Doc/ ...

UNIVERSITÉ DE TLEMCEN
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉQUATIONS ELLIPTIQUES QUASILINÉAIRES SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du doctorat en mathématiques
Option : géométrie différentielle

par

MALIKI YOUSSEF

Soutenue devant le jury composé de :

Directeur de thèse :	Mr. M. Benalili	Professeur à l'université de Tlemcen
Président de jury :	Mr. H. Dib	Professeur à l'université de Tlemcen
Examinateurs :		
Mr. Z. Djadli		Professeur à l'institut de Fourier, Grenoble (France)
Mr M. Mechab		Professeur à l'université de Sidi Belabbess
Mr. M. Bouchekif		Professeur à l'université de Tlemcen
Mr. S. M. Bouguima		Professeur à l'université de Tlemcen

Inscrit Sous le N°:
Date le: 18 JAN. 2015
Code: 338

24 JAN. 2009
3499

UNIVERSITÉ DE TLEMCEN
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉQUATIONS ELLIPTIQUES QUASILINÉAIRES SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du doctorat en mathématiques
Option : géométrie différentielle

par

MALIKI YOUSSEF

Soutenue devant le jury composé de :

Directeur de thèse :	Mr. M. Benalili	Professeur à l'université de Tlemcen
Président de jury :	Mr. H. Dib	Professeur à l'université de Tlemcen
Examinateurs :		
Mr. Z. Djadli		Professeur à l'institut de Fourier, Grenoble (France)
Mr M. Mechab		Professeur à l'université de Sidi Belabbess
Mr. M. Bouchekif		Professeur à l'université de Tlemcen
Mr. S. M. Bouguima		Professeur à l'université de Tlemcen

BIBLIOTHEQUE SCIENCES
BFST706

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Messieurs M. Benalili pour son encadrement efficace, pour m'avoir donné les directions à suivre et pour la lecture precise de la thèse ainsi que Messieur H. Dib pour avoir accepté de presider le jury.
Un grand merci aussi à Messieurs Z. Djadli et M. Mechab d'avoir accepter fair partie du jury.
Je remrecie vivement Messieurs M. Bouchekif et S. M. bouguima d'avoir accepeter examiner ce travail.
Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué à realiser ce travail.

Résumé de la thèse

Titre : Equations elliptiques quasilinéaires sur les variétés Riemanniennes

par

MALIKI YOUSSEF

La thèse porte sur l'étude des équations dites de la courbure scalaire prescrite de type généralisée. Ces équations, peuvent être considérées comme les extensions des équations de la courbure scalaire prescrite classique. Ce sont des équations quasi-linéaires elliptiques qui contiennent l'exposent critique : l'injection de Sobolev cesse d'être compacte. On considère l'existence de solutions sur les variétés complètes non-compactes et la multiplicité de solutions sur les variétés compactes. Les méthodes utilisées sont la méthode variationnelle et la méthode de sous et sur-solutions.

Table des matières

Introduction

Le travail présenté dans cette thèse concerne principalement l'étude des problèmes d'existence et de multiplicité de solutions pour des équations elliptiques contenant le p-Laplacien et à croissance critique de Sobolev sur les variétés Riemanniennes. Dans un premier temps, nous étudions l'existence des solutions sur les variétés complètes non-compactes. Le problème de la multiplicité, vient en suite et il est considéré indépendamment sur les variétés compactes.
Étant donnée une variété Riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 2$ munie d'une métrique g. L'opérateur $p-$ Laplacien, $1 < p < n$, associé à la métrique g agissant sur les fonctions $u \in C^\infty(M)$ est défini par : $\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. L'aspect non linéaire de cet opérateur rend l'étude plus difficile que dans le cas de l'opérateur de Laplace-Beltrami correspondant (au cas $p = 2$).
Soient a et f deux fonctions lisses sur une variété Riemannienne (M, g) . Sur cette variété, on considère des équations du type

$$\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = f|u|^{p^*-2}u \tag{1}$$

où $p^* = \frac{np}{n-p}$ désigne l'exposent critique de Sobolev dans l'inclusion $H_1^p(M) \subset L_q(M)$. Si $Scal_g$ désigne la courbure scalaire de la métrique g, alors l'équation (1) qui s'écrit pour $p = 2$ et $a(x) = \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u$

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4\,(n-1)} Scal_g u = f u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{2}$$

correspond à l'équation de la courbure scalaire prescrite. Cette dernière provient de l'étude de la déformation conforme de la métrique.
Dans le cas où M est compacte et f une fonction constante, on retrouve l' équation bien connue de Yamabé (voir [40] et [54]). Celle ci est actuellement complètement résolue par les travaux de [73], [69], [5] et [64].
L'équation (2) avec f une fonction non constante a fait l'objet d'investigations intensives, on suggère de lire les articles de [28], [29], [30], [38, 51,52], [44], [52], [53],[61],[62,

78]. Pour le cas des variétés complètes, on peut consulter les articles [4], [50], [56] et [59].
Le problème d'existence d'une solution de l'équation (1) a été considéré sur les variétés compactes par Druet [27] ; selon sa terminologie, cette équation est appelée équation de la courbure scalaire prescrite de type généralisée.
Dans son investigation, Druet a utilisé la méthode de sous et sur-solutions combinée à la technique variationnelle. Bien entendu, le problème sera plus intéressant sur les variétés complètes non-compactes. L'application de la méthode de sous et sur-solution classique s'avère difficile dans le cas des variétés non-compactes. Dans [13], nous avons présenté une méthode des sous et sur solutions plus appropriée à l'étude du problème d'existence de solutions de l'équation (1) sur les variétés complètes : il faut souligner que cette méthode est initiée par[55] dans le cas du Laplacien.

Dans la suite, la technique variationnelle est usitée pour une suite exhaustive de parties compactes de la variété complète moyennant des hypothèses sur la géométrie de la variété et sur le comportement à l'infini de la fonction f .
Dans les trois premiers chapitres, nous aborderons le problème d'existence de solutions de l'équation (1) sur les variétés complètes non-compactes.
Dans le premier chapitre, nous présentons une version réduite de la méthode classique des sous et sur-solutions. Cette dernière consiste à trouver des fonctions positives $\overline{u}$ et $\underline{u}$ telles que

$$\begin{cases} \Delta_p \overline{u} + a(x)\overline{u}^{p-1} - f\overline{u}^{p^*-1} \geq 0, & \text{faiblement dans } H_1^p(M); \\ \Delta_p \underline{u} + a(x)\underline{u}^{p-1} - f\underline{u}^{p^*-1} \leq 0, & \text{faiblement dans } H_1^p(M) \end{cases}$$

vérifiant $\underline{u} \leq \overline{u}$, et affirmer alors l'existence d' une solution positive faible u de l'équation (1) avec $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Les fonctions $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont appelées respectivement sous-solution faible et sur-solution faible de l'équation (1). Sur les variétés complètes non compactes, on rencontre des difficultés dans la construction d'une sous-solution positive $\underline{u}$ et une sur-solution positive $\overline{u}$ avec la condition $\underline{u} \leq \overline{u}$.
La méthode suggérée et qui est présentée dans le premier chapitre ramène l'existence d'une solution de l'équation (1) à l'existence d'une sous-solution positive sur toute la variété ainsi que l'existence d'une sur-solution positive sur chaque sous-ensemble compact. Ceci facilite énormément l'étude de l'existence des solutions. L'essentiel de ce chapitre peut se formuler comme suit pour une classe de fonctions qui seront définies dans la suite et qui seront dites admissibles.

Théorème 0.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne complète non compacte de dimension $n \geq 2$ et a, f des fonctions lisses sur M. Supposons que f est admissible et $a \geq f$. S'il existe une sous-solution $\underline{u} \in H^1_{p,loc}(M) \cap L^\infty(M) \cap C^0(M)$ sur M, alors* *l'équation* (1) *admet une solution faible positive et maximale* $u \in H_1^p(M)$. *De plus* $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ *sur chaque compact* Ω *pour certain* $\alpha \in (0,1)$.

