: "Mixed finite Elements in  $R^3$ "; Numer. Math., n° 35; pp: 315- 341; 1980.
- [17] **J. C. NEDELEC**: "A new Family of Mixed Finite Elements en  $R^3$ "; Numer. Math., n° 50; pp: 87- 81; 1986.
- [18] **E. MAROUBY**: "Analyse d'éléments de connectique micro-ondes par la méthode des éléments finis"; Thèse de Doctorat de l'Université de Limoges, Avril 1990.
- [19] **A. R. SENOUDI**: "Contribution à l'étude des résonateurs diélectriques cylindriques blindés par la méthode des éléments finis"; Thèse de Magister en Physique-Electronique, Université de Tlemcen, 1991.
- [20] **J. P. WEEB**: "The Finit-Element method for finding modes of dielectric loaded Cavities"; IEEE; Trans.on MTT.; Vol. 33; n° 7; Juiller 1985; pp 635 - 636.
- [21] **K. HAYATA, M. KOSHIBA, M. SUZUKI**: "Vectorial Wave Analysis of Stress-Applied Polarisation- Maintening Optical Fibers by the finite-element method"; Journal of light wave technology; vol. LT- 4; n° 2; Fevrier 1986; pp: 133- 139.
- [22] **M. KOSHIBA, K. HAYATA, M. SUZUKI**: "Finite-Element solution of anisotropic waveguides with arbitrary tensor permittivity"; Journal of light wave technology; vol. 4; n° 2 ; Fevrier 1986; pp: 121-126.
- [23] **A. KONARD**: "On the reduction of the number of spurious modes in the vectoriel Finite-Element solution of three dimensional cavities and waveguides"; IEEE; Trans. on MTT.; Vol. 34, n° 2; Fevrier 1986; pp: 224- 227.



- [24] **A. J. KOBELANSKY , J. P. WEBB:** "Eliminating spurious modes in finite Element waveguide problems by using divergence-free fields"; *Electronic letters*, vol. 22; n° 11; Mai 1986; pp: 569- 570.
- [25] **K. HAYATA, M. KOSHIBA, M. EGOCHI, M. SUZUKI:** "Vectorial Finite Element Method without any Spurious Solutions for Dielectric waveguiding Problems using transverse magnetic Field component"; *IEEE; Trans. on MTT.*; vol. 34, n° 11, Nov. 1986.
- [26] **F. TOUNSI:** "Application de la méthode des éléments finis à l'analyse d'un filtre micro-onde à résonateurs diélectrique en bande L"; Thèse de Doctorat de l'Université de Limoges; Janvier 1990.
- [27] **M. FEHAM:** "Finite-Element analysis of lossy dielectric resonators"; *AMSE periodicals, Modelling, Measurement and Control, A*, Vol - 64, N° 2; 1995; pp: 9- 16.
- [28] **G. H. GOLUB, G. F. VAN LOAN:** "Matrix Computations"; The Johns Hopkins University Press; Baltimore, MARILAND.
- [29] **W. H PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING:** "Numerical Recipes"; Fortran version; Cambridge University Press.
- [30] **C. VASSALO:** "Théorie des guides d'ondes électromagnétiques" Paris, Eyrolles 1985, pp: 1-6.
- [31] **R. E. COLLIN:** "Field Theory of guided waves"; Mc. Graw HILL; 1960; chap 5.
- [32] **J. M. ARNAUD:** "Geometrical theories of wave propagation: a contemporary review"; *IEE review Proceeding*; Vol. 133; n° 2; April 1986; pp: 165- 188.
- [33] **C. N. CAPSALIS:** "A rigorous analysis of a Coaxial to shielded microstrip line transition"; *IEEE; Trans. on MTT.*, vol. 37, n° 7, July 1989.
- [34] **M. FEHAM, A. MAGHFOUR:** "Analyse Electromagnétique des microguides optiques par la méthode des éléments finis"; *International Conference on Modeling and Simulation of Electrical Systems; CMSES 94*, Mai 1994, Skikda (Algérie).
- [35] **K. ZAKI, C. CHEN:** "Intensity and distribution of Hybrid-Mode Fields in Dielectric loaded waveguides"; *IEEE; Trans. on MTT.*, vol. 33, n° 12; Decembre 1985; pp: 1442-1447.



