

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Abou Bekr BELKAID – Tlemcen



Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE
Présentée par

Naoual DJAFOUR née BENKELFAT

Sujet de la thèse

**Proposition d'une méthode de
classification des modes
d'instabilité des colonnes en acier
formées à froid**

Soutenue le 15/01/2015 devant le jury composé de

Djawed ZENDAGUI	Président	UAB. Tlemcen
Abdellatif MEGNOUNIF	Directeur	UAB. Tlemcen
Benali BENMANSOUR	Examineur	USTMB. Oran
Nadir BOUMECHRA	Examineur	UAB. Tlemcen
Djamel Eddine KERDAL	Examineur	USTMB. Oran

Dédicaces

A la mémoire de mon père

A ma très chère mère

A mon mari et mes filles

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse, le professeur MEGNOUNIF Abdellatif pour m'avoir fait l'honneur de diriger cette thèse, pour la confiance qu'il m'a témoignée et l'intérêt qu'il a porté à ces travaux.

Monsieur ZENDAGUI Djawed, maître de conférences au département de Génie Civil de l'université Abou Bekr BELKAID, m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance, je lui présente mes remerciements les plus distingués.

Mes plus vifs remerciements vont également à Messieurs, BOUMECHRA Nadir, professeur au département de Génie Civil de l'université Abou Bekr. BELKAID de Tlemcen, KERDAL Djamel Eddine et BENMANSOUR Benali, Professeurs à l'USTO – Mohamed Boudiaf, pour avoir accepté de participer au jury. Leurs idées précieuses, leurs analyses critiques et avisées vont contribuer à l'enrichissement de ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement mon mari pour son soutien, ses encouragements et sa disponibilité.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble des enseignants du département du génie civil.

Enfin Je remercie du fond du cœur ma famille pour son soutien, sa patience, son aide précieuse et surtout son amour qui m'a aidé à surmonter les moments les plus difficiles.

Table des Matières

ملخص	vii
Résumé	ix
Abstract	xi
Notations	xiii
Liste des Tableaux	xv
Liste des Figures	xvii
Chapitre 1	1
Introduction	1
1.1 Introduction	1
1.2 Objectifs – Contributions	4
1.3 Plan de la thèse	5
Chapitre 2	7
Les modes d'instabilité de base dans le dimensionnement des profilés en acier formés à froid	7
2.1 Introduction	7
2.2 Les trois instabilités de base	9
2.3 Calcul manuel des contraintes critiques des instabilités de base	11
2.3.1 Le mode local ou Voilement.	11
2.3.2 Le mode distorsionnel.	15
2.3.3 Le mode global ou Eulérien.	29
2.3.4 Remarques.....	35
2.4 Les méthodes numériques pour l'analyse de la stabilité élastique.....	35
2.5 Conclusion.....	36
Chapitre 3	39
Revue générale de la méthode des bandes finies contrainte cFSM	39
3.1 Introduction	39
3.2 Les développements théoriques de la cFSM	41
3.3 La cFSM dans les travaux de recherche sur les profilés en acier formés à froid.....	44
3.3.1 Problèmes de dimensionnement.....	44
3.3.2 Problèmes de conception et d'optimisation des formes des profilés en acier formés à froid	46
3.4 La cFSM dans l'identification des déformées de flambement calculées par la FEM.....	49
3.4.1 Approche basée sur les bases modales complètes de la cFSM	49
3.4.2 Approche basée sur les déformées modales des sections.....	50
3.5 La cFSM dans l'identification de l'imperfection géométrique.....	51
3.6 La méthode des éléments finis contrainte ou cFEM.....	52

3.7	La cFSM dans les solutions analytiques du flambement global	53
3.8	Conclusion.....	53
Chapitre 4		57
Extension de la cFSM pour les sections prismatiques ramifiées et/ou présentant des contours fermés		57
4.1	Introduction	57
4.2	La méthode des bandes finies FSM.	59
4.3	La méthode des bandes finies contrainte (cFSM).....	65
4.4	Dérivation de la matrice RGD par la méthode de Djafour modifiée	68
4.4.1	La matrice de rigidité élastique dans l'espace GD : KEGD	68
4.4.2	La matrice de contrainte pour les DDL membranaires.	71
4.4.3	Application de la matrice de contraintes pour les degrés de liberté membranaires à la matrice de rigidité globale KEGD	76
4.4.4	Dérivation de la matrice de contrainte RGD	78
4.4.5	Commentaires.....	79
4.5	Matrice RGD des sections prismatiques ramifiées et/ou ayant des contours fermés.....	81
4.5.1	Introduction.....	81
4.5.2	La matrice de contrainte pour les DDL membranaires.	82
4.6	Décomposition des modes de flambement de l'espace GD	87
4.7	Conclusion.....	89
Chapitre 5		91
Validations et applications.....		91
5.1	Introduction	91
5.2	La cFSM pour les sections non ramifiées	92
5.2.1	Calculs de la matrice de contraintes RGD	92
5.2.2	Décomposition des modes de flambement de sections creuses avec raidisseurs intermédiaires.....	98
5.3	La cFSM pour les sections ramifiées.	104
5.3.1	Décomposition des modes de flambement d'une section ouverte ramifiée.....	104
5.3.2	Décomposition des modes de flambement d'une section fermée ramifiée.....	107
5.3.3	Décomposition des modes de flambement d'une section transversale avec des branches et des parties fermées	109
5.4	Conclusion.....	111
Conclusion.....		113
Annexes		119
Bibliographie.....		121
Index.....		127

ملخص

تحلل انواع الانبعاج القاعدي للأعمدة والعارضات من الحديد المشكل على البارد المعرضة لأحمال الضغط أو الانحناء هو موضوع اهتمام كبير يمكن دراسته باستخدام النظرية العارضة المعممة (GBT) أو الطريقة الرقمية (cFSM). مؤخرًا، تم تحسين cFSM من خلال تبسيط اشتقاق مصفوفة الضغوطات التي تعرف الانبعاج الانحراف (GD) المشكل من الاوضاع العامة (G) والمشوهة (D). مع ذلك، فإن النتيجة ليست عامة الى درجة دراسة عناصر هياكل ذات اشكال مختلفة. الهدف من هذه الدراسة هو تمديد cFSM لتحلل اوضاع الانبعاج لعناصر هياكل مع فروع و/أو أجزاء مغلقة. لتحديد الوضع GD، تستخدم فرضيتان اتخذتا: (i) انحناء أسطواني للصفائح او لا انحناء (ii) تجاهل التشوهات العرضية والاختلالات الغشائية. يتم الحصول على مصفوفة الضغوطات المقابلة بالطرق التي يشيع استخدامها في الطرق العددية مثل طريقة العناصر المحدودة أو طريقة القطع المحدودة (FSM). المنهجية المستخدمة في فصل الاوضاع G و D هي مماثلة لتلك المستخدمة في الطريقة الاصلية cFSM، وحساب مصفوفة الضغوطات للأوضاع المحلية (L) هو نفسه. بعض الأمثلة درست ومنحنيات الانبعاج النقي المحصلة قورنت مع نتائج الطريقة التقليدية FSM. وفي الخلاصة فإن الطريقة الجديدة المقترحة cFSM تسمح بتحليل اوضاع اعمدة ذات مقاطع عرضية مختلفة الاشكال مفتوحة أو مغلقة، متفرعة أو غير متفرعة.

الكلمات المفتاحية: cFSM؛ تحلل الاوضاع؛ قطاعات المشكلة على البارد؛ جدران رقيقة؛

الاستقرار المرن.

Résumé

La décomposition des modes de flambement des éléments de structures à parois minces soumis à des contraintes de compression ou de flexion est un sujet de grand intérêt pratique qui peut être traité en utilisant la théorie des poutres généralisée (GBT) ou la méthode des bandes finies contraintes (cFSM). Récemment, le procédé de la cFSM a été amélioré par la simplification de la dérivation de la matrice de contraintes qui définit l'espace du mode de flambement combiné (GD) formé par les modes global (G) et de distorsion (D). Seulement, le résultat n'est pas suffisamment général pour étudier des éléments prismatiques avec des sections arbitraires. L'objectif de cette thèse est d'étendre la cFSM pour permettre la décomposition des modes de flambement aux éléments prismatiques avec des branches et/ou des parties fermées. Pour définir le mode GD, deux hypothèses sont utilisées : (i) flexion cylindrique des plaques et (ii) déformations transversales et distorsions membranaires négligeables. La matrice de contrainte correspondante est obtenue par des procédés couramment utilisés dans les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis ou la méthode des bandes finies (FSM). La méthodologie utilisée pour séparer les modes G et D est similaire à celle utilisée dans la cFSM initiale, et le calcul de la matrice de contraintes pour les modes locaux (L) reste identique. Quelques exemples sont traités et les courbes de flambement pures obtenues sont comparées aux résultats de la FSM classique. En conclusion, la nouvelle méthode cFSM proposée permet de décomposer les modes de flambement de colonnes de diverses sections ouvertes ou fermées, ramifiées ou non.

Mots clés : cFSM ; Décomposition des modes ; Profilés Formés à froid ; Parois minces ; Stabilité élastique.

Abstract

The decomposition of buckling modes of thin-walled members subjected to compressive or bending loads is a topic of great practical interest which can be treated using the generalized beam theory (GBT) or the constrained finite strip method (cFSM). Recently, the cFSM was improved by simplifying the derivation of the constraint matrix which defines the combined buckling mode (GD) formed by the global (G) and the distortional (D) modes. However, the result is not general enough to study prismatic members with arbitrary cross-sections. The objective of this thesis is to extend the cFSM to allow the buckling modes decomposition for prismatic members with branches and/or closed parts. To define GD mode, two assumptions are used: (i) cylindrical plate bending and (ii) negligible in-plane transverse/shear strains. The corresponding constraint matrix is derived by means of procedures commonly used in numerical methods, such as finite element method or finite strip method (FSM). The methodology used to separate G and D modes is similar to that used in the original cFSM and the derivation of the constraint matrix for local (L) modes remains identical. Some examples are considered and the pure buckling curves obtained are compared to the conventional FSM results. In conclusion, the new proposed cFSM method can decompose buckling modes for columns with different section shapes, open or closed, branched or unbranched.

Keywords: cFSM; Mode decomposition; Cold formed members; Thin-walled; Elastic buckling.

Notations

Les principales notations utilisées sont présentées ci-dessous. Les autres symboles précisant des détails ou introduits pour les besoins d'une démonstration sont présentés dans le cours du texte.

- a Longueur d'une plaque (longueur d'une bande)
- b Largeur d'une plaque.
- d_G Coordonnées de V_m dans la base du vecteur h_G
- d_D Coordonnées de V_m dans la base du vecteur h_D
- h_G Système de vecteurs de base pour l'espace G
- h_D Système de vecteurs de base pour l'espace D
- m Nombre total des degrés de liberté
- n Nombre de nœuds.
- nc Nombre de bandes connectées à un nœud donné
- ns Nombre de bandes
- r Nombre de demi-ondes sinus
- u_i, v_i, w_i, θ_i Degrés de liberté locaux
- $x - y - z$ Système d'axe de coordonnées locales
- E Module de Young
- H Matrice de transformation
- C_{ek} Matrice des contraintes membranaires.
- I_{Vm} Matrice identité de même dimension que le vecteur V_m
- $I_{\Delta k}$ Matrice identité de même dimension que le vecteur Δ_k
- K_E Matrice de rigidité du modèle FSM d'un élément à parois minces

- K_E^{GD} Matrice de rigidité modifiée en supposant la flexion cylindrique des plaques
- K_G Matrice de rigidité géométrique du modèle FSM d'un élément à parois minces.
- K_k Matrice de rigidité réduite.
- K_k^{Δ} Sous matrice de la matrice de rigidité réduite.
- $K_k^{\Delta V}$ Sous matrice de la matrice de rigidité réduite.
- R_M Matrice de contrainte de la classe de flambement du mode M
- U_i, V_i, W_i, Θ_i Degrés de libertés globaux.
- V_m Vecteur des DDL qui définissent l'espace combiné GD
- $X - Y - Z$ Système d'axe de coordonnées globales.
- α Angle entre l'axe local x et l'axe global X .
- λ Facteur de charge.
- ν Coefficient de Poisson.
- Δ Vecteur des DDL du modèle FSM
- Δ_e, Δ_k DDL à éliminer respectivement
- Δ_M Vecteur des DDL dans l'espace de mode de flambement de classe M
- Λ Matrice diagonale des valeurs propres
- Φ Matrice des vecteurs propres

Liste des Tableaux

Tableau 1 Résumé des différents types de nœuds	84
Tableau 2 Charges et modes de flambement de l'espace GD de la section rectangulaire creuse.....	96

Liste des Figures

Figure 1-1: (a) Sections transversales non ramifiées (b) Sections transversales ramifiées ouvertes et fermées.	4
Figure 2-1 Contrainte critique élastique pour divers modes de flambement en fonction de la longueur de la demi-onde	10
Figure 2-2 Les différents modes d'instabilité de base d'une section en C comprimée [9].....	10
Figure 2-3 Modes d'instabilité d'une colonne à section en C soumise à un effort axial [12]	11
Figure 2-4 Eléments non raidis soumis à un gradient de contraintes.	14
Figure 2-5 Eléments non raidis soumis à un gradient de contraintes, un bord en compression et l'autre en traction	15
Figure 2-6 Définition des différentes grandeurs géométriques	16
Figure 2-7 Détermination de la rigidité du ressort	22
Figure 2-8 Raidisseurs de bord.....	23
Figure 2-9 Raidisseurs intermédiaires.....	25
Figure 2-10 Semelle comprimée munie d'un, de deux ou de plusieurs raidisseurs [2].	26
Figure 2-11 Section transversale efficace d'âme de plaques nervurées	28
Figure 3-1 : Décomposition et identification modales d'une colonne (600S200-43) simplement appuyée : (a) décomposition et (b) identification [22].	41
Figure 3-2 : Identification modale d'une colonne (600S200-43, $L = 2540 \text{ mm}$) bi-encastrée [22].	43
Figure 3-3 : Illustration de l'approche basée sur les longueurs critiques : (a) modèles à coins à angles vifs et arrondis, (b) évaluation de la charge critique [26].....	45
Figure 3-4: Formes des sections étudiées pour déterminer les facteurs de correction.	46
Figure 3-5: Formes résultant d'une optimisation non contrainte et donnant la capacité portante maximum pour $L = 1,2 \text{ m}$: (a) $P_n = 56,03 \text{ kN}$ et (b) $P_n = 55,34 \text{ kN}$ [22].....	47
Figure 3-6: Formes résultant d'une optimisation non contrainte et donnant la capacité portante maximum pour $L = 4,9 \text{ m}$: (a) $P_n = 13,39 \text{ kN}$ et (b) $P_n = 14,33 \text{ kN}$ [22].....	48
Figure 3-7: Formes résultant d'une optimisation non contrainte et donnant la capacité portante maximum pour (a) $L = 1,2 \text{ m}$, $P_n = 54,49 \text{ kN}$ et (b) $L = 4,9 \text{ m}$, $P_n = 13,16 \text{ kN}$ [22].	48
Figure 3-8 : Illustration du passage entre les DDL du modèle FEM et ceux du maillage FSM	50
Figure 4-1: Sections transversales ramifiées ouvertes et fermées.	59
Figure 4-2: Géométrie, DDL, chargement appliqué et repère local d'une bande finie.....	60

Figure 4-3 : Courbe de flambement et modes de flambement. Sortie typique d'une analyse FSM	64
Figure 4-4: Paroi plane divisée en 4 bandes	74
Figure 4-5 Distribution des déplacements de gauchissement pour les modes Globaux des sections ouvertes.....	88
Figure 4-6 Distribution des déplacements de gauchissement pour les modes globaux des sections fermées.	88
Figure 5-1 (a) Section transversale Sigma. (b) Son maillage FSM	92
Figure 5-2 La matrice de contraintes RGD de la section Sigma	93
Figure 5-3 (a) Section transversale rectangulaire creuse. (b) Maillage FSM pour calculer RGD	94
Figure 5-4 Matrice de contraintes RGD de la section rectangulaire creuse. ...	95
Figure 5-5 Les courbes de flambement des 4 premiers modes.	97
Figure 5-6 Les différents modes d'instabilité de la section transversale rectangulaire creuse.....	98
Figure 5-7 Sections transversales creuses avec raidisseurs intermédiaires.....	99
Figure 5-8 Courbe de flambement et sa décomposition en modes purs – cas de la section rectangulaire avec raidisseurs intermédiaires de profondeur 5 mm	100
Figure 5-9 Modes d'instabilité de la section rectangulaire creuse avec raidisseurs de profondeur 5 mm	100
Figure 5-10 Les charges critiques des trois premiers modes de la section rectangulaire creuse avec raidisseurs de profondeur 10 mm....	101
Figure 5-11 Courbe de flambement du premier mode et sa décomposition en modes purs – cas de la section rectangulaire avec raidisseurs intermédiaires de profondeur 10 mm	102
Figure 5-12. Courbe de flambement du second mode et sa décomposition en modes purs – cas de la section rectangulaire avec raidisseurs intermédiaires de profondeur 10 mm	102
Figure 5-13. Courbe de flambement du troisième mode et sa décomposition en modes purs – cas de la section rectangulaire avec raidisseurs intermédiaires de profondeur 10 mm	103
Figure 5-14. Modes d'instabilité de la section rectangulaire creuse avec raidisseurs intermédiaires	103
Figure 5-15 (a) Section transversale asymétrique en E et (b) sa modélisation FSM	105
Figure 5-16 Les courbes de flambement FSM des quatre premiers modes de la colonne à section asymétrique en E et leurs décompositions en modes purs GD et L	106
Figure 5-17 Les déformées des modes purs de flambement GD et L de la section en E	106
Figure 5-18 (a) Section transversale asymétrique à 3 cellules et (b) sa modélisation FSM.....	107
Figure 5-19 Les courbes de flambement FSM des quatre premiers modes de la section asymétrique à 3 cellules et leurs décompositions en modes purs G , D et L	108

Figure 5-20 Les déformées des modes de flambement de la section asymétrique à 3 cellules.	109
Figure 5-21 (a) Section transversale mono symétrique à 1 cellule avec des branches et une partie fermée avec (b) son maillage FSM	110
Figure 5-22 Les courbes de flambement FSM des quatre premiers modes de la section monosymétrique à 1 cellule et leurs décompositions en modes purs G, D et L	110
Figure 5-23 Les formes déformées des modes de flambement de la section monosymétrique à 1 cellule.	111

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Depuis les dernières décennies, les éléments en acier formés à froid sont largement utilisés dans le domaine de la construction métallique. La facilité de leur fabrication permet de produire une grande variété de formes et l'utilisation d'aciers à haute résistance rend les rapports largeur-épaisseurs des parois relativement grands [1]. Pour résister aux forces appliquées malgré des élancements importants, les profilés métalliques formés à froid utilisent essentiellement la forme de leur section transversale. Ils sont toutefois sujets aux phénomènes d'instabilité qui posent un problème majeur aux ingénieurs dans la compréhension du comportement et dans la vérification de la résistance de ce type d'éléments de structures.

Pour dimensionner les profilés métalliques formés à froid – qui sont des éléments de structures à parois minces – soumis à des contraintes de compression ou de flexion, trois classes d'instabilité, appelées instabilités pures, sont distinguées : l'instabilité locale, L , l'instabilité distorsionnelle, D , et l'instabilité globale, G . Cette classification résulte essentiellement de trois comportements postcritiques différents. Le mode local ou voilement est l'instabilité qui se manifeste par une déformation de la section transversale par (uniquement) des « flexions des parois », c'est-à-dire des flexions de type « plaque » exclusivement. Un profilé voilé peut avoir une réserve post-critique significative c'est-à-dire que sa résistance peut être nettement supérieure à la charge qui provoque l'instabilité locale, particulièrement lorsque les

épaisseurs sont faibles et le comportement est essentiellement élastique. Le mode distorsionnel se manifeste lui aussi par une déformation de la section transversale seulement, elle se manifeste par la flexion de certaines parois alors que d'autres parois sont sollicitées dans leur plan. L'instabilité distorsionnelle, elle aussi, peut présenter une réserve post critique mais moins importante que celle de l'instabilité locale. Quant au flambement global, il ne présente pas une telle réserve et la résistance de l'élément reste inférieure à sa charge critique élastique. Le mode global n'engendre aucune déformation de la section transversale. C'est un mode qui déforme le profilé dans sa globalité ; on peut dire, pour schématiser, qu'il implique une flexion de type « poutre ».

Dans les codes de calcul [2, 3], les résistances au flambement des profilés en acier sont calculées en considérant ces trois modes purs d'instabilité tout en tenant compte de leurs différentes interactions, des réserves postcritiques ainsi que des différentes imperfections qui peuvent exister. En termes généraux, la procédure réglementaire consiste à calculer les charges critiques élastiques des trois modes purs – à partir d'un calcul linéaire du premier ordre – et à les corriger par la suite pour se caler à la réalité des résultats expérimentaux. Ainsi, le point de départ des procédures réglementaires est le calcul des charges critiques élastiques des trois modes purs. Ceci peut se faire en utilisant des formules analytiques malheureusement, elles sont souvent d'un usage limité et elles ne peuvent pas être utilisées pour toutes les formes possibles des profilés à parois minces.

Une autre possibilité consiste à effectuer des analyses linéaires de la stabilité en utilisant des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (FEM, pour Finite Element Method) ou la méthode des bandes finies (FSM, pour Finite Strip Method). La FEM et la FSM donnent les charges critiques (valeurs propres) associées à des modes critiques (vecteurs propres) mais, il est nécessaire d'identifier parmi tous les résultats (plusieurs dizaines, voire plusieurs centaines) les modes de flambement purs et les charges critiques correspondantes, c'est-à-dire d'identifier les charges requises par les codes de calcul et de dimensionnement. L'identification des modes de flambement obtenus par la FEM ou la FSM n'est pas évidente du tout et nécessite un certain degré d'expertise.

Une troisième façon de calculer les charges critiques élastiques pures est d'utiliser la théorie des poutres généralisée (GBT pour Generalised Beam Theory). La GBT [4] présente l'avantage d'être capable de classer et d'identifier les modes de flambement automatiquement seulement, elle est très complexe et son usage est resté limité parmi le monde académique et de recherche. La GBT a montré que les déformations de flambement peuvent être formellement traitées par un procédé modal qui sépare (décompose) mécaniquement les modes en modes purs [5, 6]. Cette séparation (décomposition) est intrinsèque à la GBT et permet de quantifier (identifier) la participation modale de chaque classe d'instabilité à la déformation de flambement générale.

Récemment, Adany et Schafer [7, 8] ont proposé des définitions formelles et mécaniques des différents modes de flambement à partir des hypothèses de la GBT. Ces définitions sont faciles à comprendre et devraient être applicables à toutes les méthodes numériques. Leur mise en œuvre dans la FSM a conduit à une nouvelle méthode numérique baptisée « méthode des bandes finies contraintes » (cFSM pour constrained Finite Strip Method) où les caractéristiques de la FSM comme méthode numérique sont maintenues, à savoir, la construction des matrices globales à partir de l'assemblage des matrices des éléments. La décomposition des modes de flambement est ensuite réalisée en utilisant une série de matrices de contraintes déduite des hypothèses de la GBT. La cFSM a donc enrichi la FSM avec les capacités de la GBT en matière de séparation des déformations. Cependant, la technique utilisée par Adany et Schafer [7] pour intégrer les hypothèses de la GBT dans la FSM est relativement longue et complexe et, surtout, elle est restée limitée aux sections transversales ouvertes.

Djafour [9], dans sa thèse de doctorat, a proposé une simplification des définitions d'Adany et Schafer pour les modes purs d'instabilité, et a procédé à la détermination des matrices de contraintes d'une manière plus simple et moins restrictive. Il a proposé une modification à la cFSM qui améliore le calcul de la matrice de contrainte définissant le mode distorsionnel qui reste l'instabilité la plus compliquée à étudier. La procédure cFSM est alors devenue plus simple que la proposition d'Adany et Schafer et surtout plus générale. Elle a, d'ailleurs, permis de

traiter, et pour la première fois, les sections fermées simples (non ramifiées) par la cFSM (Figure 1-1 (a)). Djafour [9] a proposé uniquement deux hypothèses pour définir la classe du mode de flambement combiné global-distorsionnel, GD , et a élaboré une procédure pour calculer la matrice de contrainte correspondante.

1.2 Objectifs – Contributions

Depuis son développement, la méthode des bandes finies contrainte (cFSM) est progressivement devenue un outil efficace pour améliorer la compréhension de la stabilité des éléments à parois minces et pour étudier les profilés en acier formés à froid. Ce travail se propose, comme premier objectif, de dresser un état de l'art des récents développements enregistrés dans la recherche scientifique liée à la cFSM afin de faire ressortir les progrès remarquables réalisés à ce jour mais aussi pour entrevoir les développements qui restent à accomplir.

Le deuxième objectif de cette thèse, qui reste l'objectif principal, est de faire progresser la théorie et continuer à généraliser l'approche cFSM en vue de permettre la décomposition des modes d'instabilité de profilés qui ont des sections non couvertes par les approches actuelles. Il s'agit des sections transversales ouvertes avec branches, des sections transversales fermées avec branches et des sections transversales avec branches et des parties fermées telles que celles montrées par la Figure 1-1 (b).

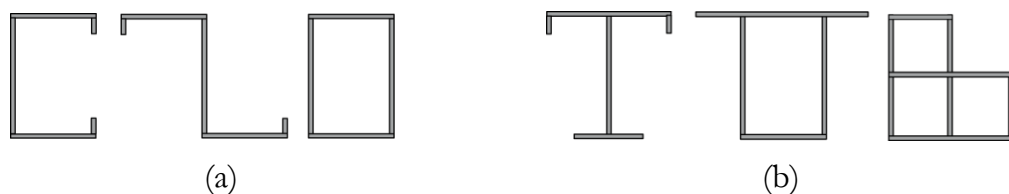


Figure 1-1: (a) Sections transversales non ramifiées (b) Sections transversales ramifiées ouvertes et fermées.

1.3 Plan de la thèse

Ce manuscrit est organisé en cinq chapitres en plus d'une conclusion. Le premier est une introduction pour présenter le contexte, les motivations et les objectifs de cette thèse. Le deuxième présente les différents modes purs d'instabilité tels que définis dans les règles américaines et européennes [10, 2]. Il expose ensuite les différentes possibilités pour calculer leurs charges critiques élastiques, y compris les méthodes numériques les plus utilisées dans ce domaine.

L'objectif du chapitre trois est de fournir un état de l'art des récents développements de la cFSM. Ce bilan comprend les avancées réalisées dans le développement théorique de la cFSM, dans l'utilisation de la cFSM dans les problèmes de dimensionnement des profilés formés à froid, dans les problèmes de conception et d'optimisation des formes des éléments à parois minces, et dans l'utilisation des solutions de la cFSM dans l'identification des déformées générales de flambement calculées par la FEM. Ce chapitre passe également en revue les récents travaux de recherche proches de la cFSM ainsi que ceux rendus possibles grâce à la cFSM.

Dans le chapitre quatre, les concepts fondamentaux de la FSM et de la cFSM sont exposés. La formulation initiée par Djafour [9] est ensuite présentée mais en y apportant certaines contributions. En effet, la réflexion autour de cette approche, en vue de l'étendre aux sections ramifiées, a conduit à une modification relativement importante de sa formulation. L'extension de la cFSM aux éléments prismatiques de sections transversales avec branches et/ou des parties fermées a cependant exigé le développement d'une nouvelle stratégie. Cette nouvelle approche est présentée dans la suite de ce chapitre, suivie de la méthode utilisée dans cette thèse pour séparer les modes G et D , en particulier pour les sections présentant des contours fermés.

Le chapitre cinq a pour but de valider les procédures proposées et montrer les possibilités à travers quelques exemples représentatifs des différentes situations possibles.

Ce document est clôturé par quelques conclusions sur l'intérêt du travail et les résultats obtenus. Ensuite les perspectives offertes à courts et moyens termes par les approches développées sont présentées.

Chapitre 2

Les modes d'instabilité de base dans le dimensionnement des profilés en acier formés à froid.

2.1 Introduction

L'utilisation des structures en acier formées à froid et à parois minces dans les constructions industrielles et résidentielles a augmenté ces dernières années, principalement en raison des formes de section inhabituelles qui peuvent être produites économiquement, en plus de leur légèreté et leur facilité de fabrication. Dans la plupart des cas, les phénomènes d'instabilité sont le facteur déterminant dans le dimensionnement des éléments structuraux en acier formés à froid à cause de leurs élancements très grands. La démarche classique pour déterminer leur capacité portante consiste à chercher d'abord la contrainte critique élastique qu'il faut ensuite corriger pour tenir compte des effets défavorables des imperfections géométriques et matérielles, ainsi que des effets favorables des réserves postcritiques. Cette correction est réalisée au moyen de courbes d'instabilité qui donnent la relation entre la charge critique élastique et la charge ultime en fonction de l'élancement. Cette démarche est respectée dans la plupart des règlements [2, 3]. Il est donc indispensable de faire une évaluation correcte de la charge critique élastique puisqu'elle est à l'origine de la procédure de dimensionnement.

Dans le comportement de flambement des éléments à parois minces, généralement, trois classes de modes de flambement, appelés modes de base, sont distinguées : le global, le distorsionnel, et le local. Ils sont généralement définis sur la base des déformations transversales dans le plan. Cependant, ce n'est pas la configuration de déformation qui fait la distinction importante, mais plutôt le comportement post-flambement. Généralement, le flambement global n'a pas de réserve postcritique, alors que le voilement local en a une importante. Le mode de flambement distorsionnel possède également une réserve postcritique quoique beaucoup moins importante que celle du voilement. L'existence, ou l'absence de la réserve post-flambement influence grandement la force de l'élément, il est donc important de pouvoir identifier correctement le mode de flambement qui entre en jeu, car les effets favorables de la réserve post-critique en dépendent, afin d'adopter la bonne procédure de dimensionnement.

Deux méthodes de base sont officiellement disponibles dans les règles de dimensionnement à travers le monde, la traditionnelle méthode de la largeur efficace (EWM pour Effective Width Method), [2, 3], et la méthode de la force directe (DSM pour Direct Strength Method) [11]. La première méthode a été utilisée dans les méthodes réglementaires de dimensionnement des éléments en acier formés à froid, presque partout dans le monde, tandis que la méthode de la force directe n'a été adoptée qu'en Amérique du Nord et en Australie/Nouvelle-Zélande, bien qu'au cours des dernières années, la DSM est de plus en plus utilisée pour calculer la charge ultime des éléments en acier formés à froid car elle permet d'éviter les longs calculs des largeurs efficaces. Cette nouvelle méthode a maintenant été approuvée par le comité AISI de la réglementation et a été introduite dans les règles nord-américaines pour la conception des éléments en acier formés à froid [3].

Dans ce chapitre les différents types d'instabilité de base telles que définies dans les règles américaines et européennes [3, 2] sont présentés. Ensuite les différentes possibilités de calculer les charges critiques élastiques qui leur correspondent sont exposées suivies d'un bref exposé des méthodes numériques les plus utilisées dans ce domaine.

2.2 Les trois instabilités de base

Les barres et les poutres (éléments de structures) en acier formées à froid (et à parois minces) soumises à des efforts de compression ou de flexion, peuvent avoir au moins trois modes d'instabilité élastiques, appelés instabilités de base ou modes d'instabilités purs : le mode local, le mode distorsionnel, et le mode global.

L'instabilité locale est généralement caractérisée par le voilement des parois planes (éléments plaques) qui constituent la section. Elle se produit en développant dans le sens longitudinal des ondes (sinusoïdales) ayant des longueurs de demi-onde inférieures à la plus grande dimension caractéristique de la section (voir Figure 2-1 (a)). La section transversale de l'élément voilé se déforme en engendrant des rotations sans aucune translation au niveau des lignes d'intersection entre les parois planes (voir Figure 2-2).

Le flambement global est un mode qui couvre toute la longueur de la barre/poutre. Il se produit avec une seule demi-onde de longueur égale à la longueur de flambement (voir Figure 2-1 (c)). On l'appelle aussi, flambement de corps rigide parce que la section transversale se déplace comme un corps rigide en translation et/ou en rotation sans subir de déformation. Il comprend le flambement par flexion, par torsion et par flexion-torsion (voir Figure 2-2).

Le mode le moins maîtrisé parmi les trois instabilités pures est le mode distorsionnel. Il présente, comme le voilement, des ondulations harmoniques le long de la longueur de l'élément. La longueur de sa demi-onde dépend du chargement et de la géométrie mais globalement, elle est plus grande que celle du mode local (voir Figure 2-1 (b)). Quant à la déformation de la section transversale, elle se produit en engendrant des rotations et des déplacements au niveau des lignes d'intersection entre les parois planes de la section (voir Figure 2-2).

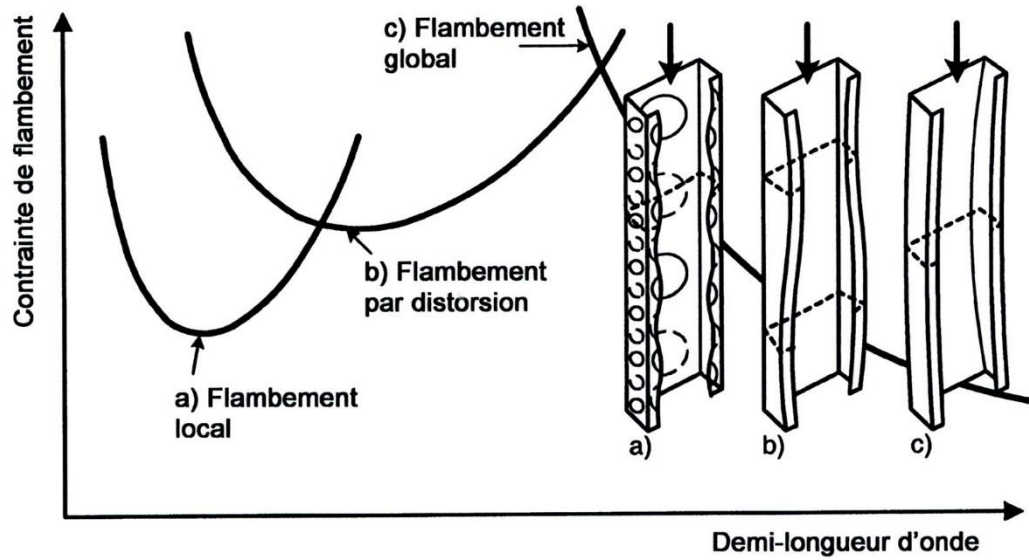


Figure 2-1 Contrainte critique élastique pour divers modes de flambement en fonction de la longueur de la demi-onde

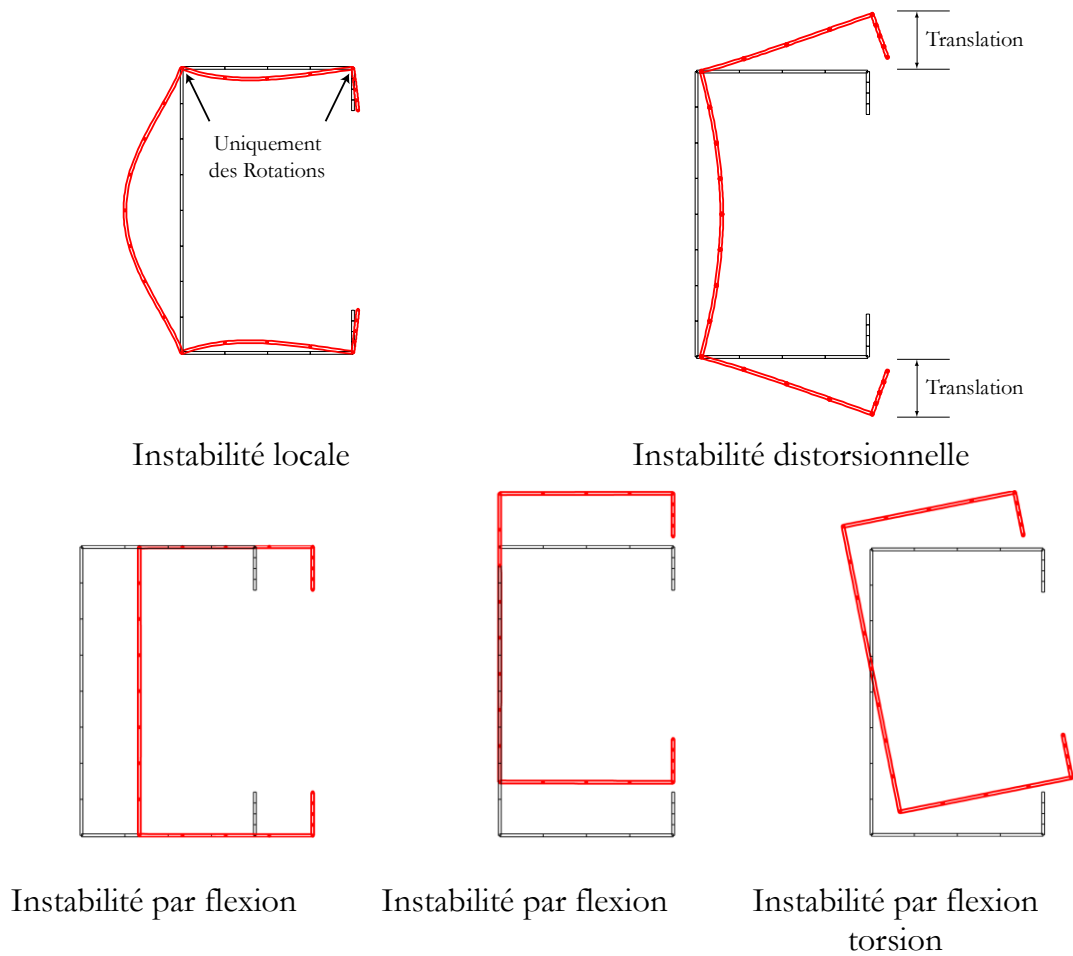


Figure 2-2 Les différents modes d'instabilité de base d'une section en C comprimée [9].