Au deuxième chapitre, nous appliquons la méthode réduite des sous et sur-solutions présentée dans le premier chapitre pour résoudre l'équation (1) sur les variétés complètes non compacte. La construction d'une sous-solution positive sur la variété toute entière est l'étape la plus dure : elle est construite à partir de la fonction propre de l'opérateur non-linéaire $u \to \Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$ sur la variété complète. Une expression de la fonction propre ϕ sera une sous-solution si celle-ci est bornée, ce qui nous ramène à prouver une certaine régularité pour des solutions de certaines équations homogènes contenant l'opérateur $p-$Laplacien. La régularité est obtenue à partir de l'inégalité de Sobolev qui est valide sur les variétés complètes à géométrie bornée dans le sens que le rayon d'injectivité est positif et la courbure de Ricci est bornée inférieurement (voir[42]).
Le résultat principal obtenu dans ce chapitre est le suivant :

Théorème 0.2 *Soient* (M,g) *une variété Riemannienne complète et non compacte de dimension* $n \geq 2$ *et* a, f *des fonctions lisses sur* M. *On suppose que :*

1. *La fonction* f *est admissible et* $-f \geq c_o > 0$ *où* c_o *est une constante positive,* a *est bornée et satisfait* $f \leq a$ *et* $\int_{\Omega_i} a = 0$, *sur chaque domaine compact* Ω_i *d'une suite exhaustive de* M.
2. M *est à géométrie bornée.*

Alors l'équation(1) *admet une solution faible positive et maximale* $u \in H_1^p(M)$. *De plus,* $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(M)$ *pour certain* $\alpha \in (0,1)$.

Au troisième chapitre, nous étudions l'équation (1) pour des fonctions f positives, mais par la méthode variationnelle, car la méthode des sur et sous-solutions décrite dans le premier chapitre semble inappropriée du fait du signe de la fonction f. On note que l'outil principal dans cette méthode est l'inclusion de Sobolev $H_1^p(M) \hookrightarrow L_q(M)$ qui cesse d'être compacte pour $q = p^* = \frac{np}{n-p}$. Dans cette partie, la fonction f est supposé non négative et la fonction a est telle que l'opérateur $I(u) = \int_M (|\nabla u|^p + a\,|u|^p)\, dv_g$ soit coercif.
La méthode consiste à considérer un recouvrement de la variété M avec une suite exhaustive de parties compactes $(\Omega_i)_i$. La suite $(u_i)_i$ des solutions obtenues sur chaque domaine Ω_i convergera vers la solution désirée. Le théorème principal que nous prouvons dans ce chapitre est le suivant :

Théorème 0.3 *Soient* (M,g) *une variété Riemannienne complète non compacte de dimension* $n \geq 2$ *et* $1 < p < n$ *tel que* $p < n^2$. *Soient encore* $a, f \in C^\infty(M)$ *des* *fonctions sur M. Supposons que l'opérateur $L_p u = \Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$ est coercif. Si les conditions suivantes sont vérifiées*

1. *(M,g) est de géométrie bornée, c'est à dire : Ricci $> -c$, où $c > 0$ est une constante, et le rayon d'injectivité est strictement positif.*
2. *Les fonctions a et f sont bornées et f est strictement positive.*
3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que $|\nabla f| \leq Cf, |\nabla^2 f| < Cf, \int |a|^{\frac{n}{p}} dv_g \leq C \int f dv_g < \infty$ et $\int |f|^{\frac{p^*}{p}} dv_g < \infty$*
4. *En un point x_o où f atteint un maximum, nous sommes dans un des cas suivants :*
   1. *$1 < p < 2, n > 3p-2$ et $a(x_o) < 0$*
   2. *$p = 2$ et $\frac{8(n-1)}{(n-2)(n-4)a(xo)} < \frac{-\Delta f(xo)}{f(xo)} + \frac{2Scal_g(xo)}{n-4}$*
   3. *$p > 2$ et $\frac{(n-3p+2)}{p}\frac{\Delta f(xo)}{f(xo)} < Scal_g(x_o)$*

Alors il existe une solution faible et positive $u \in H_1^p(M)$ de l'équation (1) telle que $u \in C^{1,\alpha}(K)$ sur chaque sous-ensemble compact K de M pour certain $\alpha \in (0,1)$.

Au chapitre quatre, nous étudions l'équation (1) sur les variétés compactes, nous considérons le cas où la fonction f change de signe. On souligne que les arguments variationnels ne sont plus valables dans ce cas. En s'inspirant d'un excellent travail de A. Rauzy [63] fait dans le cadre de la courbure scalaire prescrite, on obtient l'existence de solutions multiples pour l'équation de courbure scalaire prescrite de type généralisé. Plus précisément, pour chaque $q \in (p, p^*)$, on définit la fonctionnelle

$$F_q(u) = \left(\int_M |\nabla u|^p + a\,|u|^p\right) dv_g - \int_M f\,|u|^q\, dv_g,$$

et $\Lambda_{k.q}$ l'ensemble

$$\Lambda_{k.q} = \{u \in H_1^p(M) : u \geq 0, \|u\|_{L_q}^q = k\}.$$

On considère le problème de minimisation suivant

$$\mu_{k,q} = \inf_{u \in \Lambda_{k,q}} F_q(u)$$

et on étudie le comportement de la courbe $k \to \mu_{k,q}$; ce qui permettra l'obtention de solutions multiples des équations sous critiques

$$\Delta_p u + a(x)u^{p-1} = fu^{q-1}, q \in (p, p^*) \tag{3}$$

Les résultats de cette partie s'énoncent comme suit

Théorème 0.4 (Cas critique) *Supposons qu'il existe une constante positive $C > 0$ dépendant seulement de $f^- / \int f^- dv_g$ telle que si $f \in C^\infty$ satisfait les conditions suivantes :*

1. $|a| < \lambda_f$
2. $\sup f^+ / \int f^- dv_g < C$
3. $\sup f > 0$. *Alors l'équation* (1) *admet une solution positive de classe* $C^{1,\alpha}, \alpha \in (0,1)$

Théorème 0.5 (cas sous-critique) *Il existe une constante positive $C > 0$ dépendant seulement de $f^- / \int f^- dv_g$ telle que si $f \in C^\infty$ satisfait les conditions suivantes*

1. $|a| < \lambda_f$
2. $\sup f^+ / \int f^- dv_g < C$
3. $\sup f > 0$. *Alors l'équation* (3) *admet deux solutions positives distinctes de classe* $C^{1,\alpha}, \alpha \in (0,1)$

Dans le dernier chapitre, on étudie les solutions multiple de l'équation

$$\Delta_p u + a(x) |u|^{p-2} u = f |u|^{p^*-2} u + \lambda |u|^{q-2} u + \varepsilon h \tag{4}$$

où $p < q < p^*, \lambda > 0$, un paramètre réel, $\varepsilon > 0$ est petit, a, f et h sont des fonctions

régulières telles que $f > 0, h > 0$ et a est telle que l'opérateur $\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$ soit coercif.
Considérons la fonctionnelle

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^p dv_g + \int_M a(x) |u|^p dv_g - \frac{p}{p^*} \int_M f |u|^{p^*} dv_g - \frac{p}{q} \lambda \int_M |u|^q dv_g - \varepsilon p \int_M h u dv_g.$$

