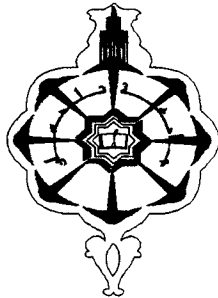


République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur  
Et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAÏD -TLEMCCEN



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de  
Docteur d'Etat en Mathématiques

Par  
Karim YADI

---

**PERTURBATIONS SINGULIERES : APPROCHE  
TOPOLOGIQUE, STABILITE ET APPLICATIONS  
A UN MODELE D'ECOLOGIE DES POPULATIONS**

---

Soutenue le 11 avril 2005 devant la commission d'examen :

**Hocine MOKHTAR-KHARROUBI,**  
**Rachid BEBBOUCHI,**  
**Brahim CHERKI,**  
**Hacen DIB,**  
**Noureddine GHOUALI,**  
**Mustapha LAKRIB,**  
**Tewfik SARI,**

Président, Université Es-Sénia, Oran  
Examinateur, USTHB, Alger  
Examinateur, Université Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen  
Examinateur, Université Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen  
Codirecteur de thèse, Université Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen  
Examinateur, Université Djilali Liabes, Sidi Bel Abbes  
Directeur de thèse, Université de Haute Alsace, Mulhouse

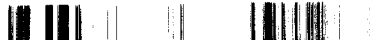


# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Un peu d'histoire . . . . .	3
1.2	Un peu d'exemples . . . . .	4
1.3	Ce que nous développerons . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Perturbations</b>	<b>13</b>
2.1	Perturbations régulières . . . . .	13
2.2	Perturbations singulières . . . . .	15
2.2.1	Théorie de Tykhonov . . . . .	15
2.2.2	Théorie de Pontryagin-Rodygin . . . . .	18
2.2.3	Sur le retard à la bifurcation . . . . .	20
2.3	Perturbations ou déformations ? . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Approche topologique</b>	<b>23</b>
3.1	Approximation pour les temps finis . . . . .	23
3.1.1	Autour de la théorie de Tykhonov . . . . .	23
3.1.2	Autour de la théorie de Pontryagin-Rodygin . . . . .	25
3.2	Equilibre de la dynamique lente . . . . .	29
3.2.1	Extension de la théorie de Tykhonov . . . . .	29
3.2.2	Extension de la théorie de Pontryagin-Rodygin . . . . .	30
3.3	Cycle de la dynamique lente . . . . .	30
3.3.1	Cas de la théorie de Tykhonov . . . . .	30
3.3.2	Cas de la théorie de Pontryagin . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Stabilité et stabilité pratique</b>	<b>33</b>
4.1	Sur la stabilité . . . . .	33
4.1.1	Tykhonov, Pontryagin et la stabilité . . . . .	33
4.1.2	Robustesse de la stabilité exponentielle . . . . .	35
4.1.3	Cas des fonctions de Lyapounov quadratiques . . . . .	38
4.1.4	Stabilité pratique . . . . .	40
4.2	Résultats de stabilité pratique . . . . .	43



4.2.1	Cas de la dynamique lente stationnaire . . . . .	43
4.2.2	Cas de la dynamique lente oscillante . . . . .	44
4.2.3	Sur la phase asymptotique . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Notions d'Analyse Non Standard</b>	<b>49</b>
5.1	Ce qu'est IST . . . . .	49
5.1.1	Un peu d'axiomatique . . . . .	49
5.1.2	Quelques définitions externes . . . . .	51
5.1.3	Principes de permanence . . . . .	52
5.1.4	Deux outils de base . . . . .	53
5.2	Notion externe de perturbation . . . . .	55
5.3	Caractérisation externe de la stabilité . . . . .	56
5.4	S-Stabilité . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Enoncés externes</b>	<b>61</b>
6.1	Approximations pour des temps finis . . . . .	61
6.2	Approximations pour des temps infinis . . . . .	65
6.2.1	Equilibre de la dynamique lente . . . . .	65
6.2.2	Cycle de la dynamique lente . . . . .	66
6.2.3	Sous-ensembles invariants . . . . .	69
6.3	Théorèmes de stabilité pratique . . . . .	70
6.4	Preuve des lemmes . . . . .	74
6.4.1	Preuve du lemme 6.1.3 . . . . .	74
6.4.2	Preuve du lemme 6.1.4 . . . . .	74
6.4.3	Preuve du lemme 6.1.5 . . . . .	75
<b>7</b>	<b>Application à un modèle d'écologie</b>	<b>79</b>
7.1	Présentation du modèle . . . . .	79
7.2	Analyse de la dynamique rapide . . . . .	81
7.3	Application de la théorie de Tykhonov . . . . .	89
7.4	Application de la théorie de Pontryagin-Rodygin . . . . .	91
<b>A</b>	<b>Définitions et théorèmes de stabilité</b>	<b>93</b>
A.1	Bassin d'attraction . . . . .	93
A.2	Stabilité d'un point d'équilibre . . . . .	93
A.3	Stabilité orbitale . . . . .	94
A.4	Stabilité uniforme . . . . .	95
A.5	Théorie de Floquet . . . . .	95
A.6	Fonctions de Lyapounov . . . . .	97



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Un peu d'histoire

Pour qui veut avoir un aperçu sur l'histoire des perturbations singulières, on recommande l'annexe du livre *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations* de O'Malley, Jr [43]. Cela dit, nous tenons à signaler quelques dates importantes. La première est celle du début historique des perturbations singulières qui remonterait à 1904, quand L. Prandtl [46] a présenté un travail dans le domaine de la dynamique des fluides lors du Troisième Congrès des Mathématiciens à Heidelberg. La deuxième est celle de l'utilisation pour la première fois du terme "perturbation singulière" par K. Friedrichs et son étudiant W. Wasow, en 1946, dans [17]. La troisième est en rapport avec les travaux de Tykhonov [54] et de ses étudiants [56] et à l'apparition du très recommandé livre *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations* de Wasow [58]. Puis, à peu près à la même époque, dans les années 70, s'est développée d'une part l'approche non standard et d'autre part la théorie géométrique. L'approche non standard de la théorie des perturbations d'équations différentielles ordinaires a mis le doigt sur l'existence de solutions canard et a donné un éclairage nouveau aux problèmes de retard à la bifurcation (voir par exemple [57], [32], [3]). L'idée d'utiliser l'Analyse Non Standard dans la théorie des perturbations des équations différentielles s'est développée au sein de l'école Reebienne. L'Analyse Non Standard est aujourd'hui devenue un outil bien établi dans la théorie asymptotique. On peut s'en assurer en regardant la classification mathématique (34E18 2000 MSC). Le fondateur reconnu de la théorie géométrique des perturbations singulières, basée sur la théorie des variétés invariantes, est N. Fenichel [14]. Signalons enfin le développement relativement récent des perturbations singulières dans la théorie de la commande et surtout les travaux de Kokotovic et Khalil [27], [25]. Entre problèmes à valeurs initiales et prob-

lèmes aux limites, équations différentielles ordinaires, aux dérivées partielles ou stochastiques, la variété des problèmes singulièrement perturbés est très étendue.

## 1.2 Un peu d'exemples

Quel sens donne-t-on aux perturbations ? Un problème  $(P_\varepsilon)$ , une équation différentielle ou aux dérivées partielles par exemple, dépendant du paramètre  $\varepsilon$ , peut s'avérer difficile à résoudre. Supposons que l'on est plus à l'aise devant le problème  $(P_{\varepsilon_0})$  obtenu pour une certaine valeur  $\varepsilon_0$  de  $\varepsilon$ . On peut alors espérer en déduire des informations sur d'éventuelles solutions de  $(P_\varepsilon)$  pour des valeurs de  $\varepsilon$  voisines de  $\varepsilon_0$ . Soit en effet  $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$  une (ou la) solution de  $(P_{\varepsilon_0})$  de variable indépendante  $t$ . Existe-t-il une solution  $x_\varepsilon(t)$  de  $(P_\varepsilon)$  qui soit proche de  $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$  pour  $\varepsilon$  proche de  $\varepsilon_0$  ? Si oui, cette approximation a-t-elle lieu pour toutes les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$  est définie ? Pour  $\varepsilon$  proche de  $\varepsilon_0$ , on dit que le problème  $(P_\varepsilon)$  est une *perturbation* du problème  $(P_{\varepsilon_0})$ . Ce dernier est appelé *problème réduit* ou *non perturbé*. Dans la théorie des perturbations d'équations différentielles, le problème  $(P_\varepsilon)$  est une famille d'équations différentielles  $\frac{dx}{dt} = F(x, \varepsilon)$  où  $x$  est dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon$  est dans un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^k$ . La famille  $(P_\varepsilon)$  est alors une *déformation à  $k$  paramètres* de  $(P_{\varepsilon_0})$ , i.e. de  $\frac{dx}{dt} = F(x, \varepsilon_0)$ . Nous dirons un mot dans le chapitre 2 sur cette approche des perturbations en termes de déformation et sur l'introduction d'une topologie permettant de récupérer le sens que le mot perturbation devrait avoir. Lorsque  $(P_\varepsilon)$  dépend agréablement du paramètre  $\varepsilon$ , de sorte que l'on peut appliquer la théorie de dépendance continue par rapport aux paramètres (et éventuellement aux conditions initiales), la littérature parle de *perturbation régulière* : si  $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$  est définie pour  $t \in [0, T]$  avec  $\bar{x}_{\varepsilon_0}(0) = \alpha$ , il existe une solution  $x_\varepsilon(t)$  de  $(P_\varepsilon)$  définie au moins sur  $[0, T]$ , de condition initiale  $\alpha(\varepsilon)$  telle que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} x_\varepsilon(t) = \bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \alpha(\varepsilon) = \alpha$ , la convergence étant uniforme par rapport à  $t$  dans  $[0, T]$ . Nous donnons quelques résultats classiques dans le premier paragraphe du chapitre 2 et nous parlerons du Lemme dit de l'Ombre Courte dans ce même paragraphe mais plus en détail dans le chapitre 5. Ce lemme est un résultat de la théorie non standard des perturbations d'équations différentielles. Comme exemple simple, où le point sur la variable dénote la dérivation par rapport à  $t$ , on perturbe l'équation différentielle

$$\dot{x} + x = 0,$$

de condition initiale 1, donc de solution  $\bar{x}_0(t) = e^{-t}$ , pour obtenir l'équation

$$\dot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0,$$

de condition initiale  $\cos \varepsilon$ . On sait calculer dans cet exemple la solution exacte du problème perturbé, en l'occurrence

$$x_\varepsilon(t) = -\frac{\cos \varepsilon}{\varepsilon \cos \varepsilon - e^t(1 + \varepsilon \cos \varepsilon)}.$$

On a bien

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = \bar{x}_0(t) \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos \varepsilon = 1$$

pour tout  $t \geq 0$ . Quand on veut aller au delà de la première approximation, on cherche une solution du problème perturbé sous forme d'un développement asymptotique formel de puissances de  $\varepsilon$ . Le premier terme sera bien sûr la solution du problème réduit. Pour cette approche, il faut ajouter des conditions de régularité par rapport aux arguments (voir chapitre 2 et [42]). En pratique, le paramètre  $\varepsilon$  représente une quantité physique que le fait de négliger n'influe pas beaucoup sur les résultats.

Si la solution  $x_\varepsilon(t)$  du problème perturbé ( $P_\varepsilon$ ) ne dépend pas continûment du paramètre  $\varepsilon$ , on parle de *perturbation singulière*. La convergence de  $x_\varepsilon(t)$  vers une solution du problème réduit ( $P_{\varepsilon_0}$ ) n'est pas uniforme par rapport à  $t$ . Cette "cassure" se voit généralement sur de très petits intervalles de la variable indépendante  $t$ . Ces intervalles sont appelés *couches limites* ou *libres* selon qu'ils se trouvent aux limites de l'intervalle de définition de la solution du problème réduit ( $P_{\varepsilon_0}$ ) ou à l'intérieur. Voici encore l'exemple simple de l'équation linéaire

$$\varepsilon \dot{x} + x = 1, \quad x_\varepsilon(0) = x_0$$

dont la solution exacte est

$$x_\varepsilon(t) = 1 + (x_0 - 1)e^{-t/\varepsilon},$$

pour  $t \geq 0$ . Le problème réduit, obtenu pour  $\varepsilon = 0$ , est l'équation algébrique  $x = 1$ . Plus généralement, la présence d'un petit paramètre  $\varepsilon$  devant la dérivée du plus grand ordre d'une équation différentielle est un signe probable de perturbation singulière. En posant  $\varepsilon = 0$ , on perd en effet au moins un ordre de dérivation et la définition du problème réduit devient parfois ambiguë vis-à-vis de la condition initiale. Dans l'exemple, la solution du problème réduit ne vérifie la condition initiale que si  $x_0 = 1$ . Si  $x_0 \neq 1$ , la solution exacte ne converge pas uniformément vers la solution du problème réduit quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  puisqu'elle tend vers la fonction discontinue valant  $x_0$  en  $t = 0$  et 1 pour  $t \geq 0$ . Notez que la solution exacte s'écrit comme somme

d'une fonction de  $t$  (ici la fonction constante 1) et d'une fonction du temps dit rapide (stretched time)  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  (ici  $(x_0 - 1)e^{-\tau}$ ). Cette dernière tend vers 0 quand  $\tau \rightarrow +\infty$ . Nous traitons uniquement les cas de perturbations singulières dits de *type couche*. Mais il faut savoir qu'un autre type, dit *séculaire*, concerne le cas où la solution du problème réduit est définie pour tous les temps positifs, mais n'est une bonne approximation d'une solution du problème perturbé que sur un intervalle de temps de longueur de l'ordre de  $k/\varepsilon$ , où  $k$  est une constante non nulle. Le principal outil d'investigation de ce genre de problèmes est la méthode de moyennisation de Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky [28]. Par exemple la solution explicite du problème à valeur initiale

$$\dot{x} = (x + \varepsilon)^2, \quad x(0, \varepsilon) = 0,$$

est donnée par

$$x(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon t} - \varepsilon,$$

pour tout  $t \in [0, 1/\varepsilon[$  tandis que la solution du problème réduit est la solution nulle pour tout  $t \geq 0$ . Certains auteurs ne rangent pas ces problèmes dans la classe des perturbations singulières.

### 1.3 Ce que nous développerons

Précisons dès maintenant qu'une annexe en page 93 est consacrée à quelques définitions et théorèmes classiques se rapportant à la stabilité en général.

Nous portons notre intérêt à une forme particulière de systèmes qui est parfois qualifiée par les théoriciens de la commande de modèle standard des perturbations singulières. Ils sont du type

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{dt} &= F(x, y, \varepsilon), \quad x(0) = \alpha_\varepsilon, \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y, \varepsilon), \quad y(0) = \beta_\varepsilon, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $x$  et  $y$  sont des vecteurs et  $\varepsilon$  est un réel positif suffisamment petit. Les fonctions  $F$ ,  $G$  et les conditions initiales  $\alpha_\varepsilon$  et  $\beta_\varepsilon$  sont continues par rapport à leurs arguments. La multiplication de la dérivée par  $\varepsilon$  met en défaut l'utilisation de la théorie de dépendance continue des solutions par rapport aux paramètres. En effet, en remplaçant  $\varepsilon$  par 0, la première équation du système dégénère en une équation algébrique. Le problème obtenu ne peut pas satisfaire les conditions initiales  $(\alpha_0, \beta_0)$ . Notons au passage que de tels systèmes dits algébro-différentiels ont donné lieu à des études indépendantes et intéressantes en soit comme dans [5], [8] et [9]. Ils sont justement résolus

comme limites de systèmes obtenus en introduisant artificiellement un petit paramètre qu'on fait tendre vers zéro. On ne peut espérer qu'une solution éventuelle du problème (1.1) converge uniformément vers celle supposée connue du problème obtenu pour  $\varepsilon = 0$ . C'est bien un problème de perturbation singulière. L'approche classique pour la description du comportement des solutions de (1.1) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour  $0 \leq t \leq L$ , où  $L$  peut être infini, est celle des *échelles de temps multiples*. Nous adoptons naturellement le vocabulaire de la cinématique où la variable indépendante  $t$  est désormais le temps et  $(x(t), y(t))$  la position d'un mobile dans l'espace de phases à l'instant  $t$ . Dans ce cas, l'échelle est double et on parle de champs ou de systèmes *lents-rapides*. On effectue généralement le changement de l'échelle du temps  $\tau = t/\varepsilon$  (temps rapide) qui transforme le système en

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= F(x, y, \varepsilon), & x(0) &= \alpha_\varepsilon, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \varepsilon G(x, y, \varepsilon), & y(0) &= \beta_\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.2)$$

et où nous conservons les mêmes notations pour les variables. Ce problème est une déformation à un paramètre du système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= F(x, y, 0), & x(0) &= \alpha_0, \\ \frac{dy}{d\tau} &= 0, & y(0) &= \beta_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Relativement à la composante  $y$  qui demeure d'abord proche de sa valeur initiale  $\beta_0$ , la composante  $x$  varie très vite et est approchée par la solution de l'équation dite *de la couche limite*

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, \beta_0, 0), \quad x(0) = \alpha_0.$$

C'est la phase rapide du mouvement. On définit alors l'*équation rapide*<sup>1</sup> par

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, y, 0), \quad (1.4)$$

où la composante  $y$  est considérée comme un paramètre. La théorie des perturbations régulières donne, sous des hypothèses convenables, une approximation des solutions de (1.2) par une solution de (1.3) pour des temps  $\tau$  de l'ordre de 1 seulement, correspondant donc à des temps  $t$  de l'ordre

<sup>1</sup>C'est cette équation qui est appelée parfois *équation de la couche limite*, mais nous réservons cette dernière appellation à l'équation rapide assujettie à une condition initiale (voir aussi la note au bas de la page 9).



de  $\varepsilon$ . Il s'agit de décrire alors la phase lente du système d'origine (1.1) et nous allons voir qu'elle dépend du comportement des solutions de l'équation rapide (1.4).

Une solution de (1.4) pourrait ne pas être bornée quand  $\tau \rightarrow +\infty$ , ou tendre vers un point d'équilibre, ou vers un autre type d'attracteur. Ce comportement dépend naturellement des données initiales. Le Théorème de Tykhonov [54], [59] décrit le comportement limite (quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) du système (1.1) quand les solutions de (1.4) tendent vers un point d'équilibre  $\xi(y)$ , où  $x = \xi(y)$  est une solution de l'équation

$$F(x, y, 0) = 0$$

définissant ce qu'on appelle la *variété lente* de (1.1). Après une transition rapide près de la variété lente, la solution supposée unique du système (1.1) est approchée par la solution supposée unique du *problème réduit* défini par

$$\frac{dy}{dt} = G(\xi(y), y, 0), \quad y(0) = \beta_0.$$

En fait, Tykhonov ne fait dépendre de  $\varepsilon$  ni le second membre du système ni les conditions initiales. Ce résultat était obtenu pour  $F$ ,  $G$  et  $\xi$  continues et avec l'hypothèse de stabilité asymptotique de l'équilibre  $\xi(y)$  uniformément par rapport à  $y$ . Les approximations  $y$  sont données sur des intervalles de temps finis.

Quand les trajectoires de l'équation rapide tendent vers un cycle  $\Gamma_y$  de période  $T(y)$ , le Théorème de Pontryagin-Rodygin [44] décrit le comportement limite du système (1.1). Après une transition rapide près des cycles, la solution supposée unique du problème (1.1) est approchée par la solution supposée unique du système moyennisé

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T(y)} \int_0^{T(y)} G(x^*(\tau, y), y, 0) d\tau, \quad y(0) = \beta_0,$$

où  $x^*(\tau, y)$  est une solution périodique de l'équation rapide (1.4) d'orbite  $\Gamma_y$ . Ce résultat était obtenu pour des champs de vecteurs  $F$  et  $G$  au moins deux fois continûment différentiables, avec l'hypothèse de stabilité asymptotique des cycles pour l'approximation linéaire. Ici aussi, les approximations sont données pour des temps finis.

Une discussion sur l'idée de perturbation comparée à celle de déformation [51] a conduit C. Lobry et al. [33] à étendre le résultat du Théorème de Tykhonov aux systèmes qui se trouvent dans un petit voisinage du problème perturbé. Les auteurs ont considéré pour cela la famille de problèmes de Cauchy

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \quad x(0) = \alpha, \\ \dot{y} &= g(x, y), \quad y(0) = \beta, \end{aligned} \tag{1.5}$$

définis sur l'ensemble

$$\mathcal{T} = \{(\Omega, f, g, \alpha, \beta) : \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n+m}, (\alpha, \beta) \in \Omega, \\ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continues}\}$$

muni d'une topologie convenable. Le problème (1.5) est étudié pour  $\varepsilon$  assez petit et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  suffisamment proche d'un élément  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  de  $\mathcal{T}$  dans le sens de la topologie définie. Lorsque l'équation rapide

$$x' = f_0(x, y) \quad (1.6)$$

admet pour tout  $y$  dans un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^m$  un point d'équilibre  $x = \xi(y)$  asymptotiquement stable uniformément par rapport à  $y$  ( $\xi$  est une fonction continue sur le compact en question), on définit l'équation lente<sup>2</sup> de (1.5) par

$$\dot{y} = g_0(\xi(y), y),$$

et le problème réduit par

$$\dot{y} = g_0(\xi(y), y), y(0) = \beta_0. \quad (1.7)$$

Ce dernier est supposé admettre une solution unique  $\bar{y}(t)$  définie sur un intervalle  $[0, T]$ . Il est montré principalement dans [33] (voir aussi dans le chapitre 3 l'énoncé du théorème 3.1.1, page 25) que, sous des hypothèses convenables, toute solution  $(x(t), y(t))$  du problème (1.5) est définie au moins sur  $[0, T]$  et est approchée par  $(\xi(\bar{y}(t)), \bar{y}(t))$  pour tout  $t \in ]0, T]$ , cette approximation pouvant être prolongée à  $t = 0$  uniquement pour la composante  $y(t)$ . Un phénomène de couche limite s'observe en effet pour  $x(t)$  en  $t = 0$ . L'approximation de la phase rapide est donnée justement par la solution de l'équation de la couche limite

$$x' = f_0(x, \beta_0), x(0) = \alpha_0.$$

Nous proposons de donner une preuve topologique du Théorème de Pontryagin–Rodygin dans le même esprit que [33]. Supposons que l'équation rapide (1.6) du problème (1.5) admet pour tout  $y$  dans un compact une solution  $T(y)$ -périodique  $x^*(\tau, y)$  non triviale orbitalement asymptotiquement stable (i.e. d'orbite un cycle  $\Gamma_y$  asymptotiquement stable) uniformément par rapport à  $y$ . Le problème réduit est défini par

$$\dot{y} = \frac{1}{T(y)} \int_0^{T(y)} g_0(x^*(\tau, y), y) d\tau, y(0) = \beta_0. \quad (1.8)$$

<sup>2</sup>On distinguera ainsi le *problème réduit* de l'*équation lente* même si plus souvent dans la littérature la première expression est utilisée pour les deux.

Si  $\bar{y}(t)$  est la solution unique de (1.8), définie sur  $[0, T]$ , nous montrons (Théorème 3.1.3, page 26, mais aussi [52]) que, sous certaines hypothèses, toute solution  $(x(t), y(t))$  du problème (1.5) est définie au moins sur  $[0, T]$ . La composante  $y(t)$  est approchée par  $\bar{y}(t)$  pour tout  $0 \leq t \leq T$  et la composante  $x(t)$  est très proche du cycle  $\Gamma_{\bar{y}(t)}$  mais pour  $0 < t \leq T$ , puisqu'une couche limite est visible en  $t = 0$ . Plus encore (voir remarque 6.1.6, page 64), la trajectoire de (1.5) oscille autour de  $\Gamma_{\bar{y}(t)}$  pour  $0 < t \leq T$  avec une période proche de  $\varepsilon T(\bar{y}(t))$ . La solution supposée unique de l'équation de la couche limite approxime la phase rapide.

En ajoutant une hypothèse d'existence d'un équilibre asymptotiquement stable des problèmes réduits (1.7) et (1.8), une extension des résultats de Tykhonov et de Pontryagin-Rodygin à un intervalle de temps non borné est obtenue respectivement dans [33] (voir aussi l'énoncé du théorème 3.2.1, page 29) et dans le présent travail (théorème 3.2.2, page 30 ; voir aussi [52]). Si, à la place des équilibres, il existait un autre type d'attracteur ou simplement un ensemble invariant asymptotiquement stable pour (1.7) et (1.8), les solutions du problème perturbé continueraient à "vivre tout le temps". Néanmoins, les approximations précédentes ne seront généralement plus vérifiées pour des temps très grands. C'est le cas dans le paragraphe 4.2.2 où nous donnons les approximations des solutions de (1.5) quand l'équation lente (1.7) ou (1.8) admet un cycle limite stable (théorèmes 3.3.1, page 30 et 3.3.2, page 31).

Considérons le système suivant (exemple 4.1.1, page 33)

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -y^2 x + \varepsilon y. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Les équilibres  $x = y$  de l'équation rapide  $x' = -x + y$  sont (globalement) asymptotiquement stables. L'origine de l'équation lente  $\dot{y} = -y^3$  est aussi (globalement) asymptotiquement stable. Le théorème 3.2.1 affirme que les solutions de (1.9) tendent vers l'origine quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow +\infty$ . Ceci ne signifie pas que l'origine de (1.9) est asymptotiquement stable. En effet, on établit par linéarisation que c'est un point selle pour toute valeur positive de  $\varepsilon$ . De même, soit le système ( $\Sigma$ ) (exemple 4.1.3, page 34)

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y} &= -y^3 x_1^2. \end{aligned}$$

On montre que l'équation rapide

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 + x_1 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 \right)^2 (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ x_2' &= x_1 + x_2 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 \right)^2 (1 - x_1^2 - x_2^2), \end{aligned}$$

admet un cycle non trivial  $\Gamma$  asymptotiquement stable. On montre que l'équation lente s'écrit

$$\dot{y} = -\frac{y^3}{2}.$$

Son origine est asymptotiquement stable. D'après le théorème 3.2.2, les solutions de  $(\Sigma)$  tendent vers  $\Gamma_0 \times \{0\}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow +\infty$ . Cette courbe est pourtant répulsive pour le système  $(\Sigma)$  comme on peut le voir en passant aux coordonnées cylindriques.

Une question naturelle se laisse poser : quelle notion peut-on déduire des limites des deux exemples précédents ? On rappelle dans le paragraphe 4.1, sous des hypothèses de régularité  $C^1$  (champ continûment différentiable), le résultat qui dit que la stabilité exponentielle des équilibres des équations lente et rapide assure la stabilité exponentielle de l'équilibre correspondant du problème singulièrement perturbé. La seule stabilité asymptotique ne suffit pas, à cause de sa non robustesse sous l'effet d'une perturbation. Nous verrons cependant que la stabilité exponentielle des équilibres des dynamiques lente et rapide n'est pas une condition nécessaire pour la stabilité asymptotique de celui correspondant du problème d'origine. Toutefois, dans le sous-paragraphe 4.1.4, nous introduisons la notion de *stabilité pratique* en nous référant d'une part à [34], [35] pour la notion elle-même et d'autre part à [6], [53] pour la terminologie adoptée, initialement, à des problèmes de stabilisabilité des systèmes. Cela consiste à dire grosso modo que si la stabilité de l'origine de l'équation lente et des équilibres de l'équation rapide est asymptotique, l'origine du problème lent-rapide "semble asymptotiquement stable" quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous donnerons dans le paragraphe 4.1.4 les définitions exactes mais pas uniquement pour des systèmes à deux échelles de temps.

Les théorèmes 4.2.1, page 43 et 4.2.2, page 44, sont alors des résultats de stabilité pratique, conséquences des théorèmes 3.2.1 et 3.2.2. Ils affirment à partir de ces derniers que le problème (1.5) admet un point (respectivement une courbe fermée) dans l'espace de phases qui est Pratiquement Asymptotiquement Stable (PAS) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans un sens qu'on aura défini. Nous affirmons dans le théorème 4.2.3, page 45, que (1.5) admet une courbe fermée dans l'espace de phases qui est PAS quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en nous basant sur le résultat du théorème 3.3.1. Enfin, comme conséquence du théorème 3.3.2, le théorème 4.2.5, page 46, met en évidence un tore PAS quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La présentation et les énoncés des résultats sont faits dans le cadre des mathématiques classiques ZFC (Zermelo-Fraenkel, plus axiome du choix). Les preuves seront toutefois données dans le langage IST (*Internal Set Theory*) qui est une approche axiomatique de l'*Analyse Non Standard* de A. Robinson [47] due à E. Nelson [41]. Nous consacrons pour ce faire le chapitre 5 à une brève introduction à l'univers non standard et nous y car-



actériserons les principales notions utilisées dans nos énoncés. De telles nouvelles formulations sont dites *externes*. Le chapitre 6 contient les versions externes de nos résultats qui se réduisent, par un procédé algorithmique élaboré par Nelson, en les résultats énoncés classiquement, dits *internes*. Les preuves y sont intégrées. Nous y établissons en plus des résultats externes de stabilité d'où découleront les théorèmes de stabilité pratique du chapitre 4.

En plus des quelques exemples émaillant ce travail, nous étudions en dernière partie (chapitre 7) un modèle issu de l'écologie des populations, en l'occurrence une chaîne alimentaire à trois niveaux trophiques : la proie, le prédateur et le superprédateur. Les multiplications de la proie et du prédateur y sont du même ordre mais nettement plus élevées que la croissance du superprédateur. Nous obtenons ainsi un système à deux échelles de temps et nous en étudions la dynamique rapide. Nous utilisons enfin la théorie précédente pour décrire l'évolution du superprédateur. Nous justifions au passage des travaux antérieurs [30] où la dynamique du superprédateur n'avait été décrite qu'heuristiquement lorsque le sous-système proie-prédateur présente des oscillations rapides. Des détails supplémentaires sont donnés dans [60].

# Chapitre 2

## Perturbations

### 2.1 Perturbations régulières

Considérons les problèmes à valeurs initiales (problèmes de Cauchy) suivants

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad x(t_0) = \alpha(\varepsilon), \quad (2.1)$$

où  $f$  est une fonction définie et continue sur  $[t_0, t_1] \times U \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $U$  est un ouvert connexe non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Le résultat de dépendance continue des solutions par rapport aux paramètres et aux conditions initiales affirme ceci : si  $f$  est localement lipschitzienne en  $x$  uniformément par rapport à  $t$  et  $\varepsilon$  et si la fonction  $\alpha(\varepsilon)$  est continue, alors la solution  $x(t, \varepsilon)$  de (2.1) “vit au moins aussi longtemps et près” de la solution  $x_0(t)$  du problème

$$\dot{x} = f(t, x, 0), \quad x(t_0) = \alpha(0), \quad (2.2)$$

obtenu en remplaçant  $\varepsilon$  par 0, pourvu que  $\varepsilon$  soit suffisamment petit. En pratique, il s’agit donc de donner une approximation de la solution inconnue  $x(t, \varepsilon)$  de (2.1) par la solution  $x_0(t)$  connue de (2.2), du type convergence uniforme de la première vers la deuxième quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ou, mieux encore, différence des deux d’un certain ordre dépendant de  $\varepsilon$ . L’équation d’origine est ce qu’on appelle le *problème perturbé* et la deuxième le *problème non perturbé* ou *réduit*. Dans ce cadre, (2.1) est une *perturbation régulière* de (2.2). Un résultat aussi connu et englobant le précédent donne des approximations de  $x(t, \varepsilon)$  par des développements de Taylor en  $\varepsilon$ . Plus précisément, nous avons :

**Théorème 2.1.1** [25] *Supposons que :*

1)  *$f$  est continue et possède des dérivées partielles jusqu’à l’ordre  $N + 1$  continues en  $(x, \varepsilon)$ ,*

2)  $\alpha$  et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $N$  sont continues dans  $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ,

3) La solution unique  $x_0(t)$  du problème (2.2) est définie dans l'intervalle  $[t_0, t_1]$  et  $x_0(t) \in U$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ .

Alors, il existe  $\varepsilon^* \in ]0, \varepsilon_0]$  tel que pour tout  $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ , le problème (2.1) admet une unique solution  $x(t, \varepsilon)$ , définie sur  $[t_0, t_1]$  et satisfaisant

$$x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k = O(\varepsilon^N).$$

Les coefficients  $x_k$  sont obtenus en résolvant les équations

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f(t, x_0, 0), \quad x_0(t_0) = \alpha_0 := \alpha(0), \\ \dot{x}_k &= A(t)x_k + g_k(t, x_0(t), \dots, x_{k-1}(t)), \quad x_k(t_0) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

où  $A(t)$  est la jacobienne  $\partial f / \partial x$  évaluée en  $x = x_0(t)$  et  $\varepsilon = 0$ , le terme  $g_k$  est un polynôme en  $x_1, \dots, x_{k-1}$  à coefficients dépendant continûment de  $t$  et de  $x_0(t)$  et les  $\alpha_k$  sont les coefficients du développement de Taylor de  $\alpha(\varepsilon)$ .

Il est clair que pour  $N = 1$  on retrouve le théorème de dépendance continue par rapport aux paramètres et aux conditions initiales. Lorsque  $f$  est analytique par rapport à chacune de ses variables, le théorème dit de Poincaré donne, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \varepsilon^k$  avec convergence uniforme de la série sur  $[t_0, t_1]$ . Toutes ces approximations sont données sur un intervalle de temps fini. En ajoutant une hypothèse de stabilité exponentielle de la solution  $x_0(t)$  de (2.2) définie cette fois pour tout  $t \geq t_0$ , on peut obtenir une approximation sur  $[t_0, +\infty[$ . Plus exactement, nous avons:

**Théorème 2.1.2** [25] *Supposons que :*

1)  $f : [t_0, +\infty[ \times U \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et bornée et qu'elle possède des dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $N + 1$  continues et bornées par rapport à  $(x, \varepsilon)$ ,

2)  $\alpha$  et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $N$  sont continues dans  $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ,

3) Le problème (2.2) possède un point d'équilibre  $x^*$  exponentiellement stable,

Alors, il existe  $\varepsilon^* \in ]0, \varepsilon_0]$  et  $\rho > 0$  tels que pour tout  $|\varepsilon| < \varepsilon^*$  et tout  $\|\alpha(\varepsilon) - x^*\| < \rho$ , le problème (2.1) admet une unique solution  $x(t, \varepsilon)$ , uniformément bornée sur  $[t_0, +\infty[$  et  $x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k$  est de l'ordre de  $\varepsilon^N$  uniformément par rapport à  $t \geq t_0 \geq 0$ .