Puisque les modes local et distorsionnel modifient beaucoup plus la forme de la section transversale, ils sont considérés comme des modes « de section ». Ils peuvent interagir entre eux et même avec le mode global. La Figure 2-3 résume certains modes simples ou bien en interaction pour une colonne ayant une section en C et soumise à une compression axiale [12].

Les modes purs représentés dans la Figure 2-3 sont (a) le mode Local, (b) le mode Distorsionnel, (c) le mode Flexionnel, (d) le mode Torsionnel et (e) le mode Flexionnel-Torsionnel. Les modes couplés sont (f) Local + Distorsionnel, (g) Local + Flexionnel, (h) Flexionnel + Distorsionnel, (i) Local + Flexionnel-Torsionnel, (j) Flexionnel-Torsionnel + Distorsionnel et (k) Flexionnel + Flexionnel-Torsionnel.

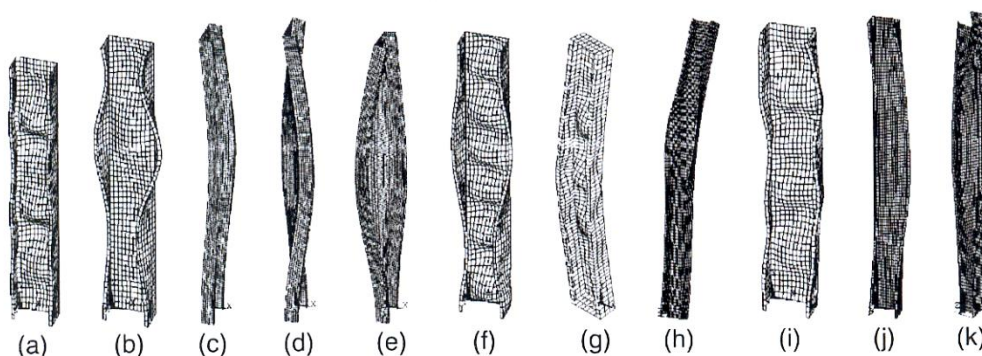


Figure 2-3 Modes d'instabilité d'une colonne à section en C soumise à un effort axial [12]

2.3 Calcul manuel des contraintes critiques des instabilités de base

2.3.1 Le mode local ou Voilement.

Il existe deux solutions manuelles pour le calcul de la contrainte critique élastique de voilement. La méthode des éléments et la méthode de l'interaction [3]. La méthode des éléments fournit une solution simple avec une large applicabilité, tandis que la méthode de l'interaction fournit une solution de flambement local plus précise qui comprend l'interaction de deux parois quelconques (âme-semelle, semelle-raideur), mais a une applicabilité limitée.

La méthode des éléments ne tient pas compte de l'interaction entre les parois de la section. C'est l'approximation la plus simple et la plus conservatrice pour le calcul de la contrainte de voilement élastique d'une section. On suppose que tous les éléments de la section sont simplement appuyés, on calcule la contrainte de voilement de chaque élément, et on prend le minimum des contraintes calculées comme contrainte de voilement de la section.

Pour les poteaux la charge critique locale est donnée par :

$$P_{crl} = A_g \sigma_{crl} \quad (2-1)$$

Et pour les poutres le moment critique local est donné par :

$$M_{crl} = S_g \sigma_{crl} \quad (2-2)$$

Avec A_g l'aire de la section transversale, S_g le module de section à la fibre extrême comprimée et σ_{crl} la contrainte critique de voilement donnée par l'expression ci-dessous :

$$\sigma_{crl} = k \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{w} \right)^2 \quad (2-3)$$

Où E est le module de Young, ν est le coefficient de Poisson, t est l'épaisseur de l'élément, w sa largeur et k son coefficient de voilement qui dépend des conditions aux limites et de chargement de l'élément.

Les solutions manuelles pour le voilement reposent sur l'utilisation de ce coefficient de voilement.

2.3.1.1 Les éléments raidis

Pour un élément de section (paroi) raidi comprimé soumis à un gradient de contraintes, $\psi = \sigma_2 / \sigma_1$, le coefficient de voilement est donné par les formules ci-après.

Pour l'AISI

$$k = 4 + 2(1 - \psi)^3 + 2(1 - \psi) \quad (2-4)$$

Pour l'Eurocode

$$k = \frac{8.2}{1.05 + \psi} \quad \text{si } 1 > \psi > 0$$
$$k = 7.81 - 6.29\psi + 9.78\psi^2 \quad \text{si } 0 > \psi > -1 \quad (2-5)$$

Où σ_1 et σ_2 sont les contraintes aux bords de la paroi.

Dans le cas d'une paroi raidie soumise à un effort de compression pure, cela donne, pour les deux codes

$$\sigma_1 = \sigma_2$$
$$\psi = 1$$
$$k = 4 \quad (2-6)$$

Dans le cas d'un élément raidi soumis à un effort de flexion pure, on a également pour les deux codes

$$\sigma_1 = -\sigma_2$$
$$\psi = -1$$
$$k = 24 \quad (2-7)$$

2.3.1.2 Les éléments non raidis

Pour les éléments non raidis l'Eurocode et l'AISI utilisent les mêmes expressions. Dans le cas d'un élément non raidi (ou un raidisseur de bord) uniformément comprimé, le coefficient de voilement est $k = 0.43$. Si la paroi non raidie ou le raidisseur de bord est soumis à un gradient de contraintes tout en étant

totalemment comprimé, $0 < \psi < 1$, le coefficient de voilement est donné pour les deux situations suivantes, en fonction du sens de variation de la contrainte.

Dans le cas où la contrainte diminue vers le bord libre (voir Figure 2-4 (a)), on a

$$k = \frac{0.578}{\psi + 0.34} \tag{2-8}$$

Et si la contrainte augmente vers le bord libre (voir Figure 2-4 (b)), k est donné par :

$$k = 0.57 - 0.21\psi + 0.07\psi^2 \tag{2-9}$$

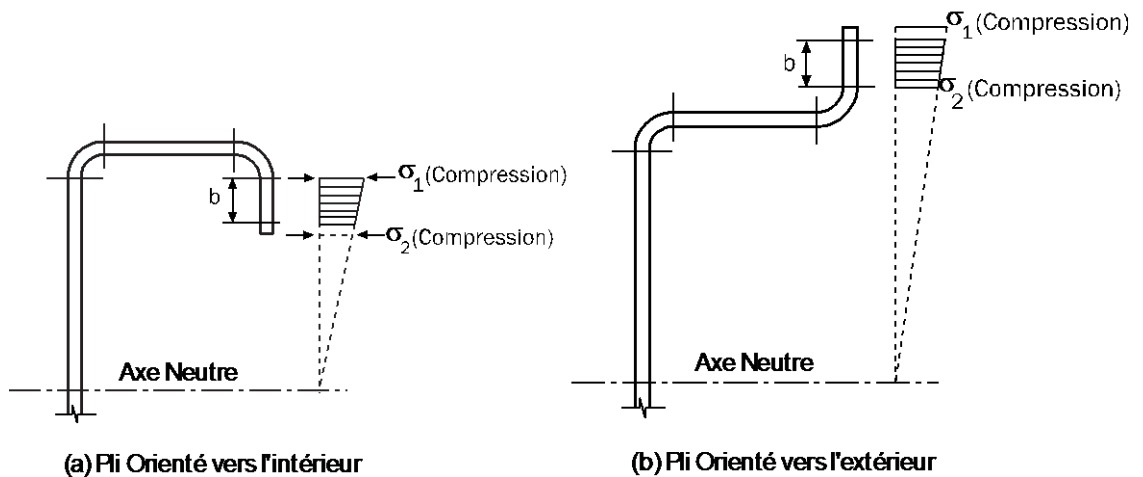


Figure 2-4 Eléments non raidis soumis à un gradient de contraintes.

Pour une paroi dont un bord est en compression σ_1 et le deuxième est en traction σ_2 ; et si le bord libre est comprimé tel que montré par la Figure 2-5(a), le coefficient de voilement est donné par

$$k = 0.57 + 0.21\psi + 0.07\psi^2 \tag{2-10}$$

Si maintenant le bord appuyé est comprimé (voir Figure 2-5 (b)) on a

$$k = 1.70 + 5\psi + 17.1\psi^2 \quad (2-11)$$

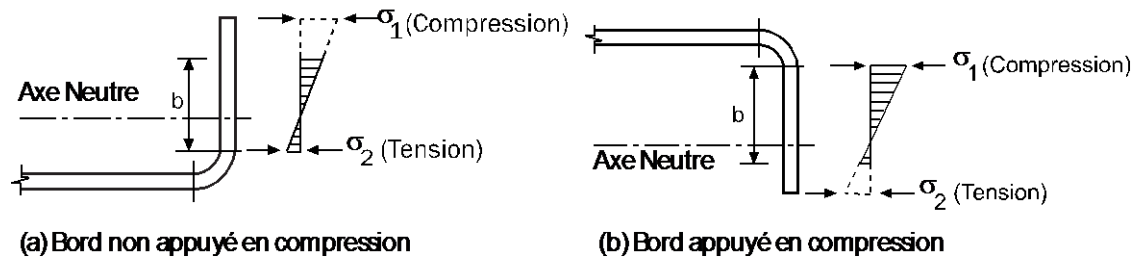


Figure 2-5 Eléments non raidis soumis à un gradient de contraintes, un bord en compression et l'autre en traction

2.3.2 Le mode distorsionnel.

2.3.2.1 Selon l'AISI

Les dispositions ci-dessous s'appliquent aux profilés de sections transversales en I, Z, C et d'autres sections ouvertes à semelles avec raidisseurs de bord. La charge critique et le moment critique sont donnés, respectivement, par

$$P_{crd} = A_g \sigma_{crd} \quad (2-12)$$

Et

$$M_{crd} = S_f \sigma_{crd} \quad (2-13)$$

Où A_g est l'aire brute de la section transversale, S_f est le module de section élastique et σ_{crd} est la contrainte critique élastique distorsionnelle. Cette dernière prend différentes expressions en fonction de la forme de la section transversale du profilé et du chargement.

a. Recommandations simplifiées pour les sections C et Z avec raidisseurs simples

Pour les profilés de sections en C, en Z et en chapeau qui ne possèdent pas de dispositifs pour empêcher la rotation des semelles et qui vérifient les limitations géométriques ci-dessous, les équations (2-14) et (2-18) peuvent être utilisées pour obtenir une valeur conservatrice de la contrainte distorsionnelle dans le cas de la compression simple et de la flexion simple, respectivement.

$$50 \leq h_0/t \leq 200$$

$$25 \leq b_0/t \leq 100$$

$$6.25 < D/t \leq 50$$

$$45^\circ \leq \theta < 90^\circ$$

$$2 \leq h_0/b_0 \leq 8$$

$$0.04 \leq D \sin \theta / b_0 \leq 0.5$$

Où h_0 , b_0 , D et θ sont les dimensions définies sur la Figure 2-6

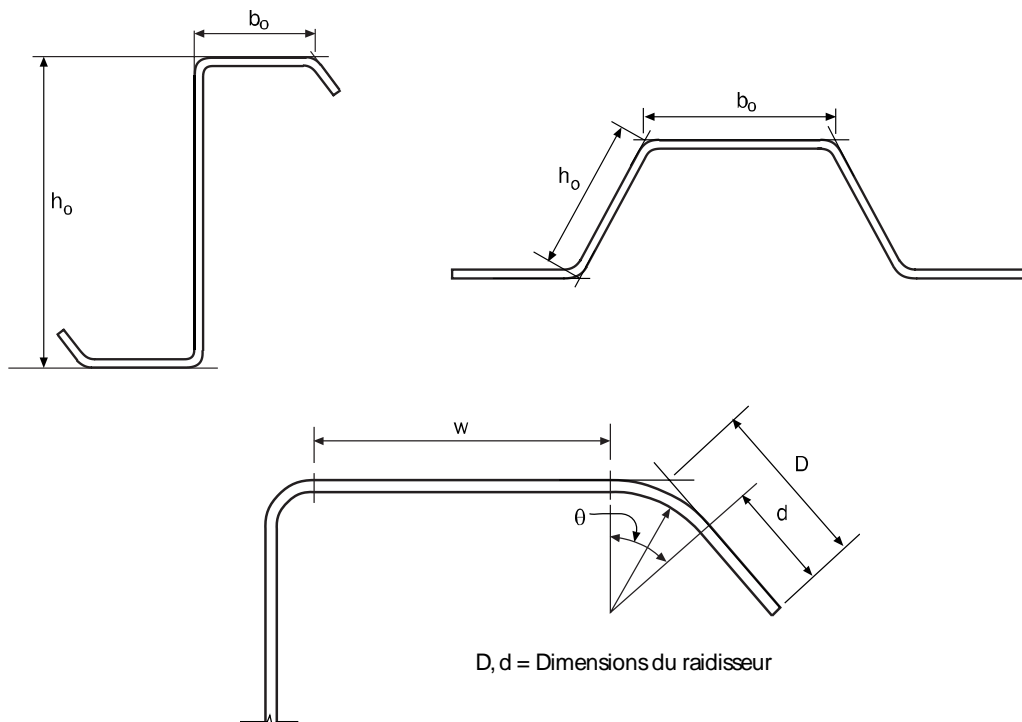


Figure 2-6 Définition des différentes grandeurs géométriques

Si le profilé est comprimé, on a :

$$\sigma_{crd} = \alpha k_d \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b_0} \right)^2 \quad (2-14)$$

Où

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{pour } L_m \geq L_{cr} \\ (L_m/L_{cr})^{\ln(L_m/L_{cr})} & \text{pour } L_m < L_{cr} \end{cases} \quad (2-15)$$

Avec

$$L_{cr} = 1.2h_0 \left(\frac{b_0 D \sin \theta}{h_0 t} \right)^{0.6} \leq 10h_0 \quad (2-16)$$

Et

$$k_d = 0.05 \leq 0.1 \left(\frac{b_0 D \sin \theta}{h_0 t} \right)^{1.4} \leq 8.0 \quad (2-17)$$

Où

L_m est la distance entre les raidisseurs qui empêchent le flambement par distorsion, E est le module de Young de l'acier et ν est son coefficient de Poisson.

Si le profilé est fléchi, la contrainte élastique distorsionnelle est donnée par

$$\sigma_{crd} = \beta k_d \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b_0} \right)^2 \quad (2-18)$$

Où

$$\beta = 1 \leq 1 + 0.4 \left(\frac{L}{L_m} \right)^{0.7} \left(1 - \frac{M_1}{M_2} \right)^{0.7} \leq 1.3 \quad (2-19)$$

Où L est la valeur minimale de L_{cr} et de L_m

Avec

$$L_{cr} = 1.2h_0 \left(\frac{b_0 D \sin \theta}{h_0 t} \right)^{0.6} \leq 10h_0 \quad (2-20)$$

$$k_d = 0.5 \leq 0.6 \left(\frac{b_0 D \sin \theta}{h_0 t} \right)^{1.4} \leq 8.0 \quad (2-21)$$

b. Cas des sections en C, Z et chapeau ou toute autre section ouverte ayant des semelles égales et où les raidisseurs sont soit simples soit complexes.

Les recommandations ci-dessous s'appliquent aux profilés comprimés ou fléchis de sections transversales ouvertes avec des semelles raidies de dimensions égales, y compris celles qui vérifient les limitations géométriques citées dans le paragraphe précédent.

L'équation (2-22) donne la contrainte distorsionnelle dans le cas de la compression.

$$\sigma_{crd} = \frac{k_{\phi fe} + k_{\phi we} + k_{\phi}}{\tilde{k}_{\phi fg} + \tilde{k}_{\phi wg}} \quad (2-22)$$

Où $k_{\phi fe}$ est la rigidité élastique de rotation fournie par la semelle à la jonction âme/semelle et, est donnée par :

$$k_{\phi fe} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left(EI_{xf} (x_0 - h_x)^2 + EC_{wf} - E \frac{I_{xyf}^2}{I_{yf}} (x_0 - h_x)^2 \right) + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 GJ_f \quad (2-23)$$

Et $k_{\phi we}$ est la rigidité élastique de rotation fournie par l'âme à la jonction âme/semelle et, est donnée par :

$$k_{\phi we} = \frac{Et^3}{6h_0(1 - \nu^2)} \quad (2-24)$$

k_ϕ est la rigidité de rotation apportée par les éléments rigidifiant la jonction âme/semelle (0 si la semelle n'est pas rigidifiée). Si les rigidités apportées aux deux semelles sont différentes, la plus petite des deux est utilisée.

$\tilde{k}_{\phi fg}$ est la rigidité géométrique de rotation exigée par la semelle à la jonction âme/semelle, et est donnée par l'expression suivante.

$$\tilde{k}_{\phi fg} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(A_f \left((x_0 - h_x)^2 \left(\frac{I_{xyf}}{I_{yf}}\right)^2 - 2y_0(x_0 - h_x) \left(\frac{I_{xyf}}{I_{yf}}\right) + h_x^2 + y_0^2 \right) + I_{xf} + I_{yf} \right) \quad (2-25)$$

$\tilde{k}_{\phi wg}$ est la rigidité géométrique de rotation exigée par l'âme à la jonction âme/semelle donnée par

$$\tilde{k}_{\phi wg} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{th_0^3}{60} \quad (2-26)$$

Où

$$L = \text{Min}(L_{cr}, L_m) \quad (2-27)$$

Avec

$$L_{cr} = \left(\frac{6\pi^4 h_0 (1 - \nu^2)}{t^3} \left(I_{xf} (x_0 - h_x)^2 + C_{wf} - \frac{I_{xyf}^2}{I_{yf}} (x_0 - h_x)^2 \right) \right)^{1/4} \quad (2-28)$$

Dans le cas de profilés fléchis, la contrainte critique distorsionnelle est :

$$\sigma_{crd} = \beta \frac{k_{\phi fe} + k_{\phi we} + k_\phi}{\tilde{k}_{\phi fg} + \tilde{k}_{\phi wg}} \quad (2-29)$$

Où β est une valeur qui tient compte du gradient de moments qu'il est permis de prendre de façon conservative égale à 1. β est en général donnée par :

$$\beta = 1 \leq 1 + 0.4 \left(\frac{L}{L_m} \right)^{0.7} \left(1 - \frac{M_1}{M_2} \right)^{0.7} \leq 1.3 \quad (2-30)$$

Avec

$$L = \min(L_{cr}; L_m) \quad (2-31)$$

La longueur critique est donnée par :

$$L_{cr} = \left(\frac{4\pi^4 h_0 (1 - \nu^2)}{t^3} \left(I_{xf} (x_0 - h_x)^2 + C_{wf} - \frac{I_{xyf}^2}{I_{yf}} (x_0 - h_x)^2 \right) + \pi^4 h_0^4 / 720 \right)^{1/4} \quad (2-32)$$

Où

I_{xf} est le moment d'inertie de la semelle par rapport à l'axe x .

I_{yf} est le moment d'inertie de la semelle par rapport à l'axe y .

I_{xyf} est le produit d'inertie de la semelle.

h_x est la distance suivant x du centre de gravité au centre de cisaillement de la semelle.

x_0 est la distance suivant x de la jonction âme/semelle au centre de gravité de la semelle.

C_{wf} est la constante de gauchissement de la semelle.

Les différentes rigidités à la rotation de la semelle sont données par :

$$k_{\phi fe} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left(E I_{xf} (x_0 - h_x)^2 + E C_{wf} - E \frac{I_{xyf}^2}{I_{yf}} (x_0 - h_x)^2 \right) + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 G J_f \quad (2-33)$$

$$\tilde{k}_{\phi fg} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(A_f \left((x_0 - h_x)^2 \left(\frac{I_{xyf}}{I_{yf}}\right)^2 - 2y_0(x_0 - h_x) \left(\frac{I_{xyf}}{I_{yf}}\right) + h_x^2 + y_0^2 \right) + I_{xf} + I_{yf} \right) \quad (2-34)$$

$$k_{\phi we} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{3}{h_0} + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{19h_0}{60} + \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{h_0^3}{240} \right) \quad (2-35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{\phi wg} \\ = \frac{h_0 t \pi^2}{13440} \left(\frac{(45360(1 - \xi_{\hat{a}me}) + 62160) \left(\frac{L}{h_0}\right)^2 + 448\pi^2 + \left(\frac{h_0}{L}\right)^2 (53 + 3(1 - \xi_{\hat{a}me}))\pi^4}{\pi^4 + 28\pi^2 \left(\frac{L}{h_0}\right)^2 + 420 \left(\frac{L}{h_0}\right)^4} \right) \end{aligned} \quad (2-36)$$

Avec $\xi_{\hat{a}me} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2}$ est le gradient de contrainte dans l'âme où σ_1 et σ_2 sont les contraintes au niveau des extrémités opposées de l'âme. $\sigma_1 > \sigma_2$ la compression est positive, la traction est négative et les contraintes sont calculées sur la base de la section brute.

c. Analyse rationnelle du flambement élastique

L'AISI autorise l'utilisation de toute méthode rationnelle pour calculer les contraintes critiques du flambement élastique.

2.3.2.2 Selon l'Eurocode

a. Généralités

L'Eurocode recommande de baser les calculs des parois comprimées munies de raidisseurs de bord ou intermédiaires sur l'hypothèse selon laquelle le raidisseur se comporte comme une barre comprimée avec un maintien partiel continu, dont la rigidité de ressort dépend des conditions aux limites et de la rigidité de flexion des parois adjacentes.

La rigidité K du ressort associé à un raidisseur est déterminée par l'application d'une charge unitaire u par unité de longueur comme illustré à la Figure 2-7 . Elle est déterminée à partir de l'équation ci-dessous

$$K = u/\delta \tag{2-37}$$

Où

δ est la flèche du raidisseur sous l'effet de la charge unitaire u agissant au centre de gravité de la section efficace

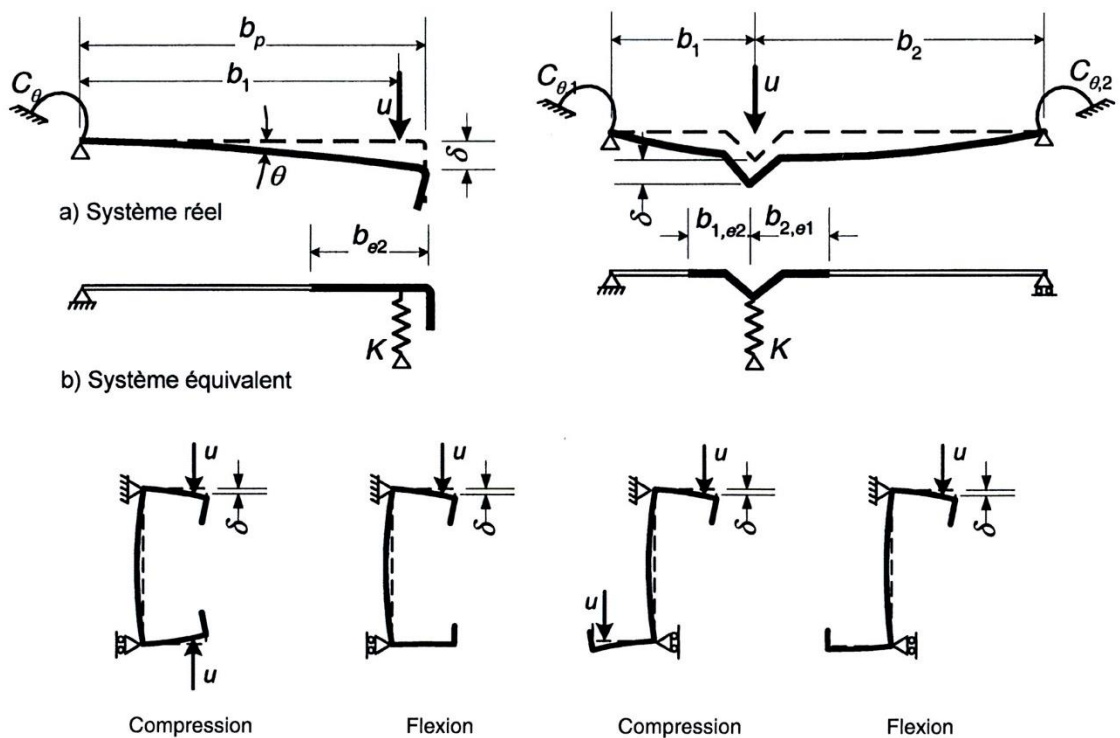


Figure 2-7 Détermination de la rigidité du ressort

Pour déterminer la rigidité des ressorts en rotation C_θ , C_{θ_1} et C_{θ_2} en fonction de la géométrie de la section transversale, il faut tenir compte des effets éventuels d'autres raidisseurs existant sur la même paroi.

La contrainte critique élastique distorsionnelle peut être obtenue à partir d'une analyse numérique de flambement élastique.

b. Parois munies de raidisseurs de bord

Dans le cas de parois munies de raidisseurs de bords tel que montré par la Figure 2-8, la contrainte critique distorsionnelle est donnée par :

$$\sigma_{crd} = \frac{2\sqrt{KEI_s}}{A_s} \quad (2-38)$$

Où K est la rigidité du ressort par unité de longueur calculée par l'équation (2-37), et où la flèche est donnée par :

$$\delta = \theta b_p + \frac{ub_p^3}{3} \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} \quad (2-39)$$

Avec $\theta = ub_p/C_\theta$

I_s est le moment d'inertie de la section efficace du raidisseur.

A_s est la section efficace du raidisseur montrée par la Figure 2-8 calculée en suivant les étapes détaillées dans l'Eurocode 3 [2] si les exigences définies par le Tableau Annexe 1 sont satisfaites et si l'angle entre le raidisseur et la paroi est compris entre 45° et 135° .

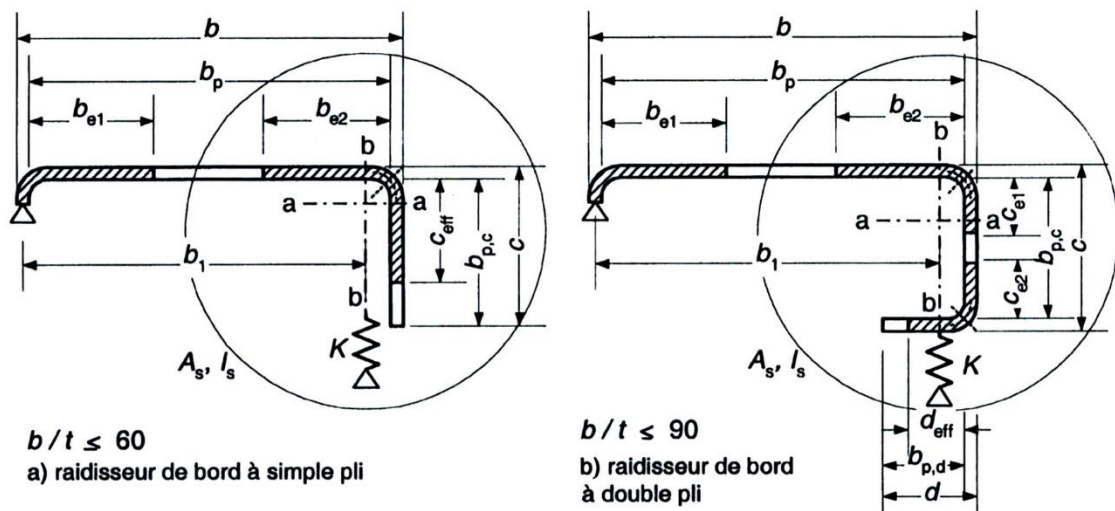


Figure 2-8 Raidisseurs de bord

Les parties efficaces du raidisseur, paroi c ou parois c et d comme montré à la Figure 2-8, augmentées de la partie efficace adjacente de la paroi plane b_p sont retenues comme section transversale d'un raidisseur de bord.

Dans le cas de raidisseurs de bord de profils en C et en Z, la rigidité en rotation C_θ est déterminée avec la charge unitaire appliquée comme indiqué à la Figure 2-7. Ce qui conduit à l'expression suivante pour la rigidité de ressort K_1 pour la semelle 1

$$K_1 = \frac{Et^3}{4(1 - \nu^2)(b_1^2 h_w + b_1^3 + 0.5b_1 b_2 h_w k_f)} \quad (2-40)$$

Où

b_1 est la distance entre la jonction âme/semelle et le centre de gravité de l'aire efficace du raidisseur de bord de la semelle 1.

b_2 est la distance entre la jonction âme/semelle et le centre de gravité de l'aire efficace du raidisseur de bord de la semelle 2.

h_w est la hauteur de l'âme;

$k_f = 0$ si la semelle 2 est tendue, et $k_f = \frac{A_{S1}}{A_{S2}}$ si la semelle 2 est comprimée.

A_{S1} et A_{S2} sont les aires efficaces du raidisseur de bord des semelles 1 et 2 respectivement.

c. Parois munies de raidisseurs intermédiaires.

Dans le cas de parois munies de raidisseurs intermédiaires tel que montré par la Figure 2-9, la contrainte critique distorsionnelle est également donnée par l'équation (2-38).

Où la rigidité des ressorts en rotation C_{θ_1} et C_{θ_2} est prise égale à zéro ; et où la flèche δ peut alors être obtenue par :

$$\delta = \frac{ub_1^2 b_2^2}{3(b_1 + b_2)} \frac{12(1 - \nu)}{Et^3} \quad (2-41)$$

I_S est le moment d'inertie de la section efficace du raidisseur, pris égal à celui de son aire efficace A_S par rapport à l'axe neutre $a - a$ de sa section transversale efficace (voir Figure 2-9).

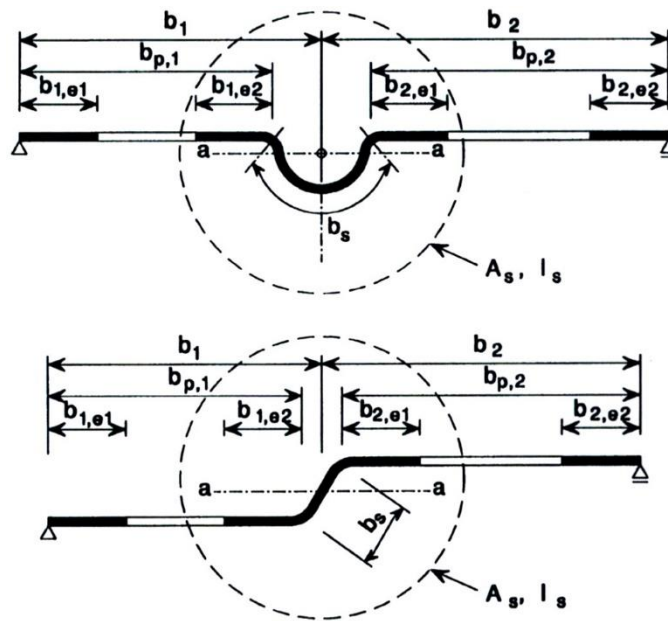


Figure 2-9 Raidisseurs intermédiaires.

d. Plaques nervurées avec raidisseurs intermédiaires

Dans le cas de semelle munie de raidisseur unique centré, la contrainte critique de distorsion est donnée par :

$$\sigma_{crd} = \frac{4,2k_w E}{A_S} \sqrt{\frac{I_S t^3}{4b_p^2(2b_p + 3b_S)}} \quad (2-42)$$

Où b_p est la largeur de la paroi, b_S est la largeur du raidisseur mesurée le long du périmètre, A_S et I_S sont l'aire et le moment d'inertie de la section transversale du

raidisseur et k_w est un coefficient tenant compte du maintien partiel en rotation de la semelle raidie. En alternative plaçant en sécurité, k_w peut être pris égal à 1.

Dans le cas de semelle avec deux raidisseurs situés symétriquement (voir Figure 2-10), la contrainte critique élastique de distorsion est donnée par :

$$\sigma_{crd} = \frac{4,2k_w E}{A_S} \sqrt{\frac{I_{St}^3}{8b_1^2(3b_e - 4b_1)}} \tag{2-43}$$

Avec

$$b_e = 2b_{p,1} + b_{p,2} + 2b_s$$

$$b_1 = b_{p,1} + 0,5b_r$$

Où $b_{p,1}$ est la largeur de référence d'une paroi plane de rive, $b_{p,2}$ est la largeur de référence d'une paroi centrale de rive et b_r est la largeur hors tout d'un raidisseur. A_S et I_S sont l'aire et le moment d'inertie de la section transversale du raidisseur suivant la Figure 2-10

La Figure 2-10 montre les différentes grandeurs définies

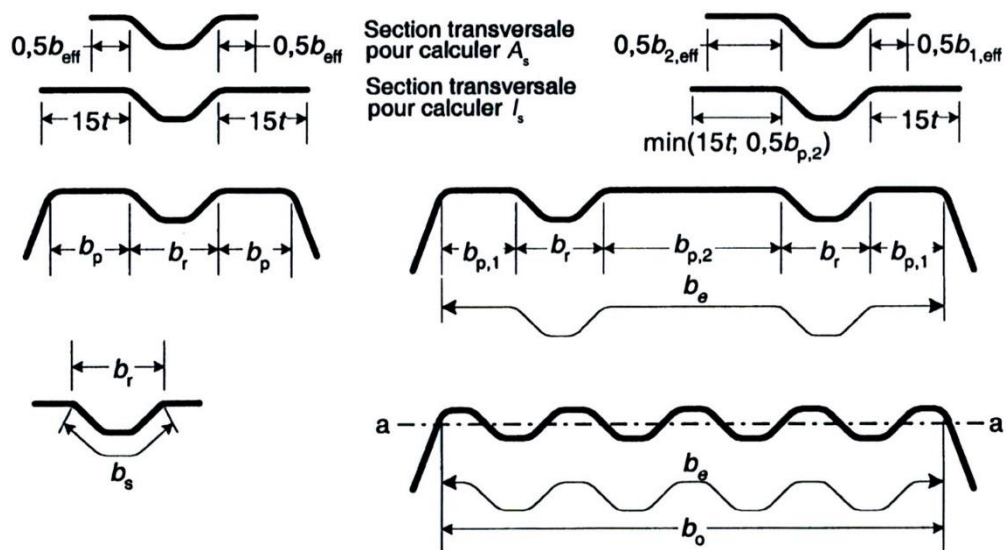


Figure 2-10 Semelle comprimée munie d'un, de deux ou de plusieurs raidisseurs [2].

Dans le cas de semelle munie d'au moins trois raidisseurs identiques, la contrainte critique distorsionnelle est :

$$\sigma_{crd} = 1,8E \sqrt{\frac{I_S t}{b_0^2 b_e^3}} + 3,6 \frac{Et^2}{b_0^2} \quad (2-44)$$

I_S est la somme des moments d'inertie des raidisseurs par rapport à l'axe $a - a$, montré par la Figure 2-10, b_0 est la largeur de la semelle et b_e est la largeur développée de la semelle.