On cherche les solutions de l'équation (4) comme des points critiques de la fonctionnelle $I(u)$. On utilise le théorème du col d'Ambrosetti et Rabinowitz [3]. On montre que la fonctionnelle I vérifie les conditions de Palais-Smale au niveau

$$c < \frac{p}{n} \left(\frac{n}{n-p} \right)^{\frac{n}{p}} (\sup f)^{1-\frac{n}{p}} K(n,p)^{-n}$$

où

$$K(n,p) = \inf_{u \in H_1^p(M)/\{0\}} \frac{\int_{R^n} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{R^n} u^{p^*} \right)^{\frac{p}{p^*}}}.$$

On montre l'existence d'une première solution avec $I(u_1) < 0$ en minimisant la fonctionnelle I, qui est faiblement semi-continue inférieurement, sur une boule convenable de $H_1^p(M)$. Pour la deuxième solution, on montre que la fonctionnelle I vérifie les hypothèses du théorème du col à l'aide duquel on obtient une suite de Palais-Smale au niveauc > 0, et si $c < \frac{p}{n}(\sup f)^{1-\frac{n}{p}} K(n,p)^{-n}$, c sera une valeur critique. Ainsi, la suite de Palais-Smale convergera vers un point critique u_2 avec $I(u_2) > 0$.
L'essentiel de cette partie se résume comme suit

Théorème 0.6 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ et $p \in (1,n)$ tel que $n < p^2, p < q < p^*$. Soient a, f et h des fonctions lisses sur M telles que*

1. *$f(x) > 0$ et $h(x) > 0$ sur toute la variété M*
2. *L'opérateur $\Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2}\,u$ est coercif*
3. *En un point x_o où la fonction f atteint son maximum, une des conditions suivantes est satisfaite*
   - *i) $1 < p < 2, n - 3p + 2 > 0$ et $a(x_o) < 0$*
   - *ii) $p = 2, \frac{4(n-1)}{n-2}a(x_o) - Scal(x_o) + (n-4)\frac{\Delta_g f(x_o)}{f(x_o)} < 0$*
   - *iii) $p > 2, \frac{\Delta_g f(x_o)}{f(x_o)} < \frac{p}{n-3p+2} Scal(x_o)$.*

Alors, L'équation (4) admet au moins deux solutions faibles distinctes et positives.

variétés compactes complètes non-compactes, on sait d'après la méthode classique de sous et sur-solution que s'il existe une sous- solution $\underline{u}$ et une sur-solution $\overline{u}$ telle que $\underline{u} \leq \overline{u}$ alors il existe une solution u (faible) positive de l'équation (1.1) telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.
Sur une variété non-compacte, une sérieuse difficulté qu'on rencontre en utilisant cette méthode est la recherche d'une sous et sur-solution telle que à la fois elles vérifient la condition $\underline{u} \leq \overline{u}$. Une version réduite de la méthode de sous et sur-solution a été présenté dans le cas du Laplacien(i.e $p = 2$) dans [55], nous étendrons la méthode réduite pour l'opérateur $p-$Laplacien.
Dans la deuxième section, on donne une relation entre l'existence d'une sur-solution sur chaque domaine borné de M et le signe de la première valeur propre d'un certain opérateur non-linéaire. Plus exactement, on montre que l'existence d'une telle sur-solution est complètement déterminée par le signe de la première valeur propre de l'opérateur non-linéaire : $L_p u = \Delta_p u - a(x)\,|u|^{p-2}\,u$ sur l'ensemble des zeros de la fonction f i.e l'ensemble $Z_o = \{x \in M : f(x) = 0\}$. Cette propriété est encore obtenue dans [55] dans le cas du Laplacien.

1.1 Résultat de réduction

On commence par introduire après P. Li et les autres [55] les notions suivantes

Définition 1.1 *Une fonction positive et lisse sur une variété M est dite essentiellement positive s'il existe une suite exhaustive de domaines compacts $\{\Omega_i\}_{i\geq 0}$ de M telle que*

$$M = \bigcup_{i\geq 0} \Omega_i \text{ et } f\,|_{\partial\Omega_i} > 0, \forall i \geq 0$$

De plus, s'il existe une sous-solution faible et positive $u_i \in H_1^p(\Omega_i) \cap C^o(\Omega_i)$ sur chaque Ω_i de l'équation(1.1) *alors f est dite une fonction admissible.*

Définition 1.2 *Une solution positive u de l'équation* (1.1) *est dite maximale si pour toute autre solution v de l'équation* (1.1) *on a $u \geq v$.*

Dans cette section, on se propose de démontrer le théorème suivant

Théorème 1.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne complète et non-compacte. On suppose que la fonction f est admissible et $f(x) \geq a(x), \forall x \in M$. S'il existe une sous-solution positive $\underline{u} \in H^p_{1,loc} \cap L^\infty(M) \cap C^o(M)$ de l'équation* (1.1) *sur M, alors cette équation admet une solution faible, positive et maximale $u \in H_1^p(M)$. De plus, u est de classe $C^{1,\alpha}$ sur chaque compact de M pour certain $\alpha \in (0,1)$.*

Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, on prouve les lemmes suivants

Lemme 1.1 *Soit $\Omega \subset M$ un domaine borné de M. Soient $f \geq 0$ et $a \leq f$ des fonctions lisses sur M. On suppose que l'équation (1.1) admet une sous-solution positive $\underline{u} \in H^p_{1,loc} \cap C^o(M)$ et une sur-solution positive $\overline{u} \in H^p_{1,loc}$. Si $(\overline{u} - \underline{u}) |_{\partial\Omega} \geq 0$, alors $\overline{u} \geq \underline{u}$ sur Ω.*

Preuve. D'abord, on remarque qu'en multipliant une sur-solution $\overline{u}$ de l'équation (1.1) par une constante $\alpha > 1$ on obtient encore une sur-solution. En effet,

$$\begin{aligned}\Delta_{g,p}\overline{u} + a(x)(\alpha\overline{u})^{p-1} - f(x)(\alpha\overline{u})^q &= \alpha^{p-1}(\Delta_{p,g}\overline{u} + a(x)(\overline{u})^{p-1}) - f(x)(\alpha\overline{u})^q \\ &\leq \alpha^{p-1}(1 - \alpha^{q-p+1})f\overline{u}^q \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Donc, sans perte de généralité, on peut supposer que $\overline{u} \geq 1$ sur un domaine compact de M.

Maintenant, supposons que l'ensemble $S = \{x \in \Omega : \overline{u} \leq \underline{u}\}$ est non vide. Soit $\phi = \max(\underline{u} - \overline{u}, 0)$ la fonction test, qui est positive et qui appartient à l'espace $H^p_{1,o}(\Omega)$ alors, on a

$$\begin{aligned}&\int_S \left\langle |\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla_g\underline{u} - |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}, \nabla(\underline{u} - \overline{u})\right\rangle_g dv_g \\ \leq\ & \int_S (a(\underline{u}^{p-1} - \overline{u}^{p-1})(\underline{u} - \overline{u}) - f(\underline{u}^q - \overline{u}^q)(\underline{u} - \overline{u}))dv_g \\ \leq\ & \int_S f(\underline{u}^{p-1} - \overline{u}^{p-1} - \underline{u}^q + \overline{u}^q)(\underline{u} - \overline{u})dv_g \\ \leq\ & \int_S f(\underline{u}^{p-1}(1 - \underline{u}^{q-p+1}) - \overline{u}^{p-1}(1 - \overline{u}^{q-p+1})(\underline{u} - \overline{u})dv_g \\ \leq\ & \int_S f(\underline{u}^{p-1}(1 - \underline{u}^{q-p+1}) - \overline{u}^{p-1}(1 - \underline{u}^{q-p+1})(\underline{u} - \overline{u})dv_g \\ \leq\ & \int_S f(1 - \underline{u}^{q-p+1})(\underline{u}^{p-1} - \overline{u}^{p-1})(\underline{u} - \overline{u})dv_g \\ \leq\ & 0.\end{aligned}$$