## 2.2 Perturbations singulières

### 2.2.1 Théorie de Tykhonov

Dans son célèbre papier de 1952, A. N. Tykhonov [54] présente sa théorie sur les systèmes d'équations différentielles contenant de petits paramètres dans la dérivée. Ce sont en l'occurrence des problèmes de Cauchy non linéaires du type lent-rapide comme le système (1.1) mais où les fonctions  $F$  et  $G$  ainsi que les conditions initiales ne dépendent pas explicitement du paramètre  $\varepsilon$ . Nous rappelons ce résultat repris dans le chapitre X du livre de W. Wasow [59], *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. Nous considérons le problème

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{dt} &= F(x, y), \quad x(0, \varepsilon) = \alpha, \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y), \quad y(0, \varepsilon) = \beta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}^m$ . Avec les mêmes notations que dans le sous-paragraphe 1.3 du chapitre 1, on définit l'équation rapide

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, y). \quad (2.4)$$

Le Théorème de Tykhonov sera énoncé moyennant les hypothèses suivantes:  
Hypothèse A : Les fonctions  $F$  et  $G$  sont continues sur une région ouverte  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Hypothèse B : Il existe une fonction continue  $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie pour  $y$  dans un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^m$  d'intérieur non vide et telle que les points  $(\xi(y), y)_{y \in K}$  sont dans  $\Omega$  et  $F(\xi(y), y) = 0$ .

Hypothèse C : La racine  $x = \xi(y)$  de l'équation  $F(x, y) = 0$  est isolée, i.e. il existe un réel  $\delta > 0$  tel que les relations  $y \in K$ ,  $\|x - \xi(y)\| < \delta$  et  $x \neq \xi(y)$  impliquent  $F(x, y) \neq 0$ .

Il est clair que les points  $x = \xi(y)$  sont des positions d'équilibre de l'équation rapide (2.4). Les deux hypothèses suivantes sont essentielles :

Hypothèse D : Pour tout  $y$  dans  $K$ , le point d'équilibre  $x = \xi(y)$  de l'équation rapide (2.4) est asymptotiquement stable.

Hypothèse E : La stabilité asymptotique du point d'équilibre  $x = \xi(y)$  est uniforme par rapport à  $y$  dans  $K$ .

On définit alors le problème réduit associé à (2.3) par

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= G(\xi(y), y), \quad y(0) = \beta, \\ x &= \xi(y). \end{aligned} \quad (2.5)$$



Hypothèse  $F$  : Le problème d'origine (2.3), ainsi que le problème réduit (2.5), admet une solution unique sur l'intervalle  $0 \leq t \leq T$ .

**Théorème 2.2.1 (Tykhonov)** [54] *Supposons satisfaites les hypothèses A à F et soit  $(\alpha, \beta)$  dans le domaine d'attraction de la racine  $x = \xi(y)$ . Alors la solution  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  du problème à valeur initiale (2.3) est liée à la solution  $(x_0(t) = \xi(y_0(t)), y_0(t))$  du problème réduit (2.5) par les limites*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= x_0(t) = \xi(y_0(t)), & 0 < t \leq T_0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= y_0(t), & 0 \leq t \leq T_0. \end{aligned}$$

Ici,  $T_0$  est n'importe quel nombre tel que  $x = \xi(y_0(t))$  satisfait les hypothèses C et D pour  $0 \leq t \leq T_0$ . La convergence est uniforme dans  $[0, T_0]$  pour  $y(t, \varepsilon)$  et dans tout intervalle  $0 < t_1 \leq t \leq T_0$  pour  $x(t, \varepsilon)$ .

Nous avons dans la présentation de ce résultat intentionnellement adopté la rédaction de W. Wasow pour insister sur l'approche historique même si, pour des raisons pratiques, ce dernier a pris  $n = 2$  et  $m = 1$ . Pour être plus précis, il est intéressant de noter que la version originale (en russe) comporte une erreur reprise par Wasow dans l'édition de son livre ([58], 1965) mais corrigée par la suite ([59], 1976). Tykhonov, en effet, a formulé son résultat en n'imposant pas la propriété d'uniformité à la stabilité asymptotique de l'équilibre  $x = \xi(y)$  de (2.4). L'erreur résidait dans l'énoncé et la preuve d'un lemme assurant que le module de stabilité  $\eta$  intervenant dans la définition de la stabilité asymptotique (voir en annexe la définition A.2.1) admet sous les hypothèses du problème une borne inférieure non nulle dans le compact  $K$ . L'exemple simple suivant montre que cela est faux. L'ajout de l'hypothèse E s'est donc imposé (voir la discussion sur ce point par le découvreur de l'erreur, F. Hoppensteadt [20]).

**Exemple 2.2.2** *L'origine du système qui s'écrit, en coordonnées polaires, comme suit*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r(\lambda - r)^2, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

*est un équilibre asymptotiquement stable pour toute valeur du paramètre  $\lambda$  dans le compact  $[0, 1]$ . Pour tout  $\lambda$  dans  $]0, 1]$ , l'origine est le centre du cercle de rayon  $\lambda$ . Ce cercle est l'unique cycle limite de l'équation et il est instable de l'intérieur et stable de l'extérieur. Le bassin d'attraction de  $(0, 0)$  est le disque ouvert  $D_\lambda$  formé par ces cycles. Si on suppose qu'il existe un module de stabilité  $\eta$  indépendant de  $\lambda$  qui réalise la définition A.2.1, le disque centré en l'origine et de rayon  $\eta$  devrait se trouver dans tous les disques  $D_\lambda$ . Ceci est absurde quand on sait que les  $D_\lambda$  tendent vers l'origine quand  $\lambda \rightarrow 0$ .*



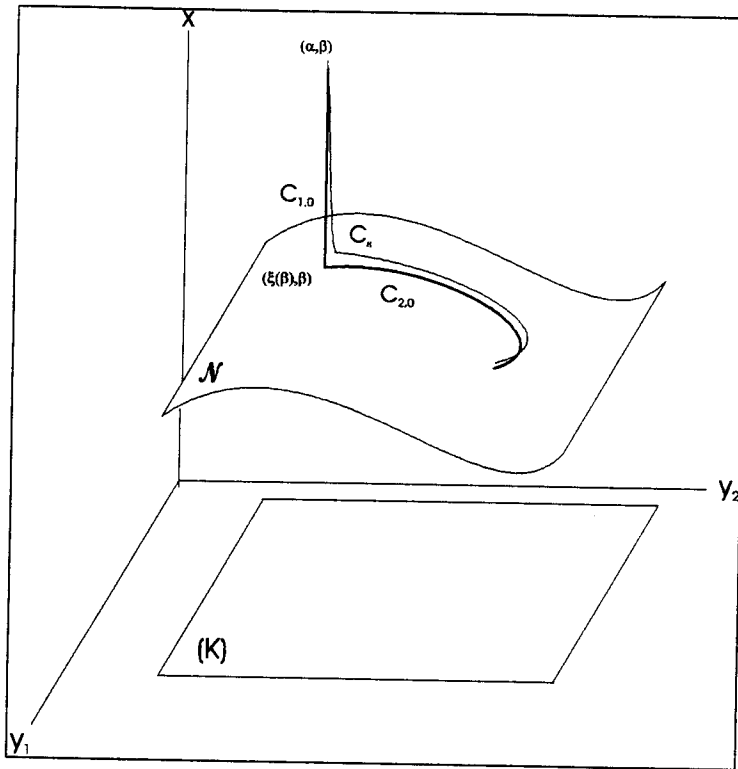


Figure 2.1: Schématisation du résultat du Théorème de Tykhonov dans le cas  $n = 1$  et  $m = 2$ .

L'équation de la couche limite est donnée par

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, \beta), \quad x(0) = \alpha. \quad (2.6)$$

Le théorème dit principalement que la trajectoire  $C_\varepsilon$  dans l'espace  $(x, y)$  du problème d'origine tend uniformément, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers une courbe  $C_0$  formée de deux arcs contigus  $C_{0,1}$  et  $C_{0,2}$  correspondant respectivement à la trajectoire de l'équation de la couche limite (2.6) (phase rapide) et à la trajectoire du problème réduit (2.5) (phase lente). Cette dernière est relevée sur la variété  $\mathcal{N}$  décrite par les points  $(\xi(y), y)$  pour  $y$  dans  $K$ , que nous appellerons *variété lente* du problème (voir figure 2.1).

Il existe des versions ultérieures du théorème cité, utilisant des techniques différentes, comme les fonctions de Lyapounov, demandant donc plus de régularité pour les seconds membres du système étudié (voir [20], [25]). Dans cette dernière référence, par exemple, l'auteur impose en plus la stabilité exponentielle des équilibres de la dynamique rapide (Théorème 9.1, page 361).

**Remarque 2.2.3** Ni le papier de Tykhonov, ni le livre de Wasow ne traitent le cas de la convergence des solutions du problème d'origine sur un intervalle de temps infini. Hoppensteadt s'y attela dans une série de papiers ([19], [21], [22], [23]) et établit, sous des conditions de régularité plus restrictives, que les résultats du Théorème de Tykhonov sont valables pour tous les temps  $t \geq 0$  sous l'hypothèse que le problème réduit admet un équilibre asymptotiquement stable. Hoppensteadt a traité aussi le cas non autonome. Nous trouvons un résultat analogue dans le livre de Khalil ([25], Théorème 9.4, page 384) usant là aussi de fonctions de Lyapounov mais imposant à la stabilité des équilibres des deux dynamiques lente et rapide d'être exponentielle. Nous rappellerons un résultat plus 'topologique' dans le chapitre 3.

## 2.2.2 Théorie de Pontryagin–Rodygin

Les trajectoires de l'équation rapide peuvent aussi tendre vers des cycles. Cette configuration a été examinée par L. S. Pontryagin et L. V. Rodygin dans [44]. Nous reportons ici leur résultat en reconsidérant le système (2.3).

Hypothèse 1:  $F$  et  $G$  sont deux fonctions deux fois continûment différentiables sur une région ouverte  $\Omega$  de l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Soit  $K$  la projection de  $\Omega$  sur  $\mathbb{R}^m$ .

Hypothèse 2: Pour tout  $y$  dans  $K$ , l'équation rapide (2.4) admet une solution périodique  $x^*(\tau, y)$ , de période  $T(y)$ , telle que les multiplicateurs de l'équation variationnelle correspondante sont de modules inférieurs à l'unité, avec une seule exception.

L'orbite  $\Gamma_y$  de la solution périodique est donc un cycle exponentiellement stable. En notant par  $\mathcal{E}(y)$  son bassin d'attraction, la région  $\Omega$  est identifiée à la réunion  $\bigcup_{y \in K} (\mathcal{E}(y) \times \{y\})$ .

Hypothèse 3: Il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 < T_1 \leq T(y) \leq T_2$  pour tout  $y$  dans  $K$ .

Les auteurs définissent alors le système moyennisé

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T(y)} \int_0^{T(y)} G(x^*(\tau, y), y) d\tau = \int_0^1 G(X(\phi, y), y) d\phi, \quad (2.7)$$

où  $X(\phi, y) := x^*(T(y)\phi, y)$ . Ce sera l'équation qui régira la phase lente du mouvement. C'est une moyenne sur les cycles. La solution de (2.7) de condition initiale  $\beta$  est notée  $\bar{y}(t)$ . Cette dernière est supposée rester dans  $K$  pour tout  $t$  tel que  $0 \leq t \leq L < \infty$ . Plus précisément, on travaille dans une sous-région compacte  $D$  de  $K$  contenant  $\{\bar{y}(t), 0 \leq t \leq L\}$  entièrement dans son intérieur.

Hypothèse 4:  $\beta \in D$  et  $\alpha \in \mathcal{E}(\beta)$ .



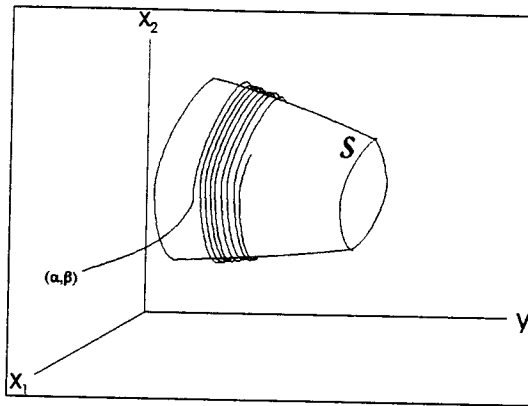


Figure 2.2: Schéma représentant l'enroulement d'une trajectoire autour du cylindre engendré par les cycles selon le Théorème de Pontryagin-Rodygin, pour  $n = 2$  et  $m = 1$ .

**Théorème 2.2.4 (Pontryagin-Rodygin)** [44] Soit  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  la solution du problème d'origine (2.3) et supposons que les hypothèses 1 à 4 sont satisfaites. Il existe alors une fonction  $\phi(t, \varepsilon)$  ("phase"), dépendant régulièrement de  $t$ , telle que si  $\delta > 0$ , alors pour  $\delta \leq t \leq L$

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon \frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{T(\bar{y}(t))} \right| &= O(\varepsilon), \\ |x(t, \varepsilon) - X(\phi(t, \varepsilon), \bar{y}(t))| &= O(\varepsilon), \\ |y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t)| &= O(\varepsilon), \end{aligned}$$

uniformément par rapport à  $t$ .

Le papier de Pontryagin-Rodygin montre que la trajectoire du problème d'origine arrive en un temps de l'ordre de  $\varepsilon$  dans un petit voisinage de la courbe fermée  $\Gamma_\beta \times \{\beta\}$ , la première composante étant approchée par la solution de l'équation de la couche limite (2.6). Ensuite la deuxième composante est proche de la solution  $\bar{y}(t)$  de l'équation moyennisée (2.7) tandis que  $x(t, \varepsilon)$  reste près de  $\Gamma_{\bar{y}(t)}$  en oscillant rapidement autour, avec une période d'environ  $\varepsilon T(\bar{y}(t))$ . Les techniques de la preuve sont basées sur les méthodes de Lyapounov et sur l'existence d'un système de coordonnées le long de l'orbite de  $x^*(\tau, y)$  [18]. Géométriquement, la trajectoire du problème arrive très vite près de la variété ( $\mathcal{S}$ ) engendrée par les cycles  $\Gamma_y$  puis se met à s'enrouler rapidement autour avec une lente déviation de  $y$  (voir figure 2.2).

Nous nous donnons pour but la reformulation de ce résultat dans le cas seulement continu et son extension au cas d'un intervalle de temps non borné (chapitre 3).



### 2.2.3 Sur le retard à la bifurcation

La variable lente  $y$  du système lent-rapide (2.3) peut être considérée comme un paramètre dynamique de bifurcation, si on imagine que le point d'équilibre ou le cycle limite de l'équation rapide change de stabilité quand une certaine valeur de  $y$  est atteinte. Dans son papier devenu une référence, A. I. Neishtadt [40] suppose d'abord que les seconds membres de (2.3), qu'il fait en fait dépendre régulièrement de  $\varepsilon$ , sont au moins deux fois continûment différentiables sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Il se met dans l'une des deux situations où l'équation rapide (2.4) admet un point d'équilibre  $x_y$  ou un cycle limite  $\Gamma_y$  non dégénérés, dépendant continûment de  $y$ . Désignons comme lui ces équilibres et ces cycles par la notation unique  $L_y$ . Les équations lentes respectives sont données par

$$\frac{dy}{dt} = G(\xi(y), y), \quad (2.8)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T(y)} \int_{\Gamma_y} G(x, y) dx. \quad (2.9)$$

Soit  $\bar{y}(t)$  la solution de l'équation régissant le mouvement lent (2.8) ou (2.9) définie sur  $[t_0, t_1]$  et telle que  $\bar{y}(t_0) = y_0$ . Supposons qu'il existe  $t_*$  dans  $]t_0, t_1[$  tel que, pour tout  $t \in [t_0, t_*[$ ,  $L_{\bar{y}(t)}$  est asymptotiquement stable pour l'approximation linéaire et perd sa stabilité pour  $t = t_*$ . Supposons aussi que pour tout  $t$  dans  $]t_0, t_*[$  et pour  $\varepsilon$  assez petit, la trajectoire  $\gamma$  du système (2.3) se trouve dans un petit voisinage de  $L_{\bar{y}(t)} \times \{\bar{y}(t)\}$ . Ainsi, à l'instant  $t_*$ , dans le cas de l'équilibre, il existe une paire de valeurs propres conjuguées imaginaires et 0 n'est pas une valeur propre et, dans le cas du cycle, soit il existe une paire de multiplicateurs conjugués sur le cercle unité, soit  $-1$  est un multiplicateur mais pas 1. Le Théorème de Neishtadt, que nous n'énonçons pas ici, dit que si les seconds membres du système (2.3) sont *analytiquement* prolongeables à un voisinage de  $L_{\bar{y}(t_*)}$  indépendant de  $\varepsilon$ , il y a retard à la bifurcation. Cela signifie que la trajectoire  $\gamma$  continue à évoluer dans un petit voisinage de  $L_{\bar{y}(t)} \times \{\bar{y}(t)\}$  au delà de l'instant  $t_*$  avant de s'en éloigner. L'auteur donne même une estimation du retard. Nous reviendrons sur ce phénomène au sous-paragraphe 3.1.2.

## 2.3 Perturbations ou déformations ?

Intuitivement, lorsqu'on parle de perturbation d'un champ de vecteurs associé à une équation différentielle, on pense à tout autre champ de vecteurs "proche" du champ considéré. Cependant, comme relevé par T. Sari dans [51], dans la terminologie classique, le but de la théorie des perturbations

d'équations différentielles est d'étudier le comportement d'un champ dépendant d'un paramètre, disons  $\varepsilon$ , lorsque celui-ci tend vers une valeur donnée, disons 0. Il serait plus approprié de parler de théorie des déformations d'équations différentielles (ici, déformation à un paramètre). Dans une note en bas de page ([2], page 157), V. I. Arnold avait justement écrit : "(the behaviour of the perturbed problem solutions) takes place in all systems that are close to the original unperturbed system. Consequently, one should simply study neighbourhoods of the unperturbed problem in a suitable function space. However, here and in other problems of perturbation theory, for the sake of mathematical convenience, in the statements of the results of an investigation such as an asymptotic result, we introduce (more or less artificially) a small parameter  $\varepsilon$  and, instead of neighborhoods, we consider one-parameter deformations of the perturbed systems".

L'Analyse Non Standard permet de définir une notion proprement dite de perturbations qui s'interprète classiquement par des "petits" voisinages dans une topologie adéquate de l'espace des champs continus sur un ouvert. Le lemme dit de l'Ombre Courte y est un résultat basique de la théorie des perturbations régulières. Nous en énonçons à titre indicatif une version standard [51]. Nous le faisons pour le cas autonome bien que ce résultat inclue le cas non autonome. Considérons l'ensemble  $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$  des champs de vecteurs  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continus, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

**Théorème 2.3.1 (Lemme de l'Ombre Courte)** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f_0 \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$ . Supposons que le problème de Cauchy*

$$\dot{x} = f_0(x), \quad x(t_0) = \alpha_0,$$

*possède la propriété d'unicité de la solution pour  $\alpha_0 \in U$ . Soit  $x_0 : I \rightarrow U$  sa solution maximale. Alors, pour tout  $\mu > 0$  et tout  $l \in I$ , il existe  $\eta > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $f_0$  tels que, pour tout  $\alpha \in U$  et tout  $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$  vérifiant  $\|\alpha - \alpha_0\| < \eta$  et  $f \in \mathcal{V}$ , toute solution maximale  $x(t)$  du problème*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = \alpha,$$

*est définie au moins sur l'intervalle  $[t_0, l]$  sur lequel elle satisfait  $\|x(t) - x_0(t)\| < \mu$ .*

Nous reviendrons sur un énoncé non standard plus général du Lemme de l'Ombre Courte, où  $f$  et  $f_0$  ne sont pas nécessairement définis sur un même ouvert. Le premier problème du lemme est dit non perturbé (ou réduit) tandis que le deuxième en est une perturbation. Notez dès à présent



que les conditions de régularité y sont moins fortes que celles du théorème classique de dépendance continue par rapport aux conditions initiales et aux paramètres et que la propriété d'unicité des solutions n'est pas imposée au problème perturbé. Ainsi, une solution  $x(t)$  du problème perturbé suit la solution  $x_0(t)$  du problème non perturbé jusqu'à atteinte, par cette dernière, de ses ensembles limites. Supposons que  $x_0(t)$  tende vers un équilibre  $x^*$  asymptotiquement stable. Un résultat affirme alors que l'approximation du lemme de l'ombre courte demeure valide pour tous les temps (on parle du lemme de l'ombre longue). Retenons que ce résultat est, topologiquement parlant, similaire à celui du théorème 2.1.2 pour  $N = 1$ , mais ses hypothèses sont moins fortes.

# Chapitre 3

## Approche topologique

### 3.1 Approximation pour les temps finis

#### 3.1.1 Autour de la théorie de Tykhonov

Comme dans [51], C. Lobry, T. Sari et S. Touhami introduisirent dans [33] une topologie sur l'ensemble des problèmes de Cauchy pour étudier un petit voisinage du problème non perturbé. Plus précisément, ils considérèrent les systèmes lents-rapides de la forme

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \quad x(0) = \alpha, \\ \dot{y} &= g(x, y), \quad y(0) = \beta,\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $(\cdot) = d/dt$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont continues,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et  $(\alpha, \beta) \in \Omega$ . L'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \{(\Omega, f, g, \alpha, \beta) : \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n+m}, (\alpha, \beta) \in \Omega, \\ & f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continues}\}\end{aligned}$$

est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, que nous définissons comme étant la topologie pour laquelle un système de voisinages d'un élément  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  est engendré par les ensembles

$$\begin{aligned}V(D, a) &= \{(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T} : D \subset \Omega, \|f - f_0\|_D < a, \|g - g_0\|_D < a, \\ & \|\alpha - \alpha_0\| < a, \|\beta - \beta_0\| < a\},\end{aligned}$$

où  $D$  est un sous-ensemble compact de  $\Omega_0$  et  $a$  un nombre réel strictement positif. Ici  $\|h\|_D = \sup_{u \in D} \|h(u)\|$ , où  $h$  est définie sur le compact  $D$  à valeurs dans un espace normé. Il s'agit donc d'étudier le système (3.1) avec  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  suffisamment proche d'un élément



$(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  de  $\mathcal{T}$  dans le sens de la topologie définie. L'équation rapide est alors définie par

$$x' = f_0(x, y), \quad (3.2)$$

où  $y$  est un paramètre et  $(\cdot)' = d/d\tau$ , avec  $\tau = t/\varepsilon$ . On notera par la lettre  $T$  les hypothèses des deux prochains théorèmes.

*T1 : L'équation rapide (3.2) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée et pour tout  $y$  dans la région d'intérêt.*

La variété lente du système est définie par l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  vérifiant

$$f_0(x, y) = 0. \quad (3.3)$$

Elle est constituée des points d'équilibre de l'équation rapide (3.2). On suppose alors qu'il existe une variété  $\mathcal{N}$  de dimension  $m$  qui soit contenue dans la variété lente et qui soit le graphe d'une fonction continue sur un compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^m$ . Plus précisément :

*T2 : Il existe une application continue  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Y$  étant un compact dans  $\mathbb{R}^m$  d'intérieur non vide, telle que  $(\xi(y), y) \in \Omega_0$  pour tout  $y \in Y$  et  $\mathcal{N} = \{(x, y) : x = \xi(y), y \in Y\}$ . De plus, pour tout  $y \in Y$ ,  $x = \xi(y)$  est une racine isolée de l'équation (3.3), dans le sens où  $f_0(\xi(y), y) = 0$  et qu'il existe un réel  $\delta > 0$  tel que les relations  $y \in Y$ ,  $\|x - \xi(y)\| < \delta$  et  $x \neq \xi(y)$  impliquent  $f_0(x, y) \neq 0$ .*

La troisième hypothèse est :

*T3 : Pour tout  $y$  dans  $Y$ , l'équilibre  $x = \xi(y)$  de l'équation rapide (3.2) est asymptotiquement stable et son bassin d'attraction est uniforme sur  $Y$ .*

Nous discuterons plus bas le lien existant entre les deux notions de stabilité asymptotique uniforme et de bassin d'attraction uniforme (voir l'annexe). En substituant  $\xi(y)$  à  $x$  dans la deuxième équation du problème de départ (3.1) on obtient l'équation lente

$$\dot{y} = g_0(\xi(y), y), \quad (3.4)$$

qui sera définie dans l'intérieur  $\overset{\circ}{Y}$  du compact  $Y$ .

*T4 : L'équation lente (3.4) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale donnée.*

En adjoignant à l'équation rapide (3.2), de paramètre  $y = \beta_0$ , la condition initiale  $x(0) = \alpha_0$ , on obtient l'équation de la couche limite

$$x' = f_0(x, \beta_0), \quad x(0) = \alpha_0. \quad (3.5)$$

De même que le problème réduit consiste en l'équation lente (3.4) avec la condition initiale  $y(0) = \beta_0$  :

$$\dot{y} = g_0(\xi(y), y), \quad y(0) = \beta_0. \quad (3.6)$$

*T5* : Le point  $\beta_0$  est dans  $\dot{Y}$  et  $\alpha_0$  est dans le bassin d'attraction du point d'équilibre  $x = \xi(\beta_0)$ .

Le premier théorème est alors un résultat de convergence des solutions du problème (3.1) sur un intervalle de temps compact :

**Théorème 3.1.1** [33] Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément de  $\mathcal{T}$  et  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Supposons vérifiées les hypothèses *T1* à *T5*. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  la solution de l'équation de la couche limite (3.5). Soit  $\bar{y}(t)$  la solution du problème réduit (3.6) et  $T$  un nombre réel dans son intervalle positif de définition. Alors, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\varepsilon^* > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de l'élément  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  de  $\mathcal{T}$  (dans le sens de la topologie définie sur  $\mathcal{T}$ ) tels que, pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^*$  et tout  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{V}$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  du problème (3.1) est définie au moins sur  $[0, T]$  et il existe  $\omega > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|x(t) - \xi(\bar{y}(t))\| &< \eta \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq T, \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.2** Formuler le Théorème de Tykhonov sous l'hypothèse de stabilité asymptotique de  $x = \xi(y)$  uniformément par rapport à  $y$  dans  $Y$  comme dans le livre de Wasow [59], équivaut à le formuler sous l'hypothèse de stabilité asymptotique de  $x = \xi(y)$  pour tout  $y \in Y$  avec bassin d'attraction uniforme sur  $Y$ . En effet, on peut montrer d'une part que si  $x = \xi(y)$  est uniformément asymptotiquement stable sur  $Y$ , le bassin d'attraction est uniforme sur  $Y$ . D'autre part, Hoppensteadt [20] a prouvé que si  $Y$  est compact, alors la stabilité asymptotique de  $x = \xi(y)$  pour tout  $y \in Y$ , avec existence d'un bassin d'attraction uniforme sur  $Y$ , implique la stabilité asymptotique uniforme sur  $Y$ .

### 3.1.2 Autour de la théorie de Pontryagin–Rodygin

Lorsque l'équation rapide admet un cycle limite, la théorie de Tykhonov ne convient plus. Le théorème qui suivra "dépouille" le théorème de Pontryagin–Rodygin de certaines hypothèses de différentiabilité et de stabilité exponentielle pour récupérer topologiquement l'essentiel de leur résultat.

Nous conservons sur l'équation rapide l'hypothèse *T1* que nous renommons *P1* et les autres hypothèses seront dénotées par la lettre *P*.

*P1* : Pour tout  $y$ , l'équation rapide (3.2) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.

*P2* : Il existe une famille de solutions  $x^*(\tau, y)$  dépendant continûment de  $y \in G$ , où  $G \subset \mathbb{R}^m$  est un compact d'intérieur non vide, telle que :

•  $x^*(\tau, y)$  est une solution périodique de l'équation rapide (3.2) de période  $T(y) > 0$ .

• L'application  $y \rightarrow T(y)$  est continue.

• Le cycle  $\Gamma_y$  correspondant à la solution périodique  $x^*(\tau, y)$  est asymptotiquement stable et son bassin d'attraction est uniforme sur  $G$ .

De l'hypothèse P2, on déduit que le cycle  $\Gamma_y$  dépend continûment de  $y$  et est localement unique, i.e. il existe un voisinage  $W$  de  $\Gamma_y$  tel que l'équation rapide (3.2) n'admet pas d'autre cycle dans  $W$ . La solution  $x^*(\tau, y)$  est dite orbitalement asymptotiquement stable (voir annexe).

Nous définissons l'équation lente dans l'intérieur  $\overset{\circ}{G}$  de  $G$  par le système moyennisé

$$\dot{y} = \bar{g}_0(y) := \frac{1}{T(y)} \int_0^{T(y)} g_0(x^*(\tau, y), y) d\tau. \quad (3.7)$$

Supposons ce qui suit :

P3 : L'équation lente (3.7) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.

P4 : Le point  $\beta_0$  est dans  $\overset{\circ}{G}$  et  $\alpha_0$  est dans le bassin d'attraction de  $\Gamma_{\beta_0}$ .

Nous nous référons à l'équation de la couche limite comme étant

$$x' = f_0(x, \beta_0), \quad x(0) = \alpha_0, \quad (3.8)$$

et au problème réduit comme étant

$$\dot{y} = \bar{g}_0(y), \quad y(0) = \beta_0. \quad (3.9)$$

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le premier résultat.

**Théorème 3.1.3** [52] Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément de  $\mathcal{T}$ . Supposons vérifiées les hypothèses P1 à P4. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\tilde{y}(t)$  les solutions respectives de (3.8) et (3.9) et  $L \in I$ , où  $I$  est l'intervalle positif de définition de  $\tilde{y}(t)$ . Alors, pour tout  $\eta > 0$ , il existe un  $\varepsilon^* > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  dans  $\mathcal{T}$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^*$  et tout  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  dans  $\mathcal{V}$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie au moins sur  $[0, L]$  et il existe  $\omega > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|y(t) - \tilde{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq t \leq L, \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{\tilde{y}(t)}) &< \eta \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq L. \end{aligned}$$

La distance mentionnée est la distance usuelle dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour prouver ce théorème, il s'agira d'établir notamment trois faits. Le premier est que la trajectoire du problème (3.1) atteint quasi-instantanément à l'échelle du



temps lent  $t$  la variété engendrée par les cycles de l'équation rapide (3.2) paramétrés par  $y$ . Le deuxième est qu'ensuite, tant que  $y$  est assez loin du bord de  $G$ , la trajectoire restera près de cette variété. Le troisième concerne l'approximation de ces deux phases par les solutions respectives des équations rapide et lente. La preuve du théorème 3.1.3 est reportée au chapitre 6.