La contrainte critique de distorsion pour un raidisseur unique ou pour le raidisseur le plus proche de la semelle comprimée dans les âmes munies de deux raidisseurs est donnée par

$$\sigma_{crd,sa} = \frac{1,05k_t E \sqrt{I_S t^3 S_1}}{A_{sa} S_2 (S_1 - S_2)} \quad (2-45)$$

Dans laquelle S_1 est donné par les équations suivantes :

Pour un raidisseur unique $S_1 = 0,9(S_a + S_{sa} + S_c)$

Pour le raidisseur le plus proche de la semelle comprimée, dans les âmes munies de deux raidisseurs $S_1 = S_a + S_{sa} + S_b + 0,5(S_{sb} + S_c)$ avec $S_2 = S_1 - S_a - 0,5S_{sa}$

Où k_t est le coefficient tenant compte du maintien partiel en rotation de l'âme raidie, par les semelles, I_S est le moment d'inertie de la section efficace du raidisseur.

Dans le cas de plaques nervurées munies de raidisseurs de semelles et de raidisseurs d'âme, il faut prendre en compte l'interaction entre le flambement par distorsion des raidisseurs de semelle et des raidisseurs d'âme, en utilisant une

contrainte critique élastique modifiée pour les deux types de raidisseurs obtenue par l'équation suivante:

$$\sigma_{crd,mod} = \frac{\sigma_{crd}}{\sqrt[4]{1 + \left[\beta_s \frac{\sigma_{crd}}{\sigma_{crd,sa}} \right]^4}} \tag{2-46}$$

Où σ_{crd} est la contrainte critique élastique de distorsion d'un raidisseur de semelle intermédiaire, donnée par l'équation (2-42) dans le cas d'une semelle avec un seul raidisseur, ou l'équation (2-43) dans le cas d'une semelle avec deux raidisseurs.

$\sigma_{crd,sa}$ est la contrainte critique élastique d'un raidisseur d'âme unique, ou du raidisseur le plus proche de la semelle comprimée dans les âmes munies de deux raidisseurs donnée par l'équation (2-45).

A_S est l'aire de la section transversale efficace d'un raidisseur intermédiaire de semelle ;

A_{sa} est l'aire de la section transversale efficace d'un raidisseur intermédiaire d'âme.

$\beta_S = 1 - (h_a + 0.5h_{sa})/e_c$ pour un profilé fléchi ; $\beta_S = 1$ pour un profilé comprimé. Les grandeurs h_a et h_{sa} sont montrées par la Figure 2-11.

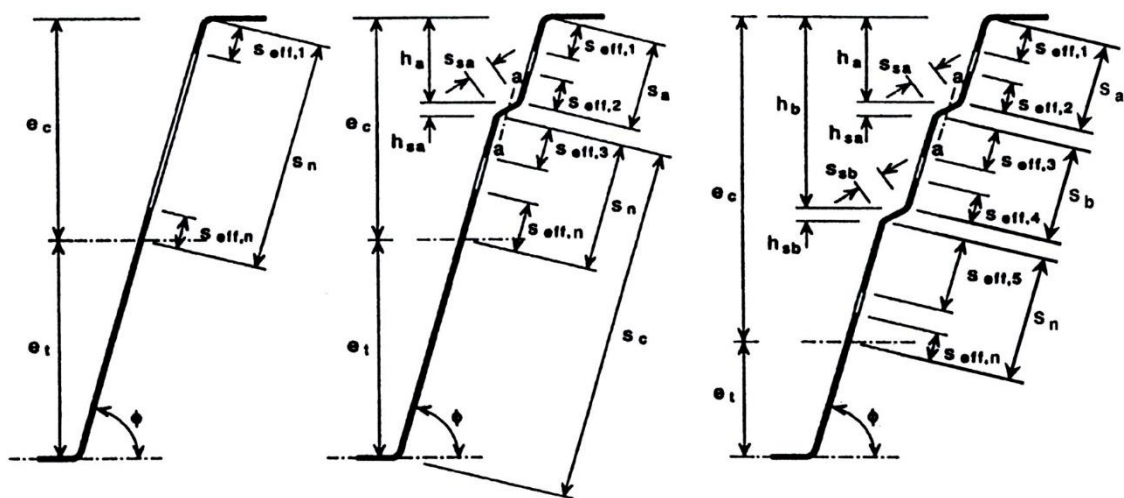


Figure 2-11 Section transversale efficace d'âme de plaques nervurées

2.3.3 Le mode global ou Eulérien.

2.3.3.1 Selon l'AISI

a. Sections non sujettes à un flambement par torsion ou par flexion-torsion.

La contrainte critique du mode global pour des sections transversales quelconques je soumises à la compression et non sujettes à un flambement par torsion ou par torsion-flexion est donnée par la formule d'Euler de l'équation (2-47)

$$\sigma_{cre} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (2-47)$$

Où E est le module de Young de l'acier, K est le coefficient de flambement, L la longueur du profilé non raidie latéralement et r est le rayon de giration.

b. Sections doublement symétriques ou mono-symétriques soumises à un flambement par torsion ou par flexion-torsion.

Pour des sections mono-symétriques sujettes à un flambement par flexion-torsion, la contrainte critique est la plus petite des valeurs calculées par l'équation (2-47) et l'équation ci-dessous :

$$\sigma_{cre} = \frac{1}{2\beta} \left[(\sigma_{ex} + \sigma_t) - \sqrt{(\sigma_{ex} + \sigma_t)^2 - 4\beta\sigma_{ex}\sigma_t} \right] \quad (2-48)$$

Où

$$\beta = 1 - \left(\frac{x_0}{r_0}\right)^2 \quad (2-49)$$

Et

$$\sigma_t = \frac{1}{Ar_0^2} \left[GJ + \frac{\pi^2 EC_w}{(k_t L_t)^2} \right] \quad (2-50)$$

G est le module de cisaillement, J est la constante de Saint Venant de torsion, C_w est la constante de gauchissement, A est l'aire brute, r_0 est le rayon de giration polaire et est donné par

$$r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + x_0^2} \quad (2-51)$$

Où r_x et r_y sont les rayons de giration de la section transversale autour des axes principaux, et x_0 est la distance du centre de cisaillement au centre de gravité le long de l'axe principal x , prise négative. L'axe x est l'axe de symétrie de la section.

Et

$$\sigma_{ex} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{K_x L_x}{r_x}\right)^2} \quad (2-52)$$

Où K_x est le facteur de longueur effective de flexion autour de l'axe x , et L_x la longueur du profilé entre les entretoises pour une flexion autour de l'axe des x

Pour des sections à double symétrie soumises au flambement par torsion, la contrainte critique σ_{cre} est la plus petite des valeurs de σ_{cre} de l'équation (2-47), et $\sigma_{cre} = \sigma_t$ où σ_t est donnée par l'équation (2-50).

c. Sections à un point de symétrie

Pour des sections à un point de symétrie, la contrainte critique σ_{cre} est la plus petite des valeurs de σ_{cre} de l'équation (2-47), en utilisant l'axe principal mineur, et de l'équation $\sigma_{cre} = \sigma_t$ où σ_t est donnée par l'équation (2-50).

d. Sections asymétriques.

Pour des sections qui n'ont pas de symétrie, soit autour d'un axe ou autour d'un point, la contrainte critique doit être déterminée par une analyse rationnelle.

e. Déversement des profilés de sections transversales ouvertes.

Les dispositions ci-dessous s'appliquent aux profilés de section en I, Z, C, U et d'autres de type fermé, soumises au déversement.

1. Pour les sections symétriques

Dans le cas où la flexion est autour de l'axe de symétrie, la contrainte critique pour les sections mono symétriques et les sections doublement-symétriques est donnée par

$$\sigma_{cre} = \frac{C_b r_0 A}{S_f} \sqrt{\sigma_{ey} \sigma_t} \quad (2-53)$$

Et pour les sections ayant un point de symétrie, on a

$$\sigma_{cre} = \frac{C_b r_0 A}{2S_f} \sqrt{\sigma_{ey} \sigma_t} \quad (2-54)$$

Où

$$C_b = \frac{12.5M_{max}}{2.5M_{max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \quad (2-55)$$

Où M_{max} est le moment maximum dans les entretoises, M_A est la valeur du moment au point situé au quart du segment entre les entretoises, M_B est la valeur au milieu et M_C au trois-quarts. r_0 est le rayon de giration polaire donné par l'équation (2-51). A est l'aire de la section transversale non réduite, et S_f module de section élastique de la section non réduite par rapport à la fibre extrême comprimée

$$\sigma_{ey} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{K_y L_y}{r_y}\right)^2} \quad (2-56)$$

Où E est le module de Young de l'acier, K_y est le facteur de longueur effective de flexion autour de l'axe y , et L_y la longueur du profilé entre les entretoises pour une flexion autour de l'axe des y . σ_t est donnée par l'équation (2-50).

Pour les sections à un seul axe de symétrie fléchies autour de l'axe central perpendiculaire à l'axe de symétrie, la contrainte élastique critique est :

$$\sigma_{cre} = \frac{C_s A \sigma_{ex}}{C_{TF} S_F} \left[j + C_s \sqrt{j^2 + r_0^2 \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_{ex}} \right)} \right] \quad (2-57)$$

Où C_s prend la valeur de, 1 pour un moment provoquant une compression sur le côté de centre de cisaillement de centre de gravité et -1 pour un moment provoquant une traction. σ_{ex} est donnée par l'équation (2-52).

$$C_{TF} = 0.6 - 0.4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \quad (2-58)$$

Où M_1 et M_2 sont le plus petit et le plus grand moment de flexion respectivement aux extrémités de la longueur entre les entretoises dans le plan de flexion. Lorsque le moment de flexion à tout moment dans une longueur entre les entretoises est plus grand que celui aux deux extrémités de cette longueur, C_{TF} doit être pris égal à 1.

$$j = \frac{1}{2I_y} \left[\int_A x^3 dA + \int_A xy^2 dA \right] - x_0 \quad (2-59)$$

2. Pour les sections en I, les sections en C et en Z

Pour les profilés de sections transversales en I, les sections mono symétriques en C ou en Z fléchies autour de l'axe central perpendiculaire à l'âme (axe des x), les contraintes critiques élastiques sont données en fonction des types de sections.

Pour les sections doublement symétriques en I et les sections mono symétriques en C

$$\sigma_{cre} = \frac{C_b \pi^2 E d I_{yc}}{S_f (K_y L_y)^2} \quad (2-60)$$

Pour les profilés de sections transversales en Z à un point de symétrie

$$\sigma_{cre} = \frac{C_b \pi^2 E d I_{yc}}{2 S_f (K_y L_y)^2} \quad (2-61)$$

Où d est la profondeur de la section, I_{yc} est le moment d'inertie de la partie comprimée de la section par rapport à l'axe central, de la section entière, parallèle à l'âme.

f. Déversement des profilés de sections transversales fermées

Pour les profilés de sections transversales fermées, la contrainte critique de déversement est calculée par l'expression suivante :

$$\sigma_{cre} = \frac{C_b \pi}{K_y L_y S_f} \sqrt{E G J I_y} \quad (2-62)$$

Où

J est la constante de torsion de la section transversale, et I_y est moment d'inertie de la section non réduite par rapport à l'axe passant par le centre de gravité et parallèle à l'âme.

2.3.3.2 Selon l'Eurocode

La force critique pour le flambement par torsion d'une poutre sur deux appuis simples est donnée par l'équation suivante :

$$N_{crT} = \frac{1}{i_0^2} \left(G I_t + \frac{\pi^2 E I_w}{l_T^2} \right) \quad (2-63)$$

Avec

$$i_0^2 = i_y^2 + i_z^2 + y_0^2 + z_0^2 \quad (2-64)$$

Où

G est le module de cisaillement,

I_t est le moment d'inertie de torsion de la section transversale brute,

I_w est le moment d'inertie sectoriel de la section transversale brute,

i_y est le rayon de giration de la section transversale brute par rapport à l'axe y ,

i_z est le rayon de giration de la section transversale brute par rapport à l'axe z ,

l_T est la longueur de flambement de la barre pour le flambement par torsion,

y_0, z_0 sont les coordonnées du centre de cisaillement par rapport au centre de gravité de la section transversale brute.

Pour les sections transversales à double symétrie, il convient de déterminer la force critique élastique pour le flambement par flexion-torsion par :

$$N_{crTF} = N_{crT} \quad (2-65)$$

à condition que $N_{crT} < N_{cry}$ et $N_{crT} < N_{crz}$

Pour les sections transversales symétriques par rapport à l'axe y , il convient de déterminer la force critique élastique pour le flambement par flexion-torsion qui est donnée par

$$N_{crTF} = \frac{N_{cry}}{2\beta} \left[1 + \frac{N_{crT}}{N_{cry}} - \sqrt{\left(1 - \frac{N_{crT}}{N_{cry}}\right)^2 + 4 \left(\frac{y_0}{i_0}\right)^2 \frac{N_{crT}}{N_{cry}}} \right] \quad (2-66)$$

Avec $\beta = 1 - \left(\frac{y_0}{i_0}\right)^2$

2.3.4 Remarques

Il est important de rappeler que ces méthodes approchées ont été calibrées et validées par rapport à des mesures expérimentales et à des analyses numériques par la méthode des bandes finies. Les méthodes présentées ci-dessus donnent des résultats fiables, mais il est évident que dimensionner un profilé en acier formé à froid nécessite l'utilisation des outils numériques. Dans ce qui suit, un bref aperçu des différentes méthodes numériques utilisées pour l'analyse de la stabilité élastique, est présenté.

2.4 Les méthodes numériques pour l'analyse de la stabilité élastique

Actuellement les méthodes numériques sont considérées comme l'outil le plus puissant pour l'estimation de la contrainte critique élastique des profilés à parois minces. Parmi elles, la méthode des éléments finis (FEM pour Finite Element Method) est sans doute la plus puissante et la plus générale de toutes les méthodes utilisées dans l'analyse de la stabilité de ce type de structure. Elle fût la première méthode numérique apte à modéliser les modes d'instabilité des systèmes à parois minces en prenant en compte le caractère non linéaire de la structure (non linéarité géométrique et matérielle). Seulement la FEM est incapable de classer automatiquement les différents modes d'instabilité et leur identification n'est donc pas systématique.

La méthode des bandes finies (FSM pour Finite Strip Method) a été développée par Cheung [13] pour l'étude des plaques rectangulaires simplement appuyées dans une direction. Elle peut être vue comme une variante de la FEM. C'est l'une des méthodes les plus utilisées pour étudier la stabilité élastique des structures en acier formé à froid [14, 15]. Une brève présentation de la FSM sera faite dans les chapitres suivants. Cette méthode s'est imposée comme un moyen efficace pour étudier toutes les instabilités possibles des profilés en acier formé à froid soumis à des contraintes longitudinales. Elle a également été utilisée pour calibrer et valider les techniques de calcul manuel des différentes instabilités. Du point de vue de l'identification des

modes purs d'instabilité, la FSM est semblable à la FEM. Cependant ce problème est surmonté par la détermination automatique de l'effort critique en fonction de la longueur de la demi-onde d'instabilité ce qui permet d'identifier les modes purs d'instabilité. Seulement, il y a toujours des sections où cette identification n'est pas évidente.

Une troisième possibilité est d'utiliser la théorie des poutres généralisée (GBT pour Generalised Beam Theory). La GBT possède la capacité de pouvoir classer les modes d'instabilité automatiquement. Donc, les contraintes critiques des différents modes purs d'instabilité, qui sont exigés par les codes de calculs, sont directement fournies par cette méthode.

Récemment, Adany et Schafer [7, 16] ont proposé une nouvelle approche de décomposition des modes d'instabilité qui permet aux méthodes numériques de calculer les charges critiques des modes purs d'instabilité. L'idée fondamentale de la technique proposée est de garder les caractéristiques des méthodes numériques et d'introduire les hypothèses de la GBT qui permettent l'identification et le calcul des modes purs d'instabilité. La méthode numérique est donc contrainte à reproduire les modes purs d'instabilité. La technique a été mise en œuvre pour la FSM, et a été appelée la méthode des bandes finies contraintes (cFSM pour constrained Finite Strip Method). Il s'agit d'un progrès important dans le domaine de l'analyse numérique de la stabilité élastique.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre les trois modes d'instabilité de base, le local, le distorsionnel et le global, des éléments de structure en acier formés à froid, sont présentés. Les contraintes critiques élastiques de ces différents modes purs sont nécessaires pour les différentes approches de dimensionnement. Une présentation des différentes méthodes de calcul manuel de ces contraintes selon les deux règlements de dimensionnement de ce type de structures, à savoir l'Eurocode 3 [2] et le règlement américain [3], est faite. Les différents cas possibles et les différentes expressions reportés montrent la complexité de cette tâche.

Les méthodes numériques sont considérées comme l'outil le plus puissant pour analyser le comportement des profilés à parois minces. On peut citer la méthode des éléments finis, la méthode des bandes finies et la méthode des bandes finies contraintes (cFSM).

Depuis son développement, la cFSM est progressivement devenue un outil efficace pour étudier les profilés en acier formés à froid. L'objectif principal de cette thèse est d'en faire avancer la théorie en vue de permettre l'étude de profilés qui ont des sections non couvertes par les approches actuelles. A cette fin, le chapitre suivant se propose de dresser un état de l'art des récents développements enregistrés dans la recherche scientifique liée à la cFSM.

Chapitre 3

Revue générale de la méthode des bandes finies contrainte cFSM

3.1 Introduction

Les éléments à parois minces en général et les profilés en acier formés à froid en particulier ont une réponse vis-à-vis de la stabilité relativement complexe même pour des géométries et des chargements courants. Plusieurs approches ont été envisagées pour aborder ce problème mais la méthode des bandes finies (FSM) est indéniablement celle qui a connu le plus de succès.

La FSM a été développée par Cheung [13] comme une alternative économique à la méthode des éléments finis (FEM) pour étudier les structures ou les éléments de structures dont les caractéristiques géométriques et les propriétés des matériaux sont constantes le long d'une direction privilégiée. L'innovation de Cheung a consisté à prendre des harmoniques comme fonctions d'interpolation le long de cette direction particulière. La popularisation de la FSM dans le domaine de la stabilité fut cependant l'œuvre de Hancock [14] qui introduisit pour la première fois la fameuse courbe signature. Cette dernière dessine la contrainte critique de flambement, non pas en fonction de la longueur de flambement mais, en fonction de la longueur de la demi-onde de flambement, c'est-à-dire en forçant la structure ou l'élément de structure à ne produire qu'une seule demi-sinusoïde lors de son instabilité. Cette courbe signature a permis à Hancock de mettre en évidence les trois catégories ou classes d'instabilité : locale L (ou voilement), par distorsion D et globale G (ou Eulérienne).

Autrement-dit, les travaux de Hancock ont établi, à l'aide de la FSM, l'organisation des phénomènes d'instabilité en trois catégories soit la classification actuellement retenue dans tous les règlements de dimensionnement des profilés en acier formés à froid.

Au cours de ces dernières années, la théorie des poutres généralisée (GBT), initialement développée par Schardt [17] et améliorée par Davies [4, 18], a été largement utilisée pour l'analyse linéaire et non linéaire des structures à parois minces de différentes sections transversales. La GBT a montré que les déformations de flambement peuvent être formellement traitées par un procédé modal qui sépare (décompose) mécaniquement les modes en Global, Distorsionnel, Local et Autres [5, 6]. Cette séparation (décomposition) est intrinsèque à la GBT et permet de quantifier (identifier) la participation modale de chaque classe d'instabilité à la déformation de flambement générale.

En utilisant les hypothèses mécaniques qui conduisent à la décomposition, on peut étendre les définitions de la GBT à d'autres méthodes. Cette idée a conduit, en particulier, à la mise au point de la méthode des bandes finies contrainte (cFSM) qui a enrichi la FSM avec les capacités de la GBT en matière de séparation des déformations. La cFSM [7, 8] est présentée comme une solution pour l'analyse de la stabilité des profilés en acier formés à froid car elle fournit une estimation directe de la charge (ou du moment) de flambement élastique dans une classe de flambement donnée. En effet, la cFSM comme la GBT permet de tracer les courbes signatures en ciblant une classe d'instabilité (ou toute combinaison de classes). Il faut noter que ces deux méthodes ont été comparées et leurs résultats finaux coïncident [19, 20, 21].

Dans ce chapitre, un bilan des récents développements de la cFSM [22] est dressé. Ce bilan comprend les progrès apportés dans le développement théorique de la cFSM, dans l'utilisation de la cFSM dans les problèmes de dimensionnement, de conception et d'optimisation, et dans l'utilisation des solutions de la cFSM dans l'identification des déformées de flambement générales calculées par la FEM. Ce chapitre passe également en revue les récents travaux de recherche proches de la cFSM ainsi que ceux rendus possibles grâce à la cFSM.

3.2 Les développements théoriques de la cFSM

Les travaux de recherche de Schafer et son équipe dans le domaine de la décomposition et l'identification modale ont commencé il y a une dizaine d'année. Ce groupe de recherche a proposé en 2006 [7, 16] une nouvelle approche pour le calcul des modes purs de flambement des éléments prismatiques à parois minces de sections transversales simples ouvertes simplement appuyées dans le sens longitudinal. L'idée de base était de garder les caractéristiques générales de la FSM conventionnelle comme méthode numérique, à savoir, la construction des matrices globales de rigidité et de stabilité par assemblage de matrices élémentaires, et d'introduire les hypothèses de la GBT pour forcer les modèles à se déformer en modes purs (local, distorsionnel, et global). C'est l'acte de naissance de la cFSM. Celle-ci a conduit à la production de la nouvelle version du logiciel CUFSM [23] qui permet d'isoler (Figure 3-1a) et d'identifier (Figure 3-1b) les modes purs d'instabilité et de calculer leurs charges critiques élastiques pour les profilés à parois minces simplement appuyés et de sections transversales ouvertes non ramifiées.

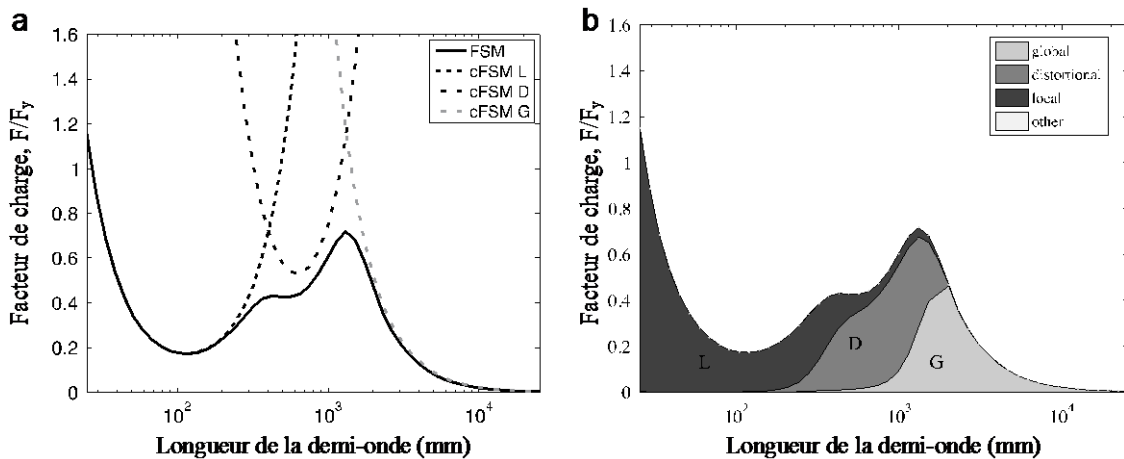


Figure 3-1 : Décomposition et identification modales d'une colonne (600S200-43) simplement appuyée : (a) décomposition et (b) identification [22].

En 2008 [8], les auteurs de la cFSM améliorent la méthode développée en 2006 en proposant une base modale complète pour décomposer entièrement la solution de la stabilité élastique d'un profilé à paroi mince de section transversale ouverte simple. Cela a nécessité un ensemble de définitions mécaniques pour chacune des

classes de flambement. Pour le mode global G et le mode distorsionnel D les définitions utilisées avec succès par la GBT sont employées, tandis que pour le voilement L et les autres modes O , de nouvelles définitions sont fournies. Les définitions mécaniques pour une classe de flambement donnée représentent une série de conditions de contrainte sur les déformations générales que la section à parois minces peut subir. Ces conditions de contrainte sont dérivées en tant que matrices de contraintes explicites dans le contexte de la FSM, et la nouvelle cFSM fournit la décomposition souhaitée. Cette décomposition est complète dans le sens où l'union des espaces de déformation des classes de flambement décomposées donne l'espace de déformation générale de la FSM. Il faut mentionner que cette méthode n'était jusque-là applicable qu'aux profilés simplement appuyés car les fonctions d'interpolation longitudinales étaient de simples harmoniques.

En 2011, l'équipe de Schafer [24] réussit à étendre le domaine d'application à d'autres conditions d'appui : encastré-encastré, encastré-simplement appuyé, encastré-libre et encastré-guidé. Cela a été rendu possible grâce à une sélection appropriée de séries de fonctions d'interpolation longitudinales. Seulement, ces fonctions, et contrairement à celles du cas simplement appuyé, ne possèdent pas la propriété d'orthogonalité qui permet d'obtenir la fameuse courbe signature en fonction de la longueur de la demi-onde. La démarche même de la FSM – traditionnellement employée – s'en trouve alors modifiée. Ainsi, au lieu de varier la longueur de la demi-onde, on se fixe une longueur physique et on explore les modes supérieurs tel que pratiqué dans les analyses de la stabilité par la FEM. Il en est de même pour la cFSM développée pour les conditions aux limites générales. Il ne s'agit plus alors d'isoler un mode pur d'instabilité et d'en tracer la courbe signature mais plutôt d'identifier au moyen de facteurs de participation modaux les pourcentages de participation des modes purs à une déformée de flambement donnée. A titre d'exemple, la Figure 3-2 donne l'identification des 50 premiers modes d'une colonne (600S200-43) encastrée en ses deux extrémités. La cFSM affecte un taux de participation à chacune des formes modales. Ainsi, il est aisé, d'après la deuxième colonne de la Figure 3-2, d'identifier les déformées où les modes locaux, distorsionnels ou globaux sont dominants. En plus, il est possible de distinguer les

déformées où il y a un faible couplage (ex. mode #1) et ceux où il y a un fort couplage entre deux modes (ex. mode #8) ou entre trois modes (ex. mode #31).

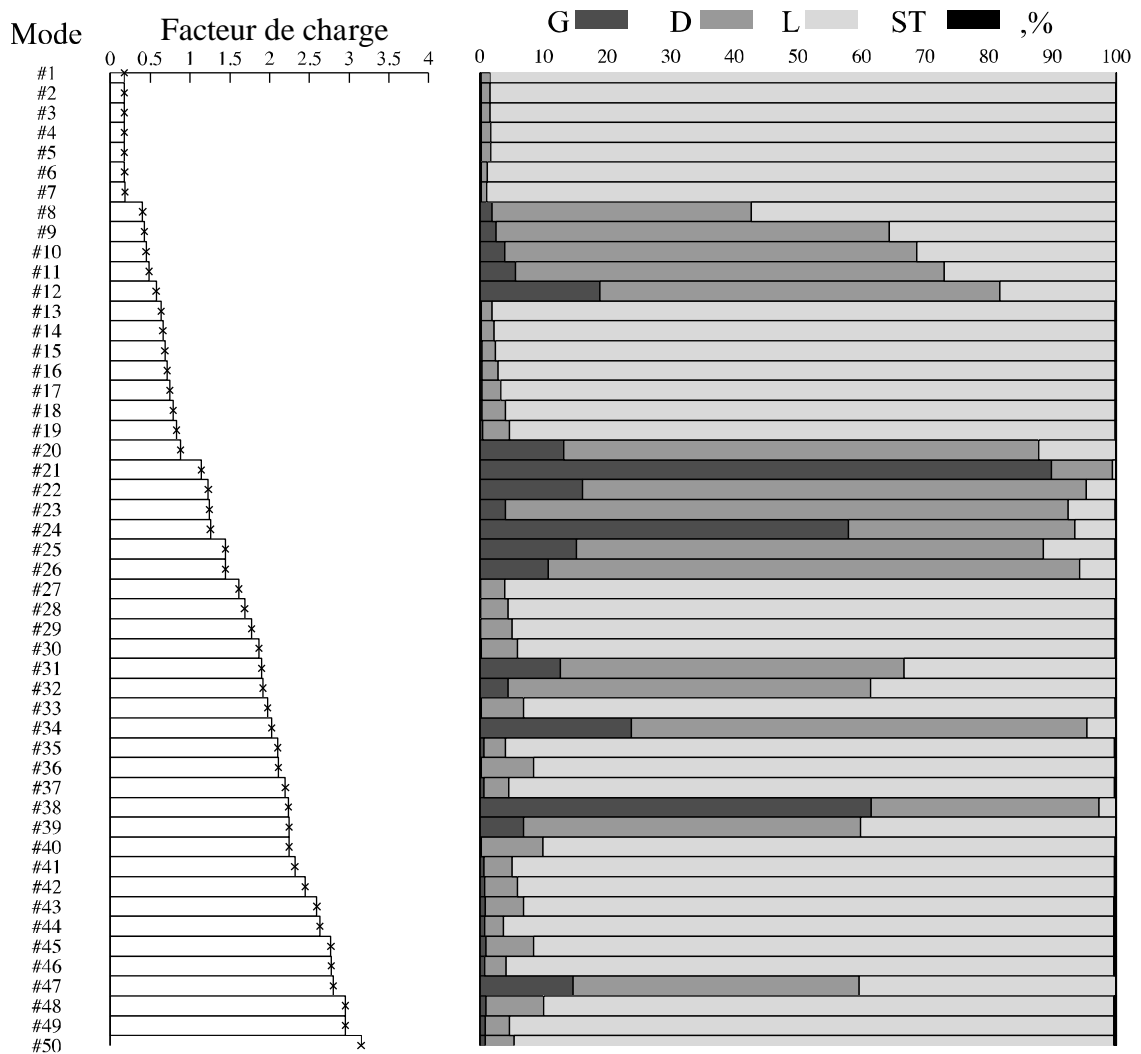


Figure 3-2 : Identification modale d'une colonne (600S200-43, $L = 2540 \text{ mm}$) bi-encastée [22].

Un autre point, pour faire avancer l'utilisation de la cFSM dans l'étude de la stabilité des profilés à parois minces, a été exploré [25]. Il s'agit de la sensibilité de la solution cFSM au choix de la base modale, du procédé d'orthogonalisation, et de la méthode de normalisation. Les définitions mécaniques utilisées pour séparer les déformations conduisent à des espaces vectoriels uniques pour les déformations globales, de distorsion et locales, mais pas pour les autres déformations (cisaillement et extension transversale). En outre, bien que les espaces vectoriels sont généralement uniques, le choix de la base et sa normalisation à l'intérieur de l'espace

ne le sont pas et peuvent avoir un impact sur les solutions de décomposition modale et d'identification. Une série d'exemples sont fournis dans la référence [25] pour démontrer ces impacts et sont suivis de recommandations pour les choix de la base modale et des méthodes d'orthogonalisation et de normalisation.

3.3 La cFSM dans les travaux de recherche sur les profilés en acier formés à froid

3.3.1 Problèmes de dimensionnement

Un avantage majeur de la cFSM est que les modes purs d'instabilité peuvent être aisément calculés. Seulement, les contraintes élastiques de flambement des modes purs obtenues par la cFSM sont légèrement différentes de celles obtenues par la FSM (voir Figure 3-1a), et ne peuvent être pleinement utilisées pour des sections transversales avec des coins arrondis. Sachant, d'autre part que les méthodes de dimensionnement des profilés en acier formés à froid en général, et la méthode de la résistance directe (DSM) en particulier, sont calibrées par rapport aux résultats de la FSM, il devient évident que les avantages de la cFSM ne peuvent pas être immédiatement exploités. Pour remédier à cette limitation, deux approches ont été imaginées : l'approche basée sur les longueurs critiques d'instabilité et celle utilisant des facteurs correcteurs.

Les auteurs de la première solution [26, 27] proposent d'utiliser la cFSM principalement pour identifier la longueur critique de la demi-onde L_{cr} des différents modes purs de flambement. En effet, si la solution de la cFSM pour les modes purs identifie aisément la longueur de demi-onde critique par un minimum dans la courbe de flambement, il en est autrement pour la FSM qui a souvent des minimas indistincts, en particulier pour le mode de flambement distorsionnel. L'intérêt de cette méthode provient du fait que les longueurs critiques obtenues par la cFSM ou par la FSM sont pratiquement égales. Cette observation est valable pareillement pour les longueurs critiques des modes purs obtenues par la cFSM à partir d'un modèle à angles vifs, d'une part, et par la FSM utilisant un modèle à coins arrondis, d'autre part. Ainsi, l'approche dans ce cas consiste à utiliser un modèle à angles vifs pour

identifier par la cFSM les longueurs de demi-onde L_{cr} des modes purs, puis à les utiliser dans un modèle FSM à coins arrondis pour calculer les contraintes critiques (Figure 3-3). Ces dernières sont ensuite utilisées dans la DSM pour la détermination de la résistance. Cette approche a été validée par une série d'études paramétriques pour des sections transversales en C (uniquement) sous différents cas de charges.

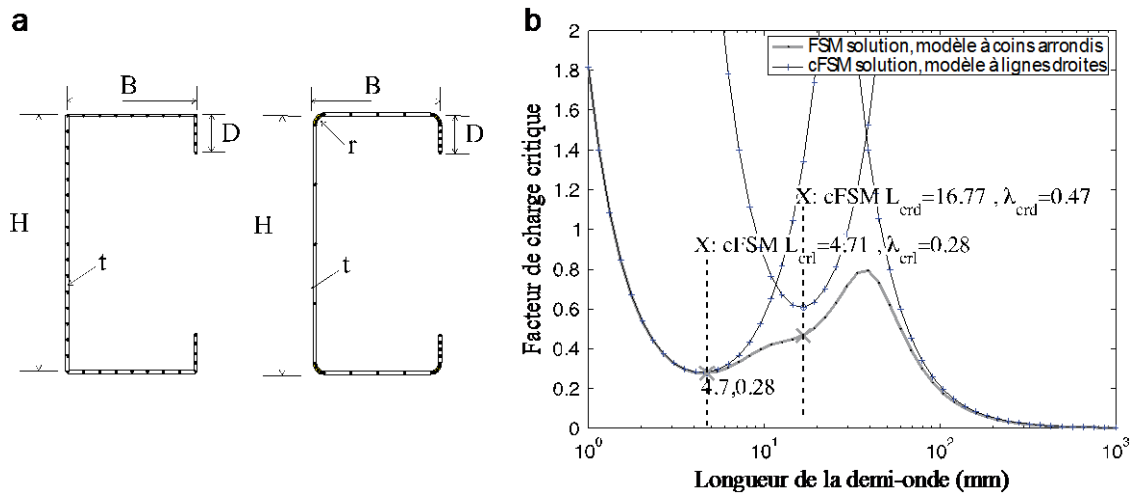


Figure 3-3 : Illustration de l'approche basée sur les longueurs critiques : (a) modèles à coins à angles vifs et arrondis, (b) évaluation de la charge critique [26].

Une autre stratégie pour utiliser la cFSM dans le dimensionnement des profilés en acier formés à froid emploie des facteurs de correction [28, 29, 30]. Les auteurs ont identifié trois sources d'erreurs dans le calcul de la résistance des profilés en acier formés à froid par la cFSM : (a) la différence entre les contraintes critiques locale et distorsionnelle calculées à partir de modèles à angles vifs et à angles arrondis, (b) l'effet des angles vifs et arrondis sur les propriétés de la section, (c) l'effet du couplage des modes sur les contraintes critiques. Des études paramétriques ont été effectuées sur les sections transversales montrées par la Figure 3-4. Les résultats d'environ 15000 cas ont été analysés pour proposer une approche de dimensionnement. Celle-ci utilise les contraintes critiques des modes purs de flambement élastique obtenues par la cFSM sur des modèles avec des angles vifs, et l'effet de coins arrondis ainsi que la différence FSM-cFSM sont gérés par des facteurs de correction empiriques. Les valeurs des contraintes critiques élastiques de flambement corrigées sont ensuite utilisées dans la formulation DSM pour le calcul de la résistance. Les résultats

obtenus ont été validés par des résultats expérimentaux sur des éléments de sections transversales en Z et en C, pour les modes de flambement local et distorsionnel.

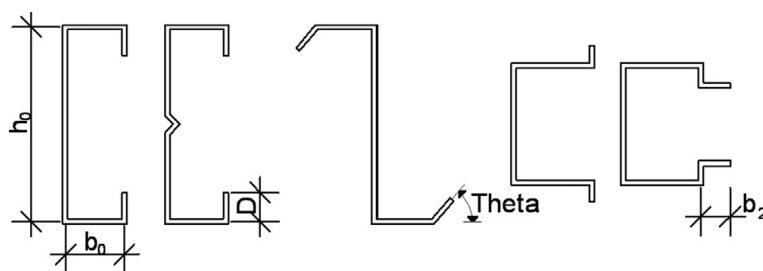


Figure 3-4: Formes des sections étudiées pour déterminer les facteurs de correction.