Si $p \geq 2$, d'après l'inégalité de Simon [65], il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\begin{aligned}&Cp\int_S |\nabla_g\underline{u} - \nabla_g\overline{u}|^p\, dv_g \\ \leq\ & \int_S \left\langle |\nabla_g\underline{u}|^{p-2}\, \nabla_g\underline{u} - |\nabla_g\overline{u}|^{p-2}\, \nabla_g\overline{u}, \nabla_g\left(\underline{u} - \overline{u}\right)\right\rangle_g dv_g \\ \leq\ & 0\end{aligned}$$

par conséquent

$$\left\|(\underline{u}-\overline{u})^{+}\right\|_{H^{p}_{1,0}(\Omega)}=\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}\left(\underline{u}-\overline{u}\right)^{+}\right|^{p}dvg=0$$

i.e$(\underline{u}-\overline{u})^{+}=0$, ou bien $\underline{u}\leq\overline{u}$ sur Ω.
Si $1<p<2$, il existe, toujours d'après l'inégalité de Simon [65], une constante positive $\tilde{C}_p$ telle que

$$\begin{aligned}&\tilde{C}_p\int_S\frac{|\nabla\underline{u}-\nabla\overline{u}|^2}{(|\nabla\underline{u}|+|\nabla\overline{u}|)^{2-p}}dv_g\\ \leq\;&\int_S\left\langle|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}-|\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla_g\overline{u},\nabla\left(\underline{u}-\overline{u}\right)\right\rangle_g dv_g\\ \leq\;&0\end{aligned}$$

d'où

$$\int_S\frac{|\nabla\underline{u}-\nabla\overline{u}|^2}{(|\nabla\underline{u}|+|\nabla\overline{u}|)^{2-p}}dv_g=0 \tag{1.2}$$

d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\int_S|\nabla_g\underline{u}-\nabla_g\overline{u}|^p\,dv_g&=\int_S\frac{|\nabla_g\underline{u}-\nabla_g\overline{u}|^p}{(|\nabla_g\underline{u}|+|\nabla_g\overline{u}|)^{p(1-\frac{p}{2})}}\left(|\nabla_g\underline{u}|+|\nabla_g\overline{u}|\right)^{p(1-\frac{p}{2})}dv_g\\ &\leq\left(\int_S\frac{|\nabla_g\underline{u}-\nabla_g\overline{u}|^2}{(|\nabla_g\underline{u}|+|\nabla_g\overline{u}|)^{2-p}}dv_g\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_S\left(|\nabla_g\underline{u}|+|\nabla_g\overline{u}|\right)^p dv_g\right)^{1-\frac{p}{2}}\end{aligned}$$

et par l'égalité(1.2), on obtient finalement

$$\left\|(\underline{u}-\overline{u})^{+}\right\|_{H^{p}_{1,0}(\Omega)}=\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}\left(\underline{u}-\overline{u}\right)^{+}\right|^{p}dvg=0$$

c'est à dire $\underline{u}\leq\overline{u}$ sur Ω ∎
On note $H^n(-1)$ l'espace hyperbolique simplement connexe à courbure sectionnelle égale à -1.

Lemme 1.2 *Soient $\varepsilon>0,\beta>0$ et λ des constantes, alors il existe une fonction positive et croissante ϕ_ε telle que la fonction positive $V\varepsilon=\phi_\varepsilon(r(x))$ définie sur la boule géodésique $B(\varepsilon)\subset H^n(-1)$ vérifie :*

$$\begin{cases}\Delta_p V_\varepsilon+\lambda V_\varepsilon^{p-1}-\beta V_\varepsilon^q\leq 0\\ V_\varepsilon\mid_{\partial B(\varepsilon)}=\infty\end{cases}$$

$r(x)$ est la fonction distance sur la boule $B(\varepsilon)$.

Preuve. En coordonnées polaires la métrique de $H^n(-1)$ est donnée par

$$W = dr^2 + \sinh^2(r) ds^2$$

où ds^2 est la métrique sur la sphère S^{n-1} standard de $\mathbb{R}^n$.
Alors, on obtient facilement que

$$\Delta_{H^n(-1)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\coth(r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sinh^2(r)}\Delta_{S^{n-1}}$$

Δ_M désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété (M, g) .
Pour $p \in (1, n)$, on note $\Delta_p^M u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ l'opérateur $p-$ Laplacien sur une variété M. Soit $q > p-1$, on considère la fonction $\phi : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(r) = \left(\sinh^2(\frac{\varepsilon}{2}) - \sinh^2(\frac{r}{2})\right)^{-\alpha}$$

avec $\alpha = \frac{p}{q-p+1}$.
Posons

$$k(r) = \sinh^2(\frac{\varepsilon}{2}) - \sinh^2(\frac{r}{2}) \text{ et } V(x) = \phi(r(x))$$

on obtient

$$\Delta_{W,p}^{H^n(-1)} V = \phi'^{p-2}\Delta_{H^n(-1)} V + (p-2)\,\phi'^{p-2}\phi'' \quad .$$

et un calcul direct donne

$$\Delta_{H^n(-1)} V = \frac{1}{4}\alpha(\alpha+1)\,k(r)^{-(\alpha+2)}\sinh^2(r) + \frac{1}{2}n\alpha k(r)^{-(\alpha+1)}\cosh(r).$$

Donc

$$\begin{aligned}\Delta_{W,p}^{H^n(-1)} V + \lambda V^{p-1} &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-1} k(r)^{-\alpha p+\alpha-p}\left(\frac{1}{2}(p-1)(\alpha+1)\sinh^p(r)\right.\\ &\quad \left. + (n+p-2)\,k(r)\sinh^{p-2}(r)\cosh(r) + \lambda k(r)^p\right)\end{aligned}$$

désignons par

$$\begin{aligned}C(\varepsilon, \lambda, p, q) &= \frac{1}{2}(p-1)(\alpha+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-1}\sinh^p(\varepsilon)\\ &+ (n+p-2)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-1} k(0)\sinh^{p-2}(\varepsilon)\cosh(\varepsilon) + \lambda k(0)^p\end{aligned}$$

on obtient

$$\Delta_{W,p}^{H^n(-1)} V + \lambda V^{p-1} \leq C V^q$$

et en posons

$$\psi = \left(\frac{C}{\beta}\right)^{1\backslash(q-p+1)} \phi,$$

on obtient la fonction cherchée. ■

Lemme 1.3 *Soit Ω un domaine borné de M. On suppose qu'il existe un domaine compact $X \subset \Omega$ telle que $f_{|\partial X} > 0$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution u de l'équation* (1.1) *sur Ω, on a $u_{|\partial X} \leq C$.*

Preuve. Puisque $X \subset \Omega$ est compact, alors il existe un $\varepsilon > 0$ plus petit que le rayon d'injectivité de X et une constante positive β tels que le $\varepsilon-$voisinage de $\partial X, \cup_\varepsilon(\partial X)$ soit contenu dans Ω et

$$f_{|\partial X} \leq \beta. \tag{1.3}$$

Soit $x_o \in \partial X$, désignons par $r_o(x) = dist(x_o, x)$ la fonction distance sur la boule géodésique $B(x_o, \varepsilon)$ dans M. Soit $\lambda = \sup_{x\in\Omega} a(x)$, d'après le lemme 1.2, il existe une fonction positive et décroissante $V_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(r_o(x))$ définie sur la boule géodésique $B(\epsilon) \subset H^n(-1)$ qui vérifie

$$\begin{cases} \Delta_{W,p}^{H^n(-1)} V_\epsilon + \lambda V_\epsilon^{p-1} & \leq \beta V_\epsilon^q \\ V_\varepsilon \,|_{\partial B(x_o,\varepsilon)} = \infty \end{cases} \tag{1.4}$$