**Exemple 3.1.4** [52] *L'exemple suivant illustrera le résultat du théorème 3.1.3 mais aussi un phénomène de retard à la bifurcation qui n'est pas couvert par la théorie de Neishtadt. Considérons le système lent-rapide tridimensionnel*

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_1 &= x_2 - yx_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= -x_1 - yx_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ \dot{y} &= x_1^2,\end{aligned}\tag{3.10}$$

d'équation rapide

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 - yx_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ x_2' &= -x_1 - yx_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^3,\end{aligned}\tag{3.11}$$

où  $y$  est un paramètre. En coordonnées polaires ( $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ), l'équation (3.11) s'écrit

$$\begin{aligned}r' &= -ry(1 - r^2)^3, \\ \theta' &= -1.\end{aligned}\tag{3.12}$$

De (3.12) nous voyons que l'équation rapide (3.11) possède un cycle unique non trivial  $\Gamma_y$  pour toute valeur non nulle de  $y$ , qui n'est autre que le cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1. Soit  $x^*(\tau, y) = (\cos \tau, -\sin \tau)$  une solution  $2\pi$ -periodique d'orbite  $\Gamma_y$ . Ces cycles sont asymptotiquement stables pour tout  $y < 0$  et instables pour  $y > 0$ . Si  $y = 0$ , l'origine de (3.11) est un centre. Le théorème de Pontryagin-Rodygin ne s'applique pas car les cycles  $\Gamma_y$  ne sont pas exponentiellement stables. Notons aussi que pour tout  $y < 0$ , le bassin d'attraction de  $\Gamma_y$  est le plan  $(x_1, x_2)$  tout entier privé de l'origine, si bien que la stabilité est uniforme sur tout intervalle  $G$  de  $] -\infty, 0[$ . Soit  $(S)$  le problème de Cauchy consistant en le système (3.10) avec la condition initiale  $(x_1^0, x_2^0, y^0)$  telle que  $y^0 < 0$ . Le problème réduit est défini par

$$\dot{y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau d\tau = \frac{1}{2}, \quad y(0) = y^0.$$

Sa solution est  $\bar{y}(t) = y^0 + t/2$ . D'après le théorème 3.1.3, la solution de (3.10) satisfait  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t)$  tant que  $0 \leq t \leq L < -2y^0$ . La remarque 6.1.6 qui sera donnée dans le chapitre 6 assurera que  $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon))$  reste

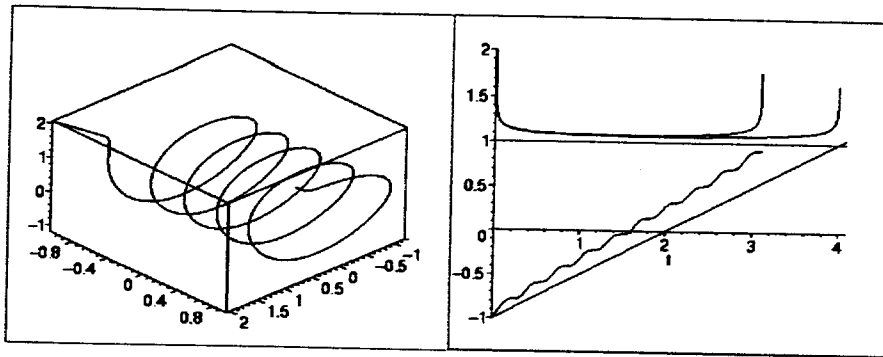


Figure 3.1: Une solution de (3.10) avec  $\varepsilon = 0.1$ ,  $x_1^0 = 2$ ,  $x_2^0 = 2$ ,  $y^0 = -1$  dans l'espace de phase  $(x_1, x_2, y)$ . Les fonctions  $r(t, \varepsilon)$  et  $y(t, \varepsilon)$  sont respectivement approchées par les fonctions  $\bar{r}(t)$  et  $\bar{y}(t)$  même après  $t = 2$  où les cycles deviennent instables.

près du cycle  $\Gamma_{\bar{y}(t)}$ , en oscillant rapidement autour, avec une période approximative de  $2\pi\varepsilon$ , c'est à dire que  $r(t)$  est approchée par la solution de l'équation moyennisée

$$\varepsilon \dot{r} = -r\bar{y}(t)(1 - r^2)^3, \quad r(0) = \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}. \quad (3.13)$$

La solution de (3.13) est notée par  $\bar{r}(t)$ . Elle vérifie la propriété  $\bar{r}(-4y^0 - t) = \bar{r}(t)$ , d'où  $\bar{r}(-4y^0) = \bar{r}(0)$ . Puisque  $\bar{y}(-4y^0) = -y^0$ , si une trajectoire du système moyennisée s'approche des cycles de rayon 1 pour une valeur  $y^0 < 0$ , elle demeure alors proche des cycles tant que  $y^0 < \bar{y}(t) < -y^0$ . Rappelons que, pour  $0 < \bar{y}(t) < -y^0$ , les cycles sont instables : il y a retard à la bifurcation pour le système moyennisé. La relation entrée-sortie près des cycles est définie par  $y^0 \mapsto -y^0$ . D'après le théorème 3.1.3, la solution de (3.10) est approché par la solution moyennisée tant que  $0 \leq t < -2y^0$ , c'est à dire tant que  $y^0 \leq \bar{y}(t) < 0$ . Les figures 3.1 et 3.2 sont des simulations numériques (MAPPLE) montrant que la solution  $(r(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  est approchée par la solution moyennisée  $(\bar{r}(t), \bar{y}(t))$  même au-delà du temps  $t = -2y^0$  où les cycles deviennent instables. Cette approximation a lieu asymptotiquement jusqu'au temps de sortie  $t = -4y_0$  du système moyennisé. L'enroulement de la trajectoire de  $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  autour des cycles  $\Gamma_y$  se poursuit pour des valeurs strictement positives de  $y$ , bien que les cycles soient devenus instables. Ainsi, si  $y$  est considéré comme un paramètre dynamique de bifurcation, le phénomène de retard à la bifurcation relevé par Neishtadt [40] demeure valable quand la stabilité des cycles est asymptotique mais non exponentielle. Cette question mérite d'être examinée de plus près.

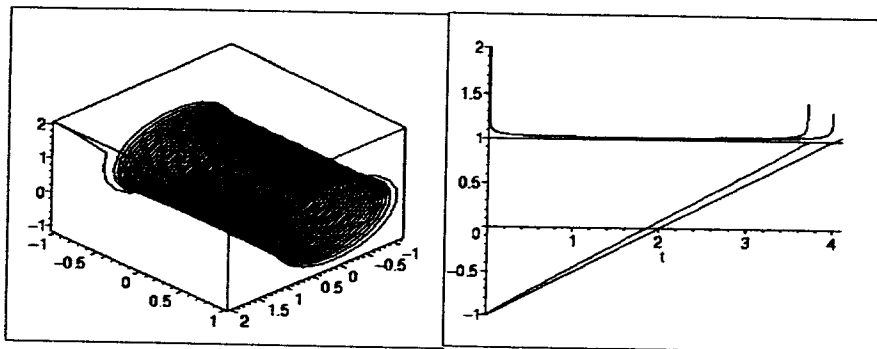


Figure 3.2: Une solution de (3.10) avec  $\varepsilon = 0.01$ ,  $x_1^0 = 2$ ,  $x_2^0 = 2$ ,  $y^0 = -1$  dans l'espace de phase  $(x_1, x_2, y)$ . Les fonctions  $r(t, \varepsilon)$  et  $y(t, \varepsilon)$  sont respectivement approchées par les fonctions  $\bar{r}(t)$  et  $\bar{y}(t)$  asymptotiquement jusqu'au temps de sortie  $t = 4$  du système moyennisé.

## 3.2 Equilibre de la dynamique lente

### 3.2.1 Extension de la théorie de Tykhonov

Revenons aux données du paragraphe 3.1.1. Pour que les solutions de (3.1) "vivent" pour tout  $t \in [0, +\infty)$ , il suffit que l'équation lente (3.4) admette dans  $\dot{Y}$  un ensemble invariant asymptotiquement stable (voir l'annexe). Pour que les approximations du théorème 3.1.1 soient étendues à tous les temps  $t \geq 0$ , il suffit que l'équation lente admette un équilibre asymptotiquement stable. Ajoutons donc cette autre hypothèse avant d'énoncer le résultat :

*T6 : Il existe un point d'équilibre  $y_\infty$  de l'équation lente (3.4) dans  $\dot{Y}$ . Cet équilibre est asymptotiquement stable et  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction.*

**Théorème 3.2.1** [33] Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément de  $\mathcal{T}$  et  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Soit  $y_\infty$  dans  $\dot{Y}$ . Supposons vérifiées les hypothèses T1 à T6. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de l'équation de la couche limite (3.5) et du problème réduit (3.6). Alors, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\varepsilon^* > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de l'élément  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  de  $\mathcal{T}$  tels que, pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^*$  et tout  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{V}$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  du problème (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|x(t) - \xi(\bar{y}(t))\| &< \eta \text{ pour } t \geq \varepsilon\omega, \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } t \geq 0. \end{aligned}$$



### 3.2.2 Extension de la théorie de Pontryagin–Rodygin

Les approximations du théorème 3.1.3 peuvent être obtenues également pour tout  $t \geq 0$  en supposant par exemple qu'il existe dans  $\dot{G}$  un point d'équilibre  $\bar{y}_\infty$  de l'équation lente moyennisée (i.e.  $\bar{g}_0(\bar{y}_\infty) = 0$ ) qui soit asymptotiquement stable.

*P5 : L'équation lente (3.7) admet un point d'équilibre  $\bar{y}_\infty$  dans  $\dot{G}$  qui est asymptotiquement stable et  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction.*

**Théorème 3.2.2** [52] *Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément de  $\mathcal{T}$ . Soit  $\bar{y}_\infty \in \dot{G}$ . Supposons vérifiées les hypothèses P1 à P5. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de (3.8) et (3.9). Alors, pour tout  $\eta > 0$ , il existe un  $\varepsilon^* > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  dans  $\mathcal{T}$  tels que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^*$  et tout  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  dans  $\mathcal{V}$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  tel que*

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } t \geq 0, \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &< \eta \text{ pour } t \geq \varepsilon\omega. \end{aligned}$$

Le théorème 3.2.2 sera démontré dans le chapitre 6.

## 3.3 Cycle de la dynamique lente

Quand l'équation lente (3.4) ou (3.7) possède un attracteur ou un ensemble invariant asymptotiquement stable autre qu'un point d'équilibre, on peut établir que des solutions du problème perturbé (3.1) existent pour tous les temps positifs. Dans ce cas, les approximations des théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 ne sont généralement plus valables pour des temps très grands. Les deux résultats suivants sont aussi établis dans le chapitre 6.

### 3.3.1 Cas de la théorie de Tykhonov

Nous donnons ici la description des solutions de (3.1) quand l'équation lente (3.4) admet une solution périodique orbitalement asymptotiquement stable.

**Théorème 3.3.1** *Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément de  $\mathcal{T}$  et  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Supposons vérifiées les hypothèses T1 à T5. Supposons que l'équation lente (3.4) admet dans  $\dot{Y}$  un cycle  $\Gamma$  asymptotiquement stable et que  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de l'équation de la couche limite (3.5) et du problème réduit (3.6).*

Alors, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\varepsilon^* > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de l'élément  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  de  $\mathcal{T}$  tels que, pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^*$  et tout  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{V}$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  du problème (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  et  $\omega' > 0$  tels que :

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega < \eta, 1/\omega' < \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| < \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|x(t) - \xi(\bar{y}(t))\| < \eta \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'], \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| < \eta \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\ \text{dis}(y(t), \Gamma) < \eta \text{ pour } t \geq \omega', \\ \text{dis}(x(t), \xi(\Gamma)) < \eta \text{ pour } t \geq \omega'. \end{aligned}$$

La même notation  $\text{dis}$  est utilisée ici et dans la suite pour désigner la distance usuelle dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  ou  $\mathbb{R}^{n+m}$ . L'ensemble  $\xi(\Gamma)$  est bien sûr l'image de  $\Gamma$  par l'application continue  $\xi$ .

### 3.3.2 Cas de la théorie de Pontryagin

L'équation moyennisée (3.7) peut aussi avoir un cycle limite. Nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 3.3.2** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément de  $\mathcal{T}$ . Supposons vérifiées les hypothèses P1 à P4. Supposons que l'équation lente (3.7) admet un cycle  $\Lambda$  dans  $\hat{G}$  qui soit asymptotiquement stable et que  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de (3.8) et (3.9). Alors, pour tout  $\eta > 0$ , il existe un  $\varepsilon^* > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  dans  $\mathcal{T}$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^*$  et tout  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  dans  $\mathcal{V}$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  et  $\omega' > 0$  tels que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega < \eta, 1/\omega' < \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| < \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| < \eta \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) < \eta \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'], \\ \text{dis}(y(t), \Lambda) < \eta \text{ pour } t \geq \omega', \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{y(t)}) < \eta \text{ pour } t \geq \omega'. \end{aligned}$$

On peut obtenir des résultats analogues quand la dynamique lente admet un ensemble invariant asymptotiquement stable (voir chapitre 6).





# Chapitre 4

## Stabilité et stabilité pratique

### 4.1 Sur la stabilité

#### 4.1.1 Tykhonov, Pontryagin et la stabilité

Il est connu que la stabilité asymptotique n'est pas robuste sous l'effet de petites perturbations. La stabilité asymptotique, disons de l'origine d'un problème perturbé régulièrement, n'est pas assurée par la stabilité asymptotique de l'origine du problème réduit. Dans [25], cette question est agréablement traitée dans le cas où l'origine est un équilibre des deux problèmes et dans celui où elle est un équilibre du problème réduit uniquement. Qu'en est-il des systèmes lents-rapides ?

Avant de discuter ce point, commençons par examiner les exemples suivants :

**Exemple 4.1.1** *Le système lent-rapide planaire*

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -y^2 x + \varepsilon y,\end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre positif *a* pour équation rapide

$$x' = -x + y.$$

La variété lente est définie par la bissectrice  $x = \xi(y) := y$ . Elle est formée d'équilibres (globalement) asymptotiquement stables de l'équation rapide pour toute valeur de  $y$ . En substituant, dans la deuxième équation du système,  $\xi(y)$  à  $x$  et 0 à  $\varepsilon$ , on obtient l'équation lente

$$\dot{y} = -y^3.$$

L'origine  $y = 0$  de l'équation lente est (globalement) asymptotiquement stable. Le théorème 3.2.1 est applicable au problème pour toute condition initiale  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t) = \frac{|y_0|}{\sqrt{2y_0^2 t + 1}}, \\ \forall t > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \xi(\bar{y}(t)) = \frac{|y_0|}{\sqrt{2y_0^2 t + 1}}, \\ \forall \tau \geq 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon\tau, \varepsilon) &= \tilde{x}(\tau) = (x_0 - y_0)e^{-\tau} + y_0, \end{aligned}$$

où  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  est la solution du système tout entier de condition initiale  $(x_0, y_0)$  et  $\bar{y}(t)$  est la solution de l'équation réduite. Nous donnons la solution  $\tilde{x}(\tau)$  de l'équation de la couche limite à titre indicatif. Sachant qu'enfin  $\bar{y}(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini, on obtient la limite suivante pour la solution du problème d'origine

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (0, 0).$$

Cette dernière limite ne signifie pourtant pas que l'origine du système, qui est ici un point d'équilibre, est asymptotiquement stable, ni même attractive. On vérifie d'ailleurs, par une simple linéarisation, que c'est un point selle pour toute valeur de  $\varepsilon$ .

**Exemple 4.1.2** [35] Le système lent-rapide découplé suivant

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -x^3 + \varepsilon x, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

à pour équation rapide  $x' = -x^3$  et pour équation lente  $\dot{y} = -y$ . L'origine de ces deux équations est asymptotiquement stable et le théorème 3.2.1 nous permet d'écrire que toute solution du problème perturbé tend vers  $(0, 0)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow +\infty$ . Pourtant, l'origine  $(0, 0)$  est instable pour toute valeur de  $\varepsilon > 0$  (linéariser ou examiner juste le signe de  $\dot{x}$ ).

**Exemple 4.1.3** Le système tridimensionnel lent-rapide  $(\Sigma)$  suivant

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y} &= -y^3 x_1^2, \end{aligned}$$

se transforme en coordonnées cylindriques  $(x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, y)$  en

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{r} &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \varepsilon \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{y} &= -r^2 y^3 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

L'équation rapide

$$\begin{aligned} r' &= r(r-1)^2(1-r^2), \\ \theta' &= 1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

admet un cycle limite stable  $\Gamma_y$  correspondant à  $r = 1$  (cercle de centre l'origine et de rayon 1). Son bassin d'attraction est uniforme par rapport à  $y$ , puisque c'est tout le plan  $(x_1, x_2)$  excepté l'origine. Ce cycle correspond par exemple à la solution  $2\pi$ -périodique  $x^*(\tau, y) = (\cos \tau, \sin \tau)$ . L'équation régissant le mouvement lent est donc donnée par

$$\dot{y} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^3 \cos^2 \tau d\tau = -\frac{y^3}{2}. \quad (4.2)$$

L'origine  $y = 0$  en est un équilibre asymptotiquement stable mais sa stabilité n'est pas exponentielle. On peut affirmer grâce au théorème 3.2.2 que pour toute condition initiale  $(x_1^0, x_2^0, y^0)$  de  $(\Sigma)$  autre que l'origine, on a

$$\forall t \geq 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t), \quad \forall t > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis}((x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon)), \Gamma_{\bar{y}(t)}) = 0,$$

où  $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  est la solution du système  $(\Sigma)$  de condition initiale  $(x_1^0, x_2^0, y^0)$  et  $\bar{y}(t)$  est la solution de (4.2) de condition initiale  $y^0$ . Enfin, puisque  $\bar{y}(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} \text{dis}((x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)), \Gamma_0 \times \{0\}) = 0.$$

Cette limite ne dit pas que la courbe fermée  $\Gamma_0 \times \{0\}$  dans l'espace de phases  $\mathbb{R}^3$  est un ensemble asymptotiquement stable. D'ailleurs, pour toute valeur de  $\varepsilon > 0$ , le cylindre formé par les cycles  $\Gamma_y$  est "répulsif" pour le système  $(\Sigma)$ , étant compris entre deux cylindres "attractifs" correspondant à  $r = 1 - \varepsilon$  et  $r = 1 + \varepsilon$ . Nous voulons dire par là que la dynamique rapide réelle du problème, c'est-à-dire le système

$$\begin{aligned} r' &= r(r-1+\varepsilon)(r-1-\varepsilon)(1-r^2), \\ \theta' &= 1, \end{aligned}$$

qui est une perturbation régulière de (4.1), admet pour tout  $y$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  deux cycles limites  $r = 1 - \varepsilon$  et  $r = 1 + \varepsilon$  stables entourant le cycle limite  $\Gamma_y$  instable.

#### 4.1.2 Robustesse de la stabilité exponentielle

En vue d'utiliser les théorèmes de Tykhonov ou de Pontryagin-Rodygin pour des fins de stabilité, on a besoin de résultats plus forts. Dans le théorème qui suit, nous ne faisons dépendre les seconds membres du problème ni du temps  $t$  ni du paramètre  $\varepsilon$ , et ce par souci de simplification. Le cas général se trouve dans la littérature (voir encore [25]).

**Théorème 4.1.4** *Considérons le système*

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{4.3}$$

où  $x$  et  $y$  sont des vecteurs, et supposons que l'origine en est un point d'équilibre. Supposons que l'équation  $f(x, y) = 0$  admette une racine isolée  $x = \xi(y)$  telle que  $\xi(0) = 0$ . Supposons qu'il existe des constantes positives  $r$ ,  $\rho$  et  $\varepsilon_0$  telles que pour tout  $(y, \varepsilon) \in \mathcal{B}_r \times ]0, \varepsilon_0]$ , où  $\mathcal{B}_r$  dénote la boule centrée à l'origine et de rayon  $r$ , les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- Les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $\xi$  sont de classe  $C^1$  pour  $x - \xi(y) \in \mathcal{B}_\rho$ .
- L'origine de l'équation lente

$$\dot{y} = g(\xi(y), y),$$

est exponentiellement stable.

- Le point d'équilibre  $x = \xi(y)$  de l'équation rapide

$$x' = f(x, y),$$

est exponentiellement stable uniformément en  $y$ .

Alors il existe  $\varepsilon^* > 0$  tel que, pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , l'origine du système (4.3) est exponentiellement stable.

**Grandes lignes de la preuve.** Il s'agit d'utiliser les théorèmes réciproques de Lyapounov énoncés en annexe. Ramenons d'abord l'équilibre  $x = \xi(y)$  de l'équation rapide à l'origine, en posant  $z = x - \xi(y)$ . Le système (4.3) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{z} &= f(z + \xi(y), y) - \varepsilon \frac{d\xi(y)}{dy} g(z + \xi(y), y), \\ \dot{y} &= g(z + \xi(y), y),\end{aligned}\tag{4.4}$$

tandis que l'équation rapide devient

$$z' = f(z + \xi(y), y).$$

Concernant la stabilité exponentielle de l'origine de l'équation lente, le théorème A.6.4 assure l'existence d'une fonction de Lyapounov  $V(y)$  et de constantes strictement positives  $c_1, c_2, c_3, c_4$  et  $r_0 \leq r$  telles que pour tout  $y \in \mathcal{B}_{r_0}$

$$\begin{aligned}c_1 \|y\|^2 &\leq V(y) \leq c_2 \|y\|^2, \\ \frac{dV}{dy} g(\xi(y), y) &\leq -c_3 \|y\|^2, \\ \left\| \frac{dV}{dy} \right\| &\leq c_4 \|y\|.\end{aligned}\tag{4.5}$$

D'autre part, le théorème A.6.5 et la stabilité exponentielle uniforme de  $z = 0$  pour l'équation rapide impliquent l'existence, sous les hypothèses du théorème, d'une fonction de Lyapounov  $W(z, y)$  et de constantes strictement positives  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  et  $\rho_0 \leq \rho$  telles que pour tout  $z \in \mathcal{B}_{\rho_0}$

$$\begin{aligned} b_1 \|z\|^2 &\leq W(z, y) \leq b_2 \|z\|^2, \\ \frac{\partial W}{\partial z} f(z + \xi(y), y) &\leq -b_3 \|z\|^2, \\ \left\| \frac{\partial W}{\partial z} \right\| &\leq b_4 \|z\|, \quad \left\| \frac{\partial W}{\partial y} \right\| \leq b_5 \|z\|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Une fonction de Lyapounov candidate pour établir la stabilité exponentielle de l'origine de (4.4) est

$$U(z, y) = V(y) + W(z, y).$$

En ajoutant et retranchant certains termes, on montre que la dérivée de  $U$  le long des trajectoires de (4.4) vaut

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{dV}{dy} g(\xi(y), y) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial z} f(z + \xi(y), y) \\ &\quad + \frac{dV}{dy} (g(z + \xi(y), y) - g(\xi(y), y)) \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial y} (g(z + \xi(y), y) - g(\xi(y), y)) + \frac{\partial W}{\partial y} g(\xi(y), y) \\ &\quad - \frac{\partial W}{\partial z} \frac{d\xi(y)}{dy} (g(z + \xi(y), y) - g(\xi(y), y)) - \frac{\partial W}{\partial z} g(\xi(y), y). \end{aligned}$$

En utilisant les relations (4.5) et (4.6) et le fait que  $g(\xi(y), y)$  et  $\xi(y)$  s'annulent en  $y = 0$ , on aboutit à l'inégalité

$$\begin{aligned} \dot{U} &\leq -a_1 \|y\|^2 - \frac{a_2}{\varepsilon} \|z\|^2 + a_3 \|z\|^2 \\ &\quad + a_4 \|y\| \|z\| + a_5 \|y\| \|z\|^2 + a_6 \|z\|^3. \end{aligned}$$

Sachant que  $\|z\| \leq \rho_0$ , cette inégalité se simplifie en

$$\begin{aligned} \dot{U} &\leq -a_1 \|y\|^2 - \frac{a_2}{\varepsilon} \|z\|^2 + a_7 \|z\|^2 + 2a_8 \|y\| \|z\| \\ &= -(\|y\|, \|z\|) \begin{pmatrix} a_1 & -a_8 \\ -a_8 & \frac{a_2}{\varepsilon} - a_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|y\| \\ \|z\| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le membre de droite de l'inégalité est une forme quadratique en  $(\|y\|, \|z\|)$ . Elle est définie négative si les mineurs principaux sont positifs, i.e.

$a_1 \left( \frac{a_2}{\varepsilon} - a_7 \right) > a_8^2$ , ce qui est vrai pour  $\varepsilon < \varepsilon^* = \frac{a_1 a_2}{a_8^2 + a_1 a_7}$ . Ainsi, pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , il existe une constante positive  $k$  telle que

$$\dot{U} \leq -2kU.$$

Il s'ensuit que

$$U(z(t), y(t)) \leq e^{-2kt} U(z(0), y(0)),$$

pour un certain réel  $k > 0$  et donc que, d'après (4.5) et (4.6), il existe  $L_1 > 0$  tel que

$$\|(z(t), y(t))\| \leq L_1 e^{-kt} \|(z(0), y(0))\|.$$

Finalement, étant donné que  $z = x - \xi(y)$  et que  $\|\xi(y)\|/\|y\|$  est borné, il existe  $L_2 > 0$  tel que

$$\|(x(t), y(t))\| \leq L_2 e^{-kt} \|(x(0), y(0))\|.$$

Ce qui signifie que l'origine du système (4.3) est exponentiellement stable pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon^*[$ . ■

Le théorème assure la stabilité exponentielle de l'origine du système pourvu que la phase rapide à négliger soit justement très rapide. Dans la majorité des applications, il est raisonnable d'imposer la condition de stabilité de type exponentiel, ou de type exponentiel uniforme en place de la simple stabilité asymptotique (on dira que la stabilité asymptotique est critique lorsqu'elle n'est pas exponentielle). Les exemples 4.1.2, 4.1.1 et 4.1.3 montrent justement que la stabilité asymptotique n'est pas robuste.

### 4.1.3 Cas des fonctions de Lyapounov quadratiques

Nous empruntons le raisonnement qui suit à H. Khalil [25] pour montrer que la stabilité exponentielle des origines des équations lente et rapide du problème (4.4) n'est pas une condition nécessaire pour la stabilité asymptotique de l'origine du système (4.4). Reprenons en effet les données du théorème précédent mais au lieu de la stabilité exponentielle, supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov  $V(y)$  pour l'équation lente telle que

$$\frac{dV}{dy} g(\xi(y), y) \leq -\alpha_1 \psi_1^2(y), \quad (4.7)$$

pour tout  $y$  dans  $\mathcal{B}_{r_0}$ , où  $r_0 \leq r$  et  $\psi_1$  est une fonction définie positive, i.e.  $\psi_1(0) = 0$  et  $\psi_1(y) > 0$  pour tout  $y$  dans  $\mathcal{B}_{r_0} \setminus \{0\}$ . Supposons aussi qu'il existe une fonction de Lyapounov  $W(z, y)$  pour l'équation rapide telle que

$$\frac{\partial W}{\partial z} f(z + \xi(y), y) \leq -\alpha_2 \psi_2^2(z), \quad (4.8)$$

pour tout  $(z, y)$  dans  $\mathcal{B}_{\rho_0} \times \mathcal{B}_{r_0}$ , où  $\rho_0 \leq \rho$  et  $\psi_2$  est une fonction définie positive. Ces deux conditions assurent la stabilité asymptotique de l'origine des équations lente et rapide. Pour que la stabilité asymptotique de l'origine de l'équation rapide soit uniforme en  $y$ , on ajoute la condition

$$W_1(z) \leq W(z, y) \leq W_2(z), \quad (4.9)$$

pour tout  $(z, y)$  dans  $\mathcal{B}_{\rho_0} \times \mathcal{B}_{r_0}$ , où  $W_1$  et  $W_2$  sont des fonctions continues définies positives. La fonction de Lyapounov candidate pour le système (4.4) sera

$$U(z, y) = (1 - d)V(y) + dW(z, y), \quad 0 < d < 1,$$

où  $d$  est à déterminer. La dérivée de  $U$  le long des trajectoires de (4.4) vaut

$$\begin{aligned} \dot{U} = & (1 - d) \frac{dV}{dy} g(\xi(y), y) + \frac{d}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial z} f(z + \xi(y), y) \\ & + (1 - d) \frac{dV}{dy} [g(z + \xi(y), y) - g(\xi(y), y)] \\ & + d \left[ \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \frac{d\xi(y)}{dy} \right] g(z + \xi(y), y). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de  $\dot{U}$  sont les dérivées de  $V$  et  $W$  le long des trajectoires des problèmes lent et rapide, le troisième et le quatrième représentent l'effet de l'interconnexion entre les deux dynamiques. Nous supposons enfin qu'il existe des constantes positives  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\gamma$  telles que

$$\frac{dV}{dy} [g(z + \xi(y), y) - g(\xi(y), y)] \leq \beta_1 \psi_1(y) \psi_2(z) \quad (4.10)$$

et

$$\left[ \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \frac{d\xi(y)}{dy} \right] g(z + \xi(y), y) \leq \beta_2 \psi_1(y) \psi_2(z) + \gamma \psi_2^2(z). \quad (4.11)$$

Les inégalités (4.7), (4.8), (4.10) et (4.11) permettent d'aboutir à la majoration

$$\dot{U} \leq -(\psi_1(y), \psi_2(z)) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix}$$

où  $A$  est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} (1 - d)\alpha_1 & -\frac{1}{2}(1 - d)\beta_1 - \frac{1}{2}d\beta_2 \\ -\frac{1}{2}(1 - d)\beta_1 - \frac{1}{2}d\beta_2 & d\left(\frac{\alpha_2}{\varepsilon} - \gamma\right) \end{pmatrix}.$$



La forme quadratique qui majore  $\dot{U}$  est définie négative si

$$\varepsilon < \varepsilon_d := \frac{4d(1-d)\alpha_1\alpha_2}{4d(1-d)\alpha_1\gamma + (((1-d)\beta_1 + d\beta_2)^2)}$$

On peut alors montrer que la valeur maximale de  $\varepsilon_d$  est donnée par  $\varepsilon^* = \alpha_1\alpha_2/(\alpha_1\gamma + \beta_1\beta_2)$ . Il s'en suit que l'origine du problème (4.3) est asymptotiquement stable pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^*$ .

Les fonctions précédentes de Lyapounov  $V$  et  $W$  sont dites de *type quadratique*. Elles n'impliquent pas toujours une stabilité exponentielle qui en est un cas particulier. L'exemple suivant le montre.

**Exemple 4.1.5** [25] *L'origine du système*

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -y - x, \\ \dot{y} &= y - y^3 + x, \end{aligned} \quad (4.12)$$

est un point d'équilibre. Effectuons le changement de variable  $z = x + y$  qui transforme (4.12) en

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z} &= -z + \varepsilon(z - y^3), \\ \dot{y} &= -y^3 + z. \end{aligned} \quad (4.13)$$

L'équation lente est donnée par

$$\dot{y} = -y^3.$$

Son origine est asymptotiquement stable mais pas exponentiellement. L'équation rapide est

$$z' = -z,$$

et l'origine en est un équilibre exponentiellement stable. On peut choisir pour l'équation lente la fonction de Lyapounov  $V(y) = \frac{y^4}{4}$  qui vérifie la condition (4.7) avec  $\psi_1(y) = |y|^3$  et  $\alpha_1 = 1$ . Pour l'équation rapide, on prend  $W(z, y) = \frac{z^2}{2}$  qui satisfait la condition (4.8) avec  $\psi_2(z) = |z|$  et  $\alpha_2 = 1$  ainsi que la condition (4.9) puisque elle ne dépend pas de  $y$ . De même que les conditions d'interconnexion (4.10) et (4.11) sont vérifiées avec  $\beta_1 = \beta_2 = \gamma = 1$ . Ainsi, l'origine du problème (4.12) est asymptotiquement stable (voire même globalement) pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^* = 0.5$ .

#### 4.1.4 Stabilité pratique

Les limites des exemples 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3, bien que n'impliquant pas une stabilité asymptotique, renferment un certain intérêt. Elles traduisent une

sorte de stabilité “apparente” des équilibres où des cycles des systèmes en question. Un résultat affirme que l’attractivité uniforme, disons de l’origine d’un système, par rapport aux conditions initiales implique sa stabilité asymptotique (voir [18], Théorème 38.1). Si l’uniformité de l’attractivité est assurée pour toute condition initiale dans une boule arbitrairement grande centrée à l’origine, nous obtenons la stabilité asymptotique globale. Etant donné le système différentiel dépendant d’un paramètre

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad (4.14)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue, notons par  $x(t, x_0, \varepsilon)$  ses solutions telles que  $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$ . Nous ne supposons pas que la limite de  $f$  est définie lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Le système (4.14) peut donc être singulièrement perturbé. Les deux définitions suivantes sont extraites du cours donné par Lobry et Sari lors de l’école CIMPA 2003 de Tlemcen, Contrôle Non Linéaire et Applications [35] (voir aussi des mêmes auteurs le rapport de recherche [34]). La terminologie est néanmoins empruntée à A. R. Teel et L. Praly dans [53]. Ces derniers en font usage dans la théorie de la commande en termes de stabilisation pratique des systèmes.

**Définition 4.1.6** *On dit que l’origine est semiglobalement pratiquement asymptotiquement stable (SGPAS) pour le système (4.14) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  si, pour tout  $R > 0$  et tout  $r > 0$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $T > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , tout  $t \geq T$  et tout  $x_0$  tel que  $\|x_0\| \leq R$ , toute solution  $x(t, x_0, \varepsilon)$  de (4.14) satisfait  $\|x(t, x_0, \varepsilon)\| \leq r$ .*

La définition dit que toute solution vérifie  $\lim x(t, x_0, \varepsilon) = 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$  et que la convergence est uniforme par rapport à  $x_0$  dans la boule de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $R$  et de centre 0 (i.e.  $\lim_{t \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \text{Sup}_{\|x_0\| \leq R} \|x(t, x_0, \varepsilon)\| = 0$ ). En d’autres termes, si  $\mathcal{B}_R$  et  $\mathcal{B}_r$  sont les boules de  $\mathbb{R}^n$  de centre l’origine et de rayons respectifs  $R$  et  $r$ , toute trajectoire partant d’une boule arbitrairement grande  $\mathcal{B}_R$  atteint une boule arbitrairement petite  $\mathcal{B}_r$  en un temps fini et pour  $\varepsilon$  assez petit. Ceci n’est pas une attractivité uniforme par rapport aux conditions initiales comme nous le verrons dans les exemples qui suivent. Notons par ailleurs que s’il n’était pas requis que  $T$  et  $\varepsilon_0$  soient les mêmes pour tout  $x_0$ , un tel  $T$  fini ou un tel  $\varepsilon_0$  auraient pu ne pas exister, même si  $x_0$  varie dans un compact (voir l’exemple de Vinograd dans [18], page 191).

**Exemples :** Ces exemples, vus presque tous dans [34], montrent que la propriété de stabilité asymptotique semiglobale pratique quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  signifie en quelque sorte que l’origine “semble” globalement asymptotiquement stable quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

1. C'est le caractère de *globalité* de la stabilité asymptotique de l'origine qui est "apparent" pour l'équation  $\dot{x} = x(\varepsilon x - 1)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En fait,  $x = 0$  est localement stable, mais le bassin d'attraction  $] -\infty, 1/\varepsilon[$  peut être rendu aussi grand qu'on le veut.

2. C'est le *statut de point d'équilibre* qui est apparent pour l'origine de l'équation  $\dot{x} = \varepsilon - x$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  puisque ce n'est pas un équilibre. C'est toutefois un équilibre globalement asymptotiquement stable pour l'équation réduite  $\dot{x} = -x$ .

3. Pour l'équation  $\dot{x} = x^2(\varepsilon - x)$ , l'*attractivité*, sa *globalité* mais aussi la *stabilité* sont apparentes quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , puisque l'origine est un équilibre instable pour toutes les valeurs de  $\varepsilon > 0$ . C'est là aussi un équilibre globalement asymptotiquement stable de l'équation réduite  $\dot{x} = -x^3$ .