3.3.2 Problèmes de conception et d'optimisation des formes des profilés en acier formés à froid

L'une des caractéristiques des éléments en acier formés à froid réside dans le fait qu'il est possible de former pratiquement n'importe quelle section transversale qui fournit une solution efficace et économique. Par conséquent, trouver des formes optimales est un problème de grand intérêt, ce que révèle l'activité de recherche récente dans ce domaine [31, 32, 33, 34, 35]. L'optimisation de formes nécessite la possibilité d'effectuer efficacement et rapidement un grand nombre de solutions de stabilité. En plus, pour l'optimisation formelle, le calcul de la stabilité doit être automatique (sans intervention de l'utilisateur) et général. Le dimensionnement des éléments en acier formés à froid par la FSM et la DSM est assez rapide, et parmi les méthodes de conception disponibles, il est certainement le plus général et le plus pratique pour l'automatisation. En outre, la cFSM est potentiellement en mesure de rendre le processus de conception FSM/DSM entièrement automatique malgré quelques difficultés dans le calcul de la charge critique locale et de distorsion pure lorsque la section présente une forme inhabituelle.

Dans la référence [31] les résultats d'analyses cFSM/DSM pour une optimisation de forme des sections transversales sont présentées. La forme des sections transversales n'est pas limitée par des éléments prédéterminés (âmes, semelles, raidisseurs), comme cela est requis pour répondre aux procédures fondées sur des codes classiques de dimensionnement qui emploient des analyses simplifiées

de la stabilité. Au lieu de cela et grâce à l'utilisation de la FSM pour l'analyse de la stabilité et de la DSM pour le calcul de la capacité portante, l'espace complet des formes possibles des sections de profilés en acier formés à froid peut être exploré. Des colonnes avec différentes longueurs, mais confectionnées à partir d'une tôle d'acier de largeur fixe, sont optimisées vis-à-vis de la capacité portante. La tôle d'acier est alors autorisée à être pliée à 20 endroits le long de sa largeur, fournissant ainsi la possibilité de former à peu près n'importe quelle forme. Trois différents algorithmes d'optimisation sont également explorés. Les formes optimales trouvées (Figure 3-5 et Figure 3-6) sont dépendantes de la longueur et non conventionnelles mais, par rapport à des colonnes en C, elles développent des capacités plus que deux fois celles résultant du dimensionnement classique.

Dans les références [34, 35] un problème d'optimisation similaire est résolu. Il est basé sur des analyses FSM/DSM pour l'évaluation fonctionnelle, mais avec une fonction Objectif différente. Dans ce cas, la forme de la section transversale avec une aire minimale est recherchée pour supporter une valeur donnée de la charge et cela pour des colonnes de longueurs variables. Les formes optimales sont également non - conventionnelles, mais symétriques (Figure 3-7). Les résultats définitifs sont similaires dans l'esprit à ceux de [31], mais avec des différences notables, suggérant ainsi que la formulation du problème d'optimisation a une influence importante sur les résultats.

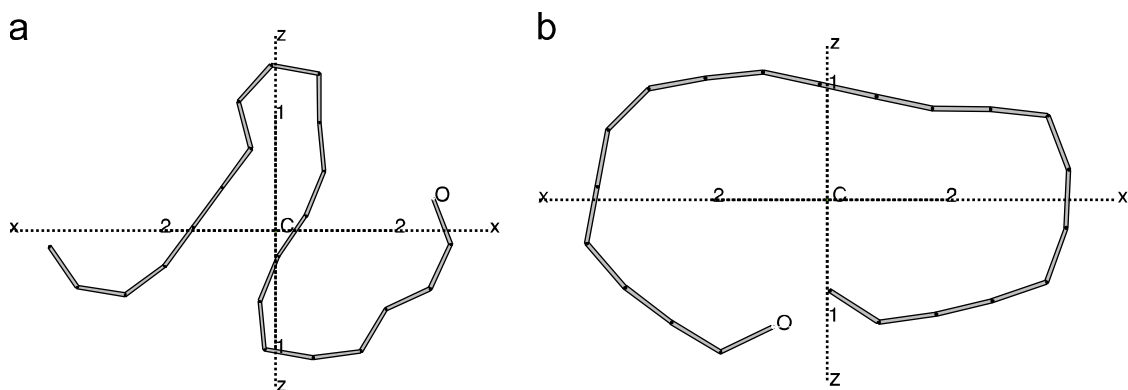


Figure 3-5: Formes résultant d'une optimisation non contrainte et donnant la capacité portante maximum pour $L = 1,2\text{ m}$: (a) $P_n = 56,03\text{ kN}$ et (b) $P_n = 55,34\text{ kN}$ [22].

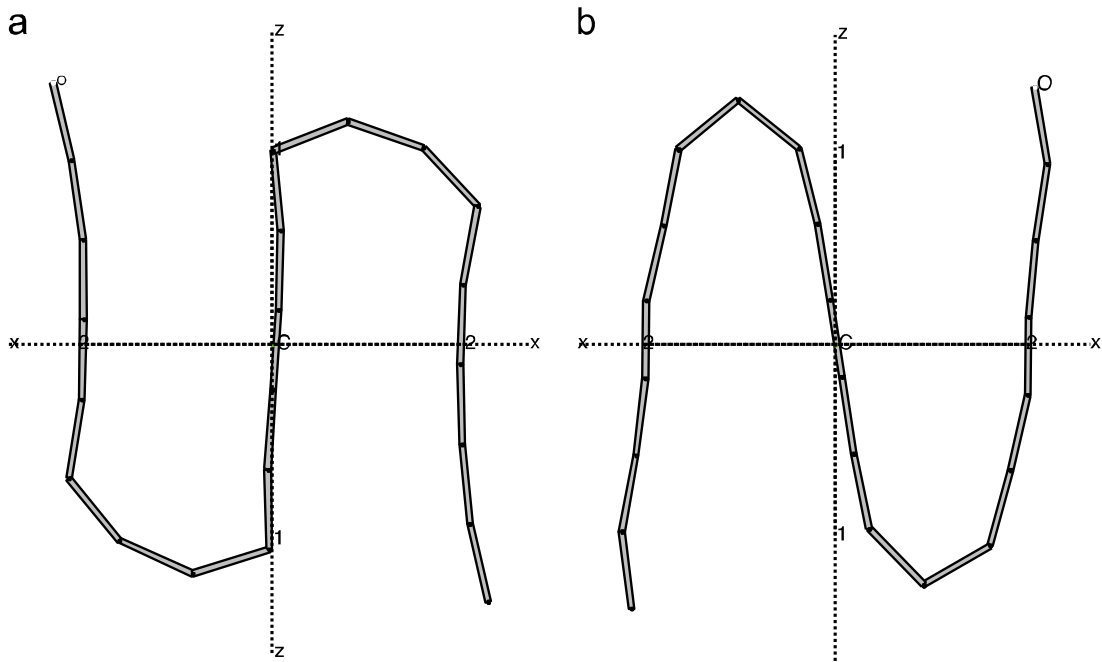


Figure 3-6: Formes résultant d'une optimisation non contrainte et donnant la capacité portante maximum pour $L = 4,9 \text{ m}$: (a) $P_n = 13,39 \text{ kN}$ et (b) $P_n = 14,33 \text{ kN}$ [22].

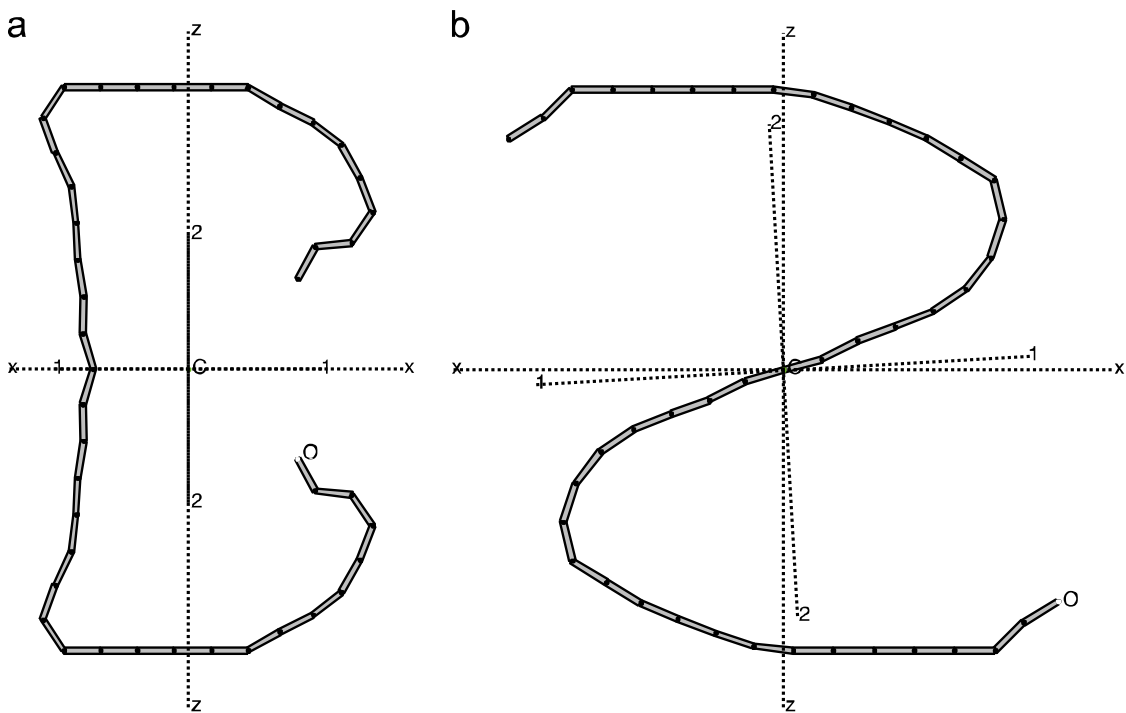


Figure 3-7: Formes résultant d'une optimisation non contrainte et donnant la capacité portante maximum pour (a) $L = 1,2 \text{ m}$, $P_n = 54,49 \text{ kN}$ et (b) $L = 4,9 \text{ m}$, $P_n = 13,16 \text{ kN}$ [22].

3.4 La cFSM dans l'identification des déformées de flambement calculées par la FEM

La FSM et par suite la cFSM sont limitées aux profilés dont les caractéristiques sont constantes dans le sens de la longueur. Elles ne s'appliquent donc pas directement à plusieurs cas pratiques tels que les profilés perforés, les éléments de structures à section variable et même aux cas où les charges varient suivant la longueur. Ces situations sont alors étudiées par la FEM qui, on le souligne, est incontournable dans l'univers des ingénieurs de par sa présence. L'extension des capacités de décomposition et d'identification de la cFSM à la FEM est par conséquent un objectif majeur de la recherche dans ce domaine.

3.4.1 Approche basée sur les bases modales complètes de la cFSM

Une tentative dans ce sens est celle présentée dans la référence [36] dont l'objectif est d'étendre la cFSM à la FEM à des fins d'identification modale. Les éléments à parois minces (des profilés en acier formés à froid) y sont modélisés par de éléments finis Coque (Shell finite elements) ce qui implique, entre autres, un espace de déformation qui utilise un nombre relativement élevé de degrés de liberté. Etant donné que les vecteurs de la base modale de la cFSM (qui définissent les matrices de contrainte et qui ne sont rien d'autres que des déformations spéciales) sont disponibles et peuvent être facilement construits, l'idée a été de les étendre à l'espace de la FEM dans le but de définir une base de déformation qui est déjà catégorisée en modes purs G , D , L et ST . Le gros du travail consiste alors à faire un parallélisme entre les modèles FEM et FSM et à situer chaque nœud du modèle FEM dans une bande finie du modèle FSM (Figure 3-8). Les fonctions d'interpolation de la bande sont alors utilisées pour déduire à partir de chaque vecteur de la base modale de la cFSM les composantes de déformation qui correspondent au nœud considéré puis à les transformer vers l'espace FEM. Le résultat est un jeu de vecteurs définis dans l'espace FEM et qui sont des interpolations cohérentes des bases modales de la cFSM au niveau des nœuds et des degrés de liberté du modèle FEM. Ayant les bases modales des modes purs G , D , L et ST dans l'espace FEM, ou plus exactement des approximations de ces bases déduites de la cFSM, il est possible de calculer les

pourcentages de participation des modes purs à une déformée de flambement donnée calculée par la FEM.

Une telle démarche a été utilisée dans le cas de profilés perforés utilisant des maillages irréguliers [37], des profilés soumis à un gradient thermique [38] et même à l'identification des déformées résultant d'analyses non linéaires [39].

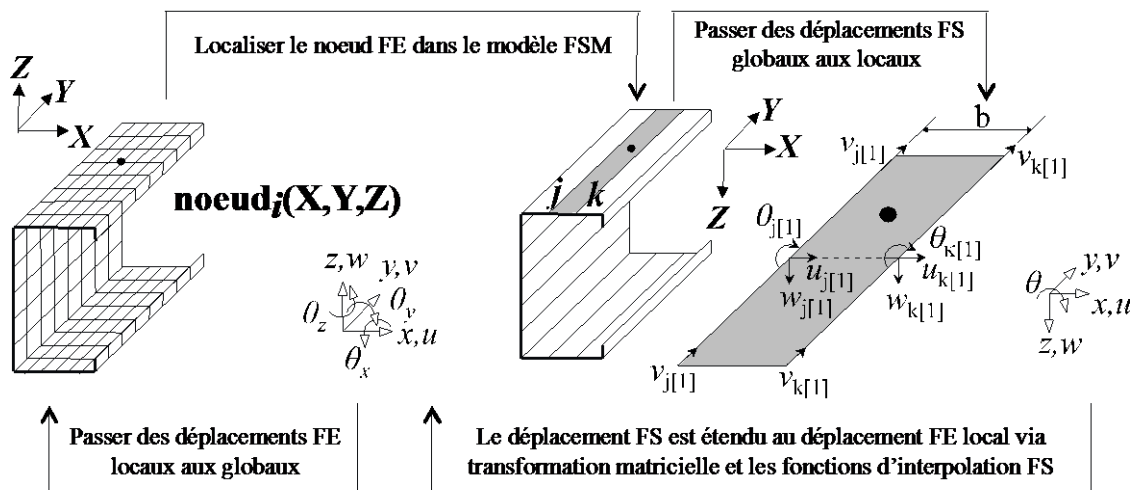


Figure 3-8 : Illustration du passage entre les DDL du modèle FEM et ceux du maillage FSM

3.4.2 Approche basée sur les déformées modales des sections

L'identification modale pour les analyses FEM utilisant des éléments finis Coque est un outil indispensable pour étudier la stabilité des éléments à parois minces. Comme alternative à l'utilisation des bases modales complètes de la cFSM, il est proposé dans [40, 41] d'utiliser uniquement les déformations modales de la section transversale. L'avantage d'une telle approche est de rendre l'identification indépendante des conditions aux limites. L'identification obtenue le long de la longueur de l'élément, est similaire à l'identification modale basée sur la GBT.

Dans l'article [40] l'auteur présente une méthode, basée sur la GBT, capable de décomposer les déformées de flambement des éléments à parois minces obtenues par des analyses FEM, en modes de déformation purs et de calculer leurs facteurs de participation. L'auteur utilise la première étape de la GBT afin d'avoir les déformées modales de la section transversale, les moments transversaux aux bords et les matrices de rigidité de gauchissement et de flexion transversale. En utilisant

l'orthogonalité, les fonctions d'amplitude de la GBT sont extraites à partir des déformations de la FEM. Enfin, les facteurs de participation des modes sont calculés à partir des fonctions d'amplitude. Plusieurs exemples numériques sont présentés, dans lesquels les modes de flambement sont identifiés, en utilisant l'élément coque. Les problèmes de barres soumises à la compression et à la flexion sont résolus. Comme les hypothèses de la GBT sont utilisées, les extensions transversales membranaires et les distorsions sont négligées, ce qui représente une limitation de la méthode. En ce qui concerne les avantages de la méthode développée, il n'existe aucune restriction quant à la forme de la section et le chargement. Dans la référence [41] les auteurs présentent les dernières extensions théoriques développées pour surmonter la restriction de l'article [40] concernant les conditions aux limites. La méthode est validée en utilisant une approche différente et de nouveaux exemples sont présentés afin de prouver la polyvalence de la méthode en ce qui concerne la section transversale, le chargement et les conditions aux limites arbitraires.

3.5 La cFSM dans l'identification de l'imperfection géométrique

Les imperfections géométriques qui sont le résultat du processus de fabrication ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherches [42, 43, 44], où un résumé des mesures d'imperfection disponibles pour les profilés en acier formés à froid est présenté et trois méthodes pour simuler les champs d'imperfection sont introduites. La première est l'approche classique utilisant une superposition d'imperfections modales calibrées pour correspondre aux mesures expérimentales. La seconde est une méthode basée sur la méthode de représentation spectrale multidimensionnelle, dans laquelle les imperfections sont considérées comme un champ aléatoire à deux dimensions et les simulations sont effectuées en adoptant une approche basée sur les spectres. La troisième nommée l'approche modale 1D, est une combinaison de l'approche modale et de la représentation spectrale qui considère directement le contenu fréquentiel du champ d'imperfection, mais emploie un procédé de représentation spectrale reposant sur les déformées modales des sections transversales pour générer les champs d'imperfection. Bien que les déformées

modales peuvent être déterminées par diverses méthodes numériques, la cFSM est avantageuse et a été appliquée dans les recherches [42, 43, 44]. En se basant sur l'analyse des données expérimentales disponibles sur les imperfections, des spectres de puissance de dimensionnement sont alors proposés pour une utilisation dans les analyses géométriquement et matériellement non linéaires. D'après des études paramétriques basées sur des analyses FEM non linéaires, l'approche modale 1D s'est révélée être la méthode la plus puissante.

3.6 La méthode des éléments finis contrainte ou cFEM

La technique de contrainte de la cFSM est appliquée à la méthode des éléments finis par les auteurs des articles [45, 46, 6]. Le procédé est réalisé dans le logiciel FEM commercial ANSYS selon une approche qui a des avantages et des inconvénients. L'avantage est que ANSYS [47] est largement utilisé et fiable, tandis que l'inconvénient est que son application présente certaines limitations :

- (i) bien que le problème de la décomposition modale a été résolu, c'est-à-dire que la méthode présentée est en mesure de fournir les charges critiques et les formes déformées des modes purs, l'identification n'est toujours pas possible ;
- (ii) la décomposition modale n'est pas complète dans le sens où il n'est pas possible de transformer la totalité du champ de déplacement dans une base modale ;
- (iii) l'introduction de contraintes augmente la taille du problème, contrairement à la cFSM où les contraintes diminuent les degrés de liberté.

Malgré ces inconvénients, la méthode donne des résultats pratiques utiles et uniques, comme l'exemple des éléments perforés en acier formés à froid qui ne peuvent pas être correctement traités par d'autres méthodes à ce jour. De plus, le procédé de contrainte présenté peut être considéré comme une étape importante vers une cFEM plus générale.

3.7 La cFSM dans les solutions analytiques du flambement global

Les solutions de flambement par la cFSM, quand le nombre de modes est réduit, peuvent facilement produire des solutions analytiques. Etant donné les différentes options disponibles dans sa mise en œuvre, la cFSM peut être utilisée pour explorer l'effet des différentes hypothèses mécaniques sur les solutions analytiques de la stabilité. Vu l'utilisation généralisée des solutions analytiques pour le flambement global, ces comparaisons sont d'un intérêt particulier, comme exploré dans [48, 49, 50, 51, 52]. Dans les articles [48, 49, 50], le problème de la stabilité des colonnes bi-articulées est dérivé, et des solutions analytiques de flambement par flexion, par torsion et par flexion-torsion sont générées pour satisfaire à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli ou à la théorie des plaques de Kirchhoff. Dans [51] des solutions analytiques supplémentaires pour le problème des colonnes sont dérivées en tenant compte des déformations de cisaillement. Dans [52] le problème de stabilité des poutres bi-articulées est exploré et le cas d'une section doublement symétrique uniformément chargée est également traité analytiquement avec les différentes définitions mécaniques. Dans tous les cas, la dépendance des solutions analytiques dérivées vis-à-vis des hypothèses mécaniques considérées est pleinement discutée, ce qui permet de comprendre précisément comment les hypothèses classiques influencent les formules couramment utilisées pour le flambement global.

3.8 Conclusion

La méthode des bandes finie (FSM) a gagné sa notoriété dans l'étude de la stabilité des éléments à parois minces depuis les années 80. Elle a servi à introduire et à justifier le mode d'instabilité par distorsion, D , comme troisième critère de dimensionnement des profilés en acier formés à froid. Cette réputation lui a été value grâce à sa capacité de forcer l'instabilité à se produire selon une déformée décrivant une seule demi-onde selon la longueur et d'en déduire la courbe signature. Cette dernière possède l'avantage de rendre apparentes les trois classes d'instabilité (L , D et G) dans un large éventail de situations. Toutefois, dans certains cas où il existe un

couplage entre ces trois classes ou entre deux d'entre-elles, la courbe signature de la FSM peut s'avérer insuffisante pour tirer les informations utiles au dimensionnement selon les méthodes règlementaires.

La méthode des bandes finies contrainte (cFSM) améliore les capacités de la FSM dans le sens où elle peut forcer l'instabilité à se produire selon un mode donné ou selon toute combinaison des classes L , D et G . Cette faculté est dénommée « décomposition modale ». Elle est rendue possible grâce à l'utilisation de matrices de contraintes pour forcer l'apparition d'un mode d'instabilité donné et pour ainsi dire l'isoler. Ces matrices peuvent aussi être vues comme des bases modales dont l'union reconstitue l'espace général des déformations, si on y rajoute la classe des modes d'extension et de cisaillement transversaux, ST . On peut alors inverser le problème et quantifier la contribution de chacune de ces classes dans une déformée générale. Cette autre capacité de la cFSM est alors appelée « identification modale ». Elle est réalisée au moyen de facteurs de participation modaux qui ne sont rien d'autre que les coordonnées de la déformée générale dans la base vectorielle des modes L , D , G et ST .

La décomposition modale et l'identification modale sont devenues des outils efficaces et uniques pour améliorer la compréhension de la stabilité des éléments à parois minces. Ce chapitre présente un bref aperçu des récents développements enregistrés dans la recherche liée à la cFSM. Une première avancée dans les aspects théoriques est l'extension de la cFSM aux conditions aux limites autres que simplement appuyées. Il y a lieu aussi de noter l'étude relative à la sensibilité de la solution cFSM aux choix de la base modale, du procédé d'orthogonalisation, et de la méthode de normalisation.

Le domaine d'application par excellence de la cFSM est celui des profilés en acier formés à froid. La recherche dans ce secteur s'est attelée à trouver des procédés correctifs des résultats de la cFSM relatifs au mode distorsionnel et aux sections à coins arrondis afin de les rendre directement utilisables dans les méthodes de dimensionnement. Deux approches ont alors été prospectées : la méthode basée sur les longueurs critiques d'instabilité et celle utilisant des facteurs correcteurs. L'autre

axe de recherche dans ce domaine est celui de l'optimisation des sections. Les formes examinées ne sont plus limitées par les éléments traditionnels (âmes, semelles, raidisseurs) et l'espace complet des configurations possibles des sections de profilés en acier formé à froid est exploré. Des résultats aussi surprenants qu'intéressants ont été trouvés qui vont jusqu'à suggérer que la formulation même du problème d'optimisation a une influence sur les résultats

Un autre objectif majeur de la recherche autour de la cFSM est l'extension de ses capacités de décomposition et d'identification à la FEM. S'agissant de l'identification, deux approches ont été prospectées. Dans la première, il est question de déduire de la cFSM des approximations des bases modales des modes purs G , D , L et ST dans l'espace FEM, en vue de réaliser une identification de la déformée de flambement calculée par la FEM. Cette démarche d'identification a été utilisée dans le cas de profilés perforés, des profilés soumis à un gradient thermique et même à l'identification des déformées résultant d'analyses non linéaires. Quant à la deuxième, elle se base sur les déformées modales des sections et présente l'avantage d'être indépendante des conditions aux limites. L'identification obtenue le long de la longueur de l'élément est similaire à l'identification modale basée sur la GBT.

Ces mêmes aptitudes d'identification ont été employées dans la modélisation des imperfections géométriques pour une utilisation dans les analyses géométriquement et matériellement non linéaires. D'après des études paramétriques, cette démarche s'est révélée être la méthode la plus puissante.

Pour ce qui est de l'extension des capacités de décomposition à la FEM, la course vers le développement d'une cFEM a été engagée. Une procédure mixte GBT-FEM a été expérimentée avec plus ou moins de bonheur dans le sens où des limitations techniques restent à lever, comme par exemple la nécessité d'avoir un maillage régulier.

La cFSM a été aussi utilisée pour explorer l'effet des différentes hypothèses mécaniques sur les solutions analytiques de la stabilité. La dépendance de ces solutions vis-à-vis des hypothèses mécaniques est analysée pour comprendre

comment ces dernières influencent les formules couramment utilisées pour le flambement global.

Cet état de l'art sur la recherche autour de la cFSM fait ressortir les progrès remarquables réalisés à ce jour mais laisse aussi entrevoir les développements qui restent à accomplir particulièrement pour faire progresser la théorie et de continuer à généraliser l'approche cFSM. L'objectif du chapitre suivant est de faire avancer la théorie en vue de permettre la décomposition des modes d'instabilité de profils qui ont des sections non couvertes par les approches actuelles. Il s'agit des sections transversales ouvertes avec branches, des sections transversales fermées avec branches et des sections transversales avec branches et des parties fermées.

Chapitre 4

Extension de la cFSM pour les sections prismatiques ramifiées et/ou présentant des contours fermés

4.1 Introduction

L'estimation correcte des forces (moments) critiques élastiques associées aux trois catégories d'instabilité pure est fondamentale dans le calcul de la capacité portante ultime d'un profilé à parois minces par les procédures réglementaires. Des formules analytiques simples sont souvent disponibles mais elles sont limitées dans leur domaine d'application. Une autre possibilité pour calculer ces charges critiques est d'effectuer des analyses numériques de l'instabilité élastique en utilisant les méthodes numériques puissantes telles que la méthode des éléments finis (FEM) ou la méthode des bandes finies (FSM). Cependant, il est nécessaire d'identifier parmi un nombre très important de résultats, qui peut dépasser la centaine, les modes de flambement correspondant aux modes global G , distorsionnel D et local L qui, on le rappelle, sont aussi appelés les modes purs d'instabilité. Une autre possibilité est d'utiliser des méthodes numériques capables d'effectuer une décomposition modale c'est-à-dire capables d'effectuer une analyse modale de flambement ciblant n'importe quel mode pur ou toute combinaison de modes purs. Ceci ne peut être atteint, jusqu'à présent, que par la théorie des poutres généralisée (GBT) [4, 5, 53] ou par la méthode des bandes finies contrainte (cFSM) [7, 16, 8]. Il convient de souligner que la cFSM

utilise les principes fondamentaux de la GBT, mais la procédure est complètement différente ce qui en a fait une méthode à part entière. Par ailleurs, la GBT et la cFSM donnent des résultats très similaires du moment qu'elles utilisent les mêmes définitions mécaniques des différents modes purs de flambement.

Bebiano et al ont développé l'outil numérique GBTUL [54] et l'ont rendu public. Il sert à classer automatiquement les modes purs de flambement par la GBT. Adany et Schafer [7, 16, 8] ont, quant à eux, développé la cFSM et l'ont implémenté dans un programme open source le CUFISM [23] permettant ainsi de séparer les déformations d'une barre à parois minces, en celles correspondantes aux modes purs d'instabilité. Il faut noter que des tentatives d'effectuer des analyses de décomposition modale par la FEM ont été récemment publiées. Casafont et al [46, 6] ont essayé de calculer les modes purs de flambement des éléments à parois minces en utilisant la FEM. Cependant ils utilisent quand même des analyses GBT de la section pour dériver les indispensables matrices de contraintes. Les formes des modes purs obtenus à partir de la cFSM ont également été utilisées par Adany et al [36] pour effectuer les identifications modales c'est-à-dire pour mesurer les interactions dans un mode propre général calculé via la FEM.

Djafour [9] dans sa thèse de doctorat, a proposé une simplification des définitions d'Adany et de Schafer pour les modes d'instabilité, et a procédé à la détermination des matrices de contraintes d'une manière simple et moins restrictive. Il proposa une modification à la cFSM qui améliore le calcul de la matrice de contrainte définissant le mode distorsionnel qui reste, de loin, l'instabilité la plus compliquée à étudier. La principale innovation réside dans le fait qu'il a utilisé uniquement deux hypothèses pour définir la classe du mode de flambement combiné global-distorsionnel *GD*. La procédure cFSM devient alors plus simple que la proposition originale d'Adany et Schafer, et surtout plus générale. Elle a permis par ailleurs de traiter, et pour la première fois, les profilés à sections fermées simples.

L'objectif principal de ce travail est d'étendre l'approche de Djafour [9] en vue de permettre la décomposition des modes d'instabilité des profilés, de sections transversales ouvertes avec branches, de sections transversales fermées avec

branches et même de sections transversales avec branches et des parties fermées, telles que celles montrées par la Figure 4-1 .

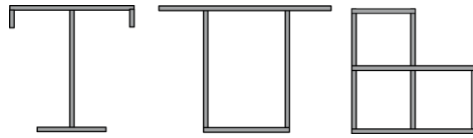


Figure 4-1: Sections transversales ramifiées ouvertes et fermées.

Dans ce chapitre, les concepts fondamentaux de la FSM et de la cFSM sont d'abord rappelés. La formulation initiée par Djafour est ensuite présentée mais pas tout à fait dans sa version originale. En effet la réflexion autour de l'approche de Djafour en vue de l'étendre aux sections ramifiées a conduit à une modification relativement importante de sa formulation ce qui a impliqué une reprogrammation de certaines procédures et a nécessité une nouvelle validation (voir chapitre suivant).

L'extension de la cFSM aux éléments prismatiques de sections transversales avec branches et/ou des parties fermées a cependant exigé le développement d'une nouvelle stratégie. Cette nouvelle formulation est présentée dans la suite de ce chapitre et sera validée dans le chapitre suivant. Pour terminer la présentation de la nouvelle cFSM, l'approche utilisée dans cette thèse pour séparer les modes G et D , en particulier pour les sections présentant des contours fermés, est expliquée.

4.2 La méthode des bandes finies FSM.

Dans la méthode des bandes finies, FSM [13], un profilé (barre) à parois minces est divisé en ns bandes (éléments) ayant toutes la même longueur a du profilé. La ligne d'intersection de deux bandes adjacentes est appelée ligne nodale ou simplement nœud. Le nombre de nœuds dans le maillage FSM est quant à lui noté n . Pour dériver la formulation matricielle, deux systèmes de coordonnées indirects sont utilisés : le repère global et le repère local. Le système de coordonnées global est noté $X - Y - Z$, et où l'axe Y est pris parallèle à l'axe longitudinal de la barre. Le

repère local, est toujours associé à une bande, et est noté $x - y - z$. Il faut noter que les axes Y et y sont parallèles alors que l'axe z est normal à la bande.

Le champ de déplacement d'une bande dans le repère local, $\mathbf{u} = [u \quad v \quad w]^T$, est interpolé à partir des degrés de liberté locaux de ses deux nœuds. Dans la FSM, chaque nœud i possède 2 degrés de liberté membranaires (dans le plan), u_i et v_i , et 2 degrés de liberté de flexion, w_i et θ_i , ce qui donne 4 degrés de liberté par nœud, et 8 par bande comme le montre la Figure 4-2.

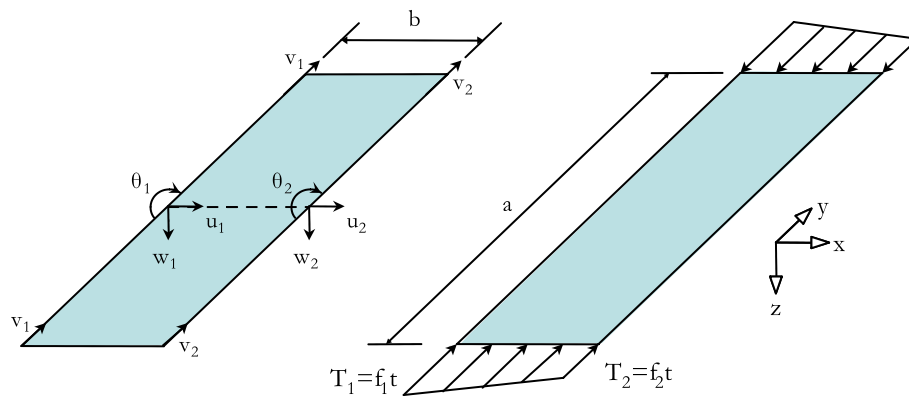


Figure 4-2: Géométrie, DDL, chargement appliqué et repère local d'une bande finie

La fonction de forme (ou d'interpolation) pour les degrés de liberté de flexion utilise la fonction cubique standard des poutres dans la direction transversale, et une fonction harmonique dans la direction longitudinale. La fonction d'interpolation pour les degrés de liberté membranaires utilise une fonction linéaire dans le sens transversal, et des fonctions harmoniques dans la direction longitudinale. Les comportements flexionnel et membranaire de la bande étant complètement découplés dans la formulation classique, le vecteur des degrés de liberté locaux d'une bande est écrit comme suit :

$$\mathbf{d} = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad | \quad w_i \quad \theta_i \quad w_j \quad \theta_j]^T \quad (4-1)$$

L'équation (4-1) peut être réécrite sous la forme compacte suivante qui définit les DDL membranaires de la bande et ceux flexionnels.

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_{uv}^T \quad | \quad \mathbf{d}_{w\theta}^T]^T \quad (4-2)$$

Les déformations d'une bande se composent de deux parties.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (4-3)$$

Où les déformations membranaires, $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, sont celles du plan moyen de la bande et peuvent être liées à ses degrés de liberté membranaires par l'expression suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_m \mathbf{d}_{uv} \quad (4-4)$$

Les déformations flexionnelles, $\boldsymbol{\varepsilon}_b$, correspondent à la théorie de flexion des plaques minces de Kirchhoff et peuvent être déduites des degrés de liberté de flexion:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_b = \begin{Bmatrix} -z \partial^2 w / \partial x^2 \\ -z \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2z \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_b \mathbf{d}_{w\theta} \quad (4-5)$$

En considérant une loi de comportement élastique linéaire orthotrope, on relie les contraintes aux déformations par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} (\boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b) \quad (4-6)$$

Où \mathbf{E} est donnée par l'expression ci-dessous :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & \nu_y E_1 & 0 \\ \nu_x E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, E_1 = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y}, E_2 = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y}, \nu_y E_x = \nu_x E_y \quad (4-7)$$

Les constantes, E_x et E_y , sont les modules d'élasticité et les coefficients ν_x et ν_y sont les coefficients de Poisson, suivant les deux directions orthogonales x et y respectivement. G est le module de cisaillement.

Comme les comportements membranaire et flexionnel sont découplés, on peut déterminer les matrices de rigidité correspondantes séparément. La matrice de rigidité élastique d'une bande finie dans le repère local prend alors la forme suivante :

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{em} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{eb} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

Où la matrice de rigidité membranaire est donnée par l'expression :

$$\mathbf{k}_{em} = \int \mathbf{B}_m^T \mathbf{E} \mathbf{B}_m dV \quad (4-9)$$

Et la matrice de rigidité flexionnelle par :

$$\mathbf{k}_{eb} = \int \mathbf{B}_b^T \mathbf{E} \mathbf{B}_b dV \quad (4-10)$$

L'étape suivante de la procédure consiste à assembler la matrice de rigidité élastique du modèle de l'élément à parois minces. La matrice de rigidité élastique de chaque bande doit alors être transformée du repère local de la bande vers un repère global avant l'assemblage. Dans la FSM, l'orientation d'une bande s par rapport à un repère global est définie par l'angle $\alpha^{(s)}$ entre le repère local x et le repère global X . Ainsi les degrés de liberté locaux d'une bande s sont reliés à ses DDL globaux par l'expression ci-après.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^{(s)} & \sin\alpha^{(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha^{(s)} & \cos\alpha^{(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha^{(s)} & \sin\alpha^{(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha^{(s)} & \cos\alpha^{(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ W_i \\ \Theta_i \\ W_j \\ \Theta_j \end{Bmatrix} \quad (4-11)$$

Ou écrite sous une forme compacte :

$$\mathbf{d}^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} \quad (4-12)$$

$\mathbf{d}^{(s)}$ et $\mathbf{D}^{(s)}$ sont les vecteurs des degrés de liberté de la bande s dans le repère local et le repère global respectivement, et $\mathbf{\Gamma}^{(s)}$ est la matrice de rotation qui réalise la transformation.