Puisque Ω est borné, en multipliant la métrique par une constante, s'il est nécessaire, on peut avoir

$$Ricc_{|\Omega} \geq -(n-1).$$

Et puisque le gradient de la fonction distance vérifie $|\nabla r| = 1$, on obtient

$$\Delta_p^M r = \Delta_M r.$$

Par des arguments de comparaisons géométriques, on obtient

$$\Delta_p^M r \leq \Delta^{H^n(-1)} r. \tag{1.5}$$

D'autre part

$$\Delta_p^M V_\varepsilon = div(\nabla\phi_\varepsilon(r(x))) = \phi'_\varepsilon \Delta_M r + \phi''_\varepsilon$$

par conséquent

$$\Delta_p^M V_\varepsilon = \phi_\varepsilon'^{p-2} \Delta_M V_\varepsilon + (p-2)\phi_\varepsilon'^{p-2}\phi''_\varepsilon$$

et

$$\Delta_p^M V_\varepsilon = \phi_\varepsilon'^{p-1} \Delta_M r + (p-1)\phi_\varepsilon'^{p-2}\phi''_\varepsilon.$$

D'après l'inégalité (1.5), on a

$$\Delta_p^M V_\varepsilon \leq \Delta^{H^n(-1)} V_\varepsilon.$$

ce qui d'après les inégalités (1.3) et (1.4) permet de déduire

$$\Delta_p^M V_\varepsilon + a(x) V_\varepsilon^{p-1} - f V_\varepsilon^q \leq \Delta_p^{H^n(-1)} V_\varepsilon + \lambda V_\varepsilon^{p-1} - \beta V_\varepsilon^q \leq 0$$

ce qui signifie que V_ε est une sur-solution positive de l'équation (1.1) sur la boule $B(x_o, \varepsilon)$.
Puisque $V_\varepsilon|_{\partial B(x_o,\varepsilon)} = \infty$, il suit du lemme 1.1 que pour toute solution u de l'équation (1.1), on a

$$u(x) \leq V_\varepsilon(x), \forall x \in B(x_o, \varepsilon).$$

d'où

$$u(x_o) \leq V_\varepsilon(x_o) = \phi_\varepsilon(0) = C$$

où C est une constante positive qui ne dépend ni de u ni de x_o ▪

Lemme 1.4 *Soit $\Omega \subset M$ un domaine borné. On suppose que $f_{|\partial\Omega} > 0$ et qu'il existe une solution positive et bornée $v \in H_1^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de l'équation (1.1) telle que v est bornée inférieurement par une constante positive.*
Alors le problème

$$\begin{cases} \Delta_p u + a(x) u^{p-1} - f u^q = 0 \ sur \ \Omega \\ u = \infty \qquad\qquad\qquad sur \ \partial\Omega \end{cases} .$$

admet une solution positive u telle que $u \geq v$ sur Ω. De plus $u \in C^{1,\alpha}(X)$ sur chaque compact $X \subset \Omega$, pour certain $\alpha \in (0, 1)$.

Preuve. Soit $C = \inf_\Omega v$ (ce qui est positive par hypothèse). Puisque v est bornée supérieurement sur Ω, alors il existe $n_o \in N^*$ tel que $\sup_\Omega v \leq n_o C$.
Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta_p u + a(x) u^{p-1} - f u^q = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = nc & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.6}$$

Clairement, $v \in H_1^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $nv \in H_1^p(\Omega) \cap L^\infty$ sont respectivement une sous et sur-solution positives du problème (1.6), donc par la méthode de sous et sur-solution, pour $n \geq n_o$ il existe une solution positive $u \in H_1^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ du problème (1.6) telle que $v \leq v_n \leq nv$. Puisque $(v_{n+1} - v_n)|_{\partial\Omega} = C > 0$, il suit d'après le Lemme 1.1

que $\{v_n\}_{n\geq n_o}$est une suite croissante de solutions positives de l'équation (1.1) sur Ω. Considérons l'ensemble

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

et considérons le compact $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset \Omega$. Alors, d'après le lemme 1.3 il existe pour $\varepsilon > 0$ (assez petit) une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\sup_{\partial\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \leq C_\varepsilon, \forall n \geq n_o.$$

Soit $\tilde{v} = C_\varepsilon C^{-1} v$ et prenons la constante C_ε telle que $C_\varepsilon C^{-1} > 1$ de telle façon que $\tilde{v}$ soit une sur-solution de l'équation (1.1). Puisque $(\tilde{v} - v_n) \mid_{\partial\Omega_\varepsilon} \geq 0$, il suit du Lemme 1.1 que $v_n \leq C_\varepsilon C^{-1} v$ sur Ω_ε pour tout $n \geq n_o$, et donc la suite $\{v_n\}_{n\geq n_o}$ est uniformément bornée sur des sous-ensembles compacts de Ω. D'où la suite $\{v_n\}_{n\geq n_o}$ converge, au sens des distributions, vers une solution faible et positive u de l'équation (1.1) sur Ω. D'après les théorèmes de régularité [27], [68], on a $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_\varepsilon), \alpha \in (0,1)$ et il est clair que $u = \infty$ sur $\partial\Omega$. ∎

Preuve du théorème 1.1. Soit $\underline{u} \in H_1^p(M) \cap L^\infty(M) \cap C^o(M)$ une sous-solution positive de l'équation(1.1) sur la variété M. Puisque f est admissible, alors il existe une suite croissante$\{\Omega_i\}_{i\geq 0}$ de domaines compacts de M telle que $M = \bigcup_{i\geq 0} \Omega_i$ et $f \mid_{\partial\Omega_i} > 0$ pour tout $i \geq 0$ et une sur-solution positive $\overline{u}_i \in H_1^p(M) \cap C^o(M)$ sur chaque Ω_i. Puisque $\alpha\overline{u}(\alpha > 1$ est une constante) est encore une sur-solution de l'équation(1.1) sur Ω_i, on peut supposer que $\overline{u}_i \geq \underline{u}$ sur Ω_i. Donc, par la méthode de sous et sur-solution, sur chaque Ω_i, il existe une solution positive $u_i \in C^{1,\alpha}, \alpha \in (0,1)$ de l'équation (1.1) telle que $\underline{u} \leq u_i \leq \overline{u}_i$. Puisque u_i est bornée inférieurement par $\underline{u}$ et Ω_i est compact, alors $\underline{u}$ est bornée inférieurement par une constante positive, et donc , d'après le Lemme 1.4, il existe une solution positive notée encore u_i du problème :

$$\begin{cases} \Delta_p u_i + a(x) u_i^{p-1} - f u_i^q = 0 & \text{sur } \Omega_i \\ u_i = \infty & \text{sur } \partial\Omega_i \end{cases}.$$

Puisque pour chaque $i_o \geq 1$ on a $(u_{i+1} - u_i) \mid_{\partial\Omega_{i_o}} \leq 0$, le lemme 1.1 implique que $\{u_i\}_{i\geq i_o}$ est une suite décroissante de solutions positives de l'équation (1.1) sur Ω_{i_o}. De plus, chaque u_i est bornée par $\underline{u}$, ce qui implique que la suite $\{u_i\}_{i\geq i_o}$ converge au sens des distributions vers une solution positive de l'équation (1.1). D'après les théorèmes de régularité [27], [68] on trouve que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_i), \alpha \in (0,1)$.
Maintenant, si v est une autre solution positive de l'équation (1.1) sur $M = \bigcup_i \Omega_i$, alors pour $x_o \in M$, il existe $i_o \geq 1$ tel que $x_o \in \Omega_i$ pour tout $i \geq i_o$. Puisque $u_i \mid_{\partial\Omega_i} = \infty$, le lemme 1.1 implique que $v \leq u_i$ pour tout $i \geq i_o$. En particulier, $v \leq \lim_{i\to\infty} u_i = u$. Ce qui signifie que u est maximale. ∎