4. Dans l'équation  $\dot{x} = -x + \varepsilon/x$ , bien que l'origine soit un pôle répulsif (dans le sens où c'est un point compris entre deux équilibres  $-\sqrt{\varepsilon}$  et  $\sqrt{\varepsilon}$  attractifs) on pourrait dire qu'elle est SGPAS quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Evidemment, l'attractivité uniforme par rapport aux données initiales peut ne pas être globale. Le nombre réel  $R$  n'est plus arbitraire et nous avons la définition suivante :

**Définition 4.1.7** *On dit que l'origine est pratiquement asymptotiquement stable (PAS) pour le système (4.14) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  s'il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $r > 0$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $T > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , pour tout  $t \geq T$  et tout  $x_0$  tel que  $\|x_0\| \leq R$ , toute solution  $x(t, x_0, \varepsilon)$  de (4.14) satisfait  $\|x(t, x_0, \varepsilon)\| \leq r$ .*

Considérons le système lent-rapide

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f_0(x, y), \\ \dot{y} &= g_0(x, y), \end{aligned} \tag{4.15}$$

où  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont continues sur un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  contenant l'origine. Donnons la définition de stabilité pratique sous la forme suivante :

**Définition 4.1.8** *On dit que l'origine est SGPAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  si, pour tout voisinage compact  $K \subset \Omega_0$  de l'origine et tout voisinage  $\mathcal{O} \subset \Omega_0$  de l'origine, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et un réel  $T > 0$  tels que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , tout  $t \geq T$  et tout  $(\alpha, \beta) \in K$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  de (4.15) de condition initiale  $(\alpha, \beta)$  est dans  $\mathcal{O}$ .*

*Si  $K$  n'est pas arbitraire, l'origine est dite PAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Ces définitions sont aussi formulables pour différents sous-ensembles de l'espace des phases.

**Définition 4.1.9** *Un sous-ensemble  $\mathcal{M}$  de  $\Omega_0$  est dit SGPAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  si, pour tout voisinage compact  $\mathcal{K} \subset \Omega_0$  de  $\mathcal{M}$  et tout voisinage  $\mathcal{O} \subset \Omega_0$  de  $\mathcal{M}$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et un réel  $T > 0$  tels que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , tout  $t \geq T$  et tout  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  de (4.15) de condition initiale  $(\alpha, \beta)$  est dans  $\mathcal{O}$ .*

*Si  $\mathcal{K}$  n'est pas arbitraire, le sous-ensemble  $\mathcal{M}$  est dit PAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

## 4.2 Résultats de stabilité pratique

L'intérêt de la notion de stabilité pratique est de pouvoir répondre à la question naturelle suivante : "si l'équation lente (3.4) admet, disons, un équilibre  $y_\infty$  asymptotiquement stable ou un cycle limite  $\Gamma$ , quel rôle peut avoir pour le problème tout entier (3.1) le point  $(\xi(y_\infty), y_\infty)$  ou le sous-ensemble  $\xi(\Gamma) \times \Gamma$  correspondants de la variété lente ? Il n'y a aucune raison qu'ils en soient respectivement un équilibre ou un cycle, mais pour des valeurs très petites du paramètre  $\varepsilon$ , ils peuvent en avoir l'air. Vu le caractère asymptotique de cette propriété, un ingénieur, un biologiste, ... se satisferait d'un modèle qui semble tendre vers un état stationnaire ou oscillatoire permanent, faute d'une stabilité somme toute idéale.

### 4.2.1 Cas de la dynamique lente stationnaire

A la lumière des définitions 4.1.8 et 4.1.9, nous sommes en mesure de formuler quelques nouveaux résultats. Le théorème 3.2.1 nous permet d'énoncer un résultat de stabilité asymptotique pratique d'un point de la variété lente. Nous supposons que  $f_0$  satisfait les hypothèses  $T1$  à  $T3$  du sous-paragraphe 3.1.1 et que  $g_0$  satisfait l'hypothèse  $T4$ . En reprenant les notations et appellations du chapitre 3, on a :

**Théorème 4.2.1** *Soit  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  continues sur un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et vérifiant les hypothèses  $T1$  à  $T4$ . Supposons qu'il existe un point d'équilibre  $y_\infty \in \dot{Y}$  de l'équation lente (3.4) qui soit asymptotiquement stable. Alors le point  $(\xi(y_\infty), y_\infty)$  de la variété lente est PAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

De même, le théorème 3.2.2 induit une stabilité asymptotique pratique de la courbe fermée  $\Gamma_{\bar{y}_\infty} \times \{\bar{y}_\infty\}$  de l'espace de phase du problème (4.15).

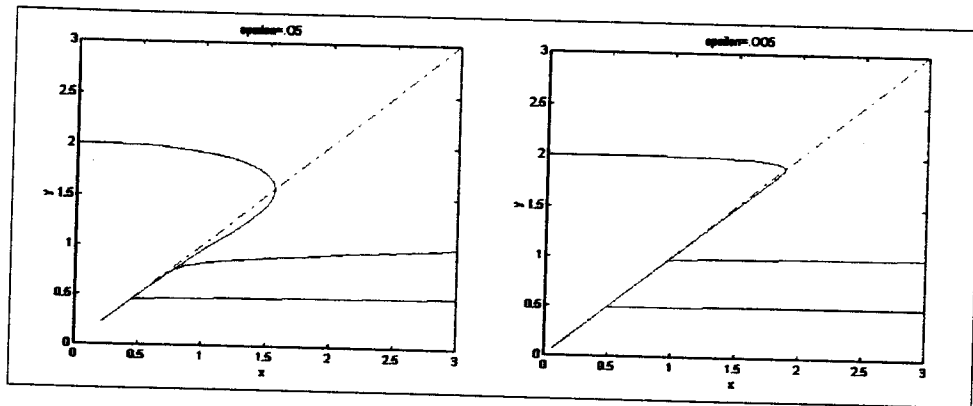


Figure 4.1: Simulations numériques de quelques trajectoires de l'exemple 4.1.1 pour  $\varepsilon = .05$  et  $.005$  sur l'intervalle de temps  $[0, 100]$ .

**Théorème 4.2.2** Soit  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  continues sur un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et vérifiant les hypothèses P1 à P3. Supposons que l'équation lente (3.7) admet dans  $\hat{G}$  un point d'équilibre  $\bar{y}_\infty$  asymptotiquement stable. Alors le sous-ensemble  $\Gamma_{\bar{y}_\infty} \times \{\bar{y}_\infty\}$  de  $\Omega_0$  est PAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La figure 4.1 montre l'effet de la diminution de la valeur de  $\varepsilon$  sur l'apparente attractivité de l'origine du système de l'exemple 4.1.1. Au passage, elle met en évidence la nature lente-rapide du système puisque, en dehors de la variété lente  $x = y$ , les trajectoires sont quasi-horizontales. La figure 4.2 montre que pour  $\varepsilon = 0.04$ , le cercle unité sur le plan  $y = 0$  semble attractif pour les solutions du système de l'exemple 4.1.3. Pour une valeur de  $\varepsilon$  à peine plus grande, les deux trajectoires représentées semblent tendre vers deux cercles distincts. Ce sont ceux-là mêmes qui correspondent à  $r = 1 - \varepsilon$  et  $r = 1 + \varepsilon$ .

Concernant le théorème 4.2.2, il faut relever que Pontryagin et Rodygin [45] ont pu obtenir un résultat d'existence et d'unicité d'un cycle d'un système lent rapide pour  $\varepsilon$  assez petit, sous les conditions d'existence et d'unicité d'un cycle de l'équation rapide et d'un point d'équilibre de l'équation moyennisée tous deux hyperboliques.

#### 4.2.2 Cas de la dynamique lente oscillante

Si  $\Gamma$  est un cycle asymptotiquement stable de la dynamique lente comme dans le théorème 3.3.1, la courbe fermée  $\xi(\Gamma) \times \Gamma$  contenue dans la variété lente possède la propriété de stabilité asymptotique pratique quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Plus précisément :

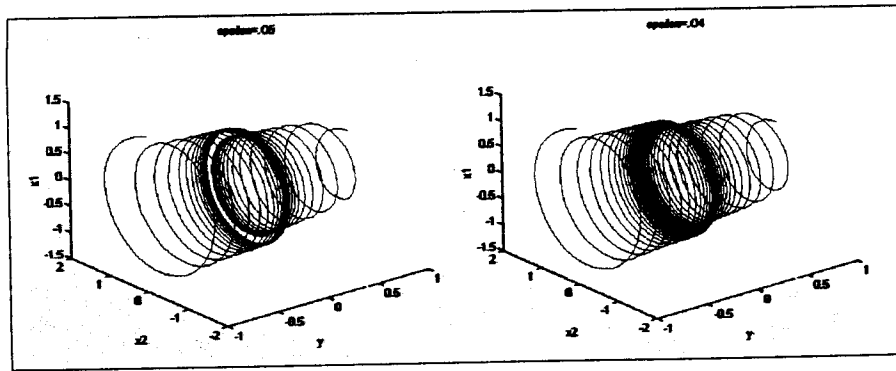


Figure 4.2: Simulations numériques de quelques trajectoires de l'exemple 4.1.3 pour  $\varepsilon = .05$  et  $.04$  sur l'intervalle de temps  $[0, 100]$ .

**Théorème 4.2.3** Soit  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  continues sur un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  vérifiant les hypothèses T1 à T4. Supposons que l'équation lente (3.4) admet dans  $\dot{Y}$  un cycle  $\Gamma$  asymptotiquement stable. Alors le sous-ensemble  $\xi(\Gamma) \times \Gamma$  de la variété lente est PAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un sous-ensemble invariant de  $\dot{Y}$  asymptotiquement stable pour l'équation lente (3.4), on peut montrer de même que le sous-ensemble  $\xi(\mathcal{M}) \times \mathcal{M}$  de la variété lente possède la propriété de stabilité asymptotique pratique quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (voir chapitre 6).

La question s'est posée dans le cas des champs suffisamment réguliers de savoir si le problème d'origine possède une solution périodique d'orbite  $\Gamma_\varepsilon$  près de  $\Gamma$  pour de petites valeurs de  $\varepsilon$ . Certains auteurs se sont penchés sur la question comme K. O. Friedrichs et W. Wasow [17], L. Flatto et N. Levinson [15], N. D. V. Anosov [1] et N. Fenichel [14]. Dans les deux dernières références, il a été démontré que l'orbite  $\Gamma$  peut être prolongée à une famille  $\Gamma_\varepsilon$  si (i)  $\Gamma$ , comme orbite périodique de l'équation réduite, admet 1 comme multiplicateur simple de Floquet, (ii) pour tout  $y \in \Gamma$ , l'équation de la couche limite correspondante admet le point  $x = \xi(y)$  comme un équilibre hyperbolique. Ce genre de conditions requiert des conditions de différentiabilité qui peuvent assurer jusqu'à l'unicité des  $\Gamma_\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, une période qui tend vers celle de  $\Gamma$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et même la propriété de phase asymptotique (voir sur cette dernière notion le sous-paragraphe 4.2.3).

**Exemple 4.2.4** La dynamique lente associée au système lent rapide suivant, écrit en coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -x, \\ \dot{r} &= r(r-1+\varepsilon)(r-1-\varepsilon)(1-r^2), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}\tag{4.16}$$

est approchée par l'équation lente

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r(r-1)^3(r+1), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

qui admet donc le cercle unité  $\Gamma$  comme unique cycle asymptotiquement stable. L'origine de l'équation rapide,  $x' = -x$ , est (globalement) asymptotiquement stable et la variété lente est le plan  $x = 0$ . On peut affirmer que pour toute condition initiale différente de l'origine, le sous-ensemble  $\{0\} \times \Gamma$  est PAS quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mais même si  $\{0\} \times \Gamma$  devait être un cycle limite proprement dit du problème d'origine, il ne serait pas stable. En effet, pour le sous-système

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(r-1+\varepsilon)(r-1-\varepsilon)(1-r^2), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

de (4.16), pour toute valeur de  $\varepsilon > 0$ , le cercle  $\Gamma$  est un cycle limite instable compris entre deux cycles limites  $r = 1 - \varepsilon$  et  $r = 1 + \varepsilon$  stables.

Si l'équation moyennisée (3.7) admet un cycle limite  $\Lambda$ , à chaque point  $y$  de  $\Lambda$  correspond un cycle  $\Gamma_y$  de l'équation rapide. L'ensemble formé par tous les cycles  $\Gamma_y$  quand  $y$  décrit  $\Lambda$  est un tore qui a la propriété de stabilité pratique quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème 4.2.5** Soit  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  continues sur un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et vérifiant les hypothèses P1 à P3. Supposons que l'équation lente (3.7) admet un cycle  $\Lambda$  dans  $\dot{G}$  qui soit asymptotiquement stable. Alors le tore  $\bigcup_{y \in \Lambda} (\Gamma_y \times \{y\})$  dans  $\Omega_0$  est PAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Le théorème précédent est généralisable au cas où il existe un sous-ensemble  $\mathcal{M}$  de  $G$  invariant pour l'équation lente (3.7), asymptotiquement stable. La stabilité pratique se rapporte alors au sous-ensemble  $\bigcup_{y \in \mathcal{M}} (\Gamma_y \times \{y\})$  de  $\Omega_0$  (voir chapitre 6). Notons aussi que si les équilibres ou les cycles des équations rapide et lente étaient supposés globalement asymptotiquement stables, il serait possible d'en déduire des résultats de stabilité semiglobale asymptotique pratique.

### 4.2.3 Sur la phase asymptotique

Dans le cas d'un système autonome possédant une solution périodique non triviale, il est connu qu'on ne peut parler de stabilité asymptotique de cette solution. C'est la raison pour laquelle les derniers résultats s'expriment en termes d'orbites. Il existe une autre notion attachée aux solutions périodiques, celle de la phase asymptotique.

**Définition 4.2.6** *Supposons que le système*

$$\dot{x} = f(x)$$

*admette une solution périodique  $x^*(t)$  d'orbite  $\Gamma$ . On dit que la solution  $x^*(t)$  a la propriété de phase asymptotique s'il existe  $b > 0$  tel qu'à tout point  $x_0$  vérifiant  $\text{dis}(x_0, \Gamma) < b$  il correspond un réel  $\alpha(x_0)$  (phase asymptotique) tel que la solution  $x(t, x_0)$  de condition initiale  $x_0$  vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0) - x^*(t - \alpha(x_0))\| = 0.$$

La stabilité asymptotique orbitale avec phase asymptotique signifie que pour toute condition initiale  $x_0$  suffisamment proche de  $\Gamma$ , on peut choisir une solution d'orbite  $\Gamma$  telle que sa différence avec  $x(t, x_0)$  tende vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. C'est une sorte de synchronisation à l'infini avec une "translatée" de la solution périodique.

Revenons au problème traité par le théorème 4.2.2. Quand bien même on supposerait, comme cela est naturel d'y penser, que la solution périodique de l'équation rapide  $x' = f_0(x, \bar{y}_\infty)$  de paramètre  $y = \bar{y}_\infty$  et de condition initiale  $\alpha_0$  est orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique, nous ne pouvons espérer obtenir, en plus de la stabilité asymptotique pratique de  $\Gamma_{\bar{y}_\infty} \times \{\bar{y}_\infty\}$ , une sorte de phase asymptotique "apparente".

**Exemple 4.2.7** *Examinons le système suivant écrit en coordonnées cylindriques :*

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{r} &= (1 - r^2)^3 / r, & r(0) &= r_0, \\ \varepsilon \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon(1 - r^2)^2, & \theta(0) &= \theta_0, \\ \dot{y} &= -y, & y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

*L'équation de la couche limite*

$$\begin{aligned} r' &= (1 - r^2)^3 / r, & r(0) &= r_0, \\ \theta' &= 1, & \theta(0) &= \theta_0, \end{aligned}$$

*admet le cercle unité  $\Gamma_y$  comme cycle asymptotiquement stable pour toute valeur de  $y$ . De plus, puisque  $\theta(t) - t = \theta_0$ , la solution périodique associée possède la propriété de phase asymptotique. L'équation réduite est simplement*



la troisième équation de (4.17), pour laquelle l'origine est asymptotiquement stable. En vertu du théorème 4.2.2, l'ensemble  $\Gamma_0 \times \{0\}$  est PAS quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Cependant, on sait que la solution explicite de (4.17) est donnée par

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{1 - \frac{1 - r_0^2}{\sqrt{1 + \frac{4}{\varepsilon}t(1 - r_0^2)^2}}}, \\ \theta(t) &= \theta_0 + \frac{t}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4} \ln\left(1 + \frac{4}{\varepsilon}t(1 - r_0^2)^2\right), \\ y(t) &= y_0 e^{-t}. \end{aligned}$$

On voit alors que pour tout  $\varepsilon$  fixé, la quantité  $\theta(t) - t$  tend vers l'infini avec  $t$ . Mieux encore (ou pire puisque cela ôte tout espoir d'une propriété de phase asymptotique pratique),  $\theta(t) - t$  tend vers l'infini quand  $t \rightarrow +\infty$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



# Chapitre 5

## Notions d'Analyse Non Standard

### 5.1 Ce qu'est IST

#### 5.1.1 Un peu d'axiomatique

La théorie IST (Internal Set Theory) est une extension des mathématiques ordinaires donnant une approche axiomatique à l'Analyse Non Standard de A. Robinson [47]. Elle est due à E. Nelson [41]. Le point de départ est l'axiomatique classique de la théorie des ensembles ZFC (pour Zermelo-Fraenkel et l'axiome du choix). Au prédicat binaire indéfini  $\in$  de la théorie des ensembles est joint un nouveau prédicat unaire *standard* (st) qui sera manipulé à l'aide de trois nouveaux axiomes ajoutés à ZFC : Transfert, Idéatisation et Standardisation. *Tous les théorèmes de ZFC restent valides dans IST.* Ce qui est nouveau dans IST c'est un ajout et non un changement. Une formule de IST est dite *interne* dans le cas où elle ne fait pas intervenir le nouveau prédicat "st" ; autrement, elle est dite *externe*. Voici à titre indicatif la formulation des trois axiomes ajoutés. Pour plus de détails, on peut consulter [10] et [41]. On adopte les notations suivantes où  $\wedge$  et  $\vee$  désignent respectivement les opérateurs logiques conjonction et disjonction :

$$\begin{aligned} \forall^{\text{st}}x \text{ pour } \forall x, x \text{ standard} \Rightarrow, & \quad \exists^{\text{st}}x \text{ pour } \exists x, x \text{ standard } \wedge, \\ \forall^{\text{fin}}x \text{ pour } \forall x, x \text{ fini} \Rightarrow, & \quad \exists^{\text{fin}}x \text{ pour } \exists x, x \text{ fini } \wedge, \\ \forall^{\text{st fin}}x \text{ pour } \forall^{\text{st}}x, x \text{ fini} \Rightarrow, & \quad \exists^{\text{st fin}}x \text{ pour } \exists^{\text{st}}x, x \text{ fini } \wedge. \end{aligned}$$

**Transfert** : Pour toute formule interne  $F(x, v_1, \dots, v_n)$  sans autres variables libres que  $x, v_1, \dots, v_n$ , on a :

$$\forall^{\text{st}}v_1 \dots \forall^{\text{st}}v_n (\forall^{\text{st}}x F(x, v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \forall x F(x, v_1, \dots, v_n)).$$

Le principe de transfert dit que si la formule interne  $F(x, v_1, \dots, v_n)$  est vraie pour tout standard  $x$ , elle le sera pour tous les  $x$ , pourvu que les autres variables soient standard. Par contraposée, s'il existe un  $x$  pour lequel la formule n'est pas vraie, il en existera un standard pour lequel la formule n'est pas vérifiée. En particulier, si un tel  $x$  est unique, il sera nécessairement standard. Il découle de ceci que tout objet spécifique des mathématiques conventionnelles comme  $0, 1, 2, \sin, \ln, \pi, C[0, 1], L^p, \dots$  est standard, parce que caractérisé de manière unique. Une autre conséquence importante est que toute fonction standard prend des valeurs standard aux points standard.

**Idéalisation** : Pour toute formule interne  $B(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont des variables libres mais peut-être pas les seules, on a :

$$\forall^{\text{st fin}} z \exists x \forall y \in z B(x, y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{\text{st}} y B(x, y).$$

Ce principe, plus délicat à comprendre, dit que la relation interne  $B(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont des variables libres, mais peut-être pas les seules, est simultanément vérifiable pour tout standard  $y$  si et seulement si elle est simultanément vérifiable dans tout ensemble fini standard. Le principe d'idéalisation permet notamment de démontrer que tout élément d'un ensemble  $E$  est standard si et seulement si  $E$  est un ensemble standard fini. Par conséquent, tout ensemble infini contient un élément non standard. Il existe donc un entier naturel non standard. Enfin, une des conséquences importantes de cet axiome est qu'il existe un ensemble fini  $A$  qui contient tous les objets standard.

**Standardisation** : Pour toute formule  $F(z)$ , interne ou externe, où  $z$  n'est peut-être pas la seule variable libre, on a :

$$\forall^{\text{st}} x \exists^{\text{st}} y \forall^{\text{st}} z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge F(z)).$$

Nous devons remarquer à ce niveau que seules les formules internes peuvent définir des sous-ensembles, comme nous le reverrons plus bas. Le principe de standardisation fournit un substitut. Il assure que pour tout ensemble standard  $x$ , il existe un sous-ensemble standard  $y$  dont les éléments standard sont ceux qui vérifient  $F$ . L'ensemble  $y$  est unique. En effet, deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. Par transfert, deux ensembles standard sont égaux s'ils ont les mêmes éléments standard. L'ensemble  $y$  est noté  ${}^{\text{S}}\{z \in x : F(z)\}$ .

La théorie IST est une extension conservative de ZFC : tout théorème interne de IST est un théorème de ZFC. Certains théorèmes prouvés dans IST sont externes et peuvent être reformulés de manière à les rendre internes. On doit en effet à E. Nelson [41] un algorithme de réduction ramenant toute formule externe  $F(x_1, \dots, x_n)$  de IST sans autres variables libres que  $x_1, \dots, x_n$  à une formule interne  $F'(x_1, \dots, x_n)$  avec les mêmes variables libres, telle que

$F \equiv F'$ , c'est-à-dire  $F \Leftrightarrow F'$  pour toutes les valeurs standard des variables libres. Voici la réduction des formules les plus rencontrées :

$$\begin{aligned} \forall x (\forall^{\text{st}} y A \Rightarrow \forall^{\text{st}} z B) &\equiv \forall z \exists^{\text{fin}} y' \forall x (\forall y \in y' A \Rightarrow B), \\ \forall x (\exists^{\text{st}} w \forall^{\text{st}} y A \Rightarrow \forall^{\text{st}} z B) &\equiv \forall w \forall z \exists^{\text{fin}} y' \forall x (\forall y \in y' A \Rightarrow B), \\ \forall x (\exists^{\text{st}} w \forall^{\text{st}} y A \Rightarrow \exists^{\text{st}} z B) &\equiv \forall w \exists^{\text{fin}} z' \exists^{\text{fin}} y' \forall x (\forall y \in y' A \Rightarrow \exists z \in z' B), \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $A$  (respectivement  $B$ ) est une formule interne de variable libre  $y$  (respectivement  $z$ ) et de paramètres standard.

### 5.1.2 Quelques définitions externes

Un nombre réel  $x$  est dit **infinitésimal** si  $|x| < a$  pour tout réel  $a$  strictement positif standard, **limité** si  $|x| \leq a$  pour un certain nombre standard  $a$ , **appréciable** s'il est limité et non infinitésimal, et **illimité** s'il n'est pas limité. Nous notons  $x \simeq 0$  pour  $x$  infinitésimal,  $x \simeq \pm\infty$  pour  $x$  illimité positif ou négatif et  $x \gg 0$  pour  $x$  non infinitésimal positif. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x \simeq 0 &\Leftrightarrow \forall^{\text{st}} a > 0 \quad |x| < a, \\ x \gg 0 &\Leftrightarrow \exists^{\text{st}} a > 0 \quad x > a, \\ x \text{ limité} &\Leftrightarrow \exists^{\text{st}} a > 0 \quad |x| \leq a, \\ x \simeq \infty &\Leftrightarrow \forall^{\text{st}} a > 0 \quad |x| > a. \end{aligned}$$

Soit  $(E, d)$  un espace métrique standard. Deux points  $x$  et  $y$  dans  $E$  sont dits **infinitement proches**, et on note  $x \simeq y$ , si  $d(x, y) \simeq 0$ . Un élément  $x$  est dit **presque standard** dans  $E$  s'il existe dans cet espace un standard  $x_0$  tel que  $x \simeq x_0$ . Le point  $x_0$  est appelé la **partie standard** de  $x$  (elle est unique) et est notée  ${}^\circ x$ . Notons qu'un nombre réel est presque standard dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si il est limité. Un vecteur dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n$  standard) est dit **infinitésimal** (respectivement **limité**, **illimité**) si  $\|x\|$  est infinitésimal (respectivement limité, illimité) où  $\|\cdot\|$  est une norme standard de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $X$  un espace topologique standard. Un point  $x$  de  $X$  est dit **infinitement proche** d'un point standard  $x_0$ , et on note aussi  $x \simeq x_0$ , si  $x$  est dans tout voisinage standard de  $x_0$ . Soit  $A$  un sous-ensemble standard de  $X$ . Un point  $x \in X$  est dit **presque standard** dans  $A$  s'il existe un standard  $x_0 \in A$  tel que  $x \simeq x_0$ . Le sous-ensemble standard  $A$  est compact si et seulement si tout point  $x \in A$  est presque standard dans  $A$ . Le sous-ensemble standard  $A$  est ouvert si et seulement si tout point  $x \in X$  qui est presque standard dans  $A$ , appartient à  $A$ .

Une fonction standard  $f$  est continue en un point standard  $x_0$  de son ensemble de définition  $D$  si et seulement si  $f(x) \simeq f(x_0)$  pour tout  $x$  de  $D$  tel que  $x \simeq x_0$ . Elle est continue sur  $D$  si et seulement si elle est continue en tout point standard de  $D$ .

Nous pouvons continuer à caractériser de façon externe d'autres notions comme la continuité uniforme, la différentiabilité, l'intégration,... mais nous ne donnons que les notions dont nous avons besoin dans ce travail.

### 5.1.3 Principes de permanence

On ne peut pas utiliser des prédicats externes pour définir des sous-ensembles (on parle de formation illégale d'ensembles). Par exemple, on peut prouver qu'il n'existe pas de sous-ensembles  $L$  et  $I$  de  $\mathbb{R}$  tels que, *pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $x$  est dans  $L$  si et seulement si  $x$  est limité, ou  $x$  est dans  $I$  si et seulement si  $x$  est infinitésimal*. Ce résultat sert parfois à prouver la validité d'une propriété au-delà du domaine où elle a été établie. Par exemple, supposons qu'une certaine propriété interne  $A$  a été établie pour tout  $x$  limité. Si nous admettions que  $A$  n'est vraie pour aucun  $x$  illimité, nous aurions alors caractérisé les nombres limités par l'ensemble  $L = \{x \in \mathbb{R} : A\}$ , ce qui est illégal. C'est un *principe de permanence*, dit de Cauchy. Une des plus importantes conséquences de ce principe est le fameux Lemme de Robinson, dont voici une des versions :

**Lemme 5.1.1 (Robinson)** [47] *Soit  $f$  une fonction réelle telle que  $f(x) \simeq 0$  pour tout  $x$  limité positif, alors il existe un réel illimité  $\omega$  tel que  $f(x) \simeq 0$  pour tout  $x$  dans  $[0, \omega]$ .*

**Preuve.** L'ensemble de tous les  $s$  tels que  $|f(x)| < 1/s$  pour tout  $x \in [0, s]$  contient tous les limités  $s \geq 1$ . D'après le principe de Cauchy, il doit contenir un illimité  $\omega$ . ■

A ce stade nous devons souligner toutefois qu'une collection d'éléments d'un ensemble  $\mathcal{E}$  vérifiant une propriété externe  $F$  est parfois appelée, par commodité, *ensemble externe*. On s'autorisera même à la noter par un symbole et à pratiquer sur elle les opérations booléennes binaires telles que la réunion, l'intersection, le complémentaire, etc.... Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que ce n'est pas un ensemble à proprement parler. Un ensemble externe en tant que tel met en défaut au moins un axiome de la théorie classique des ensembles. Nous adopterons quant à nous l'expression de *collection externe*. Par exemple, la collection externe définie par  $hal(0) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ infinitésimal}\}$ , appelée *halo de 0*, n'est pas un ensemble car on ne peut pas lui appliquer l'axiome de la borne supérieure. En effet, tout réel standard  $r$  est plus grand que tout élément de  $hal(0)$ . Supposons alors que  $s$  est une borne supérieure de  $hal(0)$  et soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal. Si  $s \simeq 0$ , alors  $s + \varepsilon \simeq 0$ , ce qui est absurde car  $s$  est la borne supérieure du halo de 0. Si  $s$  est appréciable, alors  $s - \varepsilon$  l'est aussi est c'est un majorant de  $hal(0)$ . Ce qui est impossible.

Il reste beaucoup à dire sur le fondement, le développement et les applications de l'ANS. Les lecteurs intéressés sont renvoyés à quelques références classiques comme [12], [13], [55] pour les fondements et [11], [32], [37], [55], [57] pour les applications. Le livre *Nonstandard Analysis in Practice* [10] est particulièrement intéressant pour apprécier la portée des outils non standard dans au moins neuf domaines, et l'on trouvera dans [7], [36], [49], [50] et [61] ce qu'il faut savoir sur la théorie des perturbations d'équations différentielles ordinaires.

#### 5.1.4 Deux outils de base

Nous présentons deux résultats fondamentaux de la théorie non standard des perturbations d'équations différentielles. D'abord la méthode stroboscopique, qui avait été proposée par J. L. Callot et G. Reeb en 1977 pour l'étude d'une équation particulière et présentée dans un colloque par ce dernier en 1978 (on peut lire par exemple [7]). Cette méthode consiste grosso modo en ceci : supposons qu'une fonction  $\phi$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  soit à valeurs limitées dans  $\mathbb{R}^n$ . Supposons de plus qu'il existe une fonction standard continue  $F$  et une suite de points  $(t_n, \phi(t_n))$  dans  $I \times \mathbb{R}^n$  tels que

$$0 < t_{n+1} - t_n \simeq 0 \text{ et } \frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \simeq F(t_n, \phi(t_n)).$$

La méthode stroboscopique dit alors que la fonction  $\phi$  est infiniment proche d'une solution  $x(t)$  de l'équation différentielle ordinaire  $\frac{dx}{dt} = F(t, x)$  pour tout  $t$  et  $x(t)$  limités. Des améliorations se sont imposées par le fait du peu d'informations que l'on peut avoir a priori sur la fonction  $\phi$  considérée. Par exemple, si cette fonction est solution d'une équation différentielle, comment vérifier qu'elle ne prend que des valeurs limitées sur un intervalle donné ? Comment construire explicitement la suite  $(t_n, \phi(t_n))$  ? T. Sari a étendu la méthode dans [48] au cas où pour tout  $t$  dans  $I$  pour lequel  $t$  et  $\phi(t)$  sont limités, il existe  $t'$  dans  $I$  tel que

$$0 < t' - t \simeq 0 \text{ et } \frac{\phi(t') - \phi(t)}{t' - t} \simeq F(t, \phi(t)).$$

A partir de ce résultat et de la *stroboscopie sélective* de R. Lutz [36] où l'existence de  $t'$  n'est assurée que pour des  $t$  dans un sous-ensemble de  $I$ , Sari établit le *Lemme de Stroboscopie* que nous énonçons ici (voir à ce sujet [49] et [50]).

Soit  $U$  un ouvert standard de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue standard. Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et  $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction telle que  $\phi(0)$  est presque standard dans  $U$ , c'est-à-dire qu'il existe un

standard  $x_0 \in U$  tel que  $\phi(0) \simeq x_0$ . Soit  $I$  un sous-ensemble connexe de  $J$  (éventuellement une collection externe) tel que  $0 \in I$ .

**Définition 5.1.2 (Propriété de stroboscopie)** Soit  $t$  et  $t'$  dans  $I$  tels que  $t \leq t'$ . La fonction  $\phi$  est dite satisfaire la propriété de stroboscopie  $S(t, t')$  si  $t' \simeq t$ ,  $\phi(s) \simeq \phi(t)$  pour tout  $s$  dans  $[t, t']$  et

$$\frac{\phi(t) - \phi(t')}{t - t'} \simeq F(\phi(t)).$$

Sous des conditions convenables, le Lemme de Stroboscopie affirme que la fonction  $\phi$  est approchée par la solution du problème de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = x_0. \quad (5.2)$$

**Théorème 5.1.3 (Lemme de Stroboscopie)** [50] Supposons que

(i) il existe  $\mu > 0$  tel que, dès que  $t \in I$  est limité et  $\phi(t)$  est presque standard dans  $U$ , il existe  $t' \in I$  tel que  $t' - t \geq \mu$  et la fonction  $\phi$  satisfait la propriété de stroboscopie  $S(t, t')$ ,

(ii) le problème de Cauchy (5.2) admet une solution unique  $x(t)$ .

Alors, pour tout standard  $L$  dans l'intervalle positif maximal de définition de  $x(t)$ , on a  $[0, L] \subset I$  et  $\phi(t) \simeq x(t)$  pour tout  $t \in [0, L]$ .

L'autre outil essentiel concerne la théorie des perturbations régulières et nous en avons déjà énoncé une version classique et plus faible dans le paragraphe 2.3. Considérons les deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\frac{dx}{dt} = F_0(x), \quad x(0) = a_0 \in U_0, \quad (5.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = a \in U. \quad (5.4)$$

Le Lemme de l'Ombre Courte permet de comparer les solutions de (5.3) et (5.4) quand  $F$  est proche de  $F_0$  et  $a$  est proche de  $a_0$  dans un sens à préciser. On en trouvera une preuve à l'aide du Lemme de Stroboscopie dans [50].