La matrice de rigidité élastique d'une bande s exprimée dans le repère global est donnée par :

$$\mathbf{K}_e^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{k}_e^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \quad (4-13)$$

Avec tous les degrés de liberté exprimés en coordonnées globales, la matrice de rigidité élastique peut être assemblée par une sommation des matrices élémentaires, ainsi :

$$\mathbf{K}_E = \sum_{\text{assemblage}}^{s=1 \text{ à } ns} \mathbf{K}_e^{(s)} \quad (4-14)$$

Cette matrice globale concerne l'ensemble des degrés de liberté du maillage. Il s'agit d'une matrice carrée dont la dimension, m , est égale à quatre fois le nombre de nœuds. ($m = 4 \times n$)

Pour l'analyse de la stabilité, en utilisant la FSM, les deux matrices globales sont nécessaires, la matrice de rigidité, \mathbf{K}_E , et la matrice de rigidité géométrique, \mathbf{K}_G . La matrice \mathbf{K}_G dépend de la charge appliquée et est ajustée de façon linéaire par un scalaire λ appelé facteur de charge. Les modes de flambement de l'élément à parois minces sont calculés en résolvant le problème aux valeurs propres généralisés suivants :

$$\mathbf{K}_E \Phi = \mathbf{K}_G \Phi \Lambda \quad (4-15)$$

Où $\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_m]$ est la matrice des vecteurs propres et $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]$ est la matrice diagonale des valeurs propres de dimension $(m \times m)$.

Chaque vecteur propre Φ_i contient tous les degrés de liberté du maillage FSM qui définissent la forme de la déformation associée à la valeur propre λ_i . Les valeurs propres sont classées dans un ordre croissant et la plus petite de ces valeurs définit la charge critique.

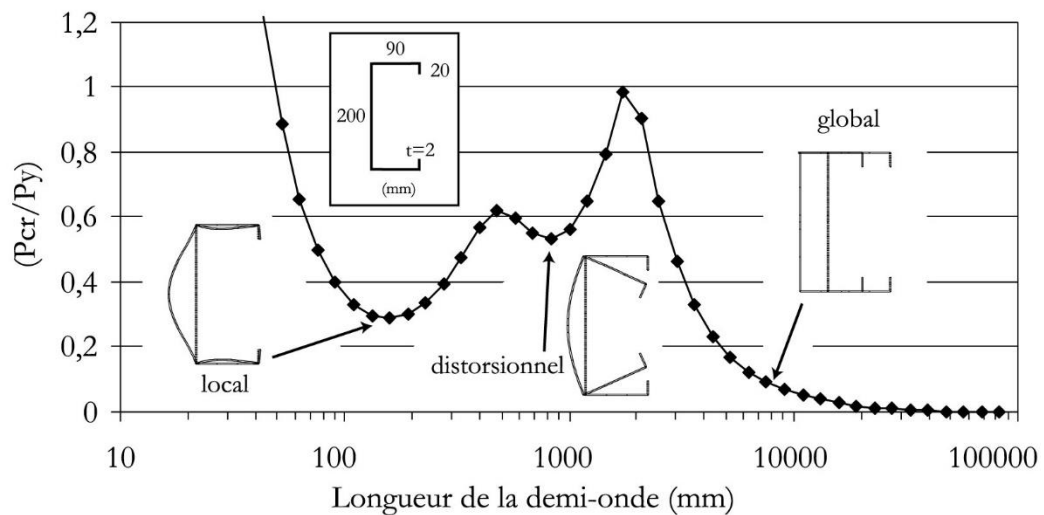


Figure 4-3 : Courbe de flambement et modes de flambement. Sortie typique d'une analyse FSM

Dans une mise en œuvre FSM classique, l'équation (4-15) est résolue pour différentes longueurs de l'élément, a , et pour une distribution de contrainte axiale

donnée. Les valeurs λ calculées sont ensuite tracées en fonction de la longueur a . La Figure 4-3 donne un exemple de résultat d'analyse par la FSM.

4.3 La méthode des bandes finies contrainte (cFSM).

L'idée principale de la cFSM [7] est de définir des matrices de contraintes \mathbf{R}_M pour chacune des classes M des modes de flambement. Ces matrices définissent la relation entre les degrés de liberté de la FSM, Δ , et ceux qui correspondent à la classe des modes de flambement Δ_M .

$$\Delta = \mathbf{R}_M \Delta_M \quad (4-16)$$

La dimension du vecteur Δ est m . Ce vecteur contient les quatre degrés de liberté globaux des n nœuds et est défini par :

$$\Delta^T = [\mathbf{U}^T \quad \mathbf{V}^T \quad \mathbf{W}^T \quad \mathbf{\Theta}^T] \quad (4-17)$$

Où les différentes composantes sont définies comme suit:

$$\mathbf{U}^T = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_n], \quad \mathbf{V}^T = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n], \quad \mathbf{W}^T = [W_1 \quad W_2 \quad \dots \quad W_n] \text{ et } \mathbf{\Theta}^T = [\Theta_1 \quad \Theta_2 \quad \dots \quad \Theta_n].$$

Le vecteur Δ_M a un plus petit nombre de degrés de liberté noté, m_M , et il définit un champ de déformation réduit qui satisfait les critères correspondants à une classe de flambement M . La dimension de la matrice de contraintes \mathbf{R}_M est $(m \times m_M)$. Les colonnes de \mathbf{R}_M peuvent être considérées comme une base vectorielle pour la classe de modes M . Conformément à la pratique générale, Adany et Schafer [7] ont défini quatre classes de modes : (i) global, G , (ii) distorsionnel, D , (iii) local, L , et (iv) autre, O . Il est important de mentionner que la combinaison des différents espaces de modes G , D , L et O donne à nouveau l'espace des degrés de liberté de la FSM, ce qui signifie que la cFSM présente une décomposition modale complète [8]

L'équation (4-16) peut être utilisée dans le problème propre de la stabilité pour tous les vecteurs propres de la matrice Φ et on obtient alors l'équation ci-dessous :

$$\Phi = \mathbf{R}_M \Phi_M \quad (4-18)$$

En substituant l'équation (4-18) dans l'équation (4-15) et en pré-multipliant par \mathbf{R}_M^T on obtient un nouveau problème généralisé aux valeurs propres.

$$\mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_E \mathbf{R}_M \Phi_M = \mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_G \mathbf{R}_M \Phi_M \Lambda_M \quad (4-19)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme simple suivante :

$$\mathbf{K}_{EM} \Phi_M = \mathbf{K}_{GM} \Phi_M \Lambda_M \quad (4-20)$$

Toutes les matrices de cette équation ont une dimension réduite, $(m_M \times m_M)$. Ce nouveau problème de valeurs propres est défini dans l'espace des degrés de liberté contraints engendré par le mode de classe M . Cela signifie que la résolution de l'équation (4-20) donne des solutions dans l'espace M . Donc, l'application de la contrainte, force la FSM à produire des solutions dans la classe des modes M .

Les dérivations des matrices \mathbf{R}_L et \mathbf{R}_O résultent de procédures directes et peuvent être effectuées facilement [8]. La définition des matrices \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D est beaucoup plus compliquée. L'approche suivie par Adany et Schafer [7] a été inspirée de la GBT, où la matrice \mathbf{R}_{GD} est d'abord dérivée et elle est ensuite séparée en deux matrices \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D . Pour définir la classe des modes de flambement combinée global-distorsionnel GD , ils ont utilisé les hypothèses de base de la GBT rappelées ci-dessous :

1. Les distorsions membranaires sont nulles, $\gamma_{xy} = 0$.
2. Les déformations membranaires transversales sont nulles, $\varepsilon_x = 0$.
3. Les déplacements longitudinaux varient linéairement suivant x à l'intérieur d'une paroi plane, $v = f(x)$.

4. Concernant la fonction du déplacement local $w(x)$, qui est la flèche de la paroi plane, la condition d'équilibre $d^4w/dx^4 = 0$ doit être satisfaite. Il faut également que ses deux dérivées dw/dx et d^2w/dx^2 soient continues le long de la totalité de la ligne moyenne de la section transversale. Cette hypothèse implique que la section déformée est en équilibre indépendamment des forces et des moments longitudinaux.

La conséquence de ces quatre hypothèses de base de la GBT est que le vecteur $\mathbf{\Delta}$, contenant tous les degrés de liberté de la FSM, peut être défini uniquement par les déplacements longitudinaux, \mathbf{V}_m , des nœuds appelés nœuds principaux.

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{\Delta}_{GD} = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{V}_m \quad (4-21)$$

La dérivation de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. L'approche suivie par Adany et Schafer [7] pour obtenir \mathbf{R}_{GD} était relativement longue et complexe, et en plus limitée aux sections prismatiques ouvertes. Djafour M, dans sa thèse de doctorat [9], a proposé une simplification des définitions d'Adany et de Schafer pour les modes d'instabilité et a procédé à la détermination des matrices de contrainte d'une manière simple et moins restrictive, en posant uniquement deux hypothèses pour définir l'espace GD . Un autre résultat majeur de cette approche est qu'elle a permis d'étudier pour la première fois des sections fermées simples, c'est-à-dire non ramifiées.

Dans ce qui suit, la formulation initiée par Djafour [9] est d'abord présentée avec toutefois quelques contributions sur certains aspects théoriques. Ces contributions ont été apportées lors de la réflexion autour de cette approche car l'idée de départ de cette thèse était de l'étendre directement aux sections ramifiées, ouvertes ou fermées. L'analyse de ces sections a cependant nécessité le développement d'une nouvelle approche qui est alors présentée juste après. Enfin, l'exposé de la cFSM est complété pour discuter de la séparation de \mathbf{R}_{GD} en deux matrices \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D dans le cas des sections présentant des contours fermés.

4.4 Dérivation de la matrice \mathbf{R}_{GD} par la méthode de Djafour modifiée

L'objectif de dériver \mathbf{R}_{GD} est d'établir une relation entre \mathbf{V}_m , le vecteur des déplacements longitudinaux des nœuds principaux, et $\mathbf{\Delta}$, le vecteur de tous les degrés de liberté du modèle FSM. Ceci signifie que dans l'espace GD les déplacements de gauchissement \mathbf{V}_m définissent sans ambiguïté le champ de déformation d'un élément à parois minces. La matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} peut être vue comme une base vectorielle qui définit l'espace GD et est utilisée pour forcer la FSM à produire des solutions dans cet espace.

Djafour M [9] a posé deux hypothèses pour dériver la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} dans le contexte de la FSM. Dans l'espace GD , et en utilisant le système de coordonnées local, toutes les bandes doivent être conformes avec les deux hypothèses suivantes :

1. $\chi_y = \chi_{xy} = 0$, flexion cylindrique des plaques ou sinon pas de flexion.
2. $\varepsilon_x = \gamma_{xy} = 0$, déformations transversales et distorsions membranaires négligeables.

Ensuite, la relation est mise en place en utilisant des procédures couramment utilisées dans les méthodes numériques, comme la FEM ou la FSM. Les étapes de dérivation développées par Djafour sont détaillées dans ce qui suit.

4.4.1 La matrice de rigidité élastique dans l'espace GD : \mathbf{K}_E^{GD}

Dans la pratique de l'ingénierie, il est bien connu que les instabilités distorsionnelle et globales des profilés se produisent pour des longueurs de demi-ondes beaucoup plus grandes que la dimension caractéristique, b , de la section transversale [55, 10].

$a \gg b$

Dans ce cas, il est évident que toute flexion d'une paroi plane du profilé est de type flexion cylindrique des plaques. Dans le repère local d'une bande, les courbures

χ_y et χ_{xy} sont nulles (hypothèse 1) [9]. La conséquence immédiate de cette hypothèse est que les déformations flexionnelles, $\boldsymbol{\varepsilon}_b$, définies par l'équation (4-5) deviennent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_b = \begin{Bmatrix} z \chi_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \partial^2 w / \partial x^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_b^{GD} \mathbf{d}_{w0} \quad (4-22)$$

Comme le comportement membranaire et le comportement flexionnel des plaques sont complètement découplés, seule la sous matrice de rigidité élastique \mathbf{k}_{eb} de l'équation (4-8) est modifiée comme suit :

$$\mathbf{k}_{eb} = \int \mathbf{B}_b^{GD T} \mathbf{E} \mathbf{B}_b^{GD} dV \quad (4-23)$$

En faisant les substitutions adéquates et en effectuant les intégrations, on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{k}_{eb} = \begin{bmatrix} + \frac{6a}{b^3} D_x & & & & \text{Sym} \\ + \frac{3a}{b^2} D_x & + \frac{2a}{b} D_x & & & \\ - \frac{6a}{b^3} D_x & - \frac{3a}{b^2} D_x & + \frac{6a}{b^3} D_x & & \\ + \frac{3a}{b^2} D_x & + \frac{a}{b} D_x & - \frac{3a}{b^2} D_x & + \frac{2a}{b} D_x & \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

Avec $D_x = E_x t^3 / 12(1 - \nu_x \nu_y)$; E_x est le module de Young dans la direction transversal, ν_x et ν_y sont les coefficients de Poisson et t l'épaisseur de la bande. a et b sont la longueur et la largeur de la bande respectivement.

Cette sous-matrice ressemble beaucoup à la matrice de rigidité de l'élément poutre de Bernoulli, qu'on rappelle ci-dessous :

$$\mathbf{k}_{beam} = \begin{bmatrix} +\frac{12EI}{L^3} & & & & & \\ & +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{4EI}{L} & & & \\ & & & & & \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{12EI}{L^3} & & & \\ +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{4EI}{L} & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} Sym \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (4-25)$$

Où EI et L sont la rigidité en flexion et la longueur de la poutre, respectivement.

En introduisant les notations $EI = aD_x/2$ et $L = b$, l'équation (4-25) devient identique à l'équation (4-24). Ceci fournit une explication claire au modèle de la poutre équivalente utilisé par Adany et Schafer pour obtenir la matrice \mathbf{R}_{GD} . Le facteur $a/2$ dans l'équation (4-24) provient du fait que la fonction de forme de la FSM emploie une sinusoïde dans la direction longitudinale y et l'intégration de l'équation (4-23) révèle l'intégrale suivante :

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) dy = \frac{a}{2} \quad (4-26)$$

Dans le modèle de poutre équivalente, le facteur $a/2$ n'apparaît pas, car il est implicitement supposé que la variation le long de l'axe Y est constante. Cependant, il faut mentionner que ce qui importe pour dériver la matrice \mathbf{R}_{GD} c'est la distribution de la rigidité et non pas les valeurs de celle-ci.

La prochaine étape dans la FSM est de transformer les matrices de rigidité élastiques modifiées des bandes, du système de coordonnées locales au système de coordonnées globales, en utilisant l'équation (4-13). Ensuite, on procède à leur assemblage en utilisant l'équation (4-14) pour obtenir la matrice de rigidité élastique de l'élément qui tient compte de l'hypothèse 1, c'est à dire, la matrice de rigidité élastique \mathbf{K}_E^{GD} dans l'espace GD .

4.4.2 La matrice de contrainte pour les DDL membranaires.

Les déplacements membranaires d'une bande de longueur a et de largeur b sont interpolés à partir des degrés de liberté membranaires locaux de ses deux nœuds [56, 13] et sont exprimés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u &= \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right) \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \sin(r\pi y/a) \\ v &= \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right) \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \cos(r\pi y/a) \end{aligned} \quad (4-27)$$

Avec r le nombre de demi-ondes le long de l'axe y .

L'hypothèse 2 qui estime les déformations transversales et les distorsions membranaires négligeables peut être traduite par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (4-28)$$

En substituant l'équation (4-27) dans l'équation (4-28), on obtient les relations de contraintes subséquentes :

$$u_i = u_j = (v_i - v_j) \frac{1}{bk_r} \quad (4-29)$$

Avec $k_r = r\pi/a$

L'équation (4-29) est élargie, pour inclure tous les degrés de liberté de la bande.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/bk_r & 0 & -1/bk_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/bk_r & 0 & -1/bk_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ v_i \\ \bar{u}_j \\ v_j \\ w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4-30)$$

La matrice de l'équation (4-30) donne la relation entre les degrés de liberté de la bande, avant et après l'introduction de l'hypothèse 2. On remarque qu'elle contient deux colonnes nulles. Ceci signifie que les deux degrés de liberté locaux, u_i et u_j , qui sont définis à partir du degré de liberté de gauchissement, ne sont plus efficace, c'est à dire, qu'au lieu des 8 degrés de liberté initiaux de la bande, seulement 6 sont indépendants. A noter que les scalaires \bar{u}_i et \bar{u}_j peuvent prendre n'importe quelle valeur et ne sont introduits que pour conserver temporairement une matrice carrée.

L'équation (4-30) peut être réécrite sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{d}^{(s)} = \mathbf{r}^{(s)} \bar{\mathbf{d}}^{(s)} \quad (4-31)$$

Où $\mathbf{r}^{(s)}$ est la matrice de contraintes pour les degrés de liberté membranaires de la bande s dans le repère local. La transformation, du repère local vers le repère global définie par l'équation (4-12), peut être utilisée pour les deux vecteurs de l'équation (4-31). Le résultat obtenu est pré-multiplié par la transposée de la matrice de rotation. On définit alors, $\mathbf{R}^{(s)}$, la matrice de contraintes de la bande s dans le repère global.

$$\mathbf{D}^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \bar{\mathbf{D}}^{(s)} = \mathbf{R}^{(s)} \bar{\mathbf{D}}^{(s)} \quad (4-32)$$

Afin de préserver la seule information utile, soit 6 degrés de liberté efficaces, les deux degrés de liberté à éliminer sont identifiés, selon l'orientation de la bande, et supprimés du vecteur $\bar{\mathbf{D}}^{(s)}$, qui devient un vecteur à 6 composantes noté $\boldsymbol{\delta}^{(s)}$. Les deux colonnes correspondantes dans la matrice $\mathbf{R}^{(s)}$ sont également supprimées, et on obtient une matrice notée $\mathbf{h}^{(s)}$ de dimension (8×6) . Ainsi l'équation (4-32) devient :

$$\mathbf{D}^{(s)} = \mathbf{h}^{(s)} \boldsymbol{\delta}^{(s)} \quad (4-33)$$

En commençant par la première bande, l'équation (4-33) peut être étendue par des matrices identités aux $(4n)$ degrés de liberté du modèle FSM :

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{\Delta}^{(1)} \quad (4-34)$$

Le vecteur $\mathbf{\Delta}^{(1)}$ contient les degrés de libertés efficaces du modèle FSM après écriture des 2 contraintes de la première bande. Par conséquent, la dimension de $\mathbf{H}^{(1)}$ est $(4n \times (4n - 2))$.

En considérant successivement les ns bandes du modèle FSM, on obtient une matrice de transformation, \mathbf{C} , qui regroupe les contraintes apportées par toutes les bandes.

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)} \dots \mathbf{H}^{(ns)} \mathbf{\Delta}^{(ns)} = \mathbf{C} \mathbf{\Delta}^{(ns)} \quad (4-35)$$

Il est important de mentionner que chaque bande apporte deux relations entre les degrés de liberté. Ce qui signifie qu'après chaque transformation, $\mathbf{H}^{(s)}$, deux degrés de liberté ne sont plus efficaces et doivent être réduits. Ainsi, le nombre total de degrés de liberté à éliminer est $(2 \times ns)$. Habituellement, seuls les déplacements U et W sont concernés par l'équation (4-33) qui les relie au gauchissement V . Selon l'orientation de la bande, deux U ou deux W doivent alors être éliminés pour réaliser les relations de contrainte de la bande courante. Par conséquent, la dimension de $\mathbf{\Delta}^{(ns)}$ dans l'équation (4-35) devrait être $(4n - 2ns)$.

Cependant, il y a un problème si, lors de la réduction des degrés de liberté, l'un d'eux a déjà été réduit lors d'une précédente transformation. Cela se produit dans le cas où les nœuds sont communs à deux bandes coplanaires. Il se produit également lorsqu'un nœud est commun à plus de deux bandes, c'est-à-dire dans le cas de sections transversales à connexions multiples. Cela signifie que la dimension de $\mathbf{\Delta}^{(ns)}$, après l'application des transformations successives, est dans ces cas supérieure à $(4n - 2ns)$. Pour réaliser les conditions de contraintes apportées par les bandes concernées, une relation entre des degrés de liberté de gauchissement appropriés doit

exister. En d'autres termes, certains degrés de liberté de gauchissement ne sont plus indépendants et doivent être liés à d'autres degrés de liberté de gauchissement avant d'être éliminés. Si on ne veut étudier que des sections ramifiées simples, il suffit de résoudre le cas des bandes coplanaires, ce qui est présenté ci-après.

Pour expliquer la procédure, on considère une paroi plane divisée en quatre bandes coplanaires comme le montre la Figure 4-4. A noter que les axes locaux de ces quatre bandes ont la même direction, c'est-à-dire qu'elles ont le même angle d'orientation à $\pm\pi$.

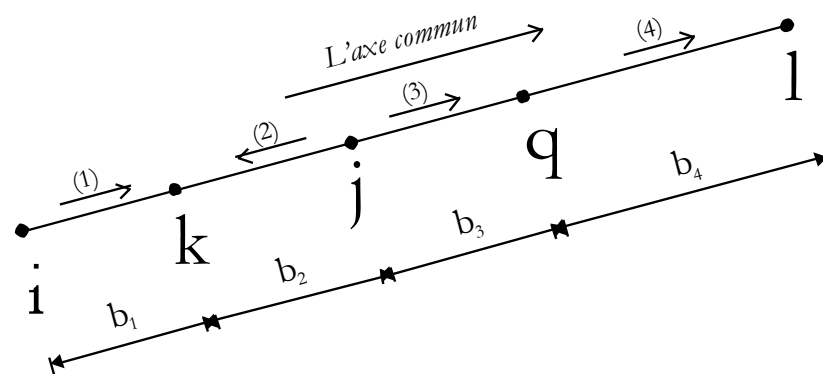


Figure 4-4: Paroi plane divisée en 4 bandes

L'utilisation de l'équation de contraintes (4-29) pour chaque bande de la Figure 4-4 donne :

$$\begin{aligned}
 u_i^{(1)} &= u_k^{(1)} = (V_k - V_i)/k_r b_1 \\
 u_k^{(2)} &= u_j^{(2)} = (V_j - V_k)/k_r b_2 \\
 u_j^{(3)} &= u_q^{(3)} = (V_q - V_j)/k_r b_3 \\
 u_q^{(4)} &= u_l^{(4)} = (V_l - V_q)/k_r b_4
 \end{aligned}
 \tag{4-36}$$

Il faut souligner que $v = V$.

L'égalité des degrés de liberté u des trois nœuds de jonction ou nœuds intermédiaires, donne les trois relations ci-dessous entre les degrés de liberté de gauchissement :

$$\begin{cases} u_k^{(1)} = u_k^{(2)} \\ u_j^{(2)} = u_j^{(3)} \\ u_q^{(3)} = u_q^{(4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (V_k - V_i)/b_1 = (V_j - V_k)/b_2 \\ (V_j - V_k)/b_2 = (V_q - V_j)/b_3 \\ (V_q - V_j)/b_3 = (V_i - V_q)/b_4 \end{cases} \quad (4-37)$$

Après résolution de ce système d'équations, on aboutit à l'interpolation linéaire suivante :

$$\begin{aligned} V_k &= ((b_2 + b_3 + b_4) V_i + b_1 V_l) / (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \\ V_j &= ((b_3 + b_4) V_i + (b_1 + b_2) V_l) / (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \\ V_q &= (b_4 V_i + (b_1 + b_2 + b_3) V_l) / (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \end{aligned} \quad (4-38)$$

Ainsi, dans le cas de bandes coplanaires, les degrés de liberté de gauchissement des nœuds intermédiaires, appelés aussi nœuds secondaires, sont interpolés à partir de ceux des nœuds principaux. Ce résultat est dû aux faits que (i) les fonctions de forme des degrés de liberté membranaires sont prises linéaires, et que (ii) les déformations transversales et les distorsions membranaires sont négligées. En d'autres termes, l'hypothèse 3 de la GBT (voir page 66) n'est pas nécessaire pour la cFSM.

Donc, les degrés de liberté de gauchissement de tous les nœuds secondaires peuvent être déduits de ceux des nœuds principaux et, par conséquent, ils doivent être éliminés ou réduits. Cette interpolation peut être considérée comme un deuxième type de relation de contrainte. Ce jeu d'équations peut être étendu, en utilisant des matrices identité, afin d'obtenir la dimension appropriée de la matrice, c'est à dire, pour concerner tous les degrés de liberté actuellement indépendants du modèle FSM. Ensuite, la matrice résultante est post-multipliée à la matrice \mathbf{C} de l'équation (4-35).

Le principal résultat de cette section, est que, parmi les $(4n)$ degrés de liberté qui forment le vecteur Δ , un ensemble de $(2ns)$ degrés de liberté, noté Δ_e , ne sont plus effectifs et doivent être réduits car ils peuvent être déduits des $(4n - 2ns)$ degrés de liberté restants, notés, Δ_k . Les degrés de liberté à éliminer sont des U , W et V . Ce résultat peut être résumé par l'équation suivante :

$$\Delta = \mathbf{C} \Delta_k \quad (4-39)$$

La dimension de la matrice de contrainte \mathbf{C} est $(4n \times (4n - 2ns))$. Elle peut être partitionnée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ek} \\ \mathbf{I}_{\Delta k} \end{bmatrix} \Delta_k \quad (4-40)$$

$\mathbf{I}_{\Delta k}$ est une matrice identité qui a la dimension du vecteur Δ_k

4.4.3 Application de la matrice de contraintes pour les degrés de liberté membranaires à la matrice de rigidité globale \mathbf{K}_E^{GD}

Les transformations successives présentées dans le paragraphe précédent donnent une matrice \mathbf{C} qui comprend les contraintes membranaires apportées par toutes les bandes. L'information utile de l'équation (4-40) est :

$$\Delta_e = \mathbf{C}_{ek} \Delta_k \quad (4-41)$$

La matrice de rigidité élastique dans l'espace GD , \mathbf{K}_E^{GD} , est maintenant divisée en quatre sous matrices en réarrangeant les degrés de liberté.

$$\mathbf{K}_E^{GD} \Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} & \mathbf{K}_E^{ek} \\ \mathbf{K}_E^{ke} & \mathbf{K}_E^{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} \\ \mathbf{K}_E^{ke} \end{bmatrix} \Delta_e + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ek} \\ \mathbf{K}_E^{kk} \end{bmatrix} \Delta_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{F}_k \end{Bmatrix} \quad (4-42)$$

\mathbf{F}_e et \mathbf{F}_k sont les vecteurs forces aux degrés de liberté éliminés et retenus, respectivement. La substitution de l'équation (4-41) dans l'équation (4-42) aboutit aux deux équations suivantes :

$$(\mathbf{K}_E^{ek} + \mathbf{K}_E^{ee} \mathbf{C}_{ek}) \Delta_k = \mathbf{F}_e \quad (4-43)$$

$$(\mathbf{K}_E^{kk} + \mathbf{K}_E^{ke} \mathbf{C}_{ek}) \Delta_k = \mathbf{F}_k \quad (4-44)$$

En introduisant une matrice des multiplicateurs de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda}^{ke}$, les équations (4-42) et (4-43) sont combinées comme suit :

$$(\mathbf{K}_E^{kk} + \mathbf{K}_E^{ke} \mathbf{C}_{ek}) \Delta_k - \mathbf{F}_k + \boldsymbol{\lambda}^{ke} \left((\mathbf{K}_E^{ek} + \mathbf{K}_E^{ee} \mathbf{C}_{ek}) \Delta_k - \mathbf{F}_e \right) = \mathbf{0} \quad (4-45)$$

La procédure standard des multiplicateurs de Lagrange [57] impose que

$$\boldsymbol{\lambda}^{ke} = \frac{\partial \Delta_e}{\partial \Delta_k} \quad (4-46)$$

Les équations (4-41) et (4-46) conduisent à :

$$\boldsymbol{\lambda}^{ke} = \mathbf{C}_{ek}^T \quad (4-47)$$

La substitution de l'équation (4-47) dans l'équation (4-45) donne, alors la relation suivante :

$$\mathbf{K}_k \Delta_k = \mathbf{P}_k \quad (4-48)$$

Où $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_E^{kk} + \mathbf{K}_E^{ke} \mathbf{C}_{ek} + \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{K}_E^{ek} + \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{K}_E^{ee} \mathbf{C}_{ek}$ et $\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{F}_e$.

\mathbf{K}_k est une matrice carrée de dimension égale au nombre de degrés de liberté non éliminés, $(4n - 2ns)$. C'est la matrice de rigidité du modèle FSM du profilé à parois minces, suite à l'application des hypothèses 1 et 2, à savoir, flexion cylindrique des parois et déformations transversales et distorsions membranaires négligeables.

4.4.4 Dérivation de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD}

Dans la cFSM, la matrice \mathbf{R}_{GD} est la matrice de contrainte qui définit l'espace GD . Elle définit le vecteur, $\mathbf{\Delta}$, contenant tous les degrés de liberté du maillage FSM, à partir des déplacements longitudinaux ou de gauchissement, \mathbf{V}_m , des nœuds principaux (équation (4-21)). Cette matrice exprime le fait que tous les degrés de liberté transversaux \mathbf{U} , \mathbf{W} et $\mathbf{\Theta}$ ainsi que les degrés de liberté \mathbf{V} des nœuds secondaires peuvent être entièrement définis à partir de \mathbf{V}_m . L'objectif est maintenant d'utiliser les résultats obtenus aux paragraphes précédents pour obtenir \mathbf{R}_{GD} . L'idée est d'imposer les degrés de liberté de gauchissement, \mathbf{V}_m , comme un chargement cinématique et de calculer les degrés de liberté résultant.

En réarrangeant la matrice de rigidité élastique \mathbf{K}_k et le vecteur $\mathbf{\Delta}_k$, on peut réécrire l'équation (4-48) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_k^{VV} & \mathbf{K}_k^{V\Delta} \\ \mathbf{K}_k^{\Delta V} & \mathbf{K}_k^{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_m \\ \mathbf{\Delta}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4-49)$$

Les forces \mathbf{F}_m aux degrés de liberté de gauchissement sont les réactions inconnues résultant du chargement cinématique, les forces restantes doivent être nulles.

La deuxième équation du système d'équation (4-49) donne

$$\mathbf{\Delta}_u = \left[-\mathbf{K}_k^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_k^{\Delta V} \right] \mathbf{V}_m \quad (4-50)$$

L'équation (4-50) peut être étendue par une matrice identité \mathbf{I}_{V_m} ayant la dimension de \mathbf{V}_m pour inclure tous les degrés de liberté dans $\mathbf{\Delta}_k$

$$\mathbf{\Delta}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_m \\ \mathbf{\Delta}_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{V_m} \\ -\mathbf{K}_k^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_k^{\Delta V} \end{bmatrix} \mathbf{V}_m \quad (4-51)$$

Enfin, la substitution de l'équation (4-51) dans l'équation (4-40) donne la matrice recherchée de l'équation (4-21) et qui est :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{GD}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{ek}} \\ \mathbf{I}_{\Delta\mathbf{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{Vm}} \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{k}}^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_{\mathbf{k}}^{\Delta\mathbf{V}} \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

4.4.5 Commentaires

Dans les paragraphes précédents, une méthode pour dériver la matrice de contrainte $\mathbf{R}_{\mathbf{GD}}$ a été présentée. Bien que basée sur les mêmes principes que la cFSM originale, elle utilise des techniques et des procédures standards de la FEM. Ceci a conduit entre-autres à une formule unique pour la matrice de contrainte $\mathbf{R}_{\mathbf{GD}}$ (équation (4-52)). Dans cette démarche, une étape importante est la détermination de la matrice de contrainte pour les DDL membranaires (§4.4.2). Une première contribution de cette thèse [58] par rapport à la formulation de Djafour [9] est dans la modification des équations (4-33) à (4-35). Comme dans la formulation initiale, les apports des bandes, soit 2 contraintes par bande, sont traitées séquentiellement au moyen d'une série de multiplications de matrices de transformation. L'innovation réside simplement dans le fait qu'après chaque transformation $\mathbf{H}^{(s)}$, les deux degrés de liberté qui ne sont plus efficaces sont identifiés et réduits, pour arriver au bout des transformations à éliminer ($2 \times ns$) DDL.

Pour les sections ouvertes à connexions simples, la dérivation de la matrice de contrainte $\mathbf{R}_{\mathbf{GD}}$ n'a besoin que de deux types de matrices de transformation \mathbf{H} : celui décrit par les équations (4-31) à (4-35), et l'interpolation linéaire pour les nœuds secondaires. Les mêmes types de matrices \mathbf{H} peuvent être utilisés pour étudier les sections creuses, qui sont des sections fermées à connexions simples. La différence est que, dans le cas de sections creuses, les degrés de liberté U et W de tous les nœuds principaux doivent être éliminés, alors que pour les sections ouvertes, les degrés de liberté locaux de translation w des deux nœuds principaux externes sont conservés (équation (4-41)).

Pour mieux expliquer ce détail particulier, les modèles FSM les plus simples d'une section en U (4 nœuds, 3 bandes) et d'une section creuse rectangulaire (4 nœuds, 4 bandes) sont pris comme exemples. Ces modèles impliquent tous les deux 16 degrés de liberté et 4 nœuds principaux. Par conséquent, leurs matrices de contraintes \mathbf{R}_{GD} ont la même dimension (16×4). La différence réside dans le nombre de matrices de transformation \mathbf{H} qui sont impliquées et, par conséquent, dans le nombre de degrés de liberté à éliminer. Pour le modèle de la section en U à 3 bandes, 3 matrices \mathbf{H} sont nécessaires et 6 degrés de liberté doivent être éliminés, alors que pour le modèle de la section creuse, 4 matrices de transformation sont utilisées et huit degrés de liberté sont éliminés. Ainsi, la différence dans l'analyse des deux modèles se situe au niveau des équations (4-35) et (4-41).

L'extension de cette méthode basée sur les matrices de transformation dans le but d'étudier les sections ouvertes à connexions multiples a été la première piste explorée dans cette thèse. La matrice de transformation \mathbf{H} correspondante (un troisième type) devait être dérivée et programmée. L'idée était que si cela peut être fait, il est techniquement possible d'obtenir la matrice \mathbf{R}_{GD} pour les sections ramifiées ouvertes ou fermées. C'est-à-dire, une matrice de contrainte qui force ce genre de sections à se comporter selon les deux hypothèses de flexion cylindrique des parois et, de déformations transversales et distorsions membranaires négligeables. Cette dernière précision s'impose car il n'est pas évident que ces hypothèses permettent de définir certains modes globaux des sections fermées.

La réflexion autour de cette démarche qui n'a pas abouti a permis toutefois de faire une remarque importante. Elle concerne les sections ramifiées fermées qui peuvent présenter un problème de « sur-contrainte ». Comme indiqué dans le paragraphe 4.4.2, chaque bande apporte 2 équations de contrainte et il s'ensuit que $2ns$ degrés de liberté, notés $\mathbf{\Delta}_e$, ne sont pas efficaces et doivent être réduits car ils peuvent être déduits des autres ($4n - 2ns$) degrés de liberté, $\mathbf{\Delta}_k$. Les degrés de liberté à éliminer ne sont que des U , W et V puisque la transformation de l'équation (4-33) ne concerne que ces degrés de liberté. La conséquence immédiate est que le maximum de degrés de liberté qui peut être éliminé est égal à $3n$. En d'autres termes,

pour obtenir la matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} , $3n$ doit être supérieur à $2ns$. Par exemple, une section rectangulaire creuse avec une diagonale (4 nœuds, 5 bandes) aura seulement deux degrés de liberté de gauchissement indépendants et, par conséquent, il y aura seulement 2 modes dans l'espace GD ($2 = 3 \times 4 - 2 \times 5$). Un exemple problématique est une section transversale rectangulaire avec deux diagonales qui se croisent (5 nœuds, 8 bandes). Ce cas de section ne peut tout simplement pas avoir une matrice \mathbf{R}_{GD} selon ce qui a été présenté ci-dessus.

Ce genre de réflexions associées à la difficulté de dériver un « troisième type » de matrices de transformation a conduit à reconsidérer la stratégie pour aborder le problème des sections prismatiques ramifiées et/ou ayant des contours fermés. Une méthode, pour justement déterminer la matrice de contrainte de ce type de sections, va être présentée dans le paragraphe suivant.