1.2 Existence d'une sur-solution

Dans cette section, on montre que l'existence ou non existence d'une sur-solution positive de l'équation (1.1) sur un domaine borné $\Omega \subset M$ est complètement déterminée par le signe de la première valeur propre de l'opérateur non-linéaire $L_p u = -\Delta_p u - a|u|^{p-2}u$ sur l'ensemble $Z = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$.
On rappelle les définitions suivantes

Définition 1.3 *Soit $\Omega \in M$ un sous-ensemble régulier et borné de M. La première valeur propre de l'opérateur non-linéaire $L_p u = -\Delta_p u - a|u|^{p-2}u$ sur Ω est définie comme*

$$\lambda_{1,p}^{\Omega} = \inf\left(\int_{\Omega}(|\nabla u|^p - a|u|^p)dv_g\right)$$

où l'infimum est défini sur toutes les fonctions $u \in H_{1,0}^p$ telles que $\int_{\Omega}|u|^p dv_g = 1$

Définition 1.4 *Soit $S \in M$ un sous-ensemble borné de M. La première valeur propre de l'opérateur non-linéaire $L_p u = -\Delta_p u - a|u|^{p-2}u$ sur S est donnée par*

$$\lambda_{1,p}^{S} = \sup_{S \subset \Omega} \lambda_{1,p}^{\Omega}$$

où Ω est un domaine régulier.

Définition 1.5 *Soit $S \in M$ un sous-ensemble non-borné de M. La première valeur propre de l'opérateur non-linéaire $L_p u = -\Delta_p u - a|u|^{p-2}u$ sur S est définie par*

$$\lambda_{1,p}^{S} = \lim_{r \to \infty} \lambda_{1,p}^{\Omega_r}$$

où $\Omega_r = S \cap \overline{B}(o,r)$ pour tout $r > 0$ et tout $o \in M$ un point fixé de M.

Soit Ω un domaine borné. Il existe une fonction propre unique $\phi \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ qui satisfait

$$\begin{cases} \Delta_p \phi + a(x)\phi^{p-1} + \lambda_{1,p}^{\Omega}\phi^q = 0 & \text{sur } \Omega \\ \phi > 0 & \text{sur } \Omega \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} < 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Soit $Z = \{x \in M : f(x) = 0\}$ l'ensemble des Zeros de la fonction f et $\lambda_{1,p}^{Z\cap\Omega}$ la première valeur propre de l'opérateur non-linéaire $L_p u = -\Delta_p u - a|u|^{p-2}u$ sur $Z \cap \Omega$.
On prouve le théorème suivant

Théorème 1.2 *Soit f une fonction lisse sur un domaine borné Ω. Si $\lambda_{1,p}^{Z\cap\Omega} > 0$, alors il existent une sur-solution positive $\overline{u} \in H_1^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de l'équation* (1.1) *sur Ω. Inversement, s'il existe une sur-solution positive $\overline{u} \in H_1^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de l'é quation* (1.1) *sur Ω, alors $\lambda_{1,p}^{Z\cap\Omega} \geq 0$.*

Preuve. Soit $\Omega \subset M$ un domaine borné de M et supposons que $\lambda_{1,p}^{Z\cap\Omega} > 0$. Il suit, d'après la continuité de la première valeur propre par rapport à la C^o-déformation du domaine, qu'il existe un domaine borné Ω_o tel que $Z \cap \Omega \subset \Omega_o \subset \Omega$ et $\lambda_{1,p}^{\Omega_o} > 0$. D'autre part, sur Ω_o, il existe une fonction propre $\phi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_o)$ telle que

$$\begin{cases} \Delta_p\phi + a(x)\phi^{p-1} + \lambda_{1,p}^{\Omega}\phi^q = 0 & \text{sur } \Omega_o \\ \phi > 0 & \text{sur } \Omega_o \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega_o \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} < 0 & \text{sur } \Omega_o \end{cases}$$

Écrivons Ω sous la forme : $\Omega = (\Omega \setminus \Omega_o) \cup (\Omega \cap \Omega_o)$ et posons

$$\overline{u} = \chi_{\Omega_o}\phi + C(1 - \chi_{\Omega_o})$$

où χ_Ω est la fonction

$$\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{si} x \in \Omega \\ 0 & \text{si} x \notin \Omega \end{cases}$$

et C une constante positive assez grand de sorte que $\overline{u} = C$ est une.sur-solution de l'équation (1.1) sur $\Omega \setminus \Omega_o$.
Puisque $\lambda_{1,p}^{\Omega_o} > 0$, on obtient

$$\Delta_p\overline{u} + a(x)\overline{u}^{p-1} - f\overline{u}^q = -\lambda_{1,p}^{\Omega_o}\overline{u}^{p-1} - f\overline{u}^q \leq 0.$$

Par conséquent $\overline{u} \in H_1^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une sur-solution positive de l'équation (1.1) sur Ω.
Inversement, supposons qu'il existe une sur-solution positive $\overline{u} \in H_1^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de l'équation (1.1) sur Ω et $\lambda_{1,p}^{Z\cap\Omega} < 0$. Il suit toujours d'après la continuité de la première valeur propre par rapport à la C^o-déformation du domaine, qu'il existe un domaine borné Ω_1 tel que $Z \cap \Omega \subset \Omega_1 \subset \Omega$ et $\lambda_{1,p}^{\Omega_1} < 0$.
Avec les mêmes arguments que plus haut, on peut construire une suite décroissante $\{\Omega_i\}_{i\geq 0}$ de domaines bornés telle que $\Omega_i \subset \Omega, Z \cap \Omega = \bigcap_{i\geq 0} \Omega_i$ et $\lambda_{1,p}^{\Omega_i} < 0, \forall i \geq 0$.

Sur Ω_i, il existe une fonction propre positive $\phi_i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_i)$ telle que

$$\begin{cases} \Delta_p\phi_i + a(x)\phi_i^{p-1} + \lambda_{1,p}^{\Omega_i}\phi_i^q = 0 & \text{sur } \Omega_i \\ \phi_i > 0 & \text{sur } \Omega_i \\ \phi_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \\ \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} < 0 & \text{sur } \Omega_i \end{cases}$$

Considérons maintenant le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta_{g,p}u_i + a(x)u_i^{p-1} + fu_i^q = 0 & \text{sur } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i. \end{cases} \tag{1.7}$$

On peut facilement vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et $C > 0$ assez grand, $\varepsilon\phi_i$ et $C\overline{u}$ sont respectivement des sous et sur-solutions positives du problème (1.7) et $\varepsilon\phi_i \leq C\overline{u}$. Donc, par la méthode des sous et sur-solutions, pour chaque $i \geq 0$ il existe une solution positive $u_i \in C^{1,\alpha}$ du problème (1.7) telle que $\varepsilon\phi_i \leq u_i \leq C\overline{u}$. On a aussi $\frac{\partial ui}{\partial \nu} < 0$ sur $\partial\Omega_i$. On déduit que $\frac{\phi}{u_i}$ et $\frac{u_i}{\phi}_i \in L^\infty(\Omega_i)$.
Maintenant, on considère l'ensemble $\Omega_{i,C} = \{x \in \Omega_i : C\phi(x) > u_i(x)\}$. D'après le lemme2 dans [25], on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_{i,C}} \left(\frac{\Delta_{g,p}(C\phi_i)}{(C\phi_i)^{p-1}} - \frac{\Delta_{p,g}u_i}{u_i^{p-1}} \right) (u_i^p - C\phi_i^p)\, dv_g \\ &= -\int_{\Omega_{i,C}} \left(\lambda_{1,p}^{\Omega_i} + fu_i^{q-p+1}\right)(u_i^p - C\phi_i^p)\, dv_g. \end{aligned}$$

Pour i grand, cela contredit le fait que $\lambda_{1,p}^{\Omega_i} + fu_i^{q-p+1} < 0$, ce qui achève la preuve du théorème ▪
Le théorème suivant est une conséquence du théorème 2.4