- [36] R. J. COLLIER, R. P. RIRCK: "The Bandwidth of image guide"; IEEE, Trans. on MTT.; Aug 1980; pp: 932 - 935.
- [37] Y. KOBAYASHI, M. KATOH: " Microwave Measurement of Dielectric proprietes of Low-Loss Materials by the dielectric resonator method"; IEEE; Trans. on MTT.; Vol. 33; n° 7; Juillet 1985; pp: 586-592.
- [38] M. FEHAM, A. SENOUDI: "Etude des résonateurs diélectriques par la méthode des éléments finis"; International Conference on Communication, COMCONEL, Caire (EGYPT), Decembre 1991.
- [39] M. FEHAM: "Influence des paramètres électriques et géométriques sur le comportement électromagnétique des résonateurs diélectriques"; Première rencontre Internationale sur les composants des systèmes électroniques, IMCES-1, Sidi Bel- Abbes (Algérie), Novembre 1991.
- [40] M. FEHAM: "Visualisation de l'énergie Electromagnétique des résonateurs diélectriques"; First International Conference on Electronics and Automatic Control; ICEA-92; Mai 1992, TIZI-OUZOU (Algérie).
- [41] M. FEHAM: "Application de la méthode des éléments finis à l'étude des résonateurs diélectriques cylindriques blindés"; Cinquième J.N.Micro-ondes; Juin 1987, Nice (France).
- [42] M. CHAUBET: "Filtres micro-ondes à résonateurs diélectriques"; Thèse de Doctorat, Limoges, Juillet 1987.
- [43] K. ZAKI, C. CHEN: "Loss Mechanisms in dielectric-loaded resonators", IEEE Trans., on MTT., vol.33, n° 12, Decembre 1985, pp: 1448 - 1452.
- [44] K. ZAKI, C. CHEN: "Coupling of non-axially simetric hybrid modes in dielectric resonators"; IEEE; Trans. on MTT., Vol.-35, n° 12, Dec. 1987, pp: 1136 - 1142.
- [45] P.GUILLON, B. BYZERY, M. CHAUBET: "Coupling parameters between a dielectric resonator and a microstrip line"; IEEE Trans., on MTT.; vol. 33, pp: 222 - 226, 1985.



- [46] **B. S. VIRDEE, L. A. TRINOGGA:** "New Scattering Matrix parameter formulas for transmission mode dielectric resonator filter networks"; *Electronic letters*; Nov. 1988; vol. 24, n° 23, pp: 1409 - 1411.
- [47] **A. E. MOUSSOUI, P. P. HOWSON:** "Electronic Tuning of a Dielectric resonator at microwave frequencies", *IEE Proceedings*; 1989.
- [49] **L. RAYLEIGH:** "The Problem of the Whispering Gallery"; *Phil.*; May 20, Dec. 1910, pp: 1001 - 1004.
- [50] **J. ARNAUD:** "Note on the use of Whispering Gallery modes in Communication"; Unpublished Bell labs. memorandum, September 1971.
- [51] **X. H. JIAO, P. GUILLON, L. A. BERMUDEZ, PH. AUXEMERY:** "Whispering Gallery modes of dielectric structures", *IEE. Trans, on MTT.*, vol. 35, n° 12, Dec 1987, pp: 1169 - 1175.
- [52] **J. R. WAIT:** "Electromagnetic Whispering gallery modes in a dielectric rod"; *Radio Science*, vol.2. (New series), n° 9, sep 1967, pp: 1005 - 1017.
- [53] **M. FEHAM:** "Finite Element method applied to electromagnetic parameters of microstrip resonator modes"; *AMSE Periodicals Modeling, Measurement and control, A.*; vol. 63; n° 2, 1995, pp: 5 - 14.
- [54] **X. H. JIAO, P. GUILLON, PH. AUXEMERY, D. CROS:** "Dielectric Resonators suitable for use in planar integrated circuits at short millimeter wavelengths"; *IEEE; Trans. on MTT.*; vol 37, n° 2, fev. 1989.
- [55] **L. A. BERMUDEZ, P. GUILLON:** "Application of variational principle for calculation of resonant frequencies of cylindrical dielectric resonators"; *Electronic Letters*; Vol. 22, n° 1; Janv. 1986; pp: 33-43.
- [56] **S. VERDEYME, PH. AUXEMERY, M. AUBOURG, P. GULLON:** "Three dimensionnal finite element method applied to dielectric resonator divices"; *IEEE MTT-S, International microwave symposium Digest 1989*; pp: 1151 - 1154.



[57] **M. FEHAM:** "Analyse des micro-antennes à symétrie axiale par la méthode des éléments finis"; Quatrième Coloque Maghrébin sur les modèles numériques de l'Ingénieur, Novembre 1993, Alger.

[58] **L. SHARTZ:** "Théorie des distributions"; Herman, Paris 1966.

[59] **F. RODDIER:** "Distributions et transformation de Fourier"; Mc. Graw HILL; Copyright 1978.

[60] **P. LEROUX:** "Contribution à l'étude des résonateurs à ferrite. Application à la caractérisation des échantillons gyromagnétiques"; Thèse de Doctorat, Limoges, November 1987.