**Théorème 5.1.4 (Lemme de l'Ombre Courte)** Soit  $U_0$  un ouvert standard de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $F_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  standard et continue. Soit  $a_0 \in U_0$  standard. Supposons que le problème de Cauchy (5.3) admet une solution unique  $x_0(t)$  et soit  $J = [0, \omega[$ ,  $0 < \omega \leq +\infty$ , son intervalle positif maximal de définition. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  qui contient tous les éléments presque standard dans  $U_0$ . Soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue telle que  $F(x) \simeq F_0(x)$  pour tout  $x$  presque standard dans  $U_0$ . Alors, toute solution  $x(t)$  du problème de Cauchy (5.4) avec  $a \simeq a_0$  est définie pour tout  $t$  presque standard dans  $J$  et satisfait  $x(t) \simeq x_0(t)$ .

## 5.2 Notion externe de perturbation

Classiquement, la notion de perturbation est décrite en termes de déformations ou de voisinages. Dans le langage de l'ANS, comme avancé dans les premiers chapitres, nous disposons d'une notion proprement dite de perturbation. L'élégance de l'approche vient du fait que la perturbation d'un objet standard  $\Sigma$  en ANS est juste un autre objet  $\Sigma'$  qui est non standard et infiniment proche de  $\Sigma$ . Les caractéristiques de l'objet  $\Sigma'$  sont alors examinées directement sans utilisation de propriétés telles que celles liées aux paramètres de déformation. Nous expliquons ceci avec les notations du chapitre 3. Notons à ce sujet que la définition suivante explique pourquoi dans le Lemme de l'Ombre Courte  $U$  est un ouvert choisi de manière qu'il contienne tous les éléments presque standard dans  $U_0$ .

**Définition 5.2.1** *Un élément  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  de  $\mathcal{T}$  est appelé perturbation de l'élément standard  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  de  $\mathcal{T}$  si  $\Omega$  contient tous les éléments presque standard dans  $\Omega_0$ ,  $f(x, y) \simeq f_0(x, y)$  et  $g(x, y) \simeq g_0(x, y)$  pour tout  $(x, y)$  presque standard dans  $\Omega_0$  et  $\alpha \simeq \alpha_0$ ,  $\beta \simeq \beta_0$ .*

Notons que  $f_0(x, y)$  et  $g_0(x, y)$  sont bien définies pour tous les éléments  $(x, y)$  presque standard dans  $\Omega_0$ . En effet,  $\Omega_0$  étant un ouvert standard, il contient tous les points  $(x, y)$  presque standard dans  $\Omega_0$ . Voici un lemme qui fait le lien entre cette définition et la notion d'infiniment proche selon la topologie de  $\mathcal{T}$ .

**Lemme 5.2.2** *L'élément  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  de  $\mathcal{T}$  est une perturbation de l'élément standard  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  de  $\mathcal{T}$  si et seulement si  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  est infiniment proche de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

**Preuve.** Soit  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Soit alors  $D$  un sous-ensemble compact standard de  $\Omega_0$ . Par compacité, tout élément  $(x, y) \in D$  est presque standard dans  $D$ , donc dans  $\Omega_0$ . Par définition de la perturbation, on a alors que  $D \subset \Omega$ ,  $\alpha \simeq \alpha_0$ ,  $\beta \simeq \beta_0$  et  $f(x, y) \simeq f_0(x, y)$ ,  $g(x, y) \simeq g_0(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in D$ . Soit  $a > 0$  un nombre réel standard. Les quatre dernières relations s'écrivent par définition  $\|\alpha - \alpha_0\| < a$ ,  $\|\beta - \beta_0\| < a$ ,  $\|f - f_0\|_D < a$  et  $\|g - g_0\|_D < a$ . Ceci signifie que  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in V(D, a)$  pour tout compact standard  $D \subset \Omega_0$  et tout standard  $a > 0$ , c'est-à-dire que  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \simeq (\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Réciproquement, soit  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  infiniment proche de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  pour la topologie de la convergence uniforme sur les



compacts. Soit  $(x, y)$  presque standard dans  $\Omega_0$ . Notons alors par  $(x_0, y_0)$  l'élément standard de  $\Omega_0$  tel que  $(x, y) \simeq (x_0, y_0)$ . Ainsi,  $(x, y)$  est dans tout voisinage standard de  $(x_0, y_0)$ . Soit alors  $D$  un voisinage standard compact de  $(x_0, y_0)$  tel que  $D \subset \Omega_0$ . Donc  $D \subset \Omega$ ,  $(x, y) \in D$  et  $\|f(x, y) - f_0(x, y)\| < a$ ,  $\|g(x, y) - g_0(x, y)\| < a$  pour tout standard  $a > 0$ . D'où  $(x, y) \in \Omega$  et  $f(x, y) \simeq f_0(x, y)$ ,  $g(x, y) \simeq g_0(x, y)$ . Enfin, sachant que  $\alpha \simeq \alpha_0$  et  $\beta \simeq \beta_0$ , nous arrivons au fait que  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  est une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . ■

### 5.3 Caractérisation externe de la stabilité

L'équivalent externe des différentes notions de stabilité intervenant dans les résultats est donné dans les lemmes suivants. Nous l'exprimons en termes d'orbites associées à une solution, ce qui englobera le cas d'une solution stationnaire (orbite ponctuelle) et le cas d'une solution périodique (orbite fermée).

Supposons que le système

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.5}$$

admet, pour une condition initiale donnée en  $t = 0$ , une solution  $\tilde{x}(t)$  d'orbite  $\mathcal{O}$ . Il s'agira de montrer que les lemmes suivants se réduisent aux définitions classiques données en annexe.

**Lemme 5.3.1** *Supposons  $f$  et  $\tilde{x}(t)$  standard. La solution  $\tilde{x}(t)$  de l'équation (5.5) d'orbite  $\mathcal{O}$  est :*

1. *Orbitalement stable, si et seulement si toute solution  $x(t)$  de (5.5) pour laquelle  $\text{dis}(x(0), \mathcal{O}) \simeq 0$  peut être prolongée pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\text{dis}(x(t), \mathcal{O}) \simeq 0$ .*

2. *Orbitalement attractive si et seulement si  $\mathcal{O}$  admet un voisinage standard  $\mathcal{V}$  (bassin d'attraction) tel que toute solution  $x(t)$  de (5.5) pour laquelle  $x(0)$  est standard dans  $\mathcal{V}$  est prolongeable pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\text{dis}(x(t), \mathcal{O}) \simeq 0$  pour tout  $t \simeq +\infty$ .*

**Preuve.** 1. Notons par  $B$  la formule "Toute solution  $x(t)$  de (5.5) pour laquelle  $x(0) = \alpha$  est prolongeable pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\text{dis}(x(t), \mathcal{O}) < \mu$ ". Dire dans le lemme  $\text{dis}(\alpha, \mathcal{O}) \simeq 0$  c'est la même chose que de dire  $\forall^{\text{st}} \eta \text{dis}(\alpha, \mathcal{O}) < \eta$  et dire  $\text{dis}(x(t), \mathcal{O}) \simeq 0$  c'est dire  $\forall^{\text{st}} \mu \text{dis}(x(t), \mathcal{O}) < \mu$ . De là, la caractérisation de la stabilité orbitale est

$$\forall \alpha (\forall^{\text{st}} \eta \text{dis}(\alpha, \mathcal{O}) < \eta \Rightarrow \forall^{\text{st}} \mu B).$$



Dans cette formule,  $f$  et  $\mathcal{O}$  sont des paramètres standard et  $\eta, \mu$  sont des nombres réels strictement positifs. D'après la première formule de réduction de (5.1), ceci équivaut à

$$\forall \mu \exists^{\text{fin}} \eta' \forall \alpha (\forall \eta \in \eta' \text{ dis}(\alpha, \mathcal{O}) < \eta \Rightarrow B).$$

L'ensemble  $\eta'$  étant fini, il existe  $\eta$  tel que  $\eta = \min \eta'$  et la dernière formule devient alors

$$\forall \mu \exists \eta \forall \alpha (\text{dis}(\alpha, \mathcal{O}) < \eta \Rightarrow B).$$

C'est exactement la définition classique de la stabilité orbitale.

2. Par transfert, l'attractivité orbitale d'une solution est équivalente à l'existence d'un bassin d'attraction standard. Dans le lemme, la caractérisation d'un bassin d'attraction standard  $\mathcal{V}$  est que toute solution  $x(t)$  de l'équation (5.5) pour laquelle  $x(0)$  est standard dans  $\mathcal{V}$  peut être prolongée pour tout  $t \geq 0$  et satisfait

$$\forall t (\forall^{\text{st}} r \ t > r \Rightarrow \forall^{\text{st}} \mu \text{ dis}(x(t), \mathcal{O}) < \mu).$$

Dans cette formule,  $x(\cdot)$  et  $\mathcal{O}$  sont des paramètres standard tandis que  $r, \mu$  appartiennent aux réels strictement positifs. D'après la première formule de réduction de (5.1), ceci est équivalent à

$$\forall \mu \exists^{\text{fin}} r' \forall t (\forall r \in r' \ t > r \Rightarrow \text{dis}(x(t), \mathcal{O}) < \mu).$$

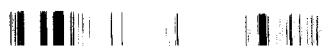
Mais dire, pour  $r'$  un ensemble fini,  $\forall r \in r' \ t > r$  revient à dire  $t > r$  pour  $r = \max r'$  et la formule équivaut alors à

$$\forall \mu \exists r \forall t (t > r \Rightarrow \text{dis}(x(t), \mathcal{O}) < \mu).$$

Ainsi, pour tout standard  $\alpha$  dans  $\mathcal{V}$ , toute solution  $x(t)$  de l'équation (5.5) pour laquelle  $x(0) = \alpha$  peut être prolongée pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dis}(x(t), \mathcal{O}) = 0$ . Par transfert, cette propriété reste vraie pour tout  $\alpha$  dans  $\mathcal{V}$ . C'est la définition habituelle de l'attractivité orbitale. ■

Lorsque  $f_0$  et  $g_0$  sont standard (donc aussi  $\Omega_0$ ), nous avons la caractérisation suivante de la stabilité pratique asymptotique semiglobale de l'origine du système lent-rapide (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Lemme 5.3.2** *Supposons que  $f_0$  et  $g_0$  sont standard. L'origine est SGPAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  si et seulement si pour tout  $(\alpha, \beta)$  presque standard dans  $\Omega_0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et tout  $t$  positif illimité, toute solution  $(x(t), y(t))$  de (4.15) de condition initiale  $(\alpha, \beta)$  vérifie  $(x(t), y(t)) \simeq (0, 0)$ .*



**Preuve.** Dire dans le lemme  $(\alpha, \beta)$  presque standard dans  $\Omega_0$  c'est la même chose que de dire " $\exists^{st} \mathcal{K}$ , voisinage compact de l'origine dans  $\Omega_0$ , tel que  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$ ". Dire  $\varepsilon$  infinitésimal positif c'est dire " $\forall^{st} \varepsilon_0 > 0, \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ". De même, dire  $t$  illimité positif c'est la même chose que de dire " $\forall^{st} T t \geq T$ ". Le résultat  $(x(t), y(t)) \simeq (0, 0)$  est équivalent à  $\forall^{st} \mathcal{O}$  voisinage de l'origine,  $(x(t), y(t)) \in \mathcal{O}$ . Ainsi, la caractérisation de la stabilité asymptotique pratique semiglobale de l'origine est donnée dans le lemme par

$$\forall(\alpha, \beta) \forall \varepsilon \forall t (\exists^{st} \mathcal{K} \forall^{st} \varepsilon_0 \forall^{st} T A \Rightarrow \forall^{st} \mathcal{O} (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}),$$

où  $A$  est la formule interne  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}, \varepsilon \leq \varepsilon_0$  et  $t \geq T$ . Ici,  $f_0$  et  $g_0$  ainsi que  $\Omega_0$  sont des paramètres standard,  $\varepsilon_0$  et  $T$  font partie des nombres réels strictement positifs et  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{O}$  sont des voisinages de l'origine. Par la seconde formule de réduction de (5.1), ceci équivaut à

$$\forall \mathcal{K} \forall \mathcal{O} \exists^{fin} \varepsilon'_0 \exists^{fin} T' \forall(\alpha, \beta) \forall \varepsilon \forall t (\forall \varepsilon_0 \in \varepsilon'_0 \forall T \in T' A \Rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}).$$

Mais  $\varepsilon'_0$  et  $T'$  étant des ensembles finis, il existe  $\varepsilon_0$  et  $T$  tels que  $\varepsilon_0 = \min \varepsilon'_0$  et  $T = \max T'$ . La dernière formule devient

$$\forall \mathcal{K} \forall \mathcal{O} \exists \varepsilon_0 \exists T \forall(\alpha, \beta) \forall \varepsilon \forall t (A \Rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}).$$

C'est exactement la définition du fait que l'origine est SGPAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

On peut aussi établir les caractérisations suivantes, la deuxième étant finalement celle que nous serons amenés à considérer par la suite :

**Lemme 5.3.3** *Supposons que  $f_0$  et  $g_0$  sont standard. L'origine est PAS quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour le système (4.15) si et seulement si il existe un voisinage compact standard  $\mathcal{K} \subset \Omega_0$  de l'origine tel que pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$ , tout  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et tout  $t$  positif illimité, toute solution  $(x(t), y(t))$  de (4.15) de condition initiale  $(\alpha, \beta)$  vérifie  $(x(t), y(t)) \simeq (0, 0)$ .*

**Lemme 5.3.4** *Supposons que  $f_0$  et  $g_0$  sont standard. Un sous-ensemble standard  $\mathcal{M}$  de  $\Omega_0$  est PAS pour le système (4.15) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  si et seulement si il existe un voisinage compact standard  $\mathcal{K} \subset \Omega_0$  de  $\mathcal{M}$  tel que pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$ , tout  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et tout  $t$  positif illimité, toute solution  $(x(t), y(t))$  de (4.15) de condition initiale  $(\alpha, \beta)$  vérifie  $dis((x(t), y(t)), \mathcal{M}) \simeq 0$ .*

## 5.4 S-Stabilité

Revenons au système (5.5) où le champ continu  $f$  n'est pas nécessairement standard. Supposons par exemple que  $f$  est défini sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 5.4.1** *L'origine de (5.5) est dite s-globalement asymptotiquement stable (s-GAS) si pour tout  $x_0$  limité et tout  $t$  positif illimité, toute solution  $x(t)$  de condition initiale  $x_0$  vérifie  $x(t) \simeq 0$ .*

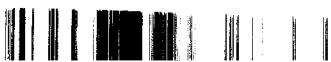
La notion d'équilibre s-GAS est une généralisation<sup>1</sup> aux systèmes non standard de la notion d'équilibre globalement asymptotiquement stable (GAS) correspondant aux systèmes standard. En effet, s-GAS et GAS sont équivalentes si  $f$  est standard (voir [34], Proposition 4.1, page 10). Par exemple, on peut voir que l'origine du système  $\dot{x} = x(\varepsilon x - 1)$ , où  $\varepsilon \simeq 0$ , est s-GAS mais pas GAS. On a aussi la généralisation suivante de la stabilité asymptotique locale.

**Définition 5.4.2** *L'origine de (5.5) est dite s-asymptotiquement stable (s-AS) s'il existe un réel  $R$  standard tel que pour tout  $x_0$  tel que  $\|x_0\| \leq R$  et tout  $t$  positif illimité, toute solution  $x(t)$  de condition initiale  $x_0$  vérifie  $x(t) \simeq 0$ .*

Si le champ  $f$  du système (5.5) est donné sur un ouvert  $U$ , il faudra remplacer dans la définition 5.4.1 l'expression "pour tout  $x_0$  limité" par "pour tout  $x_0$  presque standard dans  $U$ ". D'autre part, dans la définition 5.4.2, l'expression "il existe un réel  $R$  standard tel que pour tout  $x_0$  tel que  $\|x_0\| \leq R$ ..." peut être remplacée par "il existe un voisinage compact standard  $\mathcal{K} \subset U$  de l'origine tel que pour tout  $x_0 \in \mathcal{K}$ ..." Les lemmes 5.3.2 et 5.3.3 disent finalement que si  $f_0$  et  $g_0$  sont standard, l'origine est SGPAS (respectivement PAS) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour le système (4.15) si et seulement si elle est s-GAS (respectivement s-AS) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

<sup>1</sup>Sur les dites s-propriétés en analyse non standard, on peut consulter par exemple [10]. Le préfixe s permet de discerner entre une notion standard et la notion non standard correspondante.





# Chapitre 6

## Enoncés externes

### 6.1 Approximations pour des temps finis

Voici à présent une formulation externe du théorème 3.1.1 :

**Théorème 6.1.1** [33] Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$  standard et  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction standard continue. Supposons vérifiées les hypothèses T1 à T5. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  la solution de l'équation de la couche limite (3.5). Soit  $\bar{y}(t)$  la solution du problème réduit (3.6) et  $T$  un nombre réel standard dans son intervalle positif de définition. Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Alors toute solution  $(x(t), y(t))$  du problème (3.1) est définie au moins sur  $[0, T]$  et il existe  $\omega > 0$  tel que :

$$\begin{aligned}\varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq T, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq T.\end{aligned}$$

Nous énonçons dans ce que suit la version non standard du théorème 3.1.3 où la notation  $x(t) \simeq \Gamma_{y(t)}$  signifie  $\text{dis}(x(t), \Gamma_{y(t)}) \simeq 0$ . Nous prouvons que cette version se réduit exactement au théorème 3.1.3 par l'algorithme de Nelson. Nous donnons ensuite quelques lemmes avant la preuve du théorème.

**Théorème 6.1.2** [52] Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément standard de  $\mathcal{T}$ . Supposons les hypothèses P1 à P4 vérifiées. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de (3.8) et (3.9) et  $L$  un nombre réel standard dans  $I$ , où  $I$  est l'intervalle positif de définition de  $\bar{y}(t)$ . Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Alors toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie au moins sur  $[0, L]$  et il existe  $\omega > 0$  tel



que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq L, \\ x(t) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(t)} \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq L. \end{aligned}$$

**Réduction .** Désignons par  $F$  la formule : “toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie au moins sur  $[0, L]$  et il existe  $\omega > 0$  tel que  $\varepsilon\omega < \eta$ ,  $\|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| < \eta$  pour  $0 \leq \tau \leq \omega$ ,  $\|y(t) - \bar{y}(t)\| < \eta$  pour  $0 \leq t \leq L$  et  $\text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) < \eta$  pour  $\varepsilon\omega \leq t \leq L$  ” et respectivement par  $u_0$  et  $u$  les variables  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta)$  de  $\mathcal{T}$ . Désignons aussi par  $F'$  la formule “toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie au moins sur  $[0, L]$  et il existe  $\omega > 0$  tel que  $\varepsilon\omega \simeq 0$ ,  $x(\varepsilon\tau) \simeq \tilde{x}(\tau)$  pour  $0 \leq \tau \leq \omega$ ,  $y(t) \simeq \bar{y}(t)$  pour  $0 \leq t \leq L$  et  $x(t) \simeq \Gamma_{\bar{y}(t)}$  pour  $\varepsilon\omega \leq t \leq L$ ”. D'autre part, dire que “ $\varepsilon$  est infinitésimal” c'est la même chose que de dire “ $\forall^{st} \varepsilon^*, \varepsilon < \varepsilon^*$ ”, dire “ $u$  est une perturbation de  $u_0$ ” c'est dire “ $u$  est dans tout voisinage standard  $\mathcal{V}$  de  $u_0$ ”. Finalement, la formule  $F'$  est équivalente à la formule  $\forall^{st} \eta F$ . Le théorème 6.1.2 peut alors être formalisé par l'expression

$$\forall \varepsilon \forall u (\forall^{st} \varepsilon^* \forall^{st} \mathcal{V} K \Rightarrow \forall^{st} \eta F), \quad (6.1)$$

où  $K$  désigne la formule  $\varepsilon < \varepsilon^* \ \& \ u \in \mathcal{V}$ . Ici,  $u_0$  et  $L$  sont des paramètres standard,  $u$  compte parmi les éléments de  $\mathcal{T}$ , tandis que  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^*$  font partie des réels positifs et  $\mathcal{V}$  est parmi les voisinages de  $u_0$ . D'après la première formule de réduction de (5.1), (6.1) est équivalente à

$$\forall \eta \exists^{\text{fin}} \varepsilon^* \exists^{\text{fin}} \mathcal{V}' \forall \varepsilon \forall u (\forall \varepsilon^* \in \varepsilon^* \forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}' K \Rightarrow F).$$

Mais,  $\varepsilon^*$  et  $\mathcal{V}'$  étant des ensembles finis, il existe  $\varepsilon^*$  et  $\mathcal{V}$  tels que  $\varepsilon^* = \min \varepsilon^*$  et  $\mathcal{V} = \bigcap_{\mathcal{V}' \in \mathcal{V}'} \mathcal{V}'$  et la dernière formule devient équivalente à

$$\forall \eta \exists \varepsilon^* \exists \mathcal{V} \forall \varepsilon \forall u (K \Rightarrow F).$$

Finalement, le théorème 3.1.3 est vérifié pour tout standard  $u_0$  et  $L \in I$ . Par transfert, il est vérifié pour tout  $u_0$  et tout  $L \in I$ . ■

Le lemme suivant nous permettra de reformuler l'hypothèse P2. C'est une caractérisation externe de la stabilité asymptotique orbitale. Nous le prouverons ainsi que tous les lemmes de ce chapitre, dans le paragraphe 6.4.

**Lemme 6.1.3** *Supposons que l'hypothèse P1 est satisfaite et que  $f_0$  et  $x^*(\tau, y)$  sont standard. Alors  $x^*(\tau, y)$ , comme solution périodique de (3.2), est orbitalement asymptotiquement stable si et seulement si il existe un standard  $a > 0$  tel que toute solution  $\tilde{x}(\tau)$  de (3.2) pour laquelle  $\text{dis}(\tilde{x}(0), \Gamma_y) < a$  peut être prolongée pour tout  $\tau \geq 0$  et satisfait  $\text{dis}(\tilde{x}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$  pour tout  $\tau \simeq +\infty$ .*

Soit  $f_0$  standard. Nous réécrivons  $P2$  de la manière suivante :

$P2'$ : Il existe une famille standard de solutions  $x^*(\tau, y)$  dépendant continûment de  $y \in G$ , où  $G \subset \mathbb{R}^m$  est un compact standard d'intérieur non vide, telle que :

- $x^*(\tau, y)$  est une solution périodique de l'équation rapide (3.2) de période  $T(y) > 0$ .

- L'application  $y \rightarrow T(y)$  est continue.

- Il existe un standard  $a > 0$  tel que, pour tout standard  $y$ , toute solution  $\tilde{x}(\tau)$  de (3.2) pour laquelle  $\text{dis}(\tilde{x}(0), \Gamma_y) < a$  peut être prolongée pour tout  $\tau \geq 0$  et vérifie  $\text{dis}(\tilde{x}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$  pour tout  $\tau \simeq +\infty$ .

Soit à présent l'ensemble  $\mathcal{C} = \bigcup_{y \in G} (\Gamma_y \times \{y\})$  et considérons le système

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Le lemme suivant assure qu'une trajectoire de (6.2) qui arrive infiniment près de  $\mathcal{C}$  reste proche de cet ensemble tant que  $y$  n'est pas infiniment proche du bord de  $G$ . Les principaux outils pour le démontrer sont le Lemme de l'Ombre Courte et le Lemme de Robinson.

**Lemme 6.1.4** *Supposons  $P1$  et  $P2'$  satisfaites. Soit  $(x(t), y(t))$  une solution de (6.2) telle que  $y(t)$  est presque standard dans  $G_0$  pour  $t \in [t_0, t_1]$  et  $x(t_0) \simeq \Gamma_{y(t_0)}$ , alors  $x(t) \simeq \Gamma_{y(t)}$  pour tout  $t$  dans  $[t_0, t_1]$ .*

Le lemme suivant affirme que la composante  $y$  d'une trajectoire de (6.2) qui est infiniment proche de  $\mathcal{C}$  est approchée par une solution de l'équation lente (3.7). Il est démontré à l'aide du Lemme de Stroboscopie et du Lemme de l'Ombre Courte.

**Lemme 6.1.5** *Supposons vérifiées les hypothèses  $P1$ ,  $P2'$  et  $P3$ . Soit  $(x(t), y(t))$  une solution de (6.2) telle que  $y(t_0)$  est presque standard dans  $G_0$ . Soit  $y_0$  standard dans  $G_0$  tel que  $y(t_0) \simeq y_0$  et  $\bar{y}(t)$  la solution de (3.7) de condition initiale  $y_0$  et définie sur l'intervalle standard  $[0, L]$ . Soit  $t_1 \geq t_0$  tel que  $t_1 \leq t_0 + L$  et  $x(t) \simeq \Gamma_{y(t)}$  pour  $t \in [t_0, t_1]$ . Alors  $y(t_0 + s) \simeq \bar{y}(s)$  pour tout  $0 \leq s \leq L$  tel que  $t_0 + s \leq t_1$ .*

**Preuve du théorème 6.1.2 .** Soit  $(x(t), y(t))$  une solution du système (3.1). Alors  $(x(\varepsilon\tau), y(\varepsilon\tau))$  est une solution de

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= \varepsilon g(x, y), \end{aligned}$$





de condition initiale  $(\alpha, \beta)$ . Ce problème est une perturbation régulière de

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= 0, \end{aligned}$$

de condition initiale  $(\alpha_0, \beta_0)$ . D'après le Lemme de l'Ombre Courte,  $x(\varepsilon\tau) \simeq \tilde{x}(\tau)$  et  $y(\varepsilon\tau) \simeq \beta_0$  pour tout  $\tau \geq 0$  limité. Le Lemme de Robinson assure alors l'existence d'un réel  $\omega$  positif illimité tel que ces approximations demeurent vraies pour tout  $\tau \in [0, \omega]$ . On peut choisir  $\omega$  tel que  $\varepsilon\omega \simeq 0$ . D'autre part, d'après les hypothèses P2' et P4,  $\tilde{x}(\tau)$  est définie pour tout  $\tau \geq 0$  et satisfait  $\tilde{x}(\tau) \simeq \Gamma_{\beta_0}$  pour tout  $\tau$  positif et illimité. Cette dernière propriété reste vraie en particulier pour  $\tau = \omega$ , ce qui signifie qu'au bout d'un temps  $t_0 := \varepsilon\omega$  la solution de (3.1) est infiniment proche de  $\Gamma_{\beta_0} \subset \mathcal{C}$ . Supposons qu'il existe  $s \in ]t_0, L]$  tel que  $y(s) \not\simeq \bar{y}(s)$ . Soit  $r > 0$  standard tel que  $\|y(s) - \bar{y}(s)\| \geq r$ . Considérons alors le voisinage tubulaire

$$\mathcal{B} = \{(t, y) : t \in [0, L], y \in G_0 \text{ et } \|\bar{y}(t) - y\| < r\}.$$

Puisque  $\bar{y}(t)$  est presque standard dans  $G_0$ , nous pouvons choisir  $r$  suffisamment petit de manière que pour tout  $(t, y) \in \mathcal{B}$ ,  $y$  est presque standard dans  $G_0$ . Soit alors  $t_1 < L$  la plus petite valeur de  $t$  pour laquelle  $y(t_1)$  est sur le bord de  $\mathcal{B}$ . Le lemme 6.1.4 assure que la solution reste infiniment proche de  $\mathcal{C}$  pour  $t \in [t_0, t_1]$ . Le lemme 6.1.5 permet d'affirmer que  $y(t) \simeq \bar{y}(t)$  pour  $t \leq t_1$ . En particulier,  $y(t_1) \simeq \bar{y}(t_1)$  ce qui contredit  $\|y(t_1) - \bar{y}(t_1)\| = r$ . Ainsi,  $y(t)$  est définie au moins sur  $[0, L]$  et satisfait  $y(t) \simeq \bar{y}(t)$ . Finalement,  $x(t) \simeq \Gamma_{y(t)} \simeq \Gamma_{\bar{y}(t)}$  pour tout  $t$  dans  $[\varepsilon\omega, L]$ . ■

**Remarque 6.1.6** *Il est utile d'ajouter qu'une trajectoire qui est infiniment proche de  $\mathcal{C}$  à un temps  $\bar{t}$  reste près du cycle  $\Gamma_{\bar{y}(\bar{t})}$  le long duquel elle oscille rapidement avec une période approximative de  $\varepsilon T(\bar{y}(\bar{t}))$ . Plus exactement, pour tout  $\bar{t} \in [\varepsilon\omega, L]$ , il existe  $\delta(\bar{t}) \in [0, T(\bar{y}(\bar{t}))]$  tel que pour  $\tau$  limité*

$$x(t) \simeq x^*\left(\frac{t - \bar{t}}{\varepsilon} + \delta(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t})\right).$$

*En effet, soit  $\bar{t} \in [\varepsilon\omega, L]$ . Par ce qui précède,  $x(\bar{t}) \simeq \Gamma_{y(\bar{t})}$ . Soit  $x^\circ$  standard tel que  $x^\circ \simeq x(\bar{t})$  et  $x^\circ \in \Gamma_{y(\bar{t})}$ . Il existe alors  $\delta(\bar{t}) \in [0, T(y(\bar{t}))]$  tel que  $x^*(\delta(\bar{t}), y(\bar{t})) = x^\circ$ . En posant  $\tau = \frac{t - \bar{t}}{\varepsilon}$  dans (6.2), le Lemme de l'Ombre Courte donne l'approximation*

$$x(\bar{t} + \varepsilon\tau) \simeq x^*(\tau + \delta(\bar{t}), y(\bar{t})) \text{ pour } \tau \text{ limité.}$$

*Finalement, l'affirmation est prouvée sachant que  $y(\bar{t}) \simeq \bar{y}(\bar{t})$ .*

## 6.2 Approximations pour des temps infinis

### 6.2.1 Equilibre de la dynamique lente

Les deux théorèmes suivants se réduisent quant à eux respectivement aux théorèmes 3.2.1 et 3.2.2.

**Théorème 6.2.1** [33] Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$  standard et  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction standard continue. Soit  $y_\infty$  un point standard de  $\dot{Y}$ . Supposons vérifiées les hypothèses T1 à T6. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de l'équation de la couche limite (3.5) et du problème réduit (3.6). Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Alors toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } t \geq \varepsilon\omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \geq 0. \end{aligned}$$

La réduction du théorème suivant se fait de la même manière que celle du théorème 6.1.2, à quelques détails près.

**Théorème 6.2.2** [52] Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément standard de  $\mathcal{T}$ . Soit  $\bar{y}_\infty$  un point standard de  $\dot{G}$ . Supposons les hypothèses (P1) à (P5) vérifiées. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de (3.8) et (3.9). Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Alors toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \geq 0, \\ x(t) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(t)} \text{ pour } t \geq \varepsilon\omega. \end{aligned}$$

**Preuve.** D'après le théorème 6.1.2 et l'hypothèse P5, on a

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour tout } t \in [0, L], \\ x(t) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(t)} \text{ pour tout } t \in [\varepsilon\omega, L], \end{aligned}$$

pour tout limité  $L > 0$ . Par le Lemme de Robinson, ces approximations demeurent vraies pour un certain  $L \simeq +\infty$ . Ainsi, en utilisant l'hypothèse



$P5$ ,  $y(L) \simeq \bar{y}(L) \simeq \bar{y}_\infty$  et  $x(L) \simeq \Gamma_{\bar{y}_\infty}$ . L'application à nouveau du théorème 6.1.2 à la solution partant de  $(x(L), y(L))$  donne

$$\begin{aligned} y(L+k) &\simeq \bar{y}_\infty, \\ x(L+k) &\simeq \Gamma_{\bar{y}_\infty} \text{ pour tout limité } k \geq 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Supposons qu'il existe  $s \geq L$  tel que  $y(s)$  n'est pas infiniment proche de  $\bar{y}_\infty$  et cherchons une contradiction. Nous pouvons alors supposer que  $\|y(s) - \bar{y}_\infty\| = \mu$  standard. La valeur  $s$  est choisie de manière que la boule  $\mathcal{B}$  de centre  $\bar{y}_\infty$  et de rayon  $\mu$  soit contenue dans le bassin d'attraction de  $\bar{y}_\infty$ . Soit  $m$  la plus petite valeur de  $s$  ( $m$  existe par compacité du bord  $\partial\mathcal{B}$  et  $\|y(m) - \bar{y}_\infty\| = \mu$ ). De (6.3) on peut voir que  $k_0 := m - L$  est positif nécessairement illimité. La solution partant de  $(x(m), y(m))$  satisfait  $y(m+k) \in \mathcal{B}$  pour tout  $k$  dans  $[-k_0, 0]$ . Soit  $\bar{y}(k)$  la solution de l'équation lente (3.7) avec la condition initiale  $\bar{y}(0) = y_0(m)$ , où  $y_0(m)$  est un standard vérifiant  $y_0(m) \simeq y(m)$ . Le lemme 6.1.5 assure que  $y(m+k) \simeq \bar{y}(k)$  pour tout limité  $k \leq 0$  pourvu que  $x(m+k) \simeq \Gamma_{y(m+k)}$ , ce qui peut être établi par contradiction comme dans la preuve du lemme 6.1.4. D'après le Lemme de Robinson, il existe  $k_1 < 0$  illimité tel que  $y(m+k_1) \simeq \bar{y}(k_1)$  que l'on peut choisir tel que  $-k_0 \leq k_1$ . Ceci signifie que  $\bar{y}(k_1)$  est dans  $\mathcal{B}$ , donc dans le bassin d'attraction de  $\bar{y}_\infty$ . L'hypothèse  $P5$  donne alors  $\bar{y}(k_1+k) \simeq \bar{y}_\infty$  pour tout  $k > 0$  illimité. En particulier, pour  $k = -k_1$ , on a  $\bar{y}(0) \simeq \bar{y}_\infty$ . Mais  $\bar{y}(0) = y_0(m)$  et  $y_0(m) \simeq y(m)$ , donc  $y(m) \simeq \bar{y}_\infty$ , d'où la contradiction. ■

## 6.2.2 Cycle de la dynamique lente

Le théorème suivant se réduit au théorème 3.3.1.