Théorème 1.3 *Soit $f \geq 0$ une fonction lisse sur un domaine borné Ω. Si $\lambda_{1,p}^{Z\cap\Omega} > 0$, alors il existe une sur-solution positive $\overline{u} \in C^{1,\alpha}(\Omega), \alpha \in (0,1)$ de l'équation (1.1) sur Ω.*

Preuve. Soient Ω_o et Ω_1 des domaines bornés tels que $Z\cap\Omega \subset \Omega_o \subset \Omega_1$ et $\lambda_{1,p}^{Z\cap\Omega} > 0$. soit $\phi \in C^{1,\alpha}(\Omega_1), \alpha \in (0,1)$ la première fonction propre sur Ω_1 et $0 \leq v \leq 1$ une fonction lisse telle que $v = 1$ sur Ω_o,$v = 0$ en dehors de Ω_1. On peut vérifier facilement que la fonction $u = \phi v + C(1-\phi)$, C est une constante positive convenablement choisie, est une sur-solution positive de l'équation(1.1) est qui appartient à $C^{1,\alpha}(\Omega), \alpha \in (0,1)$
▪

Corollaire 1.1 *Soit Z l'ensemble des zéros de la fonction f i.e $Z = \{x \in M : f(x) = 0\}$. Si la première valeur propre $\lambda_{1,p}^Z$ de l'opérateur non-linéaire $L_pu = -\Delta_pu - a|u|^{p-2}u$ sur Z est strictement positive, alors la fonction f est admissible. En particulier, si $f > 0$ sur M, alors f est admissible.*

1.3 Exemple d'application

On considère le cylindre $M = R^+ \times N$, où (N, h) est une variété Riemannienne compacte de dimension $n-1$ munie d'une métrique h à courbure scalaire $S_h \geq 0$. On munie M de la métrique

$$g = dr^2 + f^2(r)h$$

où f est une fonction positive est lisse sur M. On désigne respectivement par S_g, R^k_{ijl}, $\overline{R}^k_{ijl}, \Gamma^l_{i,j}, 1 \leq i, j, k, l \leq n$, la courbure scalaire de g, tenseur de courbure sur N, tenseur de courbure sur M et les symboles de Christofell de la connexion de Levi-Civita associée à métrique g.
On tire de l'expression de $\Gamma^\alpha_{i,j}$

$$\Gamma^\alpha_{ij} = \frac{1}{2} g^{\alpha l} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right),$$

que

$$\begin{gathered}
\Gamma^1_{ij} = -f(r)f'(r)h_{ij}, \quad 2 \leq i, j \leq n \\
\Gamma^1_{i1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n \\
\Gamma^\alpha_{11} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq n \\
\Gamma^\alpha_{1j} = -f(r)/f'(r)\delta^\alpha_j, \quad 2 \leq \alpha,\ j \leq n \\
\Gamma^\alpha_{ij} = \frac{1}{2} g^{\alpha l} (\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}), \quad 2 \leq i, j, \alpha \leq n.
\end{gathered}$$

Un calcul direct nous permet d'écrire

$$\begin{gathered}
\overline{R}^\alpha_{1\alpha 1} = -f''(r)/f(r), \quad 2 \leq \alpha \leq n \\
\overline{R}^1_{i1j} = -f(r)f''(r)h_{ij}, \quad 2 \leq i, j \leq n \\
\overline{R}^\alpha_{i\alpha\alpha} = 0, \quad 1 \leq i, \alpha \leq n \\
\overline{R}^\alpha_{i\alpha j} = R^\alpha_{i\alpha j} - f'(r)^2 h_{ij}, \quad 2 \leq i, j, \alpha \leq n, j \neq \alpha
\end{gathered}$$

Donc

$$S_g = -2(n-1)f''(r)/f(r) - (n-1)(n-2)f'(r)^2/f(r)^2 + \frac{S_h}{f(r)^2}.$$

En prenant $f(r) = \exp r^2$, on obtient donc

$$f'(r) > 0 \tag{1.8}$$

$$\lim_{r \to \infty} f(r) = \lim_{r \to \infty} \lim f'(r)/f(r) = \lim_{r \to \infty} f''(r)/f(r) = \infty \tag{1.9}$$

Pour $r > 0$ suffisamment grand et d'après les inégalités (1.8) et 1.9 on a $S_g \leq -\varepsilon$. On peut donc supposer que

$$S_g \leq -\varepsilon \quad \text{pour tout } r > 0. \tag{1.10}$$

Soit $K = \varepsilon + 4(n-1)(1+nr^2)$ alors $k = -S_g \leq K$.
Maintenant, considérons sur M l'équation

$$\Delta_p u - S_g u^{p-1} - K u^{p^*-1} = 0 \tag{1.11}$$

avec $2 < p < n$ et $p^* = (pn/(n-p)$. D'abord, on remarque que la fonction K est positive et admissible par le corollaire 1.1. Posons

$$\phi = \begin{cases} (\delta r/r_1^2)^\alpha & \text{if } 0 < r < r_1 \\ (\delta/r)^\alpha & \text{if } r \geq r_1, \end{cases}$$

où $\alpha \geq 2/(p^* - p)$, δ et r_1 sont des constantes qui seront choisies ultérieurement.
Pour $0 < r < r_1$, on a

$$\begin{aligned} &\Delta_p\phi - S_g\phi^{p-1} - [4(n-1)(1+4n^2r^2)+\varepsilon]\phi^{p^*-1} \\ &\geq \left(\frac{\delta r}{r_1^2}\right)^{(p-1)\alpha}\big[\varepsilon + (\frac{\alpha}{r})^{p-1}\Delta r + (p-1)(\alpha-1)\alpha^{p-1}(\frac{1}{r})^p \\ &\quad - (4(n-1)(1+nr^2)+\varepsilon)(\frac{\delta r}{r_1^2})^{(p^*-p)\alpha}\big]. \end{aligned}$$

En prenant δ petit, r_1 grand, et en tenant compte de

$$\Delta_g r = f'(r)/f(r) = 2(n-1)r$$

on obtient que le membre de gauche de l'équation(1.11) est positive.
Dans le cas où $r \geq r_1$, les mêmes calculs donnent

$$\begin{aligned} &\Delta_p\phi - S_g\phi^{p-1} - (4(n-1)(1+4n^2r^2)+\varepsilon)\phi^{p^*-1} \\ &\geq (\frac{\delta}{r})^{\alpha(p-1)}\big[\varepsilon - 2(n-1)\alpha^{p-1}(\frac{1}{r})^{p-2} + (p-1)(\alpha+1)\alpha^{p-1}(\frac{1}{r})^p \\ &\quad - (4(n-1)(1+4n^2r^2)+\varepsilon))(\frac{\delta}{r})^{\alpha(p^*-p)}\big]. \end{aligned}$$

Les mêmes arguments que précédemment montrent que le membre de gauche de l'équation (1.11) est positive et par suite, ϕ est une sous-solution positive de l'équation (1.11) sur M. D'après le theorem 1.1, cette equation admet une solution positive sur la variété M.