4.5 Matrice \mathbf{R}_{GD} des sections prismatiques ramifiées et/ou ayant des contours fermés

4.5.1 Introduction

D'après le paragraphe 4.4 ci-avant, quatre grandes étapes sont nécessaires pour dériver la matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} . La première a pour but de calculer, \mathbf{K}_E^{GD} , la matrice de rigidité élastique modifiée qui tient compte de l'hypothèse 1, c'est à dire l'hypothèse de flexion cylindrique des parois planes. Cette matrice peut aussi être facilement obtenue en utilisant un modèle de poutre équivalent, comme cela a été fait dans la formulation originale de la cFSM [16]. Dans la deuxième étape, une matrice de contrainte pour les degrés de liberté membranaires, \mathbf{C} , est obtenue à partir de l'hypothèse 2. Elle représente les conditions sur les degrés de liberté du modèle FSM qui forcent les déformations transversales et les distorsions membranaires à être négligeables dans toutes les bandes. La troisième étape consiste à appliquer cette matrice de contraintes \mathbf{C} à la matrice de rigidité globale modifiée \mathbf{K}_E^{GD} en utilisant une procédure de multiplicateurs de Lagrange. Enfin, \mathbf{R}_{GD} est calculée en utilisant sa définition : elle doit donner la relation entre le vecteur $\mathbf{\Delta}$, contenant tous les degrés

de liberté du modèle FSM, et les déplacements de gauchissement, \mathbf{V}_m , des nœuds principaux. L'idée est alors d'imposer les degrés de liberté de gauchissement, \mathbf{V}_m , comme un chargement cinématique et de calculer les degrés de liberté résultants.

Dans ce qui suit, la deuxième étape est revisitée afin de permettre le calcul de la matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} pour les éléments prismatiques avec des branches et/ou des parties fermées.

4.5.2 La matrice de contrainte pour les DDL membranaires.

Les 2 relations de contrainte de l'équation (4-29), qui sont déduites à partir de l'hypothèse 2, signifient que les deux degrés de liberté locaux d'une bande, u_i et u_j , sont définis par les degrés de liberté de gauchissement (longitudinaux) et ne sont plus efficaces. C'est à dire qu'au lieu des 8 premiers degrés de liberté de la bande, seulement 6 degrés de liberté sont indépendants. Il est aussi important de préciser qu'il y a une équation de contrainte par nœud de la bande.

Dans la FSM, la transformation du repère local vers le repère global au nœud i d'une bande inclinée dans le système de coordonnées global $X - Y - Z$ d'un angle α est régie par les transformations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ \Theta_i \end{Bmatrix} \quad (4-53)$$

Par conséquent, la transformation du repère local vers le repère global des équations (4-29) donne les deux équations suivantes qui fournissent des relations entre les degrés de liberté transversaux et les degrés de liberté de gauchissement des deux nœuds.


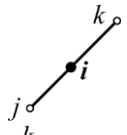

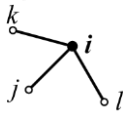
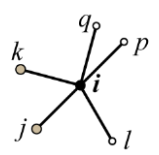
$$\begin{aligned} U_i \cos \alpha + W_i \sin \alpha &= (V_i - V_j) \frac{1}{bk_r} \\ U_j \cos \alpha + W_j \sin \alpha &= (V_i - V_j) \frac{1}{bk_r} \end{aligned} \quad (4-54)$$

Afin d'appliquer l'hypothèse 2 à l'ensemble du modèle FSM, il est nécessaire d'écrire deux équations de contrainte par bande dans le système de coordonnées global. En conséquence, le nombre de degrés de liberté à éliminer pour atteindre les contraintes apportées par toutes les bandes est $2ns$.

Le point clé de la nouvelle procédure réside dans la façon de sélectionner les degrés de liberté à éliminer. La nouvelle procédure repose sur une boucle sur les nœuds plutôt que sur les bandes. Ainsi, pour chaque nœud i , on a besoin d'écrire autant d'équations et d'éliminer autant de degrés de liberté que de bandes qui lui sont connectées. La décision dépend de l'orientation des bandes, du nombre de connexions et des degrés de liberté actuellement libres/actifs. Les différentes situations sont résumées dans le Tableau 1 et la procédure est expliquée ci-après.

Si une seule bande est reliée au nœud i , alors il y a une seule équation qui implique ses degrés de liberté transversaux. À partir de l'équation de contrainte pour le nœud i , c'est-à-dire la première ligne de l'équation (4-54), il est évident que si $\sin \alpha = 0$ alors, il n'existe qu'une seule possibilité et le degré de liberté transversal à réduire est forcément U_i . De la même manière, si $\cos \alpha = 0$, le degré de liberté à éliminer est W_i . Autrement, il est possible de réduire soit U_i soit W_i en le définissant à partir du degré de liberté transversal restant et à partir des degrés de liberté de gauchissement. De préférence, le degré de liberté à éliminer est celui dont la direction est proche de l'axe x local de la bande. Cette préférence est plutôt une précaution pour éviter la singularité qui serait causée par la réduction d'un degré de liberté pratiquement perpendiculaire à l'axe x local.

Tableau 1 Résumé des différents types de nœuds

Nombre de bandes connectées	Illustration	DDL à éliminer
1		U_i ou W_i
2 (coplanaires)		$(U_i$ ou $W_i)$ et V_i
2 (non coplanaires)		U_i et W_i
3		U_i, W_i et V_i
$nc > 3$		U_i, W_i, V_i et $(nc - 3)$ V_s des nœuds voisins (V_j et V_k dans l'exemple)

Si maintenant, on se trouve dans la deuxième situation, c'est-à-dire que le nœud i est connecté à 2 nœuds, j et k , par 2 bandes, s_1 et s_2 , on peut alors écrire une équation de contrainte par bande de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 U_i \cos \alpha_{s_1} + W_i \sin \alpha_{s_1} &= (V_i - V_j) \frac{1}{b_{s_1} k_r} \\
 U_i \cos \alpha_{s_2} + W_i \sin \alpha_{s_2} &= (V_i - V_k) \frac{1}{b_{s_2} k_r}
 \end{aligned}
 \tag{4-55}$$

Où b_{s_1} et b_{s_2} sont les largeurs respectives des bandes, et α_{s_1} et α_{s_2} sont les angles respectifs.

Dans le cas où les bandes ne sont pas coplanaires, l'équation (4-55) peut être résolue afin de définir les 2 degrés de liberté transversaux de i , U_i et W_i , à partir des degrés de liberté de gauchissement des trois nœuds connectés. Ainsi, les 2 degrés de liberté à éliminer sont U_i et W_i

Dans le cas où les 2 bandes sont coplanaires, les membres gauches des équations (4-55) sont identiques, du moins en valeur absolue. Il devient clair que les degrés de

liberté de gauchissement impliqués ne sont pas indépendants. L'un d'eux devra être défini à partir des deux autres avant d'être éliminé. Il est cependant préférable de réduire V_i pour simplement circonscrire le processus d'élimination aux degrés de liberté du nœud courant. Le second degré de liberté à éliminer peut être U_i ou W_i , en fonction de l'orientation des bandes, comme expliqué ci-dessus pour le cas d'une seule bande connectée.

Si maintenant le nœud i est connecté à 3 nœuds, j , k et l , par 3 bandes notées, s_1 , s_2 et s_3 , trois équations de contraintes sont impliquées et peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_{s1} & -1/k_r b_{s1} & \sin \alpha_{s1} \\ \cos \alpha_{s2} & -1/k_r b_{s2} & \sin \alpha_{s2} \\ \cos \alpha_{s3} & -1/k_r b_{s3} & \sin \alpha_{s3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} = -\frac{1}{k_r} \begin{Bmatrix} V_j/b_{s1} \\ V_k/b_{s2} \\ V_l/b_{s3} \end{Bmatrix} \quad (4-56)$$

α_{s_i} et b_{s_i} sont respectivement l'angle et l'épaisseur de la bande s_i .

Si au moins deux bandes ont des directions différentes, l'équation (4-56) peut être résolue pour les 3 degrés de liberté de translation du nœud i , qui sont alors les 3 degrés de liberté à réduire dans ce cas.

La dernière situation se produit lorsque nc bandes, avec $nc > 3$, sont connectées au nœud i , ce qui implique que nc degrés de liberté doivent être réduits : les 3 degrés de liberté de translation du nœud i et $(nc - 3)$ degrés de liberté de gauchissement de nœuds voisins. Puisque la décision s'étend au-delà du nœud actuel, il est nécessaire de rechercher et de trouver, au niveau des nœuds qui lui sont connectés, suffisamment de degrés de liberté de gauchissement libres ou actifs. Il est essentiel de noter qu'il faut laisser le traitement de ce type de nœuds « sur-contraints » à la fin de la procédure, soit une fois que les situations plus simples aient été traitées, et il est aussi important de signaler que le choix des degrés de liberté à réduire n'est pas unique.

Pour mettre en œuvre la procédure présentée ci-dessus, une idée, qui permet de résoudre le problème globalement et de prendre en charge les différents couplages, consiste à réécrire chaque équation de contrainte dans la forme matricielle suivante :

$$[\cos \alpha \quad -1/bk_r \quad \sin \alpha \quad 1/bk_r] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ V_j \end{Bmatrix} = 0 \quad (4-57)$$

Ensuite, l'équation (4-57) est étendue par des zéros pour « impliquer » tous les degrés de liberté du modèle FSM. A l'intérieur de la boucle sur les nœuds, ces équations de contraintes sont alors écrites séquentiellement, et, à la fin, un ensemble de $(2ns)$ équations de contraintes est obtenu. Il peut être écrit sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{H} \Delta = \mathbf{0} \quad (4-58)$$

La dimension de la matrice \mathbf{H} est donc $(2ns) \times m$. L'autre résultat important à la fin de cette boucle sur les nœuds est que, parmi les m degrés de liberté qui forment le vecteur Δ , $(2ns)$ degrés de liberté, notés Δ_e , ne sont pas indépendants et peuvent être déduits des $(m - 2ns)$ degrés de liberté restants, qu'on note Δ_k . L'équation (4-58) peut alors être partitionnée comme suit :

$$\mathbf{H} \Delta = [\mathbf{H}_e \quad \mathbf{H}_k] \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-59)$$

Il s'ensuit alors que :

$$\Delta_e = -\mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{H}_k \Delta_k = \mathbf{C}_{ek} \Delta_k \quad (4-60)$$

Ayant la matrice \mathbf{C}_{ek} , le reste de la procédure de calcul de \mathbf{R}_{GD} reste identique à ce qui est présenté aux paragraphes (4.4.3) et (4.4.4). L'avantage de cette nouvelle approche [59] réside dans le fait qu'elle est pensée pour définir l'espace GD des sections prismatiques ramifiées et/ou présentant des contours fermés. Il faut

toutefois noter que pour compléter la procédure cFSM, il reste à séparer \mathbf{R}_{GD} en deux matrices \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D . La solution proposée pour traiter le cas des sections ayant des contours fermés est exposée dans ce qui suit.

4.6 Décomposition des modes de flambement de l'espace GD

La matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} seule n'est pas en mesure de séparer les deux espaces G et D . Adany et Schafer [8] ont introduit une autre transformation à l'intérieur de l'espace GD . Leur idée est de chercher une base, qui peut être utilisée pour décrire toute déformation \mathbf{V}_m de cet espace, et dans laquelle les bases vectorielles des sous espaces G et D sont séparées ; elles sont notées \mathbf{H}_G et \mathbf{H}_D , respectivement.. Ainsi, on a :

$$\mathbf{V}_m = [\mathbf{H}_G \quad \mathbf{H}_D] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_G \\ \mathbf{d}_D \end{Bmatrix} \quad (4-61)$$

Où \mathbf{d}_G et \mathbf{d}_D sont les coordonnées de \mathbf{V}_m dans cette nouvelle base.

Un système de vecteurs de base \mathbf{H}_G pour les sections ouvertes est défini selon Adany et Schafer [8] par les 4 vecteurs de degrés de liberté de gauchissement montrés dans la Figure 4-5. Ces fonctions de gauchissement correspondent naturellement aux quatre modes globaux : le mode axial, les deux modes flexionnels et le mode de torsion.

Le cas des sections à contours fermés est cependant particulier dans le sens où leur mode de torsion pure ne peut pas se produire sans engendrer des contraintes de cisaillement c'est-à-dire sans distorsions membranaires. Le mode de torsion de ce type de sections ne répond donc pas à la définition de l'espace GD retenue dans cette thèse. Selon la procédure cFSM [8], il sera alors classé dans l'espace O , qui comprend tous les modes autres que GD et L . Ainsi, la base \mathbf{H}_G des sections à contours fermés sera composée de seulement 3 vecteurs de déplacements de gauchissement qui correspondent au mode axial et aux deux modes flexionnels (voir Figure 4-6).

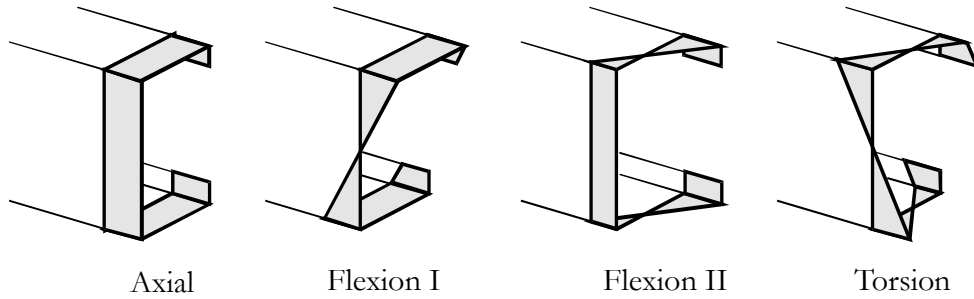


Figure 4-5 Distribution des déplacements de gauchissement pour les modes Globaux des sections ouvertes

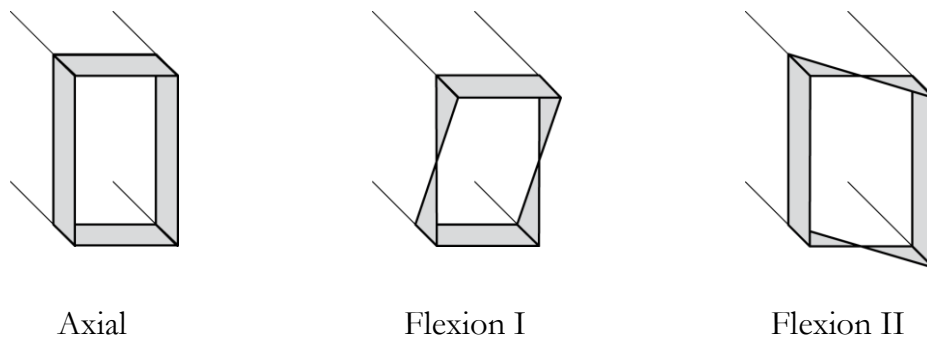


Figure 4-6 Distribution des déplacements de gauchissement pour les modes globaux des sections fermées.

Les vecteurs \mathbf{H}_D qui définissent l'espace D sont quant à eux générés de manière à compléter l'espace GD en utilisant la condition d'orthogonalité par rapport à \mathbf{H}_G [8]. Enfin et pour compléter l'exposé de la cFSM, la base de l'espace GD doit être tronquée à \mathbf{H}_D ou à \mathbf{H}_G si l'on veut cibler uniquement les modes dans l'espace D ou dans l'espace G . Les matrices de contraintes \mathbf{R}_D et \mathbf{R}_G sont alors définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_D &= \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_D \\ \mathbf{R}_G &= \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_G \end{aligned} \tag{4-62}$$

Ayant \mathbf{R}_D ou \mathbf{R}_G , les charges et les modes de flambement de l'espace D ou de l'espace G peuvent être obtenus à partir de problèmes aux valeurs propres réduits tel que défini par l'équation (4-19).

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les principes fondamentaux de la méthode des bandes finies et ceux de la méthode des bandes finies contrainte sont rappelés. Le calcul de la matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} qui définit l'espace combiné formé des modes de flambement globaux et de distorsion est ensuite abordé. Dans ce travail, on utilise uniquement deux hypothèses pour définir l'espace GD : (i) flexion cylindrique des parois et, (ii) déformations transversales et distorsions membranaires négligeables. On a alors formulé deux approches qui sont deux façons de mettre en œuvre cette dernière hypothèse.

La première méthode est une modification de celle initiée par Djafour [9]. Les contraintes apportées par chaque bande y sont traitées séquentiellement au moyen d'une série de multiplications de matrices de transformation. La nouveauté dans ce travail réside dans le fait que la procédure de réduction des degrés de libertés est prise en charge dès cette phase de multiplication matricielle. Il en résulte alors une meilleure cohérence théorique de l'approche de Djafour mais cela n'a pas permis de résoudre le cas des sections ramifiées.

La principale contribution de cette thèse est le développement d'une nouvelle stratégie pour implémenter l'hypothèse 2 sur les déformations membranaires. Elle repose sur une boucle sur les nœuds plutôt que sur les bandes. L'algorithme pour écrire les équations de contrainte et choisir les degrés de liberté à réduire dépend alors du nombre de bandes connectées au nœud courant ainsi que de leurs orientations. Les différentes situations sont résumées dans le Tableau 1. L'exposé de cette nouvelle cFSM est ensuite complété par une discussion autour de la séparation de la matrice \mathbf{R}_{GD} en deux matrices \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D dans le cas des sections présentant des contours fermés.

Dans le chapitre suivant, ces deux approches vont être testées et validées. On commencera par revalider la nouvelle formulation de dérivation de la matrice \mathbf{R}_{GD} selon la méthode de Djafour modifiée pour les sections ouvertes et fermées à contours simples. Ensuite, on traitera des exemples de sections prismatiques

branchées et/ou présentant des parties fermées par la nouvelle approche. Les exemples de sections traités se veulent représentatifs des différentes situations envisageables.

Chapitre 5

Validations et applications

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les principes fondamentaux de la cFSM tels que développés par Adany et Schafer ont été rappelés et ont été suivis d'un exposé des deux contributions réalisées dans ce travail. La première est une modification du travail originel réalisé par de l'équipe de Tlemcen [9]. Elle y apporte quelques améliorations pour corriger certains aspects théoriques. Ces modifications ont entraîné une reprogrammation de certaines procédures de la cFSM pour permettre l'analyse des sections fermées. Il faut néanmoins signaler que cette première approche est restée limitée aux sections non ramifiées.

L'extension de la cFSM à l'analyse des sections prismatiques ramifiées – ouvertes avec branches, fermées avec branches ou possédant des branches et des parties fermées – constitue l'objectif majeur de cette recherche. Cela a nécessité le développement d'une stratégie originale et une nouvelle implémentation numérique de la cFSM. Ce chapitre a pour but de valider les procédures proposées et d'en montrer les possibilités à travers quelques exemples qui se veulent représentatifs des différentes situations possibles.

5.2 La cFSM pour les sections non ramifiées

Afin de valider l'apport de cette thèse à la cFSM développée par Djafour [9] pour étudier les sections ouvertes et fermées non ramifiées, quelques exemples sont envisagés. Des calculs de matrices \mathbf{R}_{GD} sont effectués et les résultats comparés à des travaux antérieurs. Ensuite, des sections creuses sont étudiées pour prouver l'aptitude de l'algorithme développé à analyser des sections fermées simples.

5.2.1 Calculs de la matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD}

5.2.1.1 Section transversale ouverte

Le premier exemple est une section ouverte de forme symétrique en sigma qui a déjà été traité par Adany et Schafer [16]. Ses dimensions sont présentées sur la Figure 5-1. La longueur de l'élément est $a = 650 \text{ mm}$, le module d'élasticité est $E = 210 \text{ GPa}$, et le coefficient de Poisson est $\nu = 0,3$. Toutes les dimensions sont à la ligne moyenne de la section transversale.

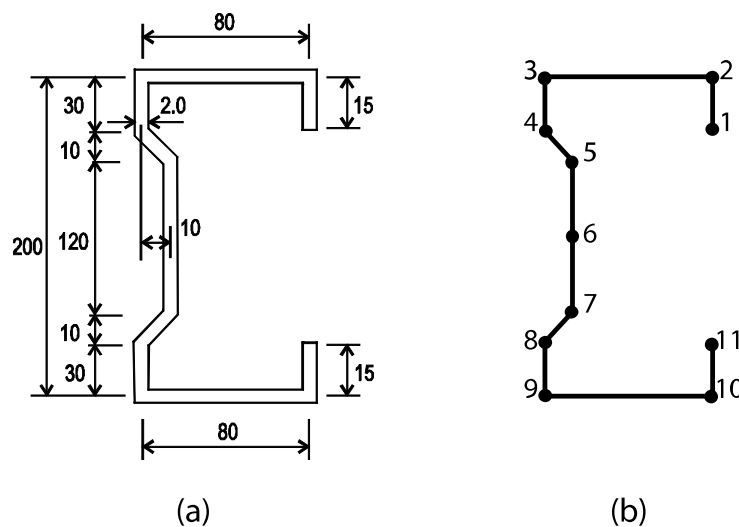


Figure 5-1 (a) Section transversale Sigma. (b) Son maillage FSM

Le maillage FSM de la Figure 5-1 (b) utilise 10 bandes et 11 nœuds ce qui donnent un total de 44 degrés de liberté. Le nœud 6 est un nœud secondaire car il est commun à deux bandes coplanaires. Ainsi, le modèle dispose de 10 nœuds principaux : du nœud 1 au nœud 5, et du nœud 7 au nœud 11. La matrice \mathbf{R}_{GD} , qui

est calculée en utilisant l'équation (4-52), est donnée par la Figure 5-2. Elle est identique à celle calculée par le logiciel CUF5M [23] qui est basé sur une procédure beaucoup plus complexe [7].

U ₁	3.5729	-6.8220	8.2479	-10.2685	4.8912	0.4032	0.0251	-0.0508	0.0012	-0.0002
	0	-2.5863	2.5863	0	0	0	0	0	0	0
	0	-2.5863	2.5863	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	-6.8967	27.5869	-20.6901	0	0	0	0	0
	0	0	0	20.6901	-22.4143	1.7242	0	0	0	0
	0.0553	-0.2855	12.1435	-3.4102	-8.5030	-8.5030	-3.4102	12.1435	-0.2855	0.0553
	0	0	0	0	1.7242	-22.4143	20.6901	0	0	0
	0	0	0	0	0	-20.6901	27.5869	-6.8967	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	2.5863	-2.5863	0
	0	0	0	0	0	0	0	2.5863	-2.5863	0
	U ₁₁	-0.0002	0.0012	-0.0508	0.0251	0.4032	4.8912	-10.2685	8.2479	-6.8220
V ₁	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
V ₁₁	-13.793	13.793	0	0	0	0	0	0	0	0
W ₁	-13.793	13.793	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	6.897	-6.897	0	0	0	0	0	0
-	0	0	6.897	-6.897	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	1.724	-1.724	0	0	0	0
-	0	0	0	0	1.724	-1.724	0	0	0	0
-	0	0	0	0	1.724	-1.724	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	6.897	-6.897	0	0
-	0	0	0	0	0	0	6.897	-6.897	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0	-13.793	13.793
-	0	0	0	0	0	0	0	0	-13.793	13.793
W ₁₁	-0.238196	0.282380	-0.377441	0.684567	-0.326081	-0.026882	-0.001674	0.003389	-0.000080	0.000015
Θ ₁	-0.238196	0.282380	-0.377441	0.684567	-0.326081	-0.026882	-0.001674	0.003389	-0.000080	0.000015
-	-0.040862	-0.047507	0.496254	-1.110508	0.652161	0.053763	0.003347	-0.006778	0.000159	-0.000031
-	0.007723	-0.039904	-0.371846	0.135482	0.397851	-0.137769	-0.008577	0.017369	-0.000408	0.000079
-	-0.003466	0.017908	-0.761647	0.893357	0.014366	-0.137171	0.023662	-0.047918	0.001127	-0.000218
-	0.000812	-0.004195	0.178432	0.041203	-0.339615	0.339615	-0.041203	-0.178432	0.004195	-0.000812
-	0.000218	-0.001127	0.047918	-0.023662	0.137171	-0.014366	-0.893357	0.761647	-0.017908	0.003466
-	-0.000079	0.000408	-0.017369	0.008577	0.137769	-0.397851	-0.135482	0.371846	0.039904	-0.007723
-	0.000031	-0.000159	0.006778	-0.003347	-0.053763	-0.652161	1.110508	-0.496254	0.047507	0.040862
-	-0.000015	0.000080	-0.003389	0.001674	0.026882	0.326081	-0.684567	0.377441	-0.282380	0.238196
Θ ₁₁	-0.000015	0.000080	-0.003389	0.001674	0.026882	0.326081	-0.684567	0.377441	-0.282380	0.238196

Figure 5-2 La matrice de contraintes R_{GD} de la section Sigma

5.2.1.2 Section transversales fermée

Pour prouver l'efficacité de la nouvelle cFSM dans l'analyse des sections fermées, la section rectangulaire creuse de la Figure 5-3 est étudiée. C'est une section de largeur 60 mm, de hauteur 100 mm et d'épaisseur 2 mm. Cet exemple a été analysé par les chercheurs Gonçalves et Camotim [60] en utilisant la GBT. Les caractéristiques du matériau sont celles d'un alliage d'acier inoxydable de module de

Young E égal à 200 MPa , de coefficient de Poisson ν de valeur 0.3 et de limite d'élasticité σ_y égale à 300 MPa .

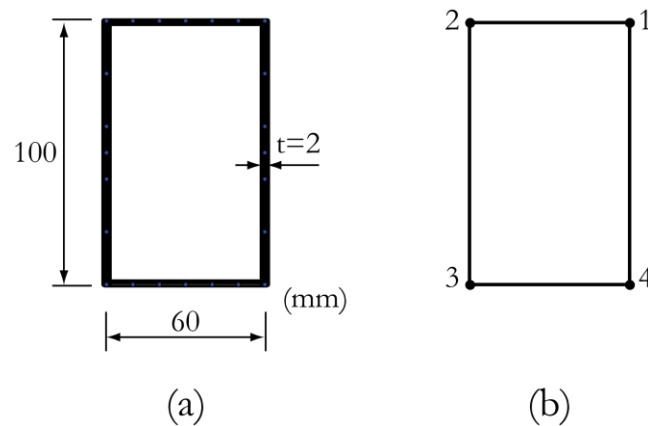


Figure 5-3 (a) Section transversale rectangulaire creuse. (b) Maillage FSM pour calculer \mathbf{R}_{GD}

Afin de présenter une matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} avec des dimensions raisonnables, un modèle FSM grossier est d'abord construit. Comme le montre la Figure 5-3 (b), il utilise seulement 4 bandes et 4 nœuds principaux, ce qui se traduit par 16 DDL. Ainsi, la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} correspondante est de dimension (16×4) , et elle est donnée, par la Figure 5-4, pour un élément de longueur a égale à 650 mm . Il faut signaler que c'est la première matrice \mathbf{R}_{GD} jamais publiée pour une section fermée [58].

Pour valider la première procédure développée dans ce travail, l'unique solution est de continuer la procédure cFSM [8] jusqu'à la décomposition modale et comparer les nouveaux résultats à ceux obtenus par la FSM et la GBT. Pour l'exemple de la Figure 5-3 (a), une modélisation FSM plus fine est utilisée, c'est-à-dire, que chaque élément plat est divisé en quatre bandes. Ce maillage utilise 16 bandes et 16 nœuds. Il en résulte donc 64 DDL. Les nœuds d'angle sont évidemment les 4 nœuds principaux et la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} correspondante à une dimension de (64×4) .

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ - \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ - \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ - \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3.44839 & 3.44839 & 0 & 0 \\ -3.44839 & 3.44839 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.44839 & -3.44839 \\ 0 & 0 & 3.44839 & -3.44839 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 2.06901 & 0 & 0 & -2.06901 \\ 0 & 2.06901 & -2.06901 & 0 \\ 0 & 2.06901 & -2.06901 & 0 \\ 2.06901 & 0 & 0 & -2.06901 \\ - & - & - & - \\ 0.00862 & -0.00862 & 0.00862 & -0.00862 \\ 0.00862 & -0.00862 & 0.00862 & -0.00862 \\ 0.00862 & -0.00862 & 0.00862 & -0.00862 \\ 0.00862 & -0.00862 & 0.00862 & -0.00862 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

Figure 5-4 Matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} de la section rectangulaire creuse.

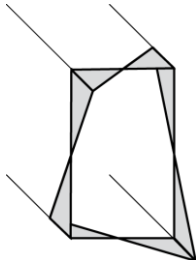
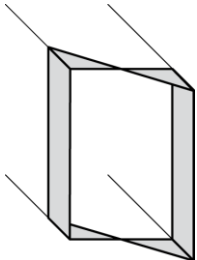
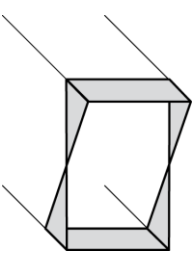
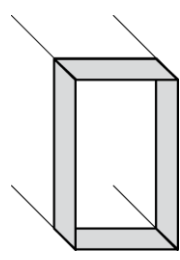

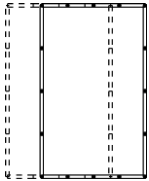
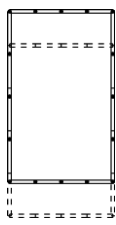
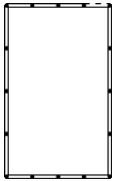
En utilisant la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} et conformément à la procédure cFSM, les modes et les charges de flambement dans l'espace GD peuvent être obtenus à partir du problème réduit de valeur propre défini par l'équation (4-20). On remarque que pour les deux modèles, grossier et fin, toutes les matrices de l'équation (4-20) sont de dimension (4×4) . Ceci signifie que la section creuse dispose de 4 modes dans l'espace GD , ce qui est le nombre de nœuds principaux. Ainsi, la solution de l'équation (4-20) offre 4 valeurs propres qui correspondent aux charges de flambement, et les vecteurs propres correspondants sont les modes de flambement, dont les composantes sont les déformations des 4 nœuds principaux. C'est ce qu'on appelle la distribution de gauchissement du mode de flambement. La distribution transversale de la déformée peut être déduite en utilisant l'équation (4-21).

Comme exemple d'analyse de flambement ciblant l'espace GD , la section creuse va être analysée sous une force de compression uniforme et pour une longueur a égale à 200 mm . Le Tableau 2 donne les valeurs calculées des 4 charges de

flambement et les modes correspondants, qui sont représentés graphiquement par leurs distributions de gauchissement et transversale.

Il est évident que les distributions de gauchissement calculées sont toutes les possibilités d'interpolations linéaires entre les degrés de liberté de gauchissement des 4 nœuds principaux. En plus, leurs distributions transversales indiquent que ces modes sont : (i) le mode de distorsion, (ii) le mode de flexion suivant l'axe principal mineur, (iii) le mode de flexion suivant l'axe principal majeur, et (iv) le mode axial. Il est important de noter que le mode de torsion, avec une section transversale non déformée, ne figure pas parmi les résultats dans l'espace GD de la section rectangulaire creuse.

Tableau 2 Charges et modes de flambement de l'espace GD de la section rectangulaire creuse.

Mode GD	#1	#2	#3	#4
P_{cr}/P_y	51.865	104.626	193.873	732.601
Modes de flambement : <i>Distribution de gauchissement</i>				
Modes de flambement : <i>Distribution transversale</i>				
Description	Distorsion	Flexion / Axe mineur	Flexion / Axe majeur	Axial

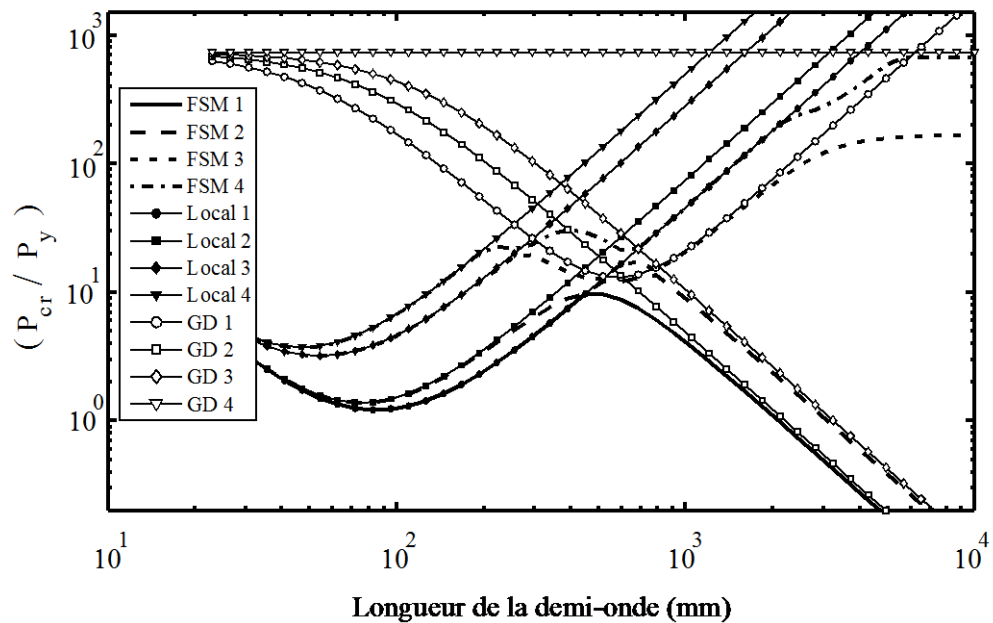


Figure 5-5 Les courbes de flambement des 4 premiers modes.

Ensuite, la longueur de l'élément est variée de 20 mm à $10\,000 \text{ mm}$. Les résultats sont présentés dans la Figure 5-5 qui donne les courbes de flambement et dans la Figure 5-6 qui représente les modes d'instabilité.

Les courbes FSM 1 à FSM 4 de la Figure 5-5 montrent les charges d'instabilité associées aux quatre premiers modes obtenues par résolution de l'équation (4-15). Les 8 autres courbes de la Figure 5-5 sont obtenues à partir de l'équation (4-20) lors de la recherche des quatre premiers modes pour les classes de flambement L et GD . Les courbes de la classe GD correspondent aux modes de distorsion, GD 1, de flexion suivant l'axe principal mineur, GD 2, de flexion suivant l'axe principal majeur, GD 3, et le mode axial, GD 4, tels que montrés par la Figure 5-6. Les courbes Local 1 à Local 4 correspondent à des modes de voilement des parois et ont été ciblés en utilisant une matrice de contraintes \mathbf{R}_L spécifique comme montré dans l'article d'Adany et Schafer [8].

Il est évident que la cFSM a décomposé avec succès la solution FSM de la section rectangulaire creuse en modes purs L et en modes combinés GD . Cependant, on remarque que, pour les longueurs supérieures à 4 m , la courbe FSM 3 donne les

charges de flambement du mode de torsion qui ne fait pas partie de l'espace combiné GD conformément à ce qui a été dit précédemment. En plus, les courbes Local 1, GD 2 et GD 3 données par la Figure 5-5 sont presque les mêmes que celles obtenues par Gonçalves et Camotim [60] en utilisant la GBT.

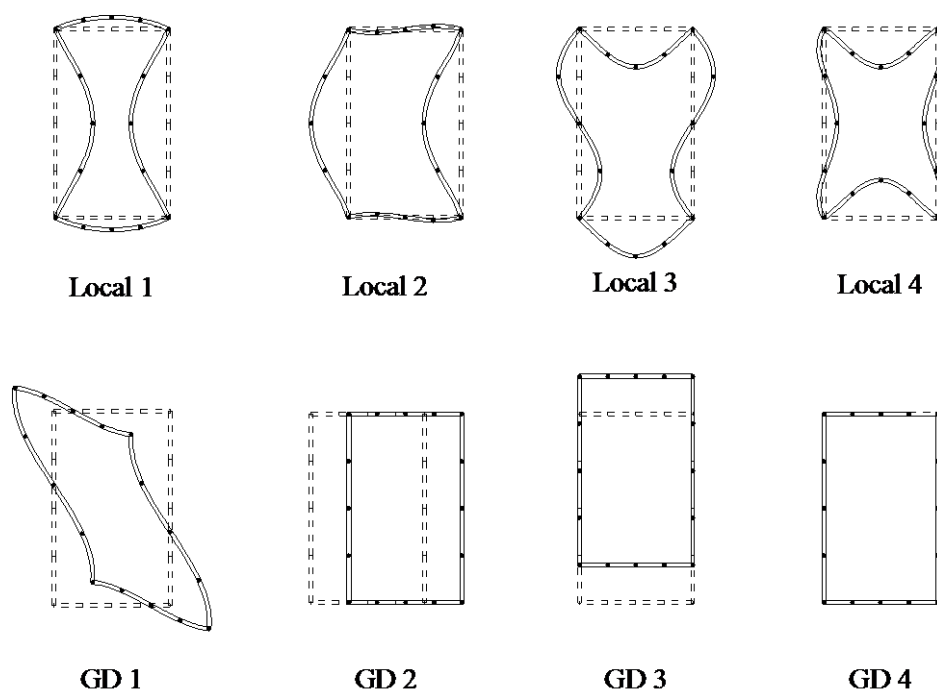


Figure 5-6 Les différents modes d'instabilité de la section transversale rectangulaire creuse.