**Théorème 6.2.3** *Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$  standard et  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction standard continue. Supposons vérifiées les hypothèses  $T1$  à  $T5$ . Supposons que l'équation lente (3.4) admet dans  $\dot{Y}$  un cycle  $\Gamma$  standard asymptotiquement stable et que  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de l'équation de la couche limite (3.5) et du problème réduit (3.6). Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Alors toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  et  $\omega' > 0$  tels que :*

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \omega' \simeq +\infty, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'] \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\ \text{dis}(y(t), \Gamma) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega', \\ \text{dis}(x(t), \xi(\Gamma)) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega'. \end{aligned}$$



La preuve du théorème 6.2.3 nécessite deux faits énoncés et démontrés dans [33] sous forme de lemmes de même principe que les lemmes 6.1.4 et 6.1.5. Celui qui suit dit qu'une trajectoire du problème d'origine qui arrive infiniment près de la variété lente ne s'en éloigne pas tant que  $y$  n'est pas infiniment proche du bord de  $Y$ .

**Lemme 6.2.4** ([33] Lemme 9, page 17) *Supposons vérifiées les hypothèses  $T1$ ,  $T2$  et  $T3$ . Soit  $(x(t), y(t))$  une solution de (3.1) telle que  $y(t)$  est presque standard dans  $\dot{Y}$  pour tout  $t$  dans  $[t_0, t_1]$  et  $x(t_0) \simeq \xi(y(t_0))$  alors  $x(t) \simeq \xi(y(t))$  pour tout  $t$  dans  $[t_0, t_1]$ .*

Cet autre affirme que la deuxième composante d'une solution du problème d'origine (3.1) infiniment proche de la variété lente est approchée par une solution de l'équation lente (3.4).

**Lemme 6.2.5** ([33] Lemme 10, page 18) *Supposons vérifiée l'hypothèse  $T4$ . Soit  $y_0$  standard dans  $\dot{Y}$ . Soit  $(x(t), y(t))$  une solution de (3.1) telle que  $x(t) \simeq \xi(y(t))$  pour tout  $t$  dans  $[t_0, t_1]$  et  $y(t_0) \simeq y_0$ . Soit  $\bar{y}(t)$  la solution de l'équation lente (3.4) de condition initiale  $y^0$  et qui est supposée définie sur l'intervalle standard  $[0, T]$ . Alors  $y(t_0 + s) \simeq \bar{y}(s)$  pour tout  $s \leq T$  tel que  $t_0 + s \leq t_1$ .*

**Preuve du théorème 6.2.3.** Soit  $(x(t), y(t))$  une solution du problème (3.1). Etant donné que l'équation lente (3.4) admet dans  $\dot{Y}$  un cycle  $\Gamma$  asymptotiquement stable et que  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction, la solution  $\bar{y}(t)$  du problème réduit (3.6) est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie  $\text{dis}(\bar{y}(t), \Gamma) \simeq 0$  pour  $t \simeq +\infty$ . Cela, en plus des hypothèses  $T1$  à  $T5$ , nous permet d'affirmer grâce au théorème 6.1.1 qu'il existe  $\omega > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq T, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

pour tout standard  $T > 0$ . Par le Lemme de Robinson, ces approximations demeurent vraies jusqu'à une valeur  $\omega'$  telle que  $\omega' \simeq +\infty$ . Nous avons alors  $y(\omega') \simeq \bar{y}(\omega') \simeq \Gamma$  et  $x(\omega') \simeq \xi(\bar{y}(\omega')) \simeq \xi(\Gamma)$ . En appliquant à nouveau le théorème 6.1.1 à la solution partant de  $(x(\omega'), y(\omega'))$  on a<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} y(\omega' + k) &\simeq \Gamma, \\ x(\omega' + k) &\simeq \xi(\Gamma) \text{ pour tout } k \geq 0 \text{ limité.} \end{aligned} \tag{6.4}$$

<sup>1</sup>Par abus de notation, si  $p$  est un point et  $E$  est un ensemble, nous transcrivons là aussi  $\text{dis}(p, E) \simeq 0$  par  $p \simeq E$ .

Supposons alors qu'il existe  $s \geq \omega'$  tel que  $y(s)$  n'est pas infiniment proche de  $\Gamma$ , c'est-à-dire qu'il existe un nombre standard  $\mu$  tel que  $\text{dis}(y(s), \Gamma) = \mu$ . La valeur  $s$  est choisie de manière que l'ensemble  $\mathcal{A} = \{y \in \mathbb{R}^m : \text{dis}(y, \Gamma) \leq \mu\}$  soit contenu dans le bassin d'attraction de  $\Gamma$ . Soit  $m$  la plus petite valeur d'un tel  $s$  ( $m$  existe par compacité du bord  $\partial\mathcal{A}$  et  $\text{dis}(y(m), \Gamma) = \mu$ ). La composante  $y(t)$  est donc limitée (presque standard dans  $Y$ ) pour tout  $t$  dans  $[\omega', m]$ . D'après le lemme 6.2.4,  $x(t) \simeq \xi(y(t))$  pour tout  $t$  dans  $[\omega', m]$ . De (6.4), il est clair que le temps  $k_0 := m - \omega'$  mis pour aller de  $(x(\omega'), y(\omega'))$  à  $(x(m), y(m))$  est positif illimité. La solution partant de  $(x(m), y(m))$  satisfait  $y(m+k) \in \mathcal{A}$  pour tout  $k$  dans  $[-k_0, 0]$ . Soit  $\bar{y}(k)$  la solution de l'équation lente (3.4) avec la condition initiale  $\bar{y}(0) = y_0(m)$ , où  $y_0(m)$  est un standard vérifiant  $y_0(m) \simeq y(m)$ . Le lemme 6.2.5 assure que  $y(m+k) \simeq \bar{y}(k)$  pour tout  $k \leq 0$  limité. D'après le Lemme de Robinson, il existe  $k_1 < 0$  illimité tel que  $y(m+k_1) \simeq \bar{y}(k_1)$  qui peut être choisi tel que  $-k_0 \leq k_1$ . Ceci signifie que  $\bar{y}(k_1)$  est dans  $\mathcal{A}$  (donc dans le bassin d'attraction de  $\Gamma$ ) et l'hypothèse de stabilité asymptotique de  $\Gamma$  donne  $\bar{y}(k_1+k) \simeq \Gamma$  pour tout  $k > 0$  illimité. En particulier, pour  $k = -k_1$ , on a  $\bar{y}(0) \simeq \Gamma$ . Mais  $\bar{y}(0) = y_0(m)$  et  $y_0(m) \simeq y(m)$ , donc  $y(m) \simeq \Gamma$ , d'où la contradiction. ■

Enfin, la réduction du théorème ci-dessus n'est autre que le théorème interne 3.3.2.

**Théorème 6.2.6** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément standard de  $\mathcal{T}$ . Supposons les hypothèses P1 à P4 vérifiées. Supposons que l'équation lente (3.7) admet un cycle standard  $\Lambda$  dans  $\hat{G}$  qui soit asymptotiquement stable et que  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction. Soit  $\bar{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de (3.8) et (3.9). Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Alors toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  et  $\omega' > 0$  tels que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \omega' \simeq +\infty, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \bar{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &\simeq 0 \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'], \\ \text{dis}(y(t), \Lambda) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega', \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{y(t)}) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega'. \end{aligned}$$

**Preuve.** Soit  $(x(t), y(t))$  une solution du problème (3.1). Etant donné que l'équation lente (3.7) admet dans  $\hat{G}$  un cycle  $\Lambda$  asymptotiquement stable et que  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction, la solution  $\bar{y}(t)$  du problème réduit (3.9) est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie  $\text{dis}(\bar{y}(t), \Lambda) \simeq 0$  pour  $t \simeq +\infty$ . D'après le théorème 6.1.2 et la propriété précédente de  $\bar{y}(t)$ , il existe  $\omega > 0$

tel que

$$\begin{aligned}\varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq L, \\ x(t) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(t)} \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq L.\end{aligned}$$

pour tout limité  $L > 0$ . Par le Lemme de Robinson, ces approximations demeurent vraies pour une certaine valeur  $\omega'$  de  $L$  illimitée. Ainsi, nous obtenons  $y(\omega') \simeq \bar{y}(\omega') \simeq \Lambda$  et  $x(\omega') \simeq \Gamma_{\bar{y}(\omega')}$ . En appliquant encore le théorème 6.1.2 à la solution partant de  $(x(\omega'), y(\omega'))$  on a

$$\begin{aligned}y(\omega' + k) &\simeq \Lambda, \\ x(\omega' + k) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(\omega')} \text{ pour tout limité } k \geq 0.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Supposons qu'il existe  $s \geq \omega'$  tel que  $y(s)$  n'est pas infiniment proche de  $\Lambda$  et cherchons une contradiction. Nous pouvons supposer que  $\|y(s) - \bar{y}_\infty\| = \mu$  standard. Choisissons  $s$  de manière que l'ensemble  $\mathcal{A} = \{y \in \mathbb{R}^m : \text{dis}(y, \Lambda) \leq \mu\}$  soit contenu dans le bassin d'attraction de  $\Lambda$ . Soit  $m$  la plus petite valeur de  $s$ . De (6.5) on déduit que  $k_0 := m - \omega'$  est positif illimité. La solution partant de  $(x(m), y(m))$  satisfait  $y(m+k) \in \mathcal{A}$  pour tout  $k$  dans  $[-k_0, 0]$ . Soit  $\bar{y}(k)$  la solution de l'équation lente (3.7) avec la condition initiale  $\bar{y}(0) = y_0(m)$ , où  $y_0(m)$  est un standard vérifiant  $y_0(m) \simeq y(m)$ . Le lemme 6.1.5 assure que  $y(m+k) \simeq \bar{y}(k)$  pour tout limité  $k \leq 0$  pourvu que  $x(m+k) \simeq \Gamma_{y(m+k)}$ , ce qui peut être établi par contradiction comme dans la preuve du lemme 6.1.4. D'après le Lemme de Robinson, il existe  $k_1 < 0$  illimité tel que  $y(m+k_1) \simeq \bar{y}(k_1)$  que l'on peut choisir tel que  $-k_0 \leq k_1$ . Ceci signifie que  $\bar{y}(k_1)$  est dans  $\mathcal{A}$ , donc dans le bassin d'attraction de  $\Lambda$ . L'hypothèse de stabilité asymptotique de  $\Lambda$  donne alors  $\bar{y}(k_1+k) \simeq \Lambda$  pour tout  $k > 0$  illimité. En particulier, pour  $k = -k_1$ , on a  $\bar{y}(0) \simeq \Lambda$ . Il en découle que  $y(m) \simeq \Lambda$ , ce qui est absurde. Finalement, pour tout  $t \geq \omega'$ ,  $y(t) \simeq \Lambda$  et  $x(t) \simeq \Gamma_{y(t)}$ . ■

### 6.2.3 Sous-ensembles invariants

Lorsque l'équation réduite admet un sous-ensemble invariant asymptotiquement stable, il est naturel d'énoncer les deux théorèmes suivants dont les preuves sont tout à fait analogues à celles respectives des théorèmes 6.2.3 et 6.2.6. Ils concernent les cas respectifs d'une dynamique rapide avec équilibres puis cycles asymptotiquement stables. Nous aurions pu les démontrer en premier lieu et considérer les résultats des sous-paragraphes précédents comme des corollaires, mais nous avons préféré mettre en exergue des formulations plus à même de trouver des applications pratiques.

**Théorème 6.2.7** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$  standard et  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction standard continue. Supposons vérifiées les hypothèses T1 à T5. Supposons que l'équation lente (3.4) admet dans  $\dot{Y}$  un sous-ensemble invariant  $\mathcal{M}$  standard asymptotiquement stable et que  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de l'équation de la couche limite (3.5) et du problème réduit (3.6). Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Alors toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  et  $\omega' > 0$  tels que :

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \omega' \simeq +\infty, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'], \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\ \text{dis}(y(t), \mathcal{M}) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega', \\ \text{dis}(x(t), \xi(\mathcal{M})) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega'. \end{aligned}$$

**Théorème 6.2.8** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$  un élément standard de  $\mathcal{T}$ . Supposons les hypothèses P1 à P4 vérifiées. Supposons que l'équation lente (3.7) admet un sous-ensemble invariant  $\mathcal{M}$  dans  $\dot{G}$  qui soit asymptotiquement stable et que  $\beta_0$  est dans son bassin d'attraction. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  et  $\bar{y}(t)$  les solutions respectives de (3.8) et (3.9). Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal et  $(\Omega, f, g, \alpha, \beta) \in \mathcal{T}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . Alors toute solution  $(x(t), y(t))$  de (3.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et il existe  $\omega > 0$  et  $\omega' > 0$  tels que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \omega' \simeq +\infty, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &\simeq 0 \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'], \\ \text{dis}(y(t), \mathcal{M}) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega', \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{y(t)}) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega'. \end{aligned}$$

### 6.3 Théorèmes de stabilité pratique

Les réductions respectives des quatre théorèmes de stabilité pratique suivants sont les théorèmes 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.5. Ils découlent de résultats plus généraux que nous énonçons et prouvons juste après.

**Théorème 6.3.1** Soit  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  standard continues sur un ouvert (standard)  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et vérifiant les hypothèses T1 à T4. Supposons qu'il existe un point d'équilibre standard  $y_\infty \in \dot{Y}$  de l'équation lente (3.4) qui soit asymptotiquement stable. Alors le point  $(\xi(y_\infty), y_\infty)$  de la variété lente est s-AS pour le système (4.15) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

**Théorème 6.3.2** Soit  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  standard continues sur un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et vérifiant les hypothèses P1 à P3. Supposons que l'équation lente (3.7) admet dans  $\dot{G}$  un point d'équilibre  $\bar{y}_\infty$  asymptotiquement stable. Alors le sous-ensemble  $\Gamma_{\bar{y}_\infty} \times \{\bar{y}_\infty\}$  de  $\Omega_0$  est s-AS pour le système (4.15) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

**Théorème 6.3.3** Soit  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  standard continues sur un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  vérifiant les hypothèses T1 à T4. Supposons que l'équation lente (3.4) admet dans  $\dot{Y}$  un cycle  $\Gamma$  asymptotiquement stable. Alors le sous-ensemble  $\xi(\Gamma) \times \Gamma$  de la variété lente est s-AS pour le système (4.15) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

**Théorème 6.3.4** Soit  $f_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  standard continues sur un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et vérifiant les hypothèses P1 à P3. Supposons que l'équation lente (3.7) admet un cycle  $\Lambda$  dans  $\dot{G}$  qui soit asymptotiquement stable. Alors le tore  $\bigcup_{y \in \Lambda} (\Gamma_y \times \{y\})$  dans  $\Omega_0$  est s-AS pour le système (4.15) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

Introduisons à ce niveau l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{(\Omega, f, g) : \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n+m}, \\ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continues}\}$$

pour lequel nous définissons la notion de perturbation d'un élément standard  $(\Omega_0, f_0, g_0)$  de manière analogue à celle de la définition 5.2.1. Soit à présent, correspondant à un élément  $(\Omega, f, g)$  de  $\mathcal{U}$ , le système lent-rapide

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{6.6}$$

**Théorème 6.3.5** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0)$  un élément standard de  $\mathcal{U}$  vérifiant les hypothèses T1 à T4. Supposons qu'il existe un point d'équilibre  $y_\infty \in \dot{Y}$  de l'équation lente (3.4) qui soit asymptotiquement stable. Alors, pour toute perturbation  $(\Omega, f, g)$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0)$ , le point  $(\xi(y_\infty), y_\infty)$  de la variété lente est s-AS pour le système (6.6) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

**Preuve.** Soit  $a > 0$  la borne uniforme donnée par l'hypothèse T3. Soit  $b > 0$  un réel standard tel que la boule fermée de  $\mathbb{R}^m$  de centre  $y_\infty$  et de rayon  $b$  soit incluse dans le bassin d'attraction de  $y_\infty$  (le tout étant dans  $\dot{Y}$ ). Considérons le voisinage compact

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \Omega_0 : \|x - \xi(y)\| \leq a/2, \|y - y_\infty\| \leq b\}.$$



La première norme est une norme dans  $\mathbb{R}^n$  et la seconde dans  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $(\Omega, f, g) \in \mathcal{U}$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0)$ . Les éléments de  $\mathcal{K}$  sont presque standard dans  $\Omega_0$ . Or  $\Omega$  contient tous les éléments presque standard dans  $\Omega_0$ , donc  $\mathcal{K} \subset \Omega$ . Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$ . Montrons que pour tout  $\varepsilon \simeq 0$ , toute solution  $(x(t), y(t))$  de

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y), & x(0) &= \alpha, \\ \dot{y} &= g(x, y), & y(0) &= \beta, \end{aligned} \quad (6.7)$$

est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie  $(x(t), y(t)) \simeq (\xi(y_\infty), y_\infty)$  pour tout  $t \simeq +\infty$ . Soit pour cela  $(\alpha_0, \beta_0)$  standard tel que  $(\alpha, \beta) \simeq (\alpha_0, \beta_0)$ . Le sous-ensemble  $\mathcal{K}$  de  $\Omega_0$  étant compact, il contient  $(\alpha_0, \beta_0)$ . Par construction de  $\mathcal{K}$ , l'hypothèse T5 du théorème 6.2.1 est vérifiée pour cet élément  $(\alpha_0, \beta_0)$ . D'après ce même théorème, toute solution  $(x(t), y(t))$  de (6.7) est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie entre autres

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } t > 0, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \geq 0, \end{aligned}$$

où  $\bar{y}(t)$  est la solution du problème réduit (3.6). La stabilité asymptotique de  $y_\infty$  et la continuité de  $\xi$  assurent que, pour tout  $t \simeq +\infty$ ,  $\bar{y}(t) \simeq y_\infty$  et  $x(t) \simeq \xi(y_\infty)$ . ■

**Théorème 6.3.6** *Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0)$  un élément standard de  $\mathcal{U}$  vérifiant les hypothèses P1 à P3. Supposons que l'équation lente (3.7) admet dans  $\dot{G}$  un point d'équilibre  $\bar{y}_\infty$  asymptotiquement stable. Alors, pour toute perturbation  $(\Omega, f, g)$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0)$ , le sous-ensemble  $\Gamma_{\bar{y}_\infty} \times \{\bar{y}_\infty\}$  de  $\Omega_0$  est s-AS pour le système (6.6) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.*

**Preuve.** Soit  $a > 0$  la borne uniforme donnée par l'hypothèse P2' et  $b > 0$  un réel standard tel que la boule fermée de  $\mathbb{R}^m$  de centre  $\bar{y}_\infty$  et de rayon  $b$  soit incluse dans le bassin d'attraction de  $\bar{y}_\infty$ . Considérons le voisinage compact de  $\Gamma_{\bar{y}_\infty} \times \{\bar{y}_\infty\}$  défini par

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \Omega_0 : \text{dis}(x, \Gamma_y) \leq a/2, \|y - \bar{y}_\infty\| \leq b\}.$$

Soit  $(\Omega, f, g)$  une perturbation de  $(\Omega_0, f_0, g_0)$ . Etant donné que  $\Omega$  contient tous les éléments presque standard dans  $\Omega_0$ ,  $\mathcal{K} \subset \Omega$ . Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$ . Montrons que pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal positif, toute solution  $(x(t), y(t))$  de (6.7) est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie  $(x(t), y(t)) \simeq \Gamma_{\bar{y}_\infty} \times \{\bar{y}_\infty\}$  pour tout  $t \simeq +\infty$ . Soit  $(\alpha_0, \beta_0)$  standard tel que  $(\alpha, \beta) \simeq (\alpha_0, \beta_0)$ . Par compacité de  $\mathcal{K}$ ,  $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{K}$ . Le théorème 6.2.2 et la construction de  $\mathcal{K}$  permettent d'affirmer que toute solution  $(x(t), y(t))$  de (6.7) est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \geq 0, \\ x(t) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(t)} \text{ pour } t > 0, \end{aligned}$$

où  $\bar{y}(t)$  est la solution du problème réduit (3.9). Par stabilité asymptotique de  $\bar{y}_\infty$ , on sait alors que  $y(t) \simeq \bar{y}_\infty$  et  $x(t) \simeq \Gamma_{\bar{y}_\infty}$  pour tout  $t \simeq +\infty$ . Le point  $(\alpha, \beta)$  étant arbitraire dans le voisinage  $\mathcal{K}$  de la courbe fermée  $\Gamma_{\bar{y}_\infty} \times \{\bar{y}_\infty\}$  de  $\Omega_0$ , la propriété de s-stabilité asymptotique de cette dernière quand  $\varepsilon \simeq 0$  en découle. ■

**Théorème 6.3.7** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0)$  un élément standard de  $\mathcal{U}$  vérifiant les hypothèses T1 à T4. Supposons que l'équation lente (3.4) admet dans  $\dot{Y}$  un cycle  $\Gamma$  asymptotiquement stable. Alors, pour toute perturbation  $(\Omega, f, g)$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0)$ , le sous-ensemble  $\xi(\Gamma) \times \Gamma$  de la variété lente est s-AS pour le système (6.6) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

**Preuve.** Le procédé étant semblable à celui des deux théorèmes précédents, nous nous contentons de définir le voisinage compact

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \Omega_0 : \|x - \xi(y)\| \leq a/2, \text{dis}(y, \Gamma) \leq b\}$$

de la courbe fermée  $\xi(\Gamma) \times \Gamma$  de la variété lente. Le résultat de sa s-stabilité asymptotique pour  $\varepsilon \simeq 0$  découle alors du théorème 6.2.3. ■

**Théorème 6.3.8** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0)$  un élément standard de  $\mathcal{U}$  vérifiant les hypothèses P1 à P3. Supposons que l'équation lente (3.7) admet un cycle  $\Lambda$  dans  $\dot{G}$  qui soit asymptotiquement stable. Alors, pour toute perturbation  $(\Omega, f, g)$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0)$ , le tore  $\bigcup_{y \in \Lambda} (\Gamma_y \times \{y\})$  dans  $\Omega_0$  est s-AS pour le système (6.6) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

**Preuve.** Il suffit de considérer le voisinage compact

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \Omega_0 : \text{dis}(x, \Gamma_y) \leq a, \text{dis}(y, \Lambda) \leq b\}$$

du tore  $\bigcup_{y \in \Lambda} (\Gamma_y \times \{y\})$  et d'utiliser le théorème 6.2.6 pour obtenir la s-stabilité asymptotique du tore quand  $\varepsilon \simeq 0$ . ■

Voici deux autres résultats qui s'établissent de la même manière. Notez que les sous-ensembles invariants qui y sont considérés sont nécessairement bornés car inclus dans des compacts.

**Théorème 6.3.9** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0)$  un élément standard de  $\mathcal{U}$  vérifiant les hypothèses T1 à T4. Supposons que l'équation lente (3.4) admet dans  $\dot{Y}$  un sous-ensemble invariant  $\mathcal{M}$  asymptotiquement stable. Alors, pour toute perturbation  $(\Omega, f, g)$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0)$ , le sous-ensemble  $\xi(\mathcal{M}) \times \mathcal{M}$  de la variété lente est s-AS pour le système (6.6) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.



**Théorème 6.3.10** Soit  $(\Omega_0, f_0, g_0)$  un élément standard de  $\mathcal{U}$  vérifiant les hypothèses P1 à P3. Supposons que l'équation lente (3.7) admet un sous-ensemble invariant  $\mathcal{M}$  dans  $\dot{G}$  qui soit asymptotiquement stable. Alors, pour toute perturbation  $(\Omega, f, g)$  de  $(\Omega_0, f_0, g_0)$ , le sous-ensemble  $\bigcup_{y \in \mathcal{M}} (\Gamma_y \times \{y\})$  de  $\Omega_0$  est  $s$ -AS pour le système (6.6) pour tout  $\varepsilon$  infinitésimal.

## 6.4 Preuve des lemmes

### 6.4.1 Preuve du lemme 6.1.3

Supposons que la solution périodique  $x^*(\tau, y)$  est orbitalement asymptotiquement stable. Par attractivité, son orbite  $\Gamma_y$  possède un bassin d'attraction standard  $\mathcal{V}$ . Soit  $a > 0$  standard tel que l'adhérence de l'ensemble  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dis}(x, \Gamma_y) < a\}$  est incluse dans  $\mathcal{V}$ . Soit  $\alpha \in \mathcal{A}$  et  $\tilde{x}(\tau)$  la solution de (3.2) telle que  $\tilde{x}(0) = \alpha$ . Soit  $\alpha_0$  standard dans  $\mathcal{V}$  tel que  $\alpha \simeq \alpha_0$ . Par attractivité de  $\Gamma_y$ , la solution  $\tilde{x}_0(\tau)$  de (3.2) partant de  $\alpha_0$  est définie pour tout  $\tau \geq 0$  et vérifie  $\text{dis}(\tilde{x}_0(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$  pour tout  $\tau \simeq +\infty$ . D'après le Lemme de l'Ombre Courte,  $\tilde{x}(\tau) \simeq \tilde{x}_0(\tau)$  pour tout  $\tau > 0$  limité. D'après le Lemme de Robinson, il existe  $v \simeq +\infty$  tel que  $\tilde{x}(\tau) \simeq \tilde{x}_0(\tau)$  pour tout  $\tau$  dans  $[0, v]$ . Ainsi,  $\text{dis}(\tilde{x}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$  pour tout  $\tau \leq v$  limité. Par stabilité de l'orbite fermée, cette approximation demeure vraie pour tout  $\tau > v$ . Par conséquent,  $\text{dis}(\tilde{x}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$  pour tout  $\tau \geq 0$ .

Réciproquement, si l'orbite  $\Gamma_y$  vérifie la propriété du lemme, alors par définition l'ensemble standard  $\mathcal{A}$  est dans le bassin d'attraction de  $\Gamma_y$ . L'orbite fermée considérée est donc attractive. Soit  $\tilde{x}(\tau)$  la solution de (3.2) telle que  $\tilde{x}(0) = \alpha$ , où  $\alpha$  est infiniment proche d'un standard  $\alpha_0 \in \Gamma_y$ . Puisque  $\alpha \in \mathcal{A}$ , par hypothèse,  $\tilde{x}(\tau)$  est prolongeable pour tout  $\tau \geq 0$  et satisfait  $\text{dis}(\tilde{x}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$  pour tout  $\tau \simeq +\infty$ . D'autre part, si  $\tilde{x}_0(\tau)$  est la solution maximale de (3.2) telle que  $\tilde{x}_0(0) = \alpha_0$ , sa trajectoire est l'orbite  $\Gamma_y$ . De là, d'après le Lemme de l'Ombre Courte,  $\text{dis}(\tilde{x}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$  pour tout  $\tau \geq 0$  limité. Finalement,  $\Gamma_y$  est stable.

### 6.4.2 Preuve du lemme 6.1.4

Soit  $y_0$  standard dans  $G_0$  et soit  $x_0$  standard dans  $\Gamma_{y_0}$  tels que  $x(t_0) \simeq x_0$  et  $y(t_0) \simeq y_0$ . Comme fonction de  $\tau$ ,  $(x(t_0 + \varepsilon\tau), y(t_0 + \varepsilon\tau))$  est une solution du système

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= \varepsilon g(x, y), \end{aligned} \tag{6.8}$$

de condition initiale  $(x(t_0), y(t_0))$ . Ce problème à valeur initiale est une perturbation régulière du système

$$\begin{aligned} x' &= f_0(x, y), \\ y' &= 0, \end{aligned} \quad (6.9)$$

de condition initiale  $(x_0, y_0)$ . D'après le Lemme de l'Ombre Courte, nous obtenons

$$x(t_0 + \varepsilon\tau) \simeq \Gamma_{y_0}, \quad y(t_0 + \varepsilon\tau) \simeq y_0 \text{ pour } \tau \geq 0 \text{ limité.} \quad (6.10)$$

Supposons qu'il existe un  $s$  dans  $]t_0, t_1]$  tel que  $\text{dis}(x(s), \Gamma_{y(s)}) = \gamma_0$  n'est pas infinitésimale. Puisque la stabilité asymptotique des cycles  $\Gamma_y$  est uniforme sur  $G$ , il existe  $a > 0$  satisfaisant la propriété de l'hypothèse (P2'). Soit  $\gamma < \gamma_0$  tel que  $0 \ll \gamma \leq a$  et choisissons  $s \in ]t_0, t_1]$  tel que  $\text{dis}(x(s), \Gamma_{y(s)}) = \gamma$ . Puisque  $\text{dis}(x(t_0), \Gamma_{y(t_0)}) \simeq 0$  et  $y(t)$  est presque standard dans  $G_0$  pour tout  $t \in [t_0, s]$ , il existe une plus petite valeur  $m \in ]t_0, t_1]$  de  $s$  tel que  $\text{dis}(x(m), \Gamma_{y(m)}) = \gamma$  et un standard  $(x_1, y_1)$  tel que  $y_1 \in G_0$  et  $(x_1, y_1) \simeq (x(m), y(m))$ . Si  $\tau_0 = \frac{m - t_0}{\varepsilon}$  était limité, par (6.10) nous aurions  $x(m) \simeq \Gamma_{y_0}$  et  $y(m) \simeq y_0$ , d'où  $x(m) \simeq \Gamma_{y(m)}$ . Ceci contredit le fait que  $\text{dis}(x(m), \Gamma_{y(m)}) = \gamma$ . La valeur  $\tau_0$  est donc illimitée. Considérons la solution  $(x(m + \varepsilon\tau), y(m + \varepsilon\tau))$  de (6.8) avec la condition initiale  $(x(m), y(m))$ . Ce problème est une perturbation régulière de (6.9) de condition initiale  $(x_1, y_1)$ , de solution maximale  $(\tilde{x}(\tau), y_1)$ . D'après le Lemme de l'Ombre Courte,  $x(m + \varepsilon\tau) \simeq \tilde{x}(\tau)$  et  $y(m + \varepsilon\tau) \simeq y_1$  pour tout  $\tau \leq 0$  limité. D'après le Lemme de Robinson, il existe  $\tau_1 < 0$  illimité, pouvant être choisi tel que  $-\tau_0 < \tau_1$ , satisfaisant encore  $x(m + \varepsilon\tau_1) \simeq \tilde{x}(\tau_1)$ . En notant que  $\text{dis}(x(m + \varepsilon\tau), \Gamma_{y(m + \varepsilon\tau)}) < \gamma$  pour tout  $\tau \in [-\tau_0, 0[$ , nous aurons en particulier  $\text{dis}(\tilde{x}(\tau_1), \Gamma_{y_1}) < \gamma \leq a$ . D'après l'hypothèse (P2'),  $\tilde{x}(\tau_1 + \tau)$  est définie pour tout  $\tau \geq 0$  et satisfait  $\tilde{x}(\tau_1 + \tau) \simeq \Gamma_{y_1}$  pour tout  $\tau$  positif illimité. En particulier, pour  $\tau = -\tau_1$ ,  $\tilde{x}(0) \simeq \Gamma_{y_1}$  i.e.  $x(m) \simeq \Gamma_{y_1} \simeq \Gamma_{y(m)}$ . C'est une contradiction avec le fait que  $\text{dis}(x(m), \Gamma_{y(m)}) = \gamma$ .

### 6.4.3 Preuve du lemme 6.1.5

Considérons la collection externe  $I = \{t \geq t_0 : (x(t), y(t)) \text{ est définie et } x(s) \simeq \Gamma_{y(s)} \text{ pour tout } s \in [t_0, t]\}$  qui contient donc l'intervalle  $[t_0, t_1]$ . Montrons que  $y(t)$  satisfait l'hypothèse (i) du Lemme de Stroboscopie (Théorème 5.1.3). Soit  $\mu = \varepsilon \min_{y \in G} T(y)$ . Puisque  $T$  est continue et  $G$  est compact,  $\mu > 0$ .

Soit  $t_\lambda$  limité dans  $[t_0, t_1[$  tel que  $y(t_\lambda)$  est presque standard dans  $G_0$ . Le changement de variables

$$\tau = \frac{t - t_\lambda}{\varepsilon}, \quad Y(\tau) = \frac{y(t_\lambda + \varepsilon\tau) - y(t_\lambda)}{\varepsilon},$$

transforme le problème (6.2) de condition initiale  $(x(t_\lambda), y(t_\lambda))$  en

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y(t_\lambda) + \varepsilon Y), \\ Y' &= g(x, y(t_\lambda) + \varepsilon Y), \end{aligned}$$

de condition initiale  $(x(t_\lambda), 0)$ . La solution du dernier système est notée  $(x(\tau), Y(\tau))$ . Pour  $\tau$  et  $Y$  limités, ce problème est une perturbation régulière de

$$\begin{aligned} x' &= f_0(x, y_\lambda), \\ Y' &= g_0(x, y_\lambda), \end{aligned} \quad (6.11)$$

de condition initiale  $(x_\lambda, 0)$ , où  $x_\lambda$  et  $y_\lambda$  sont standard et tels que  $x_\lambda \simeq x(t_\lambda)$ ,  $y_\lambda \simeq y(t_\lambda)$ . Le Lemme de l'Ombre Courte donne

$$\begin{aligned} x(\tau) &\simeq x_0(\tau), \\ Y(\tau) &\simeq Y_0(\tau), \end{aligned} \quad (6.12)$$

pour tout  $\tau$  limité, où  $(x_0(\tau), Y_0(\tau))$  est la solution de (6.11) de condition initiale  $(x_\lambda, 0)$ . Par conséquent, sachant que  $x(t_\lambda) \simeq \Gamma_{y(t_\lambda)} \simeq \Gamma_{y_\lambda}$  et que  $x_\lambda$  et  $\Gamma_{y_\lambda}$  sont standard, il vient que  $x_\lambda \in \Gamma_{y_\lambda}$ . La première équation de (6.11) n'est rien d'autre que l'équation rapide (3.2) de condition initiale  $x_\lambda$  et de paramètre  $y = y_\lambda$ . Il existe  $\tau_\lambda \in [0, T(y_\lambda)]$  tel que  $x^*(\tau_\lambda, y_\lambda) = x_\lambda$ . D'où

$$x_0(\tau) = x^*(\tau + \tau_\lambda, y_\lambda), \quad Y_0(\tau) = \int_0^\tau g_0(x^*(s + \tau_\lambda, y_\lambda), y_\lambda) ds.$$

En utilisant (6.11) et (6.12) et la périodicité de  $x^*$ , nous avons

$$Y(T(y_\lambda)) \simeq \int_0^{T(y_\lambda)} g_0(x^*(s, y_\lambda), y_\lambda) ds. \quad (6.13)$$

Considérons à présent l'instant  $t_\nu := t_\lambda + \varepsilon T(y_\lambda)$ . Nous affirmons que  $t_\nu \in I$ , c'est-à-dire que  $x(s) \simeq \Gamma_{y(s)}$  pour tout  $s$  dans  $[t_0, t_\nu]$ . Etant donné que  $t_\lambda$  est dans  $I$ , cette propriété est vérifiée pour tout  $s$  dans  $[t_0, t_\lambda]$ . Il reste à montrer qu'elle l'est aussi pour tout  $s$  dans  $[t_\lambda, t_\nu]$ . En effet, soit  $s = t_\lambda + \varepsilon\tau$ . Nous avons

$$y(s) = y(t_\lambda + \varepsilon\tau) + \varepsilon Y(\tau) \simeq y(t_\lambda)$$

pour tout  $\tau$  dans  $[0, T(y_\lambda)]$ . Puisque  $y(t_\lambda)$  est presque standard dans  $G_0$  et  $x(t_\lambda) \simeq \Gamma_{y(t_\lambda)}$ , d'après le lemme 6.1.4 nous avons  $x(s) \simeq \Gamma_{y(s)}$  pour tout  $s$  dans  $[t_\lambda, t_\nu]$ .

Nous avons donc montré que, pour  $t_\lambda$  limité dans  $I$  et  $y(t_\lambda)$  presque standard dans  $G_0$ , il existe  $t_\nu$  tel que  $0 \simeq t_\nu - t_\lambda \geq \mu$ ,  $[t_\lambda, t_\nu] \subset I$ , et  $y(s) \simeq y(t_\lambda)$  pour tout  $s$  dans  $[t_\lambda, t_\nu]$ . D'après (6.13), nous avons

$$\frac{y(t_\nu) - y(t_\lambda)}{t_\nu - t_\lambda} = \frac{Y(T(y_\lambda))}{T(y_\lambda)} \simeq \bar{g}_0(y_\lambda) \simeq \bar{g}_0(y(t_\lambda)).$$



D'après le Lemme de Stroboscopie,  $[t_0, t_0 + L] \subset I$  et  $y(t_0 + s) \simeq \bar{y}(s)$  pour tout  $0 \leq s \leq L$ . Par conséquent, cette approximation est valable pour tout  $s$  tel que  $t_0 + s \leq t_1$ .



# Chapitre 7

## Application à un modèle d'écologie

### 7.1 Présentation du modèle

Le modèle classique à trois niveaux trophiques est donné par

$$\begin{cases} dX/dT = U^*(X) - YV_1^*(X), \\ dY/dT = E_1^*YV_1^*(X) - D_1^*Y - ZV_2^*(Y), \\ dZ/dT = E_2^*ZV_2^*(Y) - D_2^*Z. \end{cases} \quad (7.1)$$

Les variables positives  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les densités respectives de la proie, du prédateur et du superprédateur,  $U^*(X)$  la *fonction de croissance* de la proie,  $V_1^*(X)$  et  $V_2^*(Y)$  les *réponses fonctionnelles* du prédateur et du superprédateur,  $D_1^*$  et  $D_2^*$  les taux de mortalité respectifs du prédateur et du superprédateur et  $E_1^*$  et  $E_2^*$  les coefficients de conversion de la biomasse respectivement de la proie au prédateur et du prédateur au superprédateur. Nous nous intéressons plus exactement au modèle avec *croissance logistique* de la proie  $U^*(X) = RX(1 - X/K)$  et *réponses fonctionnelles* du prédateur et du superprédateur de *type Holling II*  $V_1^*(X) = A_1X/(B_1 + X)$  et  $V_2^*(Y) = A_2Y/(B_2 + Y)$ . Les paramètres  $R$  et  $K$  désignent respectivement le taux de croissance maximal et la capacité de portée maximale de la proie. Les  $A_i$  sont les taux maximaux de prédation, les  $B_i$  les constantes dites de demi-saturation. Un grand nombre de chaînes alimentaires appartenant à la classe plante-herbivore-carnivore ont des temps de réponses qui croissent du plus bas niveau trophique au plus haut. Nous considérerons le système où les multiplications de la proie et du prédateur sont du même ordre mais nettement plus importantes que celle du superprédateur. Cette hiérarchisation se fait par introduction d'un petit paramètre réel positif  $\epsilon$  qui donne la forme



suivante au modèle :

$$\begin{aligned}\varepsilon dX/dT &= U(X) - YV_1(X), \\ \varepsilon dY/dT &= E_1 YV_1(X) - D_1 Y - ZV_2(Y), \\ dZ/dT &= E_2 ZV_2(Y) - D_2 Z.\end{aligned}\quad (7.2)$$

Pour plus de détails sur ce type de modèle et sur le sens précis de ces constantes biologiques, toutes positives, on peut consulter par exemple [39]. Pour des raisons biologiques, l'étude est restreinte à l'octant positif  $(X, Y, Z)$ . A l'instar de Klebanoff et Hastings dans [26], nous choisissons de réduire le nombre de paramètres grâce au changement de variables et de l'échelle du temps suivant:  $x = X/K$ ,  $y = Y/KE_1$ ,  $z = Z/KE_1E_2$ ,  $t = RT$ . Le modèle devient

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x \left( 1 - x - \frac{a_1 y}{1 + b_1 x} \right) = x f(x, y), \\ \varepsilon \dot{y} &= y \left( \frac{a_1 x}{1 + b_1 x} - d_1 - \frac{a_2 z}{1 + b_2 y} \right) = y g(x, y, z), \\ \dot{z} &= z \left( \frac{a_2 y}{1 + b_2 y} - d_2 \right) = z h(y),\end{aligned}\quad (7.3)$$

où  $a_1 = KA_1E_1/RB_1$ ,  $b_1 = K/B_1$ ,  $d_1 = D_1/R$ ,  $a_2 = KA_2E_1E_2/RB_2$ ,  $b_2 = KE_1/B_2$ ,  $d_2 = D_2/R$  et où la dérivation notée par le point se fait par rapport à  $t$ . Un modèle similaire mais avec trois échelles de temps, en l'occurrence ( $\varepsilon \delta \dot{x} = x f(x, y)$ ,  $\varepsilon \dot{y} = y g(x, y, z)$ ,  $\dot{z} = z h(y)$ ,  $\varepsilon$  et  $\delta$  petits) avait été examiné dans la littérature. Dans [39], il est signalé la présence dans certains cas d'oscillations rapides (dites aussi à haute fréquence) de la proie et du prédateur mais durant lesquelles la dynamique du superprédateur n'a pas été décrite. Ceci a cependant été entrepris par Boudjellaba et Sari dans [4], par des techniques de moyennisation.

Dans notre cas, nous aurons à examiner l'équation rapide

$$\begin{aligned}x' &= x f(x, y), \\ y' &= y g(x, y, z),\end{aligned}\quad (7.4)$$

où  $(\prime) = d/d\tau$  et  $\tau = t/\varepsilon$ , de paramètre  $z$ . A notre connaissance, la première étude d'un système de ce type (en fait un modèle proie-prédateur avec une densité fixe du superprédateur) se trouve dans [38]. Une description qualitative mais incomplète y est donnée avec mention de bifurcations de type "Hopf, pli et transcritique". Kuznetsov, et al. [29] ont étudié analytiquement et numériquement des bifurcations homoclines du modèle lent-rapide ( $\varepsilon \dot{x} = x f(x, y)$ ,  $\dot{y} = y g(x, y, z)$ ) pour  $\varepsilon$  assez petit. Ils ont alors obtenu un diagramme complet de bifurcations à deux paramètres par la méthode dite de continuation. Bien que, dans [30], ces derniers résultats aient été extrapolés

au cas du système (7.4) sans justification, nous pourrions utiliser leur diagramme de bifurcation obtenu pour certaines valeurs des paramètres. Nous donnons cependant une analyse plus théorique de la dynamique rapide sans avoir à fixer des valeurs pour les paramètres.

Notre but, plutôt que d'étudier le comportement asymptotique de tout le modèle, est d'étudier la dynamique rapide puis de donner les outils appropriés, en l'occurrence la théorie de Tykhonov et de Pontryagin, pour la description du mouvement lent du superprédateur (i.e. variation de la composante  $z$ ).

## 7.2 Analyse de la dynamique rapide

Considérons le problème à valeur initiale  $(\mathcal{M}_\varepsilon)$  obtenu en adjoignant au modèle (7.3) la donnée initiale  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$ . Lorsque dans l'équation rapide

$$\begin{cases} x' = x \left( 1 - x - \frac{a_1 y}{1 + b_1 x} \right), \\ y' = y \left( \frac{a_1 x}{1 + b_1 x} - d_1 - \frac{a_2 z}{1 + b_2 y} \right), \end{cases} \quad (7.5)$$

on pose  $z = 0$ , on obtient le modèle classique proie-prédateur avec croissance logistique de la proie et réponse fonctionnelle du prédateur de type Holling II. Ce modèle a été étudié profondément par exemple dans [24]. Le principal résultat y est que, selon les paramètres et dans les conditions dites de persistance (non extinction) des deux populations, les densités de ces dernières tendent vers un état stationnaire ou bien oscillent en permanence. Nous supposons quant à nous que  $z \geq 0$  et que  $a_1 - d_1 b_1 > 0$  (condition nécessaire de persistance du prédateur). Dans le quadrant positif  $(xoy)$ , espace de phase de (7.5), l'isocline nulle  $x' = 0$  de la proie est la réunion du demi-axe des  $y \geq 0$  et de la parabole

$$y = F(x) := \frac{1}{a_1} (1 - x)(1 + b_1 x), \quad (7.6)$$

de sommet  $(\bar{x}, F(\bar{x}))$  avec  $\bar{x} = (b_1 - 1)/2b_1$ . Notez que  $F(0) = 1/a_1 > 0$ . L'isocline nulle  $y' = 0$  du prédateur est la réunion du demi-axe des  $x \geq 0$  et, pour tout  $z$  fixé, de la branche d'hyperbole

$$y = \varphi(x, z) := \frac{(1 + b_1 x)a_2 z}{b_2((a_1 - d_1 b_1)x - d_1)} - \frac{1}{b_1}, \quad (7.7)$$

où  $x = \lambda := d_1/(a_1 - d_1 b_1)$  est l'asymptote verticale. Pour alléger la rédaction, nous supposons dans ce qui suit que  $0 < \lambda < \bar{x}$  sans perdre de vue que le



cas  $\bar{x} < \lambda$  mérite aussi toute l'attention. Celui-ci engendre effectivement un plus grand nombre de configurations de la variété lente du modèle d'origine (7.3). L'intersection des isoclines nulles de la proie et du prédateur détermine les points d'équilibre de (7.5). On sait montrer que l'origine  $(0, 0)$  est un point selle de (7.5) de direction stable l'axe des  $y$  et de direction instable l'axe des  $x$  pour toute valeur positive ou nulle de  $z$  [38]. Soit

$$z_1 = \frac{1}{a_2} \left( \frac{a_1}{1 + b_1} - d_1 \right).$$

On sait aussi que le point  $(1, 0)$  est un point selle de (7.5) de direction stable l'axe des  $x$  si  $0 \leq z < z_1$  et que c'est un nœud stable si  $z > z_1$ . La valeur  $z_1$  de  $z$  est celle pour laquelle les isoclines nulles (7.6) et (7.7) se coupent en  $(1, 0)$ . Le système (7.5) peut avoir au moins deux équilibres intérieurs (i.e. à l'intérieur du quadrant positif) comme intersection de (7.6) et (7.7). Leurs abscisses sont dans  $]\lambda, 1[$ . Nous les notons  $R_1 = (x_1, F(x_1))$  et  $R_2 = (x_2, F(x_2))$  avec  $x_1 < x_2$  sans oublier qu'ils dépendent de  $z$  (voir Fig. 7.1). Lorsque le paramètre  $z$  varie, le lieu de tous les équilibres, dessiné dans

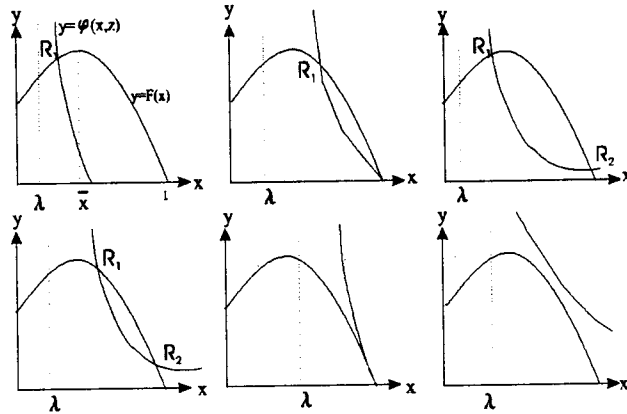


Figure 7.1: Quelques positions relatives des isoclines nulles de l'équation rapide 7.5.

l'octant positif  $(xyz)$ , constitue par définition la variété lente du système (7.3). Cette dernière est donc donnée par l'équation  $xf = yg = 0$ . Elle est composée des deux demi-droites  $\{x = y = 0, z \geq 0\}$ ,  $\{x = 1, y = 0, z \geq 0\}$  et de la courbe  $f = g = 0$ .

En un point d'équilibre intérieur de l'équation rapide (7.5), la matrice jacobienne a respectivement pour déterminant et trace

$$\begin{aligned} Det &= xy(f_x g_y - f_y g_x) \\ &= xy \left[ \left( \frac{a_1 b_1 y}{(1 + b_1 x)^2} - 1 \right) \frac{a_2 b_2 z}{(1 + b_2 y)^2} + \frac{a_1^2}{(1 + b_1 x)^3} \right] \end{aligned}$$

$$Tr = xf_x + yg_y = x \left( \frac{a_1 b_1 y}{(1 + b_1 x)^2} - 1 \right) + \frac{a_2 b_2 y z}{(1 + b_2 y)^2},$$

où  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $g_x$  et  $g_y$  désignent les dérivées partielles de  $f$  et  $g$  en  $(x, y)$ . Afin d'esquisser les différentes configurations de la variété lente de (7.3) et d'indiquer ses composantes attractives et ses composantes répulsives, nous proposons d'étudier le nombre, la nature et la position des équilibres intérieurs de (7.5) en examinant les signes de  $Det$  et  $Tr$  de la manière suivante: en résolvant en  $z$  les équations  $f = g = 0$ ,  $Det/xy = f = 0$  et  $Tr = f = 0$ , nous obtenons respectivement

$$z = G(x) := G_0(x, F(x)), \quad (7.8)$$

$$\text{où } G_0(x, y) := \left( \frac{(a_1 - d_1 b_1)x - d_1}{1 + b_1 x} \right) \frac{1 + b_2 y}{a_2},$$

$$z = D(x) := D_0(x, F(x)),$$

$$\text{où } D_0(x, y) = \frac{a_1^2 (1 + b_2 y)^2}{a_2 b_2 (1 + b_1 x) ((1 + b_1 x)^2 - a_1 b_1 y)},$$

$$z = T(x) := T_0(x, F(x)),$$

$$\text{où } T_0(x, y) = x \left( 1 - \frac{a_1 b_1 y}{(1 + b_1 x)^2} \right) \frac{(1 + b_2 y)^2}{a_2 b_2 y}.$$

Dans les cas non dégénérés, la nature des équilibres de (7.5) est déterminée par les positions relatives des courbes de  $G$ ,  $T$  et  $D$  pour toute valeur de  $z$  fixée. Retenons principalement que :

- les courbes de  $G$  et  $D$  se rencontrent toujours en un point  $(x_T, z_T)$  tel que  $x_T > \lambda$  et  $z_T > 0$ ,
- $G$  est strictement positive et dérivable sur  $]\lambda, 1]$ ,  $G(\lambda) = 0$  et  $G(1) > 0$ ,
- $G$  admet un maximum en  $(x_T, z_T)$ ,
- $D$  est décroissante sur  $[\bar{x}, 1]$  avec  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} D(x) = +\infty$ ,
- $T$  est strictement positive sur  $]\bar{x}, 1[$  avec  $T(\bar{x}) = T(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} T(x) = +\infty$ .

**Remarque 7.2.1** Les solutions de  $G - D = 0$  sont les racines d'un polynôme de degré 5. La solution  $x_T$  est donc obtenue en écartant les deux racines réelles évidentes  $\rho_1 = -(1 - b_1 + \sqrt{(b_1 + 1)^2 + 4a_1 b_1 b_2})/2b_1$  et  $\rho_2 = -(1 - b_1 - \sqrt{(b_1 + 1)^2 + 4a_1 b_1 b_2})/2b_1$  qui se trouvent en dehors de l'intervalle d'intérêt  $[\lambda, 1]$  et deux autres qui sont généralement complexes. Nous éviterons de donner l'expression calculable mais trop longue de  $x_T$ .

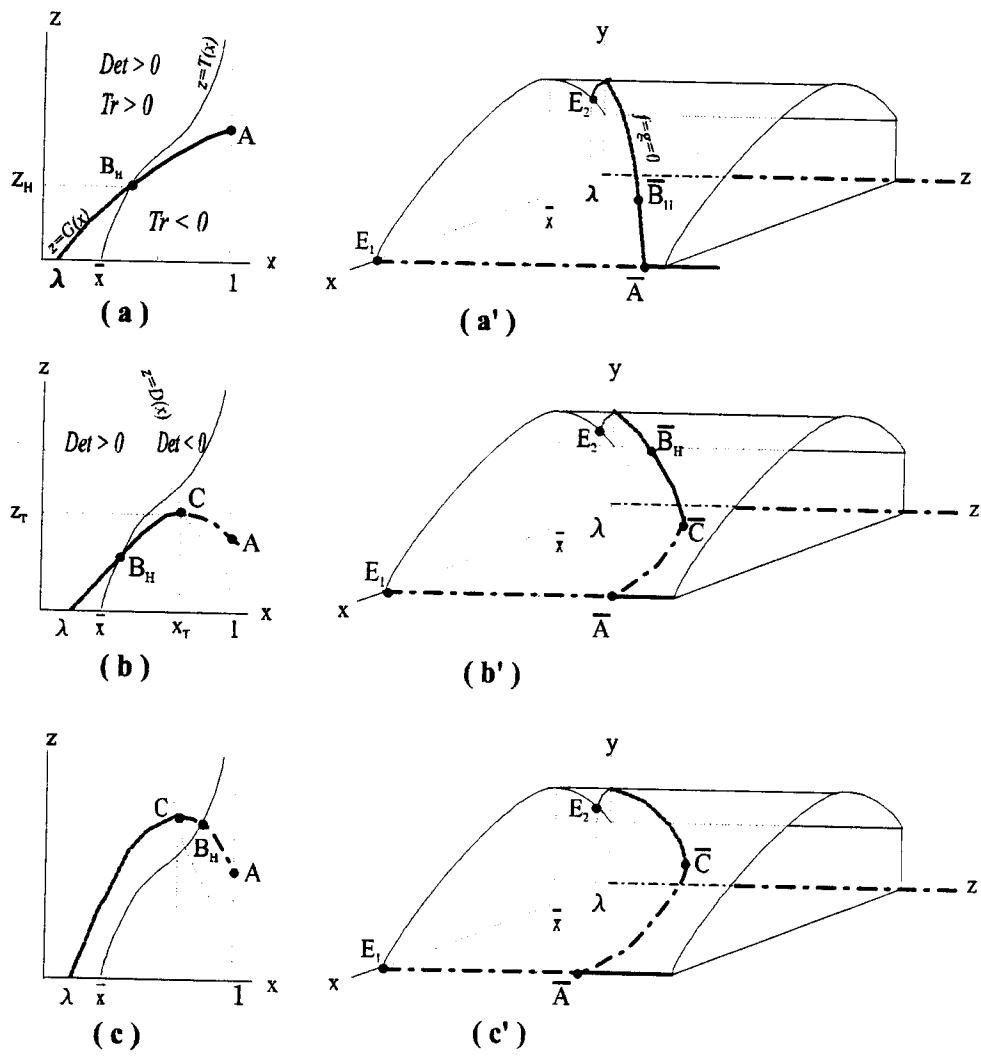


Figure 7.2: Quelques positions relatives des courbes de  $G$ ,  $T$  et  $D$  et les courbes lentes correspondantes.

Nous avons besoin aussi de distinguer les cas  $x_T < 1$  et  $x_T \geq 1$ , correspondant respectivement aux inégalités  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, z_1) > F'(1)$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, z_1) \leq F'(1)$ , par

$$x_T < 1 \iff \frac{b_2(a_1 - b_1 d_1 - d_1)(1 + b_1)^2}{a_1^2} > 1, \quad (7.9)$$

$$x_T \geq 1 \iff \frac{b_2(a_1 - b_1 d_1 - d_1)(1 + b_1)^2}{a_1^2} \leq 1. \quad (7.10)$$

Le lemme suivant est une précision supplémentaire sur la position relative des courbes de  $G$  et  $T$  dans la région d'intérêt.

**Lemme 7.2.2** *Si  $0 < \lambda < \bar{x}$ , l'équation  $T - G = 0$  admet une et une seule solution  $x_H$  dans  $]\bar{x}, 1[$  pour toutes les valeurs des paramètres.*

**Preuve.** Sachant que  $T(\bar{x}) = 0$  et  $T(x) > 0$  dans  $]\bar{x}, 1[$  avec  $\lim_{x \rightarrow 1^-} T(x) = +\infty$ , les courbes de  $T$  et  $G$  se coupent au moins en un point dont l'abscisse est dans  $]\bar{x}, 1[$ . D'autre part, les solutions de  $G - T = 0$ , parmi lesquelles les racines évidentes  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de la remarque précédente, sont les racines d'un polynôme de degré 6. On peut voir que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont doubles pour  $T$ , simples pour  $G$  et telles que  $G'(\rho_2) < 0$  et  $G'(\rho_1) > 0$ . Par conséquent, en notant que  $G$  et  $T$  tendent vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} G(x)/T(x) = 0$ , deux autres racines réelles sont obtenues. Finalement, l'arc de courbe de  $T$  joignant le point  $(\bar{x}, 0)$  à l'origine coupe nécessairement la courbe de  $G$  par continuité, puisque  $G(0) < 0$  et  $T(x) < 0$  pour  $x \in ]0, \bar{x}[$ . Le lemme s'établit alors en notant que les cinq dernières racines se situent en dehors de  $[0, 1]$ . ■

Les différentes positions des trois courbes particulières sont esquissées dans la colonne gauche de Fig. 7.2. Notons que  $A = (1, z_1)$ ,  $B_H = (x_H, z_H := G(x_H))$  et  $C = (x_T, z_T)$ . Les lignes pointillées en gras correspondent aux équilibres se trouvant dans la région  $Tr > 0$  et  $Det > 0$  (nœuds et foyers répulsifs), les lignes en gras à ceux pour lesquels  $Tr < 0$  et  $Det > 0$  (nœuds et foyers attractifs) et les lignes en tirets-points gras aux points selles i.e.  $Det < 0$ . Ces figures aident à connaître, pour tout  $z$  fixé, le nombre et la nature des points d'équilibre intérieurs et aussi la nature du point  $(1, 0)$  de l'équation rapide (7.5). Elles permettent d'établir les théorèmes suivants:

**Théorème 7.2.3** *Sous la condition (7.10) et si  $0 < \lambda < \bar{x}$ , il existe une valeur strictement positive  $z_H$  de  $z$  telle que:*

- i) pour  $z \in [0, z_H[$ ,  $R_1$  est l'unique équilibre intérieur de (7.5) et c'est un nœud ou foyer instable,*
- ii) pour  $z \in ]z_H, z_1[$ ,  $R_1$  est l'unique équilibre intérieur de (7.5) et c'est un nœud ou foyer stable,*
- iii) pour  $z > z_1$ , l'équilibre  $(1, 0)$  de (7.5) est globalement asymptotiquement stable (g.a.s).*

**Preuve.** L'existence de  $z_H$  vient du lemme 7.2.2. Les affirmations (i) et (ii) sont alors vérifiées sur Fig. 7.2. en examinant l'intersection des droites  $z = \text{constante}$  avec la courbe  $z = G(x)$ . La stabilité asymptotique globale de  $(1, 0)$  dans (iii) est due au fait que ce point est un nœud attractif et que les trajectoires de (7.5) à condition initiales strictement positives sont positivement bornées<sup>1</sup>. ■

**Théorème 7.2.4** *Sous la condition (7.9), si  $0 < \lambda < \bar{x}$  et  $T(x_T) > G(x_T)$ , il existe une valeur strictement positive  $z_H$  de  $z$  telle que:*

- i) *pour  $z \in [0, \min(z_H, z_1)[$ ,  $R_1$  est l'unique équilibre intérieur de (7.5) et c'est un nœud ou foyer instable,*
- ii) *for  $z \in ]z_1, z_H[$ , si  $z_1 < z_H$ ,  $R_1$  est un nœud ou foyer intérieur instable de (7.5) et  $R_2$  en est un point selle intérieur,*
- iii) *pour  $z \in ]z_H, z_1[$ , si  $z_H < z_1$ ,  $R_1$  est l'unique équilibre intérieur de (7.5) et c'est un nœud ou foyer stable,*
- iv) *pour  $z \in ]\max(z_1, z_H), z_T[$ ,  $R_1$  est un nœud ou foyer intérieur stable de (7.5) et  $R_2$  en est un point selle intérieur,*
- v) *pour  $z > z_T$ , l'équilibre  $(1, 0)$  de (7.5) est g.a.s.*

**Preuve.** On utilise le même procédé que dans la preuve du théorème précédent mais sur Fig. 7.2.b. Notez cependant que le cas  $z_1 < z_H$  n'y a pas été présenté. ■

**Théorème 7.2.5** *Sous la condition (7.9), si  $0 < \lambda < \bar{x}$  et  $T(x_T) < G(x_T)$ , alors:*

- i) *pour  $z \in [0, z_1[$ ,  $R_1$  est l'unique équilibre intérieur de (7.5) et c'est un nœud ou foyer instable,*
- ii) *pour  $z \in ]z_1, z_T[$ ,  $R_1$  est un nœud ou foyer intérieur instable de (7.5) et  $R_2$  en est un point selle intérieur,*
- iii) *pour  $z > z_T$ , l'équilibre  $(1, 0)$  de (7.5) est g.a.s.*

**Preuve.** Elle est analogue aux précédentes mais sur Fig. 7.2.c. Ici, il faut noter que le seuil  $z_H$  n'est pas déterminant. ■

En plus des différents portraits de phase de la dynamique rapide, nous présentons à titre indicatif dans la figure 7.3 le schéma de bifurcations de (7.5) inspiré du diagramme obtenu numériquement dans [30] dans le plan  $(d_1, z)$  pour certaines valeurs des autres paramètres. Le franchissement de la ligne  $(TC)$  correspond à une bifurcation nœud-col, dite *transcritique*, où le point

<sup>1</sup>On peut prouver que les trajectoires de l'équation rapide sont bornées dans le quadrant positif en examinant les directions du champ de vecteurs comme cela est fait dans [16], par exemple.

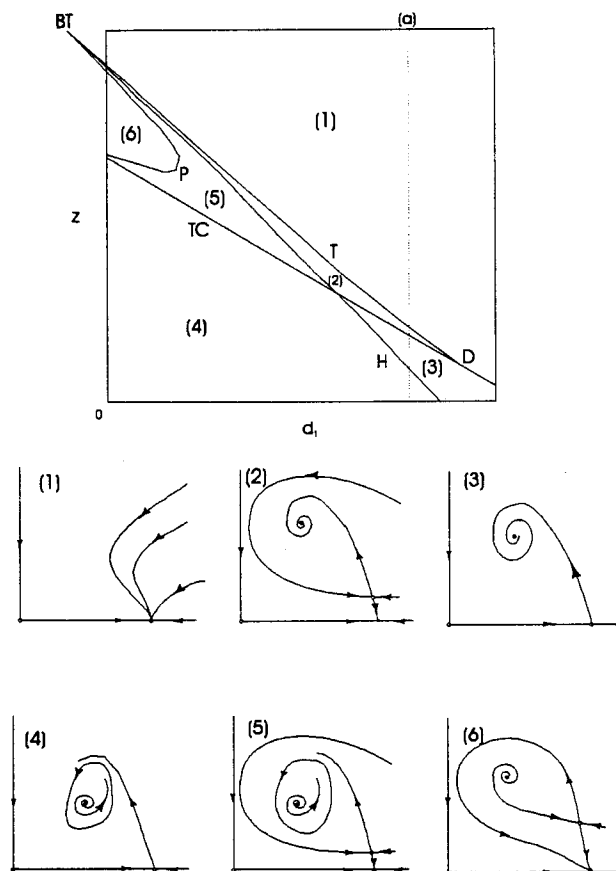


Figure 7.3: Diagramme schématique de bifurcations et portraits de phase correspondants de l'équation rapide.

d'équilibre  $(1, 0)$  de (7.5) change de stabilité. La courbe  $(T)$  correspond à une bifurcation nœud-col, dite *tangente*. C'est la situation où les isoclines (7.6) et (7.7) sont tangentes. Les courbes  $(H)$  et  $(P)$  sont respectivement celles de la bifurcation de *Hopf* (apparition-disparition de cycles, foyers stable-instable) et *homocline* (rencontre d'un cycle et d'un col). On trouvera plus de précisions sur ce diagramme dans [30]. Par exemple, la ligne  $(a)$  tracée dans le diagramme correspond à la configuration  $(b)$  de la figure 7.2.

Lorsque  $R_1$  est instable, il peut être entouré d'un cycle limite. En fait, dans le cas de l'existence et de l'instabilité de  $R_1$  sans l'existence du point selle intérieur  $R_2$  dans l'espace de phase de (7.5) (Théorème 7.2.3-(i), Théorème 7.2.4-(i) et Théorème 7.2.5-(i)), il existe un cycle autour de  $R_1$  dans la bande  $0 < x < 1$ . C'est par exemple établi dans [38] quand l'isocline nulle (7.7) coupe l'axe des  $x$  en un point d'abscisse inférieure à  $\bar{x}$ . On peut cepen-



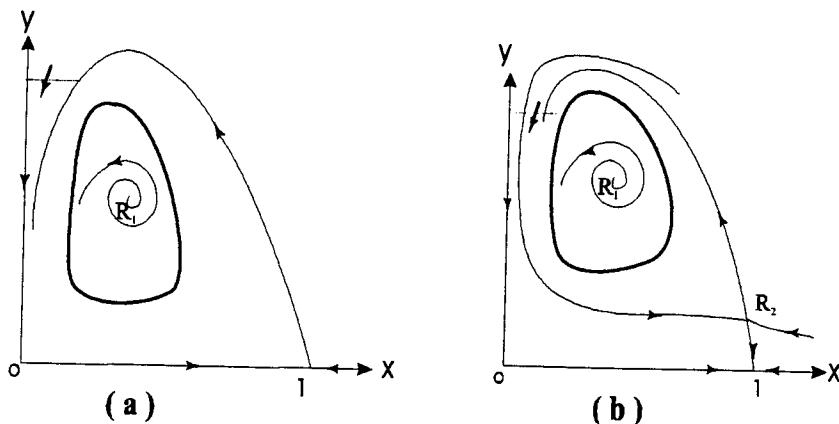


Figure 7.4: Existence d'un cycle: a) en l'absence d'un col intérieur, b) en présence d'un col intérieur.

dant prouver l'existence d'un cycle même sans cette dernière condition en esquissant les directions du champ relativement aux isoclines nulles puis en utilisant le théorème de Poincaré-Bendixson et le fait que les trajectoires sont positivement bornées. (voir Fig. 7.4.a). La figure Fig. 7.4.b quant à elle montre la situation où un cycle limite existe autour de l'équilibre instable  $R_1$  en présence du point selle  $R_2$  (Théorème 7.2.4-(ii), Théorème 7.2.5-(ii)). L'existence d'un cycle n'est pas systématiquement assurée dans ce cas. Les simulations ainsi que les méthodes numériques de [30] nous mènent à énoncer la conjecture suivante:

**Conjecture 7.2.6** *Quand l'équation rapide (7.5) admet un cycle autour d'un équilibre instable, il est stable.*

La stabilité d'un cycle entourant un éventuel équilibre instable  $R_1$  entraîne nécessairement son unicité. Ce résultat a été cependant démontré pour  $z = 0$  dans [31]. Un tel cycle peut disparaître ou apparaître quand  $z$  atteint des valeurs correspondant à une bifurcation de Hopf, en l'occurrence  $z_H$ . Il peut aussi disparaître par bifurcation homocline quand le cycle rencontre le point selle intérieur. Voici en effet une condition suffisante d'existence d'une bifurcation homocline :

**Proposition 7.2.7** *Sous les conditions du théorème 7.2.5, il existe une valeur  $z_2$  de  $z$  comprise entre  $z_1$  et  $z_T$  pour laquelle (7.5) présente une bifurcation homocline.*

**Preuve.** La configuration type du théorème 7.2.5 est représentée dans la figure 7.2.c. Pour tout  $z$  dans l'intervalle  $[0, z_1]$ , il existe un cycle limite

(unique) autour de l'équilibre instable  $R_1$ . Un tel cycle continue d'exister pour des valeurs de  $z$  comprises entre  $z_1$  et  $z_T$  pour les quelles il existe un col intérieur. La valeur de  $z_T$  correspond à une bifurcation nœud-col où le nœud demeure instable. Le cycle ne peut pas avoir disparu par bifurcation de Hopf dans ce cas de figure. Il existe donc une valeur de  $z$  dans  $]z_1, z_T[$  pour laquelle le cycle et le point selle intérieur se rencontrent. ■

**Remarque 7.2.8** Quoique cela s'impose à qui veut décrire globalement le modèle  $(M_\varepsilon)$ , nous ne le faisons pas vraiment dans cette étude où nous voulons surtout donner les outils permettant de justifier l'évolution du superprédateur. Nous notons cependant que dans le cas de figure que nous allons considérer, en l'occurrence celui de la figure 7.2.b,  $E_1 = (1, 0, 0)$  est un point selle de (7.3) et  $E_2 = (\lambda, F(\lambda), 0)$  est répulsif. De plus, au plus deux points d'équilibre sont obtenus à l'intérieur de l'octant positif comme intersection du plan  $h(y) = 0$ , donné par  $y = \lambda' := d_2/(a_2 - d_2b_2)$ , avec la courbe  $f = g = 0$ . Une condition nécessaire de persistance du superprédateur est l'inégalité  $a_2 - d_2b_2 > 0$ . Dans la région supérieure  $y > \lambda'$ , la vitesse  $\dot{z}$  est positive tandis qu'elle est négative dans la région inférieure  $y < \lambda'$ .