5.2.2 Décomposition des modes de flambement de sections creuses avec raidisseurs intermédiaires

Dans cette partie, deux autres sections creuses sont considérées. Leurs formes sont quasiment des rectangles de largeur 140 mm et de hauteur 200 mm , avec des raidisseurs triangulaires à mi- portée des quatre parois de la section. L'épaisseur de la tôle est de $1,5 \text{ mm}$ et la dimension de chaque raidisseur parallèlement à la paroi est de 20 mm . Les deux exemples sont alors presque identiques et la seule différence est que les profondeurs des raidisseurs perpendiculairement aux parois sont de 5 mm et 10 mm , respectivement, comme le montre la Figure 5-7. Les données du matériau sont $\frac{E}{\sigma_y} = 590$ et $\nu = 0.3$

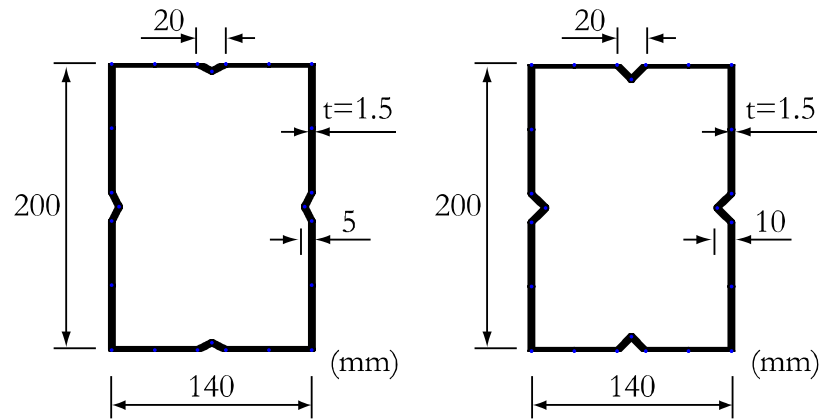


Figure 5-7 Sections transversales creuses avec raidisseurs intermédiaires

Ces éléments de structure sont chargés par des forces de compression uniformes. Le maillage des sections transversales comporte 24 nœuds et 24 bandes : 4 bandes par paroi et 2 bandes par raidisseur. Ces modèles comportent 16 nœuds principaux et 8 nœuds secondaires. Ce qui signifie que la matrice de contraintes de l'espace GD , \mathbf{R}_{GD} est de dimension (96×16)

Pour cibler uniquement les modes de l'espace D ou ceux de l'espace G , l'équation (4-62) est utilisée pour trouver les matrices de contraintes \mathbf{R}_D et \mathbf{R}_G . La dimension de \mathbf{H}_G est (16×4) et celle de \mathbf{H}_D est (16×12) . Ayant \mathbf{R}_D et selon la procédure présentée dans le chapitre 4, les charges et les modes de flambement de l'espace D peuvent être obtenus à partir du problème aux valeurs propres réduit défini par l'équation (4-20).

La Figure 5-8 donne les charges critiques de flambement en fonction de la longueur de la demi-onde pour la section rectangulaire creuse ayant des raidisseurs de profondeur 5 mm . Les cinq courbes représentées correspondent : (i) à la courbe résultant d'une analyse par la FSM, (ii) au premier mode local pur (Local), (iii) au premier mode distorsionnel pur (Dist.), (iv) au premier mode global pur (Global 1) et (v) au second mode global pur (Global 2). Les quatre déformées qui correspondent aux modes purs sont dessinées dans la Figure 5-9

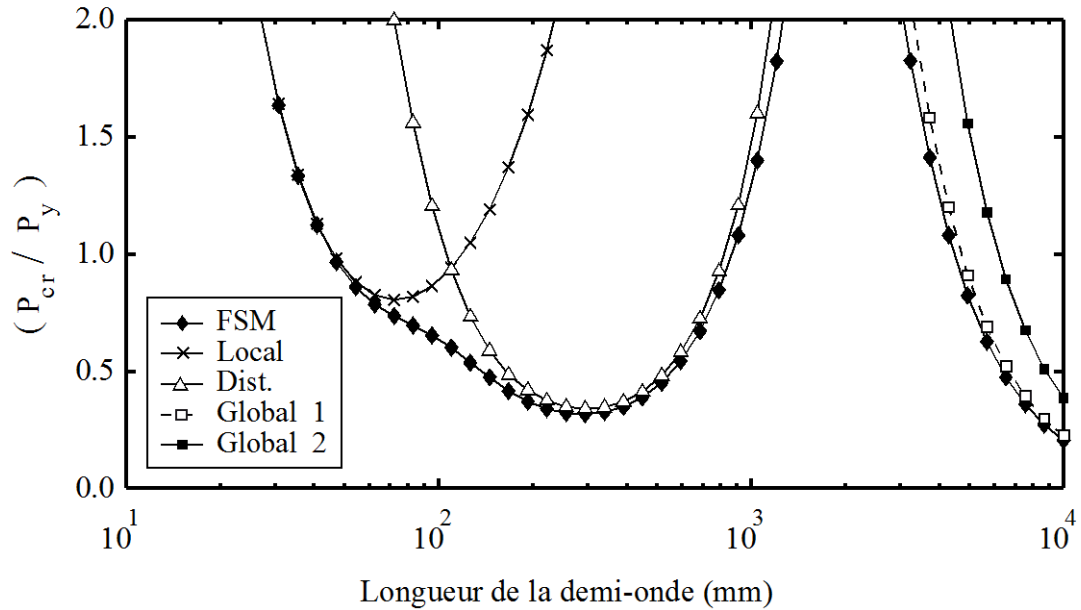


Figure 5-8 Courbe de flambement et sa décomposition en modes purs – cas de la section rectangulaire avec raidisseurs intermédiaires de profondeur 5 mm

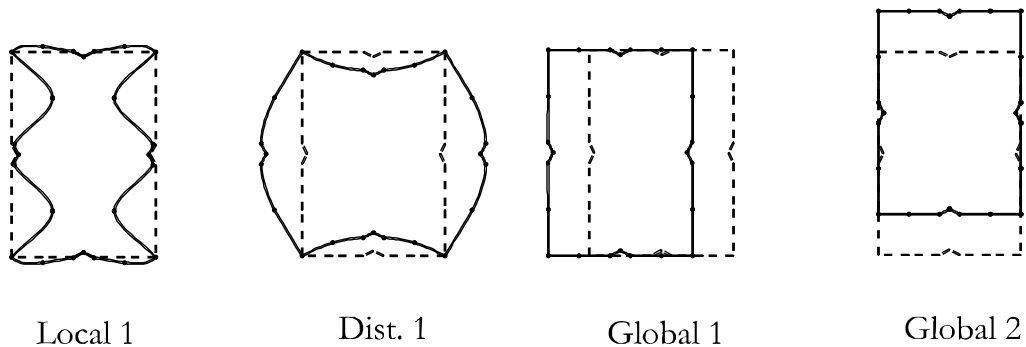


Figure 5-9 Modes d'instabilité de la section rectangulaire creuse avec raidisseurs de profondeur 5 mm

La courbe du mode local pur (Local 1) coïncide avec la solution obtenue par la FSM pour des colonnes de faibles longueurs, et permet de mettre en évidence le précieux minimum local qui n'apparaît pas dans la solution de la FSM.

En plus, pour les longueurs d'instabilité intermédiaires puis pour les grandes longueurs d'instabilité, la courbe de la FSM concorde avec la courbe du mode distorsionnel pur (Dist) et avec la courbe du premier mode global pur (Global 1), respectivement. Ces résultats valident la procédure proposée pour la détermination des modes purs d'instabilité des sections fermées.

La Figure 5-10 donne les courbes des charges critiques calculées par la FSM des 3 premiers modes de la section rectangulaire creuse ayant des raidisseurs de profondeur 10 mm.

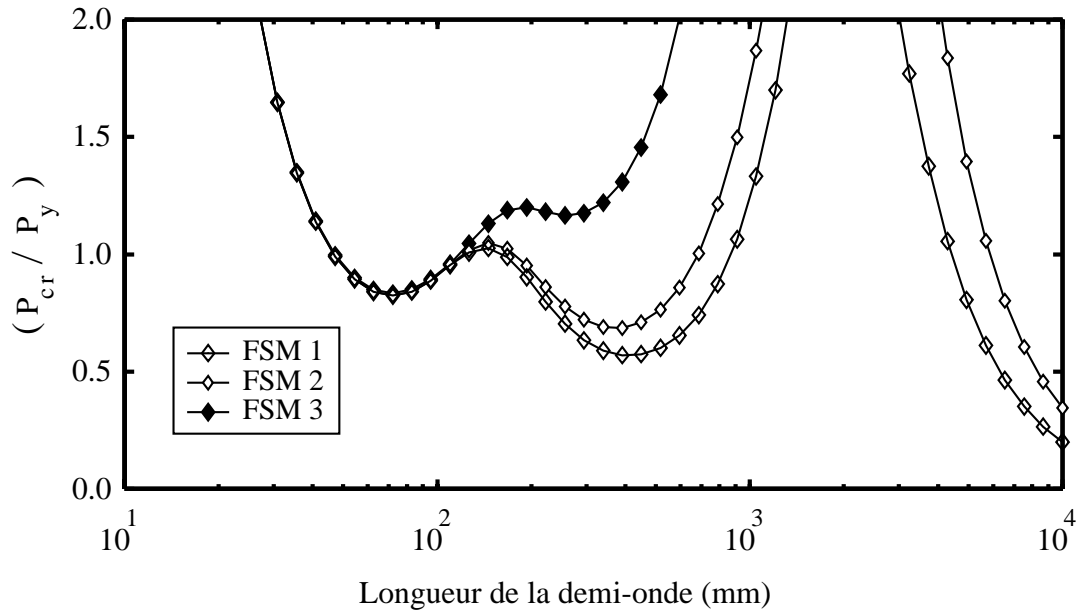


Figure 5-10 Les charges critiques des trois premiers modes de la section rectangulaire creuse avec raidisseurs de profondeur 10 mm

Chacune de ces courbes est ensuite décomposée en courbes de modes purs. Au premier mode de la FSM, (FSM 1), correspondent le premier mode local pur (Local 1), le premier mode distorsionnel pur (Dist 1) et le premier mode global pur (Global 1). Ce premier résultat de décomposition est montré par la Figure 5-11.

De même, la courbe du deuxième mode FSM, (FSM 2), est décomposée en 3 courbes d'instabilités pures, (Local 2), (Dist 2) et (Global 2), et le résultat est donné dans la Figure 5-12.

La courbe du troisième mode (FSM 3) est également décomposée en 3 courbes de modes purs comme le montre la Figure 5-13. Il n'existe donc pas de troisième mode global, mais uniquement le troisième mode local pur (Local 3) et le troisième mode distorsionnel pur (Dist 3). Le troisième mode global n'est pas représenté car les valeurs correspondantes sont très élevées.

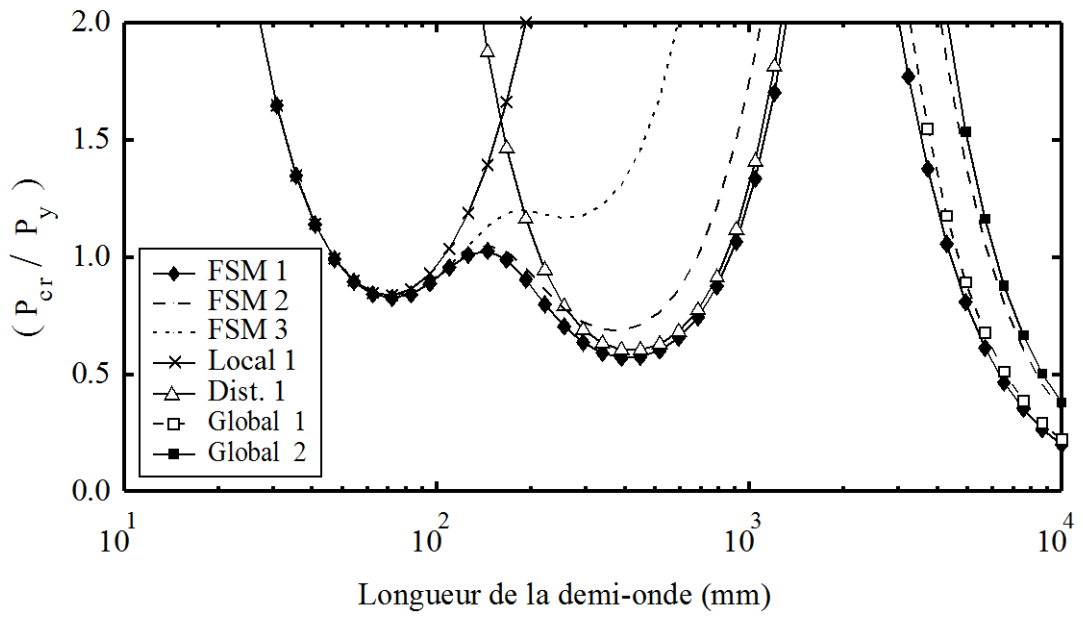


Figure 5-11 Courbe de flambement du premier mode et sa décomposition en modes purs – cas de la section rectangulaire avec raidisseurs intermédiaires de profondeur 10 mm.

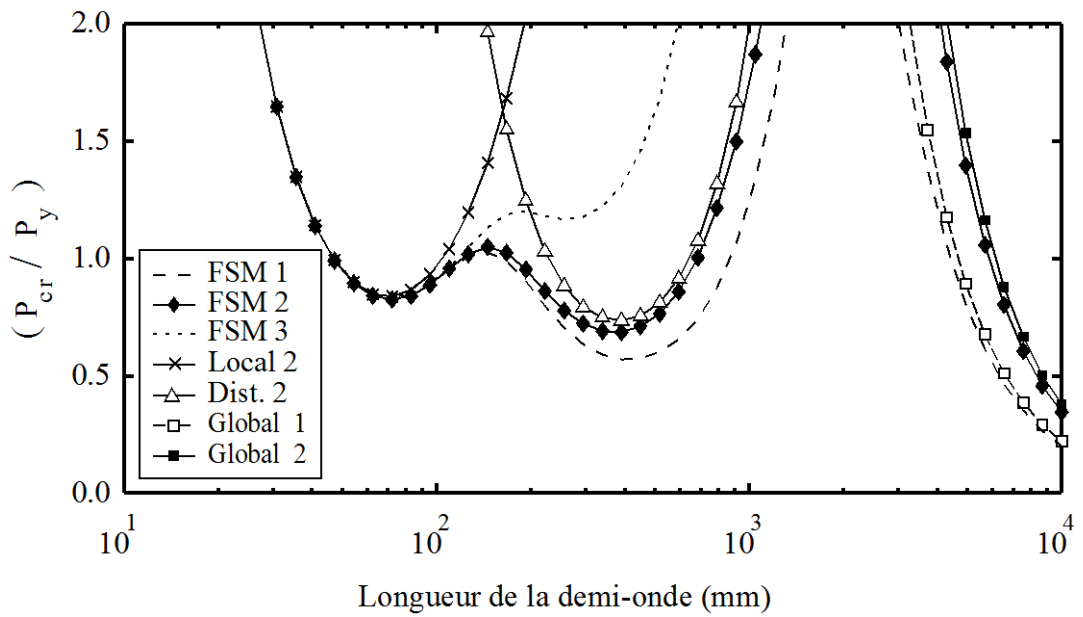


Figure 5-12. Courbe de flambement du second mode et sa décomposition en modes purs – cas de la section rectangulaire avec raidisseurs intermédiaires de profondeur 10 mm.

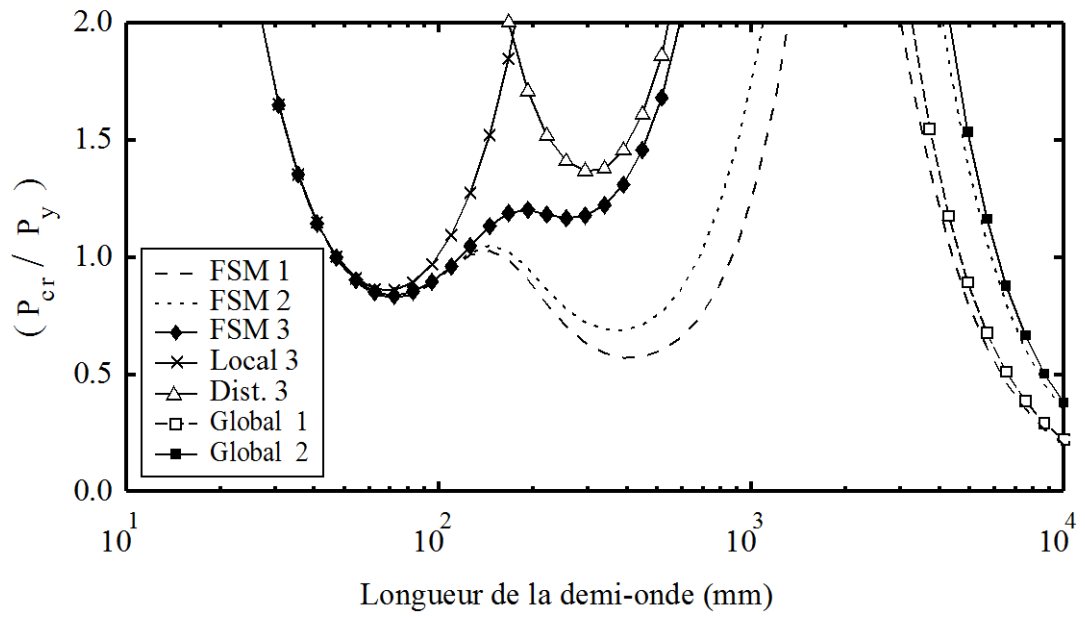


Figure 5-13. Courbe de flambement du troisième mode et sa décomposition en modes purs – cas de la section rectangulaire avec raidisseurs intermédiaires de profondeur 10 mm

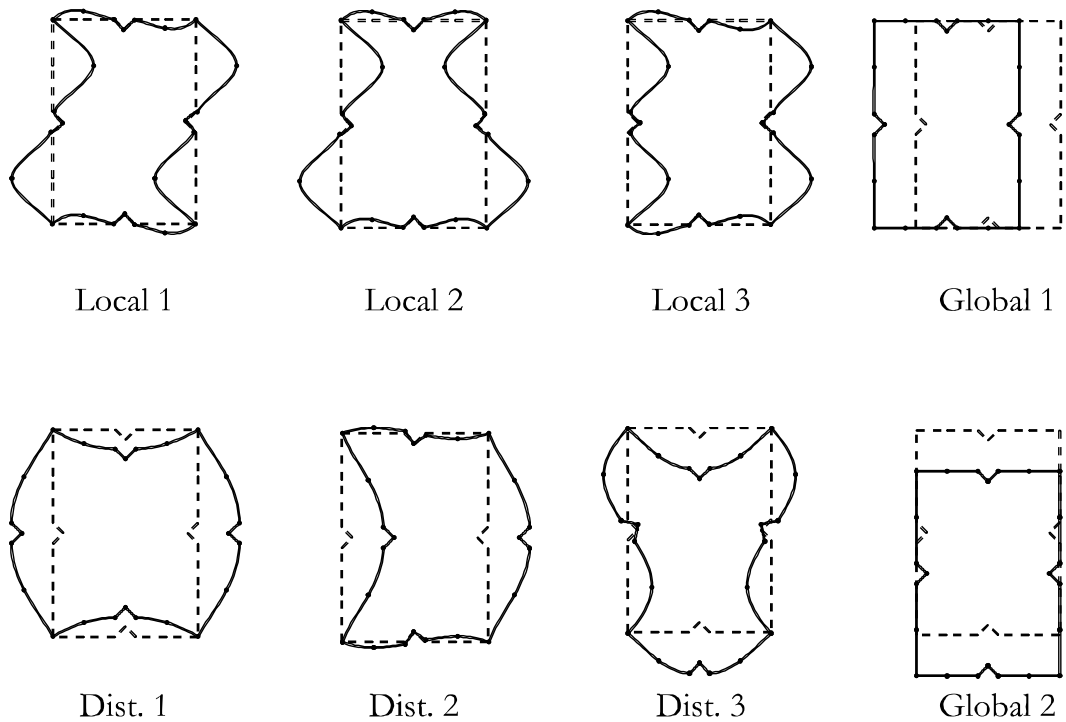


Figure 5-14. Modes d'instabilité de la section rectangulaire creuse avec raidisseurs intermédiaires

Les déformées correspondant aux divers modes purs d'instabilité trouvés dans le cas de la section rectangulaire creuse avec raidisseurs de profondeur 10 mm sont représentées dans la Figure 5-14.

La simple observation des 3 formes des modes de flambement purs locaux permet de comprendre pourquoi les courbes correspondantes sont presque les mêmes. Ces résultats valident la méthode proposée pour la décomposition des modes de flambement des sections à parois minces fermés dans le cas des modes supérieurs.

5.3 La cFSM pour les sections ramifiées.

Afin de valider et d'illustrer l'application et les capacités de la méthode développée dans le cas des sections ramifiées, trois exemples sont considérés : le premier est une section ouverte ramifiée, le second est une section fermée ramifiée et le dernier est une section avec des branches et des parties fermées. Tous ces exemples sont des colonnes simplement appuyées et chargées par des forces de compression uniformes. Elles sont supposées flamber en une demi-onde sinusoïdale.

Le module d'élasticité E vaut 210 GPa , et le coefficient de Poisson ν est égal à $0,3$. Pour des fins de validation, tous les résultats sont comparés avec ceux obtenus par des analyses par la méthode des bandes finies, FSM.

5.3.1 Décomposition des modes de flambement d'une section ouverte ramifiée

Le premier exemple est une simple colonne à section asymétrique en forme de E qui a été analysée par Dinis et al [5] en utilisant la GBT. La section est dessinée à la Figure 5-15 (a) et toutes les dimensions sont données à la ligne-moyenne de la section.

Le maillage FSM montré par la Figure 5-15 (b) utilise 19 bandes et 20 nœuds, ce qui donne un total de 80 degrés de liberté. Onze nœuds sont des nœuds secondaires car ils sont communs à deux bandes coplanaires. Un nœud est relié à

trois bandes ; il s'agit donc d'une section ramifiée. Le modèle a 8 nœuds principaux et la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} correspondante a une dimension de (80×8) . Cela signifie que cette section a 8 modes dans l'espace GD qui peuvent être obtenus à partir du problème réduit aux valeurs propres défini par l'équation (4-20).

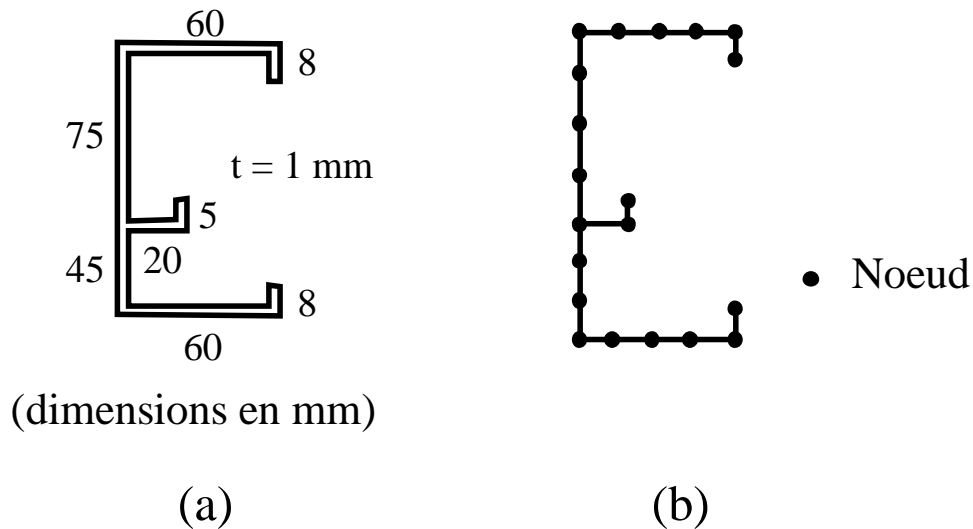


Figure 5-15 (a) Section transversale asymétrique en E et (b) sa modélisation FSM

Des analyses élastiques de flambement sont effectuées en faisant varier la longueur de la demi-onde de l'élément de 20 mm à $10\,000 \text{ mm}$. Les résultats obtenus sont montrés par Figure 5-16 et Figure 5-17.

Les courbes (FSM 1) à (FSM 4) de la Figure 5-16 donnent les charges de bifurcation associées aux quatre premiers modes obtenus par la FSM. Les courbes (Local 1) à (Local 4) correspondent à des modes de voilement de plaques et ont été ciblées en utilisant une matrice de contraintes spécifiques \mathbf{R}_L comme montré dans la référence [8]. Les 4 autres courbes de la Figure 5-16, (GD 1) à (GD 4), sont les quatre premiers modes fournis par la cFSM lorsque l'on cible les modes de flambement de la classe GD . Par ailleurs, les courbes (Local 1) et (GD 1) données dans la Figure 5-16 sont quasiment les mêmes que celles obtenues par Dinis et al [5] en utilisant la GBT.

La Figure 5-17 présente les déformées correspondant aux modes purs de flambement. Il est évident que le cFSM a réussi à décomposer la solution FSM de la section en E en modes purs L et GD .

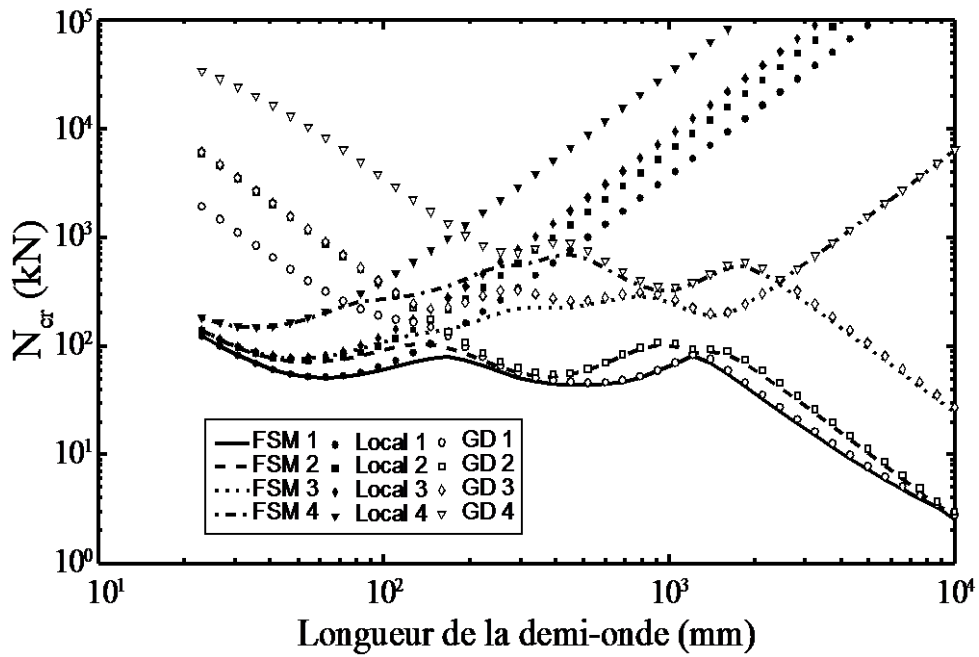


Figure 5-16 Les courbes de flambement FSM des quatre premiers modes de la colonne à section asymétrique en E et leurs décompositions en modes purs *GD* et *L*

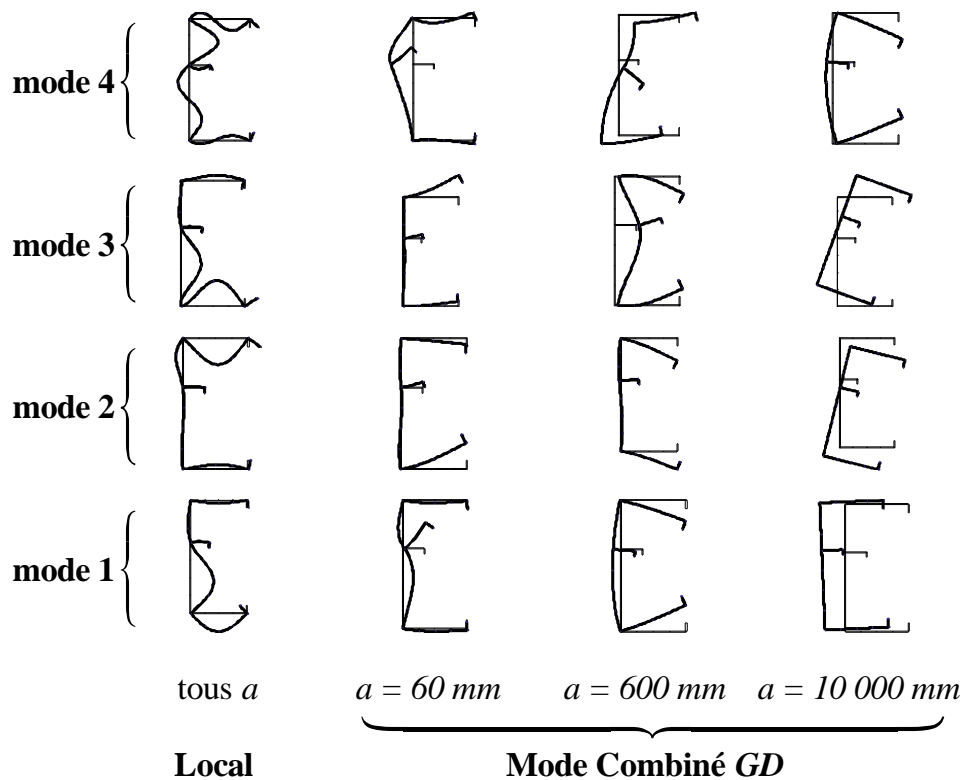


Figure 5-17 Les déformées des modes purs de flambement *GD* et *L* de la section en E

5.3.2 Décomposition des modes de flambement d'une section fermée ramifiée

L'exemple suivant est une colonne à section fermée ramifiée constituée de plusieurs cellules. Sa section est asymétrique et composée de 3 cellules impliquant 10 parois planes comme dessiné dans la Figure 5-18 (a). Le maillage de la section transversale (Figure 5-18 b) utilise 38 nœuds et 40 bandes, soit 4 bandes par paroi plane. On note qu'il y a 30 nœuds qui sont communs à deux, et seulement deux, bandes coplanaires. En plus, parmi les huit nœuds restants, deux nœuds sont communs à trois bandes et un nœud est relié à quatre bandes. Ceci signifie, selon la procédure résumée dans le Tableau 1, qu'il n'y a que 4 nœuds avec des degrés de liberté de gauchissement efficaces. Ainsi, la dimension de la matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} est de (152×4) et par conséquent, il y a 4 modes dans l'espace combiné GD .

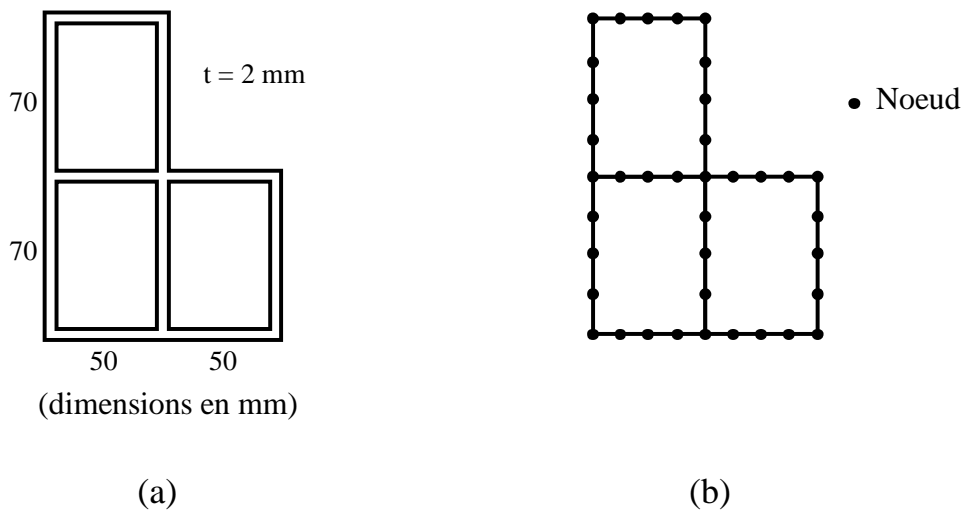


Figure 5-18 (a) Section transversale asymétrique à 3 cellules et (b) sa modélisation FSM.

S'agissant d'une section transversale fermée avec quatre degrés de liberté de gauchissement efficaces, et conformément au paragraphe 4.6 sur la Décomposition des modes de flambement de l'espace GD , la dimension de la matrice \mathbf{H}_G est (4×3) et celle de \mathbf{H}_D est (4×1) . Cette section à 3 cellules n'a donc qu'un seul mode distorsionnel selon les définitions utilisées dans cette thèse.

La Figure 5-19 donne les charges de flambement de cette colonne en fonction de la longueur de la demi-onde. Douze courbes y sont représentées, elles

correspondent : (i) aux quatre premiers modes de flambement résultant de l'analyse par la FSM, (FSM 1) à (FSM 4) ; (ii) aux quatre premiers modes locaux purs, (Local 1) à (Local 4) ; (iii) à l'unique mode distorsionnel pur (Dist 1) et (iv) aux trois modes globaux purs, (Global 1) à (Global 3). Les déformées correspondant aux différents modes de flambement sont représentées dans la Figure 5-20. Il est clair que les enveloppes des courbes de flambement des modes purs, calculées en utilisant la méthode mise au point dans cette thèse, coïncident avec les courbes obtenues par la FSM pour toutes les longueurs de colonnes et pour les quatre modes représentés, à l'exception de la courbe (FSM 3) et pour des longueurs supérieures à 2 m où le mode de flambement est un mode de torsion. Ceci valide la méthode proposée pour la décomposition des modes de flambement des sections transversales à parois minces fermées avec des branches.

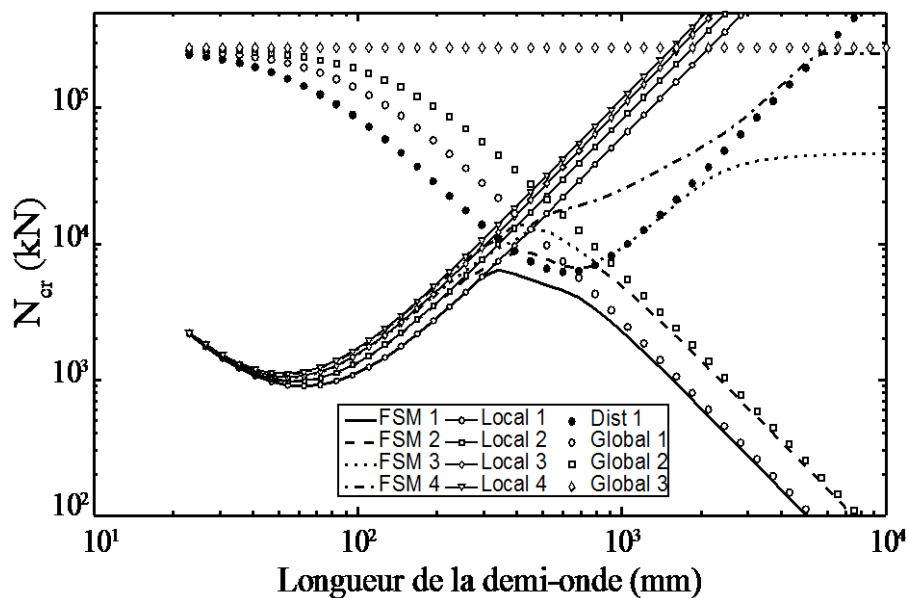


Figure 5-19 Les courbes de flambement FSM des quatre premiers modes de la section asymétrique à 3 cellules et leurs décompositions en modes purs G , D et L

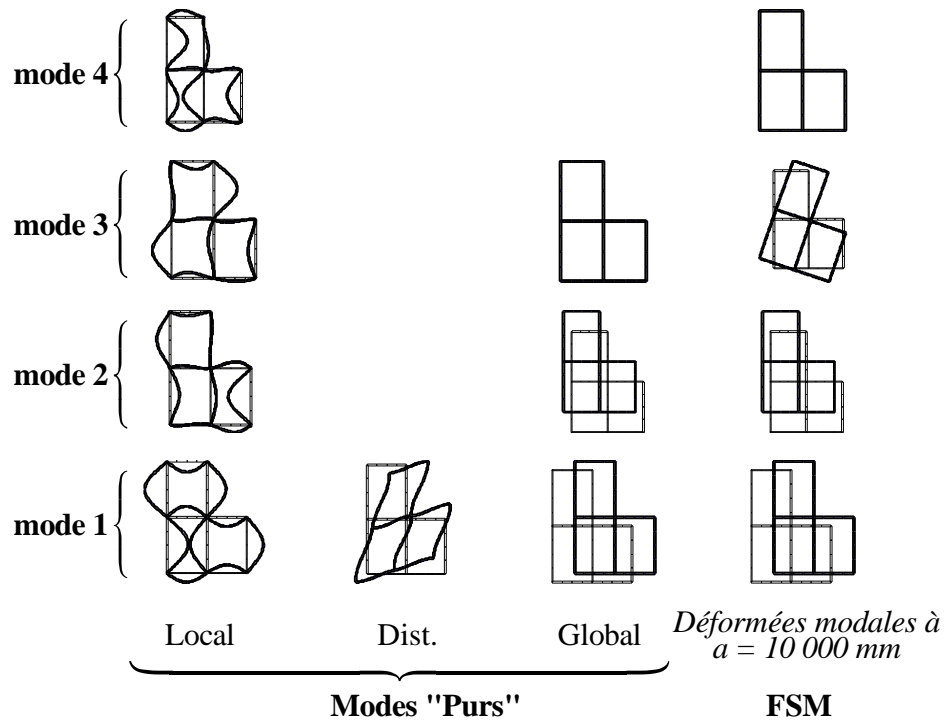


Figure 5-20 Les déformées des modes de flambement de la section asymétrique à 3 cellules.