### 7.3 Application de la théorie de Tykhonov

Restreignons-nous donc aux conditions du théorème 7.2.4, donc à la configuration (b) de la figure 7.2. Considérons un arc  $(IJ)$  inclus dans l'intérieur de l'arc  $(\bar{B}_H\bar{C})$ . Notons par  $x_I$  et  $x_J$  les abscisses des points  $I$  et  $J$ . L'arc  $(IJ)$  correspond à une solution isolée de l'équation  $f = g = 0$  définissant la courbe lente et donnée par

$$(x, y) = \mathcal{E}(z) := (\xi(z), F(\xi(z))),$$

où  $z$  est dans un compact  $\mathcal{Z}$  du demi-axe des  $z$  positifs, d'intérieur  $\overset{\circ}{\mathcal{Z}} \neq \emptyset$  (ici inclus dans  $]z_H, z_T[$ ) et  $\xi$  est l'application continue définie selon (7.8) par

$$x = \xi(z) \Leftrightarrow z = G(x), \text{ pour } x \in [x_I, x_J] \subset ]\lambda, x_T[ \text{ et } z \in \mathcal{Z}.$$

Il n'est pas utile de donner l'expression un peu longue de  $\xi(z)$  en fonction des paramètres du problème. Chaque point  $(\xi(z), F(\xi(z)))$  est un équilibre asymptotiquement stable pour l'équation rapide (7.5) pour  $z \in \mathcal{Z}$ . De plus, il est possible de choisir l'arc  $(IJ)$  de manière qu'on puisse l'entourer d'un voisinage tubulaire de rayon un certain réel  $a > 0$  et qui soit inclus dans le bassin d'attraction de  $(\xi(z), F(\xi(z)))$  pour tout  $z \in \mathcal{Z}$  (voir la figure 7.5). Ceci signifie que le bassin d'attraction est uniforme sur  $\mathcal{Z}$ . Le problème réduit est alors défini par

$$\dot{z} = z \cdot h(F(\xi(z))), \quad z(0) = z_0, \quad (7.11)$$

où

$$h(F(\xi(z))) = \frac{(-a_2 + d_2 b_2 + d_2 a_1) + (a_2 - d_2 b_2 - a_2 b_1 + d_2 b_2 b_1) \xi(z)}{(-a_1 - b_2) + b_2(-b_1 + 1) \xi(z) + b_2 b_1 (\xi(z))^2} + \frac{(a_2 b_1 - d_2 b_2 b_1) (\xi(z))^2}{(-a_1 - b_2) + b_2(-b_1 + 1) \xi(z) + b_2 b_1 (\xi(z))^2}$$

La théorie de Tykhonov nous permet d'affirmer ceci : en termes de trajec-

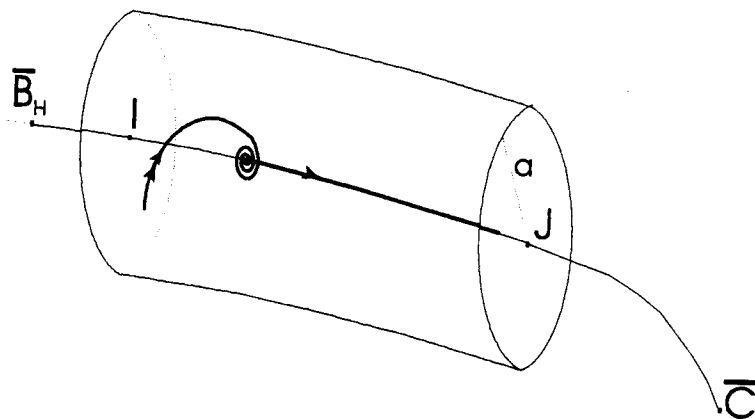


Figure 7.5: Bassin d'attraction uniforme et trajectoires approximatives d'après le Théorème de Tykhonov.

toires, si  $(x_0, y_0)$  est dans le bassin d'attraction de  $(\xi(z_0), F(\xi(z_0)))$  pour  $z_0$  dans  $\mathcal{Z}$  et si, par exemple,  $y_0 \neq F(x_0)$  (voir la figure 7.5), la trajectoire  $\gamma$  du modèle  $(\mathcal{M}_\varepsilon)$  est initialement approchée, sur le plan  $z = z_0$ , par la trajectoire de l'équation de la couche limite

$$\begin{cases} x' = x \left( 1 - x - \frac{a_1 y}{1 + b_1 x} \right), & x(0) = x_0, \\ y' = y \left( \frac{a_1 x}{1 + b_1 x} - d_1 - \frac{a_2 z}{1 + b_2 y} \right), & y(0) = y_0, \end{cases} \quad (7.12)$$

qui atteint très vite le point  $(\xi(z_0), F(\xi(z_0)), z_0)$  sur l'arc  $(IJ)$ . De là,  $\gamma$  évolue lentement près de cet arc attractif de la variété lente, sa troisième composante étant approchée par la solution de (7.11). La théorie de Tykhonov peut aussi être appliquée pour la description des trajectoires qui s'approchent de la composante triviale attractive  $\{x = 1, y = 0, z > z_1\}$  de la variété lente.

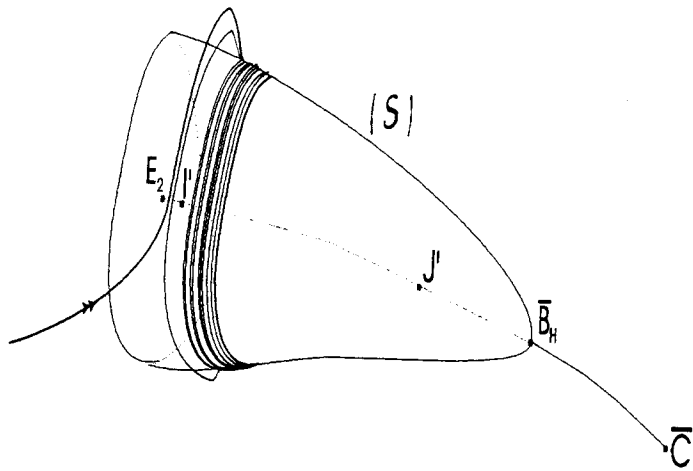


Figure 7.6: Trajectoires approximatives d'après le Théorème de Pontryagin-Rodygin.

## 7.4 Application de la théorie de Pontryagin-Rodygin

Toujours sous les conditions du théorème 7.2.4, pour fixer les idées, nous pouvons choisir, comme sur la figure 7.6, un arc  $(I'J')$  à l'intérieur d'une branche répulsive isolée de  $f = g = 0$  correspondant à un intervalle compact  $\mathcal{Z}$  de  $\mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $z \in \mathcal{Z}$ , l'équation rapide (7.5) admet une solution périodique  $(x^*(\tau, z), y^*(\tau, z))$ , de période  $T(z)$  (par exemple  $\mathcal{Z} \subset ]0, z_H[$ ). Pour toute valeur de  $z$  dans  $\mathcal{Z}$ , l'orbite correspondante  $\Gamma_z$  est un cycle limite de (7.5) dont nous avons conjecturé la stabilité. Là aussi, quitte à diminuer la longueur de l'arc  $(I'J')$ , il est possible d'avoir l'uniformité du bassin d'attraction sur  $\mathcal{Z}$ . Le problème réduit est alors donné par

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{T(z)} \int_0^{T(z)} z h(y^*(\tau, z)) d\tau \\ &:= \frac{1}{T(z)} \int_0^{T(z)} z \left( \frac{a_2 y^*(\tau, z)}{1 + b_2 y^*(\tau, z)} - d_2 \right) d\tau, \quad z(0) = z_0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

D'après la théorie de Pontryagin-Rodygin, si  $(x_0, y_0)$  est dans le bassin d'attraction de  $\Gamma_{z_0}$  pour  $z_0$  dans  $\mathcal{Z}$  et si, par exemple,  $y_0 \neq F(x_0)$ , la trajectoire  $\gamma$  de  $(\mathcal{M}_\varepsilon)$  est initialement approchée, sur le plan  $z = z_0$ , par la trajectoire de la solution de l'équation de la couche limite (7.12). Elle atteint rapidement le cycle  $\Gamma_{z_0}$  et se met à osciller rapidement autour de la surface  $\mathcal{S}$  engendrée par les cycles  $\Gamma_z$  pour  $z \in \mathcal{Z}$ . Pendant cet enroulement, la dynamique de  $z$  est approchée par l'équation réduite (7.13). Le sens de

l'enroulement autour de  $S$  dépend de la position de l'isocline  $y = \lambda'$ . pour  $\lambda'$  suffisamment grand, il se fait dans le sens des  $z$  décroissants, pour  $\lambda'$  suffisamment petit, il se fait dans le sens des  $z$  croissants, et pour des valeurs intermédiaires de  $\lambda'$ , il se fait selon une moyenne, la partie supérieure de l'enroulement ayant une vitesse  $\dot{z}$  opposée à celle de l'inférieure. Pour conclure, nous présentons dans les deux dernières figures tirées de [52] deux exemples de simulations numériques plutôt du modèle (7.2) qui visualisent bien le phénomène décrit plus haut.

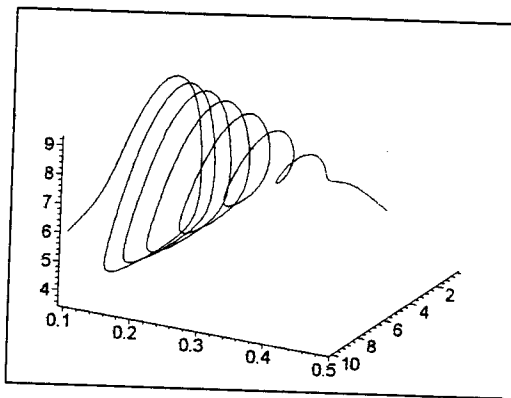


Figure 7.7: Une simulation numérique du modèle (7.2) avec les valeurs :  $R = K = 10$ ,  $E_1 = 0.4$ ,  $A_1 = 5$ ,  $B_1 = 2.5$ ,  $D_1 = 1$ ,  $E_2 = 0.5$ ,  $A_2 = 10$ ,  $B_2 = 5$  et  $D_2 = 2$ ,  $\varepsilon = 0.05$  et les conditions initiales  $(10, 6, 0.1)$ .

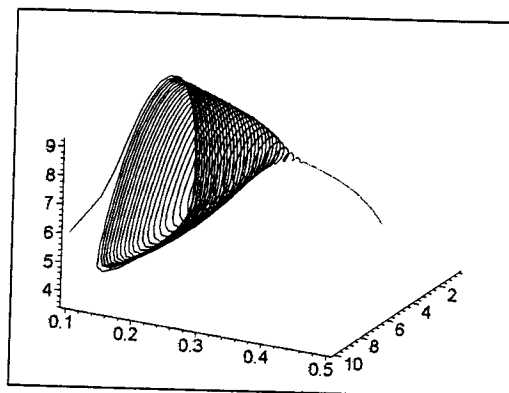


Figure 7.8: Une simulation numérique du modèle (7.2) avec les valeurs :  $R = K = 10$ ,  $E_1 = 0.4$ ,  $A_1 = 5$ ,  $B_1 = 2.5$ ,  $D_1 = 1$ ,  $E_2 = 0.5$ ,  $A_2 = 10$ ,  $B_2 = 5$  et  $D_2 = 2$ ,  $\varepsilon = 0.01$  et les conditions initiales  $(10, 6, 0.1)$ .

# Annexe A

## Définitions et théorèmes de stabilité

### A.1 Bassin d'attraction

Soit l'équation différentielle autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (\text{A.1})$$

où  $f$  est définie et continue sur un ouvert (espace de phase)  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition A.1.1** *Un sous-ensemble non vide  $\mathcal{M}$  de  $U$  est invariant pour (le champ de) l'équation (A.1) si toute solution  $x(t)$  de (A.1) telle que  $x(0) \in \mathcal{M}$  est définie pour tous les temps  $t \in \mathbb{R}$  et vérifie  $x(t) \in \mathcal{M}$ . Le sous-ensemble  $\mathcal{M}$  est positivement invariant si  $x(t) \in \mathcal{M}$  pour tout  $t \geq 0$ .*

**Définition A.1.2** *On appelle bassin d'attraction d'un sous-ensemble invariant  $\mathcal{M}$  de (A.1) le plus grand voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{M}$  dans  $U$  tel que toute solution  $x(t)$  de (A.1) pour laquelle  $x(0) \in \mathcal{V}$  est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dis}(x(t), \mathcal{M}) = 0$ . La notation  $\text{dis}(x(t), \mathcal{M})$  est la distance du point  $x(t)$  à l'ensemble  $\mathcal{M}$  donnée par  $\inf_{m \in \mathcal{M}} \|x(t) - m\|$ .*

### A.2 Stabilité d'un point d'équilibre

Un point  $x^*$  de  $U$  tel que  $f(x^*) = 0$  est dit *point d'équilibre* (ou *point fixe*) de l'équation (A.1). Il correspond à une solution *stationnaire* (c'est à dire constante pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ) de l'équation (A.1). Un point d'équilibre est un sous-ensemble invariant de (A.1).

**Définition A.2.1** Le point d'équilibre  $x^*$  de l'équation (A.1) est dit

1. **Stable** (au sens de Lyapounov) si, pour tout  $\mu > 0$ , il existe un  $\eta > 0$  tel que toute solution  $x(t)$  de (A.1) pour laquelle  $\|x(0) - x^*\| < \eta$  peut être prolongée pour tout  $t \geq 0$  et satisfait l'inégalité  $\|x(t) - x^*\| < \mu$ .
2. **Attractif** s'il admet un bassin d'attraction, i.e. un voisinage  $\mathcal{V}$  tel que toute solution  $x(t)$  de (A.1) pour laquelle  $x(0) \in \mathcal{V}$  peut être prolongée pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$ .
3. **Asymptotiquement stable** s'il est stable et attractif.
4. **Globalement asymptotiquement stable** s'il est asymptotiquement stable de bassin d'attraction l'espace de phase  $U$  tout entier.
4. **Exponentiellement stable** s'il existe  $\eta > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  tels que toute solution  $x(t)$  de (A.1) pour laquelle  $\|x(0) - x^*\| < \eta$  vérifie

$$\|x(t) - x^*\| \leq \alpha \|x(0) - x^*\| e^{-\beta t}.$$

### A.3 Stabilité orbitale

Une fonction  $p(t)$  à valeurs dans  $U$  est solution de l'équation (A.1) si  $\frac{dp(t)}{dt} = f(p(t))$  pour tout  $t$ . Si  $p(t)$  est périodique et de période  $T$ , son orbite est la courbe fermée dans  $U$  définie par  $\Gamma = \{p(t) : t \in [0, T]\}$ . L'orbite  $\Gamma$  est un sous-ensemble invariant de (A.1).

**Définition A.3.1** La solution périodique  $p(t)$  de (A.1) est dite **orbitalement asymptotiquement stable** si son orbite  $\Gamma$  est asymptotiquement stable, c'est-à-dire:

1. **Stable**, i.e. pour tout  $\mu > 0$ , il existe un  $\eta > 0$  tel que toute solution  $x(t)$  de (A.1) pour laquelle  $\text{dis}(x(0), \Gamma) < \eta$  peut être prolongée pour tout  $t \geq 0$  et satisfait l'inégalité  $\text{dis}(x(t), \Gamma) < \mu$ ,
2. et **attractive**, i.e.  $\Gamma$  admet un bassin d'attraction, c'est-à-dire un voisinage  $\mathcal{V}$  tel que toute solution  $x(t)$  de (A.1) pour laquelle  $x(0) \in \mathcal{V}$  peut être prolongée pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dis}(x(t), \Gamma) = 0$ .

**Définition A.3.2** Si l'équation (A.1) est définie dans le plan, on appelle **cycle limite** de l'équation toute orbite  $\Gamma$  fermée isolée dans le sens où il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\Gamma$  ne contenant aucune autre orbite fermée.

Un **cycle limite stable** est donc une orbite fermée isolée asymptotiquement stable. Par abus de langage, les orbites fermées isolées de  $\mathbb{R}^n$  sont aussi appelées cycles limites.

## A.4 Stabilité uniforme

Considérons l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad (\text{A.2})$$

où  $x$  est dans un domaine  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda$  est un paramètre scalaire ou vectoriel. Supposons que pour chaque valeur de  $\lambda$  dans un domaine  $\Lambda$ , l'équation (A.2) admette un point d'équilibre  $x_\lambda$ .

**Définition A.4.1** Soit  $x_\lambda$  un point d'équilibre de (A.2) pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

1. Le point  $x_\lambda$  est dit **uniformément asymptotiquement stable** sur  $\Lambda$  s'il est asymptotiquement stable et que le nombre  $\eta$  apparaissant dans la définition de la stabilité ne dépend pas de  $\lambda$  dans  $\Lambda$ .

2. Si  $x_\lambda$  est attractif pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ , son bassin d'attraction est dit **uniforme sur  $\Lambda$**  s'il existe un réel  $a > 0$  tel que, pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ , la boule  $\{x \in \mathbb{R}^n: \|x - x_\lambda\| \leq a\}$  est dans le bassin d'attraction de  $x_\lambda$ .

Supposons que l'équation (A.2) admet pour toute valeur de  $\lambda$  dans  $\Lambda$  une solution périodique  $p(t, \lambda)$  d'orbite  $\Gamma_\lambda$ .

**Définition A.4.2** Soit  $p(t, \lambda)$  une solution périodique de (A.2) pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

1. La solution  $p(t, \lambda)$  est dite **orbitalement uniformément asymptotiquement stable** sur  $\Lambda$  si son orbite  $\Gamma_\lambda$  est uniformément asymptotiquement stable sur  $\Lambda$ , i.e.  $\Gamma_\lambda$  est asymptotiquement stable et le nombre  $\eta$  apparaissant dans la définition de la stabilité ne dépend pas de  $\lambda$  dans  $\Lambda$ .

2. Le bassin d'attraction de  $\Gamma_\lambda$  est uniforme sur  $\Lambda$ , s'il existe un réel  $a > 0$  tel que, pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ , l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n: \text{dis}(x, \Gamma_\lambda) \leq a\}$  est dans le bassin d'attraction de  $\Gamma_\lambda$ .

## A.5 Théorie de Floquet

Considérons le système linéaire non autonome

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (\text{A.3})$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  réelle continue en  $t$ .

**Définition A.5.1** On appelle **matrice fondamentale** du système (A.3) une matrice carrée  $X(t)$  d'ordre  $n$  dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes de (A.3).



Si  $X(t)$  est une matrice fondamentale de (A.3), une solution générale de (A.3) s'écrit  $X(t).c$ , où  $c$  est un vecteur arbitraire de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que la matrice  $A$  est périodique en  $t$  et de période  $T$ .

**Théorème A.5.2 (Floquet)** *Toute matrice fondamentale de (A.3) est de la forme*

$$X(t) = P(t)e^{Bt},$$

où  $P(t)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  périodique et de période  $T$  et  $B$  est une matrice constante d'ordre  $n$ .

Si on pose  $x = P(t)y$  dans (A.3), on obtient le système linéaire autonome

$$\frac{dy}{dt} = By.$$

Une **matrice de monodromie** du système périodique (A.3) est une matrice non singulière  $C$  telle que  $X(t+T) = X(t).C$ . Si  $P(t)$  et  $B$  sont définies comme dans le théorème précédent, une matrice de monodromie est donnée par  $C = e^{BT}$ .

**Définition A.5.3** *Les valeurs propres  $\rho$  d'une matrice de monodromie de (A.3) sont appelées **multiplicateurs caractéristiques** de (A.3) et les nombres  $\lambda = e^{\rho T}$  sont appelés **exposants caractéristiques** de (A.3).*

Considérons à nouveau l'équation (A.1). On appelle équation variationnelle linéaire associée à une solution  $T$ -périodique  $p(t)$  de (A.1) le système périodique non autonome linéaire

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(p(t)).y, \quad (\text{A.4})$$

où  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est la matrice jacobienne de  $f$ .

**Théorème A.5.4 [18]** *Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continûment différentiable, si  $p(t)$  est une solution  $T$ -périodique de (A.1), si le multiplicateur caractéristique 1 de l'équation variationnelle linéaire (A.4) est simple et tous les autres sont de modules strictement inférieurs à 1 (exposants caractéristiques à partie réelle strictement négative) alors la solution  $p(t)$  est orbitalement asymptotiquement stable (avec phase asymptotique).*

## A.6 Fonctions de Lyapounov

Soit  $U$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine et  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable.

**Définition A.6.1** La fonction  $V$  est *définie positive* si  $V(0) = 0$  et, pour  $x \neq 0$ ,  $V(x) > 0$ .

Elle est dite *semidéfinie positive* si  $V(0) = 0$  et, pour  $x \neq 0$ ,  $V(x) \geq 0$ .

La fonction  $V$  est *définie négative* si  $-V$  est définie positive.

Elle est dite *semidéfinie négative* si  $-V$  est semidéfinie positive.

Considérons le cas particulier où  $V$  est la forme quadratique

$$V(x) = x^T P x \quad (\text{A.5})$$

où  $P$  est une matrice carrée réelle symétrique d'ordre  $n$  et où l'exposant  $T$  symbolise la transposition.

**Théorème A.6.2** Les assertions suivantes sont équivalentes

i) La forme quadratique (A.5) est définie positive (resp. semidéfinie positive).

ii) Les valeurs propres de  $P$  sont strictement positives (resp. positives ou nulles).

iii) Les mineurs principaux de  $P$  sont strictement positifs (resp. positifs ou nuls).

Considérons l'équation autonome (A.1) où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne. La dérivée d'une fonction continûment différentiable  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  le long des trajectoires de (A.1) est notée et définie par

$$\dot{V}(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x).$$

On adoptera plutôt la notation matricielle

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

où  $\frac{\partial V}{\partial x}$  est la matrice  $\left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_{i=1, \dots, n}$  et  $f(x)$  le vecteur colonne  $(f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ .

**Théorème A.6.3 (Lyapounov)** [25] *Supposons que l'origine est un point d'équilibre de (A.1) dans le domaine  $U$ . S'il existe une fonction  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  continûment différentiable définie positive sur  $U$  telle que*

- 1)  $\dot{V}(x)$  est semidéfinie négative dans  $U$ , alors l'origine est stable.
- 2)  $\dot{V}(x)$  est définie négative, alors l'origine est asymptotiquement stable.
- 3) il existe des constantes  $k_1, k_2, k_3$  et  $p$  telles que

$$k_1\|x\|^p \leq V(x) \leq k_2\|x\|^p, \quad \dot{V}(x) \leq -k_3\|x\|^p,$$

alors l'origine est exponentiellement stable.

Il existe des théorèmes réciproques de Lyapounov. Nous en citons deux concernant la stabilité exponentielle, et la stabilité exponentielle uniforme par rapport à un paramètre.

**Théorème A.6.4** [25] *Supposons que l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable de (A.1) dans le domaine  $U$ . Supposons que  $f$  est continûment différentiable et que la matrice jacobienne  $\partial f/\partial x$  est bornée dans  $U$ . Alors il existe un domaine  $U_0 \subset U$ , une fonction  $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  et des constantes  $k_1, k_2, k_3, k_4$  telles que*

$$\begin{aligned} k_1\|x\|^2 &\leq V(x) \leq k_2\|x\|^2, \\ \dot{V}(x) &\leq -k_3\|x\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq k_4\|x\|. \end{aligned}$$

**Théorème A.6.5** [25] *Supposons que l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable de (A.2) dans le domaine  $U$ , uniformément par rapport à  $\lambda$  dans  $\Lambda$ . Supposons que  $f$  est continûment différentiable, que les matrices jacobienes  $\partial f/\partial x$  et  $\partial f/\partial \lambda$  sont telles que*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \leq L_1, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right\| \leq L_2\|x\|.$$

Alors il existe un domaine  $U_0 \subset U$ , une fonction  $V : U_0 \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  et des constantes  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  telles que

$$\begin{aligned} k_1\|x\|^2 &\leq V(x, \lambda) \leq k_2\|x\|^2, \\ \dot{V}(x, \lambda) &\leq -k_3\|x\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq k_4\|x\|, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right\| &\leq k_5\|x\|^2. \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] D. V. Anosov, On limit cycles in systems of differential equations with a small parameter in the highest derivatives, *AMS Translations*, Ser. 2 **33** (1963), 233-275.
- [2] V. I. Arnold (Ed.), *Dynamical Systems V*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 5, Springer-Verlag, (1994).
- [3] E. Benoît (Ed.), *Dynamical Bifurcation*, Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, **1493** (1991).
- [4] H. Boudjellaba et T. Sari, Oscillations in a prey-predator-superpredator system, *J. Biol. Sys.* **6** (1998), 17-33.
- [5] K. E. Brenan, S. L. Campbell et L. R. Petzold, *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, North-Holland, Amsterdam (1989).
- [6] C. I. Byrnes et A. Isidori, *Bifurcation analysis of the zero dynamics and the practical stabilization of nonlinear minimum-phase systems*, *Asian Journal of Control*, **4** (2) (2002), 171-185.
- [7] J. L. Callot et T. Sari, Stroboscopie et moyennisation dans les systèmes d'équations différentielles à solutions rapidement oscillantes, *Mathematical Tools and Models for Control, Systems Analysis and Signal Processing*, **3**, CNRS Paris (1983), 345-353.
- [8] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, San Francisco (1980).
- [9] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations II*, Pitman, San Francisco (1982).
- [10] F. Diener et M. Diener (Eds), *Nonstandard Analysis in Practice*, Universitext Springer-Verlag, (1995).

- [11] F. Diener, *Cours d'Analyse Non Standard*, Office des Publications Universitaires, Alger (1983).
- [12] M. Diener et C. Lobry (Eds), *Analyse Non Standard et Représentation du Réel*, Editions CNRS, Paris et Office des Publications Universitaires, Alger (1989).
- [13] F. Diener et G. Reeb, *Analyse Non Standard*, Hermann, (1989).
- [14] N. Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.*, **31** (1979), 53-98.
- [15] L. Flatto et N. Levinson, Periodic solutions of singularly perturbed systems, *J. Rational Mech.*, **4** (1955), 943-950.
- [16] H. I. Freedman, *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*, Marcel Dekker, New-York (1980).
- [17] K. O. Friedrichs et W. Wasow, Singular perturbations of nonlinear oscillations, *Duke Math. J.* **13** (1946), 361-381.
- [18] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Heidelberg (1967).
- [19] F. Hoppensteadt, Singular perturbations on the infinite interval, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123** (1966), 521-535.
- [20] F. Hoppensteadt, Stability in systems with parameters, *J. Math. Anal. Appls.*, **18** (1967), 129-134.
- [21] F. Hoppensteadt, Asymptotic stability in singular perturbation problems, *J. Diff. Eq.*, **4** (1968), 350-358.
- [22] F. Hoppensteadt, Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24** (1971), 807-840.
- [23] F. Hoppensteadt, Asymptotic stability in singular perturbation problems II : problems having matched asymptotic expansions solutions, *J. Diff. Equations*, **15** (1974), 510-521.
- [24] S. B. Hsu, S. P. Hubbel et P. Waltman., Competing predators, *Appl. Math.*, **4** (1978), 617-625.
- [25] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, (1996).

- [26] A. Klebanoff et A. Hastings, Chaos in three species food chains, *J. Math. Biol.* **32** (1994), 427-451.
- [27] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil et J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design*, Academic Press, New York (1986).
- [28] N. N. Bogolyubov et Yu. A. Mitropolsky, *Les Méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations Non Linéaires*, Gauthiers Villars, Paris (1962).
- [29] Y. A. Kuznetsov, S. Muratori et S. Rinaldi, Homoclinic bifurcations in slow-fast second order systems, *Nonlin. Anal.* **25** (1995), 747-762.
- [30] Y. A. Kuznetsov et S. Rinaldi, Remarks on food chain dynamics, *Math. Biosci.* **134** (1996), 1-33.
- [31] L.-P. Liou et K. S. Cheng, On the uniqueness of a limit cycle of a predator-prey system, *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1988), 867-878.
- [32] C. Lobry, A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des "bifurcations dynamiques", *Annales de l'institut Fourier*, **42** (1-2) (1992), 327-351.
- [33] C. Lobry, T. Sari et S. Touhami, On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems, *Electron. J. Diff. Eqns*, **19** (1998), 1-22.
- [34] C. Lobry et T. Sari, *The Peaking Phenomenon and Singular Perturbations : An Extension of Tikhonov's Theorem*, Rapport de recherche n° 4051 de l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (2000).
- [35] C. Lobry et T. Sari, Singular perturbations methods in control theory, à paraître dans les Cours du CIMPA, *Collection Travaux en Cours*, Hermann éditeur, 159-186.
- [36] R. Lutz, L'intrusion de l'analyse non standard dans l'étude des perturbations singulières, *Astérisque* **109-110** (1983), 101-140.
- [37] R. Lutz et M. Goze, *Nonstandard Analysis : A Practical Guide with Applications*, Lecture Notes in Mathematics **881**, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [38] S. Muratori et S. Rinaldi, A dynamical systems with Hopf bifurcations and catastrophes, *Appl. Math. Comp.* **29** (1989), 1-15.

- [39] S. Muratori et S. Rinaldi, Low and high-frequency oscillations in three-dimensional food chain systems, *SIAM J. Appl. Math.* **52** (1992), 1688-1706.
- [40] A. Neishtadt, Persistence of stability loss for dynamical bifurcation, I, *Differential Equations* **23** (1987), 1385-1391.
- [41] E. Nelson, Internal Set Theory : a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 1165-1198.
- [42] R. O'Malley Jr, *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, (1974).
- [43] R. E. O'Malley, Jr, *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **89**, Springer-Verlag, (1990).
- [44] L. S. Pontryagin et L. V. Rodygin, Approximate solution of a system of ordinary differential equations involving a small parameter in the derivatives, *Soviet. Math. Dokl.*, **1** (1960), 237-240.
- [45] L. S. Pontryagin et L. V. Rodygin, Periodic solution of a system of ordinary differential equations with a small parameter in the terms containing derivatives, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 611-614.
- [46] L. Prandtl, Über Flüssigkeits - bewegung bei kleiner Reibung, *Verhandlungen, III. Int. Math.* **13** (1905), 740-766.
- [47] A. Robinson, *Nonstandard Analysis*, American Elsevier, New York (1974).
- [48] T. Sari, *Moyennisation dans les systèmes différentiels à solutions rapidement oscillantes*, Thèse, Université de Mulhouse (1983).
- [49] T. Sari, Petite histoire de la stroboscopie, dans Colloque Trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean-louis Callot, A. Fruchard et A. Troesh (Eds), *IRMA Publication*, Strasbourg (1995), 5-15.
- [50] T. Sari, Stroboscopy and averaging, dans Colloque Trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean-louis Callot, A. Fruchard et A. Troesh (Eds), *IRMA Publication*, Strasbourg (1995), 95-124.
- [51] T. Sari, Nonstandard perturbation theory of differential equations, présentée lors de la conférence the International Research Symposium on Nonstandard Analysis and its Applications, *ICMS*, Edinburgh, 11-17 August (1996). (<http://www.math.uha.fr/~geometry/sari/papers.html>)

- [52] T. Sari et K. Yadi, On Pontryagin–Rodygin’s theorem for convergence of solutions of slow and fast systems, *Electron. J. Diff. Eqns*, **19** (2004), 1-17.
- [53] A. R. Teel et L. Praly, Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback, *SIAM J. Contr. Optim.* **33** (1995), 1443-1485.
- [54] A. N. Tykhonov, Systems of differential equations containing small parameters multiplying the derivatives, *Mat. Sborn.*, **31** (1952), 575-586.
- [55] I. P. Van Den Berg, *Nonstandard Asymptotic Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1249**, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [56] A. B. Vasileva et V. M. Volosov, The work of Tikhonov and his pupils on ordinary differential equations containing a small parameter, *Russian Math. Surveys*, **22** (1967), 124-142.
- [57] G. Wallet, Entrée-sortie dans un tourbillon, *Annales de l’institut Fourier*, **36** (4) (1986), 157-184.
- [58] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Interscience, New York (1965).
- [59] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, New York (1976).
- [60] K. Yadi, On the slow dynamics of a two-time scale three species model, *Prépublication interne* (<http://www.math.uha.fr/ps/200401yadi.pdf>).
- [61] A. K. Zvonkin et M. A. Shubin, Nonstandard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations, *Uspehi Mat. Nauk.* **39** (1984), 77-127.