5.3.3 Décomposition des modes de flambement d'une section transversale avec des branches et des parties fermées

Le dernier exemple présenté est une colonne à section transversale formée d'une cellule et présentant des branches et une partie fermée. Sa forme est dessinée dans la Figure 5-21. Le modèle FSM utilise 24 nœuds et 24 bandes, soit 4 bandes par paroi plane de la partie fermée et 2 bandes par paroi plane des parties ouvertes. Seize nœuds sont communs à deux, et seulement deux, bandes coplanaires, et deux nœuds sont communs à trois bandes. Ceci signifie que la dimension de la matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} est (96×6) et que, par conséquent, il y a 6 modes dans l'espace combiné GD . Pour séparer les modes globaux des modes distortionnels selon la procédure du paragraphe 4.6, les trois vecteurs qui constituent la base définissant l'espace G sont obtenus à partir de trois fonctions de gauchissement spéciales (résultant d'une charge axiale et de deux moments de flexion) alors que les trois vecteurs de la base de l'espace D sont générés de telle sorte qu'ils complètent l'espace GD en utilisant des conditions d'orthogonalité.

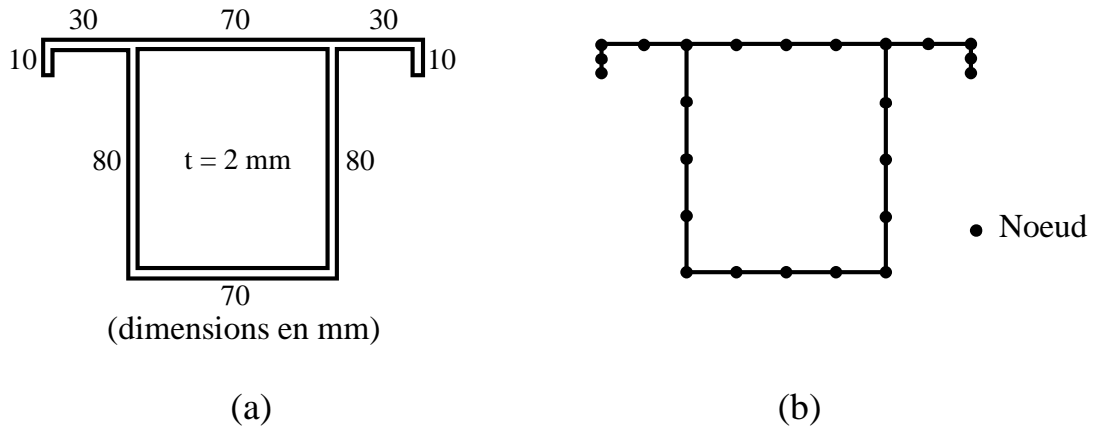


Figure 5-21 (a) Section transversale mono symétrique à 1 cellule avec des branches et une partie fermée avec (b) son maillage FSM

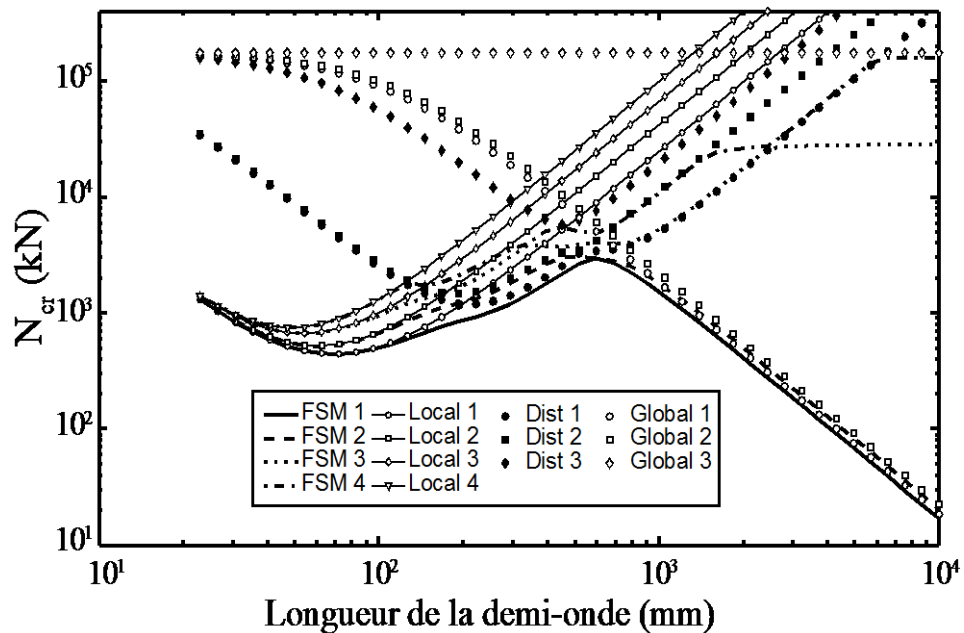


Figure 5-22 Les courbes de flambement FSM des quatre premiers modes de la section monosymétrique à 1 cellule et leurs décompositions en modes purs G, D et L

La Figure 5-22 donne les charges de flambement en fonction de la longueur de la demi-onde pour cet exemple. Quatorze courbes y sont représentées et correspondent (i) aux quatre premiers modes de flambement obtenus par la FSM, (FSM 1) à (FSM 4) ; (ii) aux quatre premiers modes locaux purs, (Local 1) à (Local 4) ; (iii) aux trois modes distorsionnels purs, (Dist 1) à (Dist 3) et (iv) aux trois modes globaux purs, (Global 1) à (Global 3). Les déformées correspondant à ces différents

modes d'instabilité sont représentées dans la Figure 5-23. Les enveloppes des courbes de modes purs de flambement calculées coïncident avec les courbes FSM au niveau de toutes les longueurs de demi-ondes et pour les quatre modes représentés, à l'exception de la courbe (FSM 3) et uniquement pour de longues colonnes où le mode de flambement est torsionnel. Ces résultats montrent bien que la méthode proposée peut être utilisée pour calculer les modes purs de flambement des sections à parois minces ouvertes et/ou fermées avec branches.

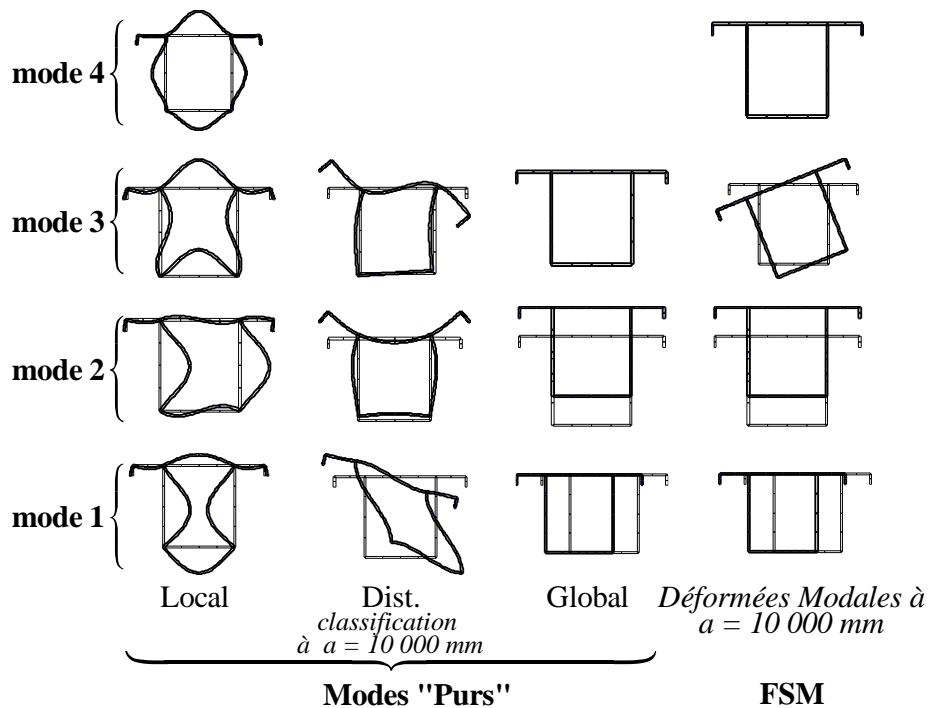


Figure 5-23 Les formes déformées des modes de flambement de la section monosymétrique à 1 cellule.

5.4 Conclusion

Cette thèse a permis d'apporter deux contributions successives à la cFSM dans le Chapitre 4. Pour les valider et pour en illustrer l'application et les capacités, plusieurs exemples sont traités dans ce chapitre.

Un premier lot d'exemples a pour objectif de confirmer l'apport de cette thèse à la cFSM développée par Djafour [9] dans l'étude des sections ouvertes et fermées non ramifiées. Des calculs de matrices \mathbf{R}_{GD} sont d'abord effectués. Les résultats pour les sections ouvertes sont comparés et validés par rapport à ceux de travaux

antérieurs. Dans ce cas, la nouvelle méthode donne tout simplement des résultats identiques à ceux de la cFSM originelle. Quant aux sections fermées et pour lesquelles on ne connaît pas de matrice \mathbf{R}_{GD} publiée, une voie de validation a été de continuer la procédure cFSM [8] jusqu'à la décomposition modale. On a alors montré que, dans le cas d'une section rectangulaire creuse déjà étudiée par la GBT [60], les nouveaux résultats sont conformes à ceux obtenus par la FSM et la GBT. La matrice \mathbf{R}_{GD} de cet exemple est alors donnée à titre de référence. Afin de confirmer la validité de cette approche à d'autres sections fermées non ramifiées, deux autres exemples sont traités (rectangles creux avec raidisseurs). Les courbes de flambement des modes purs sont alors comparées aux courbes enveloppes données par la FSM. La conclusion est que la contribution de ce travail à la « cFSM version Djafour [9] » permet de calculer avec succès les modes G , D et L de sections ouvertes et fermées non ramifiées.

La deuxième partie de ce chapitre valide et illustre l'application et les possibilités de la nouvelle méthode développée pour analyser les sections transversales ramifiées. Trois différentes sections sont considérées : une section transversale ouverte ramifiée, une section transversale fermée ramifiée et une section transversale avec des branches et une partie fermée. Les courbes de flambement des modes purs de ces exemples sont comparées aux courbes enveloppes obtenues par la FSM. La conclusion est que la nouvelle cFSM a calculé avec succès les modes G , D et L de toutes ces sections, c'est-à-dire qu'elle est capable de réaliser la décomposition des modes de flambement de colonnes à sections ouvertes ou fermées, ramifiées ou non.

Conclusion

La méthode des bandes finie (FSM) s'est imposée dans l'étude de la stabilité des éléments à parois minces dès les années 80. Elle a d'ailleurs contribué à justifier l'introduction du mode d'instabilité par distorsion, D , comme troisième mode de dimensionnement des profilés en acier formés à froid. Cette contribution majeure de la FSM a découlé de sa capacité à forcer l'instabilité à se produire selon une déformée décrivant une seule demi-onde selon la longueur. Cette faculté permet alors de dessiner la fameuse courbe signature qui possède l'avantage de rendre apparentes les trois classes d'instabilité (L , D et G) dans un large éventail de situations.

La méthode des bandes finies contrainte (cFSM), développée initialement au milieu des années 2000, améliore cette capacité de la FSM dans le sens où elle peut forcer l'instabilité à se produire selon un mode précis ou selon toute combinaison des modes L , D et G . Cette « décomposition modale » est possible grâce aux matrices de contraintes qui servent à isoler un mode d'instabilité donné et qui sont simplement des bases modales dont l'union reconstitue l'espace général des déformations. Ainsi, elles peuvent aussi être utilisées pour quantifier, au moyen de facteurs de participation modaux, la contribution de chacun de ces modes dans une déformée générale. Cette autre capacité de la cFSM est appelée « identification modale ».

La revue de la littérature montre que la décomposition modale et l'identification modale sont devenues des outils efficaces et uniques pour améliorer la compréhension de la stabilité des éléments à parois minces. Elle indique aussi que la cFSM a été étendue pour étudier les conditions aux limites autres que les appuis simples et que les aspects relatifs à la sensibilité de la solution cFSM aux choix de la base modale, du procédé d'orthogonalisation, et de la méthode de normalisation ont été étudiés et analysés.

Concernant l'utilisation de la cFSM dans le dimensionnement des profilés en acier formés à froid, l'état de l'art a montré que la recherche s'est attelée à trouver des solutions pour corriger les résultats de la cFSM relatifs au mode distorsionnel et aux sections à coins arrondis afin de les rendre directement utilisables. L'autre axe de recherche dans ce domaine est celui de l'optimisation des sections. Les formes examinées ne sont plus limitées et l'espace complet des configurations possibles des sections de profilés en acier formé à froid est exploré. Des résultats aussi surprenants qu'intéressants ont été trouvés qui vont jusqu'à suggérer que la formulation même du problème d'optimisation a une influence sur les résultats.

Un autre objectif majeur de la recherche autour de la cFSM est l'extension de ses capacités de décomposition et d'identification à la FEM. S'agissant de l'identification, deux approches ont été prospectées. Dans la première, il est question de déduire de la cFSM des approximations des bases modales des modes purs dans l'espace FEM, en vue de réaliser une identification de la déformée de flambement calculée par la FEM. Cette démarche d'identification a été utilisée dans le cas de profilés perforés, de profilés soumis à un gradient thermique et même à l'identification des déformées résultant d'analyses non linéaires. Quant à la deuxième, elle se base sur les déformées modales des sections et présente l'avantage d'être indépendante des conditions aux limites. L'identification obtenue le long de la longueur de l'élément est similaire à l'identification modale basée sur la GBT.

Pour ce qui est de l'extension des capacités de décomposition à la FEM, la course vers le développement d'une cFEM a été engagée. Une procédure mixte GBT-FEM a été expérimentée avec plus ou moins de bonheur dans le sens où des limitations techniques restent à lever, comme par exemple la nécessité d'avoir un maillage régulier.

Cet état de l'art sur la recherche autour de la cFSM a fait ressortir les progrès remarquables réalisés à ce jour mais laisse aussi entrevoir les développements qui restent à accomplir particulièrement pour faire progresser la théorie et continuer à généraliser l'approche cFSM.

L'objectif majeur de cette thèse est justement de faire avancer la théorie en vue de permettre la décomposition des modes d'instabilité d'éléments à parois minces qui ont des sections non couvertes par les approches actuelles. Il s'agit des sections transversales ouvertes avec branches, des sections transversales fermées avec branches et des sections transversales avec branches et des parties fermées. Pour y arriver, les principes fondamentaux de la méthode des bandes finies et ceux de la méthode des bandes finies contrainte ont été rappelés. Le calcul de la matrice de contraintes \mathbf{R}_{GD} qui définit l'espace combiné formé des modes de flambement globaux et de distorsion a été ensuite abordé. Dans ce travail, on utilise uniquement deux hypothèses pour définir l'espace GD : (i) flexion cylindrique des parois et, (ii) déformations transversales et distorsions membranaires négligeables. On a alors formulé deux approches qui sont simplement deux façons différentes de mettre en œuvre cette dernière hypothèse.

La première méthode est une modification de celle initiée par Djafour [9]. Les contraintes apportées par chaque bande y sont traitées séquentiellement au moyen d'une série de multiplications de matrices de transformation. La nouveauté dans ce travail réside dans le fait que la procédure de réduction des degrés de libertés est prise en charge dès la phase de multiplication matricielle. Il en a résulté une meilleure cohérence théorique de l'approche de Djafour mais cela n'a pas permis de résoudre le cas des sections ramifiées.

La principale contribution de cette thèse est le développement d'une nouvelle stratégie pour implémenter l'hypothèse 2 sur les déformations membranaires. Elle repose sur une boucle sur les nœuds plutôt que sur les bandes. L'algorithme, pour écrire les équations de contrainte et choisir les degrés de liberté à réduire, dépend du nombre de bandes connectées au nœud courant ainsi que de leurs orientations. L'exposé de cette nouvelle cFSM a été complété par une discussion autour de la séparation de la matrice \mathbf{R}_{GD} en deux matrices \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D dans le cas des sections présentant des contours fermés.

Ces deux approches ont été testées et validées. On a commencé par valider la nouvelle formulation de dérivation de la matrice \mathbf{R}_{GD} selon la méthode de Djafour

modifiée pour les sections ouvertes et fermées à contours simples. Des calculs de matrices \mathbf{R}_{GD} ont été effectués. Les résultats pour les sections ouvertes ont été comparés et validés par rapport à ceux de travaux antérieurs. Dans ces cas, la nouvelle méthode a donné tout simplement des résultats identiques à ceux de la cFSM originelle. Quant aux sections fermées et pour lesquelles on ne connaît pas de matrice \mathbf{R}_{GD} publiée, une voie de validation a été de continuer la procédure cFSM [8] jusqu'à la décomposition modale. On a alors montré que, dans le cas d'une section rectangulaire creuse déjà étudiée par la GBT [60], les nouveaux résultats sont conformes à ceux obtenus par la FSM et la GBT. La matrice \mathbf{R}_{GD} de cet exemple est alors donnée à titre de référence. Afin de confirmer la validité de cette approche à d'autres sections fermées non ramifiées, deux autres exemples ont été traités (rectangles creux avec raidisseurs). Les courbes de flambement des modes purs ont été comparées aux courbes enveloppes données par la FSM. La conclusion est que la contribution de ce travail à la « cFSM version Djafour [9] » permet de calculer avec succès les modes G , D et L de sections ouvertes et fermées non ramifiées.

Ensuite, on a traité des exemples de sections prismatiques branchées et/ou présentant des parties fermées par la nouvelle approche. Trois différentes sections ont été considérées : une section transversale ouverte ramifiée, une section transversale fermée ramifiée et une section transversale avec des branches et une partie fermée. Les courbes de flambement des modes purs de ces exemples sont comparées aux courbes enveloppes (signatures) obtenues par la FSM.

La conclusion est que la nouvelle cFSM a calculé avec succès les modes G , D et L de toutes ces sections, c'est-à-dire qu'elle est capable de réaliser la décomposition des modes de flambement de colonnes à sections ouvertes ou fermées, ramifiées ou non.

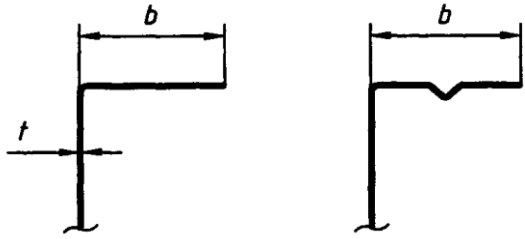
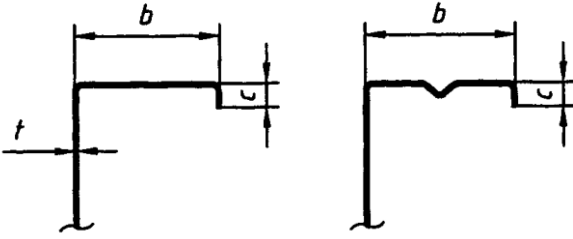
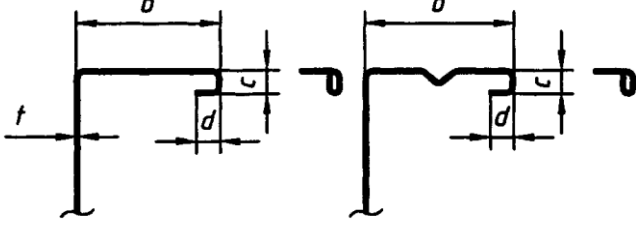
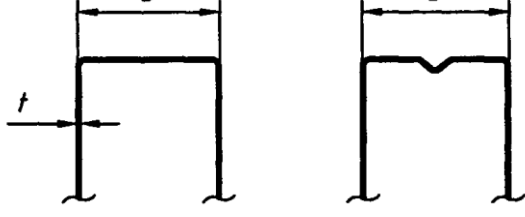
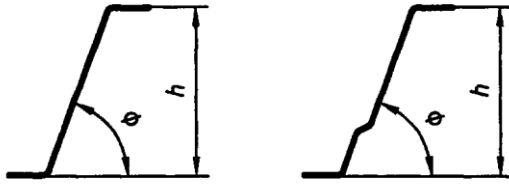
Concernant les perspectives et la suite à donner à ce travail, il paraît impératif de chercher à étendre la nouvelle approche à la FEM et participer à la course vers la cFEM. Une étape intermédiaire serait de commencer par l'appliquer à la méthode des splines bandes finies (SFSM) qui utilise des interpolations splines à la place des harmoniques de la FSM. L'intérêt réside dans la complication que la SFSM, comme

la FEM, est incapable de donner ne serait que la courbe signature. Ce travail a d'ailleurs déjà commencé dans le cadre d'une autre thèse et les premiers résultats sont prometteurs [61].

Annexes

Les dispositions données par la partie 1-3 de l'EN 1993 pour le dimensionnement par le calcul ne s'appliquent qu'aux sections transversales dont les rapports largeur sur épaisseur se situent dans la gamme de valeurs b/t , h/t , c/t et d/t données dans le tableaux ci-dessous.

Tableau Annexe 1

Paroi de section transversale	Valeur maximale
	$b/t \leq 50$
	$b/t \leq 60$
	$b/t \leq 90$
	$b/t \leq 500$
	$45^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ $h/t \leq 500 \sin \phi$

Bibliographie

Références

- [1] J. M. Davis, «Recent Advances in cold formed steel structures» *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 55, pp. 267-288, 2000.
- [2] Eurocode 3, «Calcul des structures en acier. Partie 1-3,» 2007.
- [3] AISI, «NAS. North American specification for the design of cold formed steel structural members» American Iron & Steel Institute, Washington, 2007.
- [4] J. M. Davis et P. Leach, «First-order generalised beam theory» *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 31, n°2-3, pp. 187-220, 1994.
- [5] P. B. Dinis, D. Camotim et N. Silvestre, «GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily branched open cross-sections» *Thin-Walled Structures*, vol. 44, pp. 20-38, 2006.
- [6] M. Casafont, F. Marimon, M. Pastor et M. Ferrer, «Linear buckling analysis of thin walled members combining the generalised beam theory and the finite element method» *Computer & Structures*, vol. 89, n°21-22, pp. 1982-2000, 2011.
- [7] S. Adany et B. W. Schafer, «Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method:Derivation» *Thin-Walled Structures*, vol. 5, n°44, pp. 563-584, 2006.
- [8] S. Adany et B. W. Schafer, «A full modal decomposition of thin walled, single-branched open cross section members via the constrained finite strip method» *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 64, pp. 12-29, 2008.
- [9] M. Djafour, «Etude de la Stabilité Distorsionnelle des Profils en Acier Formés à Froid» Thèse de Doctorat, Université Abou Bekr Belkaid. Tlemcen, 2007.
- [10] AISI, «Appendix 1. Design of cold formed steel structural members using the Direct Strength Method» Washington, DC, 2007.
- [11] Institute American Iron and Steel, «North American Specification Appendix 1: Design of cold formed steel structural members using the direct strength method» Washington, 2004.
- [12] A. Megnounif, «Etude de la stabilité non linéaire des profils formés à froid» Thèse de Doctorat, Université Abou Bekr Belkaid. Tlemcen, 2007.
- [13] Y. K. Cheung, «Finite Strip Method in structural Analysis» *Pergamon Press*, New York, 1997.
- [14] G. J. Hancock, «Local, distortional and lateral buckling of I-beams» *Journal of Structural Engineering*, vol. 104, n°11, pp. 1787-1798, 1978.
- [15] P. W. Key et G. J. Hancock, «A finite strip method for the elastic-plastic large displacement analysis of Thin-Walled and Cold-Formed steel sections» *Thin-Walled Structures*, vol. 16, pp. 3-29, 1993.

- [16] S. Adany and B. W. Schafer, "Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples" *Thin-Walled Structures*, vol. 44, p. 585–600, 2006.
- [17] R. Schardt, «Generalized beam theory - an adequate method for coupled stability problems» *Thin-Walled Structures*, vol. 19, pp. 161-180, 1994.
- [18] J. M. Davies, P. Leach et D. Heinz, «Second-order generalized beam theory» *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 31, pp. 221-241, 1994.
- [19] S. Adany, N. Silvestre, B. W. Schafer et D. Camotim, «Buckling analysis of unbranched thin-walled members using cFSM and GBT: a comparative study» *International colloquium on stability and ductility of steel structures*, Lisbon, Portugal, 2006.
- [20] S. Adany, N. Silvestre et B. W. Schafer, «On the identification and characterisation of local, distortional and global buckling modes in thin-walled members using the cFSM and GBT approaches» *6th International conference on steel and aluminium structures (ICSAS 2007)*, Oxford, UK, 2007.
- [21] S. Adany, N. Silvestre, B. W. Schafer et D. Camotim, «GBT and cFSM: two modal approaches to the buckling analysis of unbranched thin-walled members» *Int J Adv Steel Construct*, vol. 5, n°2, pp. 195-223, 2009.
- [22] Z. Li, J. C. Batista Abreu, J. Leng, S. Adany et B. W. Schafer, «Review:Constrained finite strip method developments and applications in cold-formed steel design» *Thin-Walled Structures*, vol. 81, pp. 2-18, 2014.
- [23] B. W. Schafer, «CUFSM: elastic buckling analysis of thin walled members by the finite strip method. Version 4.04,» [En ligne]. Available: www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm. [Accès le 15 11 2011].
- [24] Z. Li, «Finite strip modeling of thin-walled members» Ph.D.dissertation. John Hopkins University, Bltimore, MD, USA, 2011.
- [25] Z. Li, M. T. Hanna, S. Adany et B. W. Schafer, «Impact of basis, orthogonalization, and normalization on the constrained finite strip method for stability solutions of open thin-walled members» *Thin-Walled Structures*, vol. 49, pp. 1108-1122, 2011.
- [26] V. Zeinoddini et B. W. Schafer, «Impact of corner radius on cold-formed steel member strength» *20th International speciality conference on cold-formed steel structures-recent research and developments in cold-formed steel design and construction*, 2010.
- [27] Z. Li et B. W. Schafer, «Application of the finite strip method in cold-formed steel member design» *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 66, n°8-9, pp. 971-980, 2010.
- [28] S. Adany et Z. Beregszaszi, «Local and distortional buckling of thin-walled members: numerical study to compare conventional and constrained finite strip method» *Fifth international conference on thin-walled structures (ICTWS 2008)*, Brisbane, Australia, 2008.
- [29] S. Adany et Z. Beregszaszi, «The effect of mode coupling on the design buckling resistance of cold-formed members calculated via the direct strength method» *Eurosteel 2008 Conference*, Graz, Australia, 2008.

- [30] Z. Beregszaszi et S. Adany, «Application of the constrained finite strip method for the buckling design of cold-formed steel members via the direct strength method» *Computers and Structures*, vol. 89, pp. 2020-2027, 2011.
- [31] J. Leng, J. K. Guest et B. W. Schafer, «Shape optimization of cold-formed steel columns» *Thin-Walled Structures*, vol. 49, n°12, pp. 1492-1503, 2011.
- [32] E. Magnucka-Blandzi et K. Magnucki, «Buckling and optimal design of cold formed thin walled beams: Review of selected problems» *Thin-Walled Structures*, vol. 49, pp. 554-561, 2011.
- [33] E. Magnucka-Blandzi, «Effective shaping of cold formed thin walled channel beams with double-box flanges in pure bending» *Thin-Walled Structures*, vol. 49, pp. 121-128, 2011.
- [34] B. P. Gilbert, L. H. Teh et H. Guan, «Self-shape optimisation principles: optimisation of section capacity for thin walled profiles» *Thin-Walled Structures*, vol. 60, pp. 194-204, 2012.
- [35] B. P. Gilbert, T. M. Savoyat et L. H. Teh, «Self-shape optimisation application: optimisation of cold formed steel columns» *Thin-Walled Structures*, vol. 60, pp. 173-184, 2012.
- [36] S. Adany, A. L. Joo et B. W. Schafer, «Buckling mode identification of thin-walled members by using the cFSM base functions» *Thin-Walled Structures*, vol. 48, n°10-11, pp. 806-817, 2010.
- [37] C. D. Mohen et B. W. Schafer, «Elastic buckling of thin plates with holes in compression or bending» *Thin-Walled Structures*, vol. 47, n°12, pp. 1597-1607, 2009.
- [38] N. D. Kankanamge et M. Mahendran, «Behaviour and design of cold-formed steel beams subject to lateral-torsional buckling at elevated temperatures» *Thin-Walled Structures*, vol. 61, pp. 213-228, 2012.
- [39] Z. Li, S. Adany et B. W. Schafer, «Modal identification for shell finite element models of thin-walled members in nonlinear collapse analysis» *Thin-Walled Structures*, vol. 67, pp. 15-24, 2013.
- [40] M. Nedelcu «GBT-based buckling mode decomposition from finite element analysis of thin walled members» *Thin Walled Structures*, vol. 54, pp. 156-163, 2012.
- [41] M. Nedelcu et H. L. Cucu, «Buckling modes identification from FEA of thin-walled members using only GBT cross-sectional deformation modes» *Thin-Walled Structures*, vol. 81, pp. 150-158, 2014.
- [42] V. M. Zeinoddini et B. W. Schafer, «Global imperfections and dimensional variations in cold formed steel members» *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 11, n°5, pp. 829-854, 2011.
- [43] V. M. Zeinoddini et B. W. Schafer, «Simulation of geometric imperfections in cold-formed steel members» *Structural Stability Research Council Annual Stability Conference*, 2012.

- [44] V. M. Zeinoddini et B. W. Schafer, «Simulation of geometric imperfections in cold-formed steel members using spectral representation approach» *Thin-Walled Structures*, vol. 60, pp. 105-117, 2012.
- [45] M. Casafont, F. Marimon et M. M. Pastor, «Combined GBT-FEM procedure for the determination of pure distortional buckling loads» *The fifth international conference on coupled instabilities in metal structures (CIMS 2008)*, Sydney. Australia, 2008.
- [46] M. Casafont, F. Marimon et M. M. Pastor, «Calculation of pure distortional elastic buckling loads of members subjected to compression via the finite element method» *Thin-Walled Structures*, vol. 47, n°6-7, pp. 701-729, 2009.
- [47] ANSYS, *Release 9.0 Documentation.*, Ansys Inc, 2004.
- [48] S. Adany, «Flexural buckling of thin-walled columns: discussion on the definition and calculation» *International colloquium on stability and ductility of steel structures*, Lisbon, Portugal, 2006.
- [49] S. Adany, «Global Buckling of thin-walled columns: analytical solutions based on shell model» *Thin-Walled Structures*, vol. 55, pp. 64-75, 2012.
- [50] S. Adany et D. Visy, «Global buckling of thin-walled columns: numerical studies» *Thin-Walled Structures*, vol. 54, pp. 82-93, 2012.
- [51] S. Adany, «Analytical solution for the pure torsional buckling of thin-walled columns with considering shear deformations» *The 6th international conference on coupled instabilities in metal structures*, Glasgow, Scotland, 2012.
- [52] S. Adany et D. Visy, «Lateral-torsional buckling of thin-walled beams: an analytical solution based on shell model» *The 6th international conference on thin-walled structures (ICTWS)*, Timisoara, Romania, 2011.
- [53] J. Jonsson et M. J. Andreassen, «Distorsional eigenmodes and homogeneous solutions for semi-discretized thin walled beams» *Thin-Walled Structures*, vol. 44, n°5, pp. 691-707, 2011.
- [54] R. Bebiano, P. Pina, N. Silvestre et D. Camotim, «GBTUL1.0 : buckling and vibration analysis of thin-walled members.» Technical University of Lisbon, Lisbon, 2008.
- [55] A. 4. AS/NZS Australian/Nrw Zealand Standard, Cold Formed Steel structures, Sydney-Wellington: Standards of Australia and Standards of New Zealand, 2005.
- [56] B. W. Schafer et S. Adany, «Buckling analysis of cold formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods» *Eighteenth International Specialty Conference on Cold Formed Steel Structures: Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction*, 2006.
- [57] M. M. Denn, Optimization by variational methods, New York: McGraw-Hill, 1969.
- [58] M. Djafour, N. Djafour, A. Megnounif et D. E. Kerdal, «A constrained finite strip method for open and closed cross-section members» *Thin-Walled Structures*, vol. 48, pp. 955-965, 2010.

- [59] N. Djafour, M. Djafour, A. Megnounif, M. Matallah et D. Zendagui, «A constrained finite strip method for prismatic members with branches and/or closed parts» *Thin-Walled Structures*, vol. 59, pp. 70-77, 2012.
- [60] R. Goncalves et D. Camotim, «GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns» *Computer and structures*, n°82, pp. 1473-1484, 2004.
- [61] M. Djafour, H. Dib, M. Djellil, N. Djafour, M. Matallah et D. Zendagui, «Buckling mode decomposition of thin-walled members using a constrained spline finite strip method» *Proceeding of the 6th international conference on coupled instabilities in metal structures*, Glasgow, Scotland, Dec 3-5, 2012.

Index

- AISI, 8, 13, 14, 15, 22, 30, 125
- cFSM, v, vi, ix, xi, xiii, 3, 4, 5, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 67, 68, 70, 77, 80, 81, 83, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 106, 108, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 126, 127
- décomposition, xix, xx, 3, 4, 37, 40, 41, 42, 44, 50, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 68, 96, 102, 103, 104, 105, 106, 112, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121
- Eurocode, 13, 14, 22, 24, 34, 38
- FEM, v, xix, 2, 5, 36, 37, 39, 41, 43, 50, 51, 52, 54, 57, 59, 60, 70, 81, 118, 121, 128
- flambement, v, vi, xvi, xvii, xix, xx, xxi, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 18, 22, 23, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 50, 51, 52, 55, 57, 58, 59, 60, 66, 67, 68, 89, 91, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 118, 119, 120, 121
- FSM, vi, ix, xi, xiii, xv, xvi, xix, xx, xxi, 2, 3, 5, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 55, 56, 59, 61, 62, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 75, 77, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 88, 94, 96, 99, 101, 102, 103, 104, 107, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 120, 121
- GBT, ix, xiii, 3, 37, 40, 41, 42, 52, 57, 58, 60, 68, 69, 77, 95, 96, 100, 107, 108, 115, 118, 120, 125, 126, 127, 128, 129
- mode distorsionnel, v, 2, 4, 9, 15, 42, 57, 60, 101, 102, 103, 104, 111, 118
- mode global, v, 2, 9, 11, 30, 42, 101, 103, 104
- mode local, v, 1, 9, 11, 101, 102, 103, 104
- parois minces, xv, xvi, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 51, 52, 55, 56, 59, 60, 62, 64, 66, 70, 79, 106, 112, 114, 117, 119
- ramifiée, vi, 106, 107, 110, 116, 120