Chapitre 2

Application de la méthode des sur et sous-solutions réduite

(M, g) désigne toujours une variété Riemannienne complète non-compacte, munie d'une métrique g et de dimension $n \geq 2$. Dans le chapitre précédent, on a présenté une méthode des sur et sous-solutions réduite pour montrer l'existence des solution pour une classe d'équations quasi-linéaires sur une variété complète non-compacte. Dans ce chapitre, on applique cette méthode pour résoudre l'équation dite de la courbure scalaire prescrite de type généralisée. Cette equation correspond au cas $q = p^*$ dans les équations (1.1) présentées dans le chapitre 1.
Soit a et f des fonctions lisses sur la variété M. L'équation de la courbure prescrite du type généralisée est de la forme

$$\Delta_p u + a\,|u|^{p-2}\,u - f\,|u|^{p^*-2}\,u = 0 \tag{2.1}$$

avec $p \in (1, n), p^* = \frac{pn}{n-p}$ et $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ est l'opérateur p-Laplacien de u sur M. Désignons par S_g la courbure scalaire de la métrique g. Dans le cas où $p = 2$ et $a = \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$, l'équation (2.1) correspond à l'équation du type Yamabé qui a été l'objet d'investigation durant plusieurs décennies. On réfère à titre d'exemples [4], [28], [29], [30],[44], [38, 51,52], [50], [52], [53], [56], [59] et [61].
L'équation (2.1) a été investie sur les variétés compactes par O.Druet [27]. Parmi les résultats obtenus dans l'article sus cité on a le théorème suivant

Théorème 2.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ et $p \in (1, n)$. Soient a et f deux fonctions lisses sur M. Si a et f sont positives, alors l'équation (2.1) possède une solution faible et positive $u \in C^{1,\alpha}(M), \alpha \in (0, 1)$.*

Dans ce chapitre, on étend le théorème 2.1 sur les variétés complètes non-compactes. Pour arriver à cette fin, on applique la méthode de réduction du chapitre 1, donnée

par le théorème 1.1.
Dans toute la la suite, on suppose que le rayon d'injectivité est positif et la courbure de Ricci bornée inférieurement : une telle variété est dite à géométrie bornée.
On se propose de montrer le résultat suivant

Théorème 2.2 *Soient (M, g) une variété Riemannienne complète de dimension $n \geq 3$ et $p \in (1, n)$. Soient a, f deux fonctions lisses sur M. Supposons que*

1. *M est à géométrie bornée.*
2. *La fonction f est admissible avec $f \geq c_o > 0$ où c_o est une constante, a est bornée, satisfait aux conditions $a \leq f$ et $\int_{\Omega_i} a = 0$ sur chaque domaine compact Ω_i de la suite exhaustive de M et est telle que l'opérateur $L_p u = -\Delta_p u - a|u|^{p-2}u$ soit coercif*

Alors (2.1) *admet une solution positive et maximale $u \in H_1^p(M)$. De plus, $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(M)$ pour certain $\alpha \in (0, 1)$.*

Nous commençons par établir les lemmes suivants

Lemme 2.1 *Soient Ω un domaine compact de M et f une fonction C^∞ sur Ω. Alors le problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi = f & sur\ \Omega \\ \phi = 0, & sur\ \partial\Omega \end{cases} \quad . \tag{2.2}$$

admet une solution $\phi \in C^{1,\alpha}(\Omega), \alpha \in (0, 1)$.

Preuve. Soit $A = \{\phi \in H^p_{1,0}(\Omega) : \int_\Omega f\phi = 1\}$, on pose

$$\mu = \inf_{\phi \in A} \int_\Omega |\nabla \phi|^p.$$

L'ensemble A est non vide puisqu'il contient la fonction $\phi = \frac{\mathrm{sgn}(f)|f|^{p-1}}{\int_\Omega |f|^p}$.
Soit $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante dans A, c'est à dire $\phi_i \in A$ telle que

$$\lim_{i \to \infty} \int_\Omega |\nabla \phi_i|^p = \mu$$

Alors, si on désigne par $\lambda_{1,p}$ la première valeur propre non nulle de l'opérateur $p-$Laplacien, on aura

$$\lambda_{1,p} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_i|^p dv_g}{\int_\Omega |\phi_i|^p dv_g}.$$

Donc

$$\int_\Omega |\phi_i|^p dv_g \leq \lambda_{1,p}^{-1} \int_\Omega |\nabla \phi_i|^p dv_g < \frac{\mu}{\lambda_{1,p}} + 1.$$

La suite $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_1^p(\Omega)$, d'où par réflexivité de l'espace $H_1^p(\Omega)$ et le théorème de Rellich-Kondrakov, il existe une sous-suite de $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ notée encore (ϕ_i) telle que

(a) $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\phi \in H_1^p(\Omega)$

(b) $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $\phi \in L^p(\Omega)$.

De (b) on déduit que ϕ_i converge fortement vers ϕ dans $L^1(\Omega)$, ce qui entraîne que $\phi \in A$.

En plus, de (a) on a

$$\|\phi\|_{H_1^p(\Omega)} \leq \lim_{i\to+\infty} \inf \|\phi_i\|_{H_1^p(\Omega)}.$$

et par la condition (b), on a aussi

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^p dv_g \leq \liminf_{i\to+\infty} \int_\Omega |\nabla\phi_i|^p dv_g = \mu.$$

Puisque $\phi \in A$, on déduit que

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^p = \mu = \inf_{\psi\in A} \int_\Omega |\nabla\psi|^p dv_g.$$

Le théorème des multiplicateurs de Lagrange nous permet d'affirmer que ϕ est une solution faible de l'équation (2.2) ∎

Notons

$$W^{1,p}(\Omega) = \begin{cases} H_1^p(\Omega) & \text{si } \partial\Omega = \phi \\ H_{1,0}^p(\Omega) & \text{si } \partial\Omega \neq \phi \end{cases}$$

on cite après O.Druet [27], la proposition suivante qui assure la régularité de la solution obtenue

Proposition 2.3 *Soit $h \in C^o(\Omega\times R)$ une fonction telle que, pour tout $(x,r) \in \Omega\times R$, $|h(x,r)| \leq C|r|^{p^*-1} + D$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution de $-\Delta_p u + h(x,u) = 0$, alors $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.*

Cette proposition a été prouvée par O.Druet [27] dans le contexte des variétés Riemanniennes fermées. Sa preuve est basée sur l'inégalité de Sobolev encore valable sur les variétés à bord, d'où l'extension de la proposition aux variétés compactes à bord.

2.1 Existence d'une sur-solution

Dans cette section, on construit une sur-solution positive de l'équation (2.2) sur chaque domaine compacte de M. L'existence d'une telle sur-solution est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.4 *Soit Ω un domaine compact de M. Si f et a sont deux fonctions lisses sur M, sont telles que $f \geq c_0 > 0$ et $a(x) \leq f(x), \forall x \in \Omega$, alors il existe une sur-solution positive de l'équation* (2.1) *surΩ.*

Preuve. Soit $u = e^v$ avec $v \in H_1^p(\Omega)$ une fonction qui va être précisée plus tard, et $q = p^* - 1$, alors pour toute fonction positive $\phi \in H_1^p(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \Delta_p u \phi dv_g = \int_\Omega e^{(p-1)v}(\Delta_p v + (p-1)|\nabla v|^p)\phi dv_g$$

et

$$\int_\Omega (\Delta_p u + au^{p-1} - fu^q)\phi dv_g = \int_\Omega e^{(p-1)v}(\Delta_p v + (p-1)|\nabla v|^p + a - fe^{(q-p+1)v})\phi dv_g.$$

Donc il suffit de chercher une fonction v telle que

$$\int_\Omega e^{(p-1)v}(\Delta_p v + (p-1)|\nabla v|^p + a - fe^{(q-p+1)v})\phi dv_g \leq 0 \tag{2.3}$$

Soit $b > 0$ une constante et considérons la solution de l'équation $\Delta_p h = -b^{1-p}a$, dont l'existence est assurée par le lemme 2.1.
On prend alors $v = bh + t$ avec t une constante qui va être déterminée par la suite. L'inégalité (2.3) devient

$$\int_\Omega e^{(p-1)(bh+t)}(b^{p-1}\Delta_p h + (p-1)b^p|\nabla h|^p + a - fe^{(q-p+1)(bh+t)})\phi dv_g \leq 0$$

Si on prend t tel que $e^{(q-p+1)t} = b^{p-1}$, alors on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega e^{(p-1)(bh+t)}((p-1)b|\nabla h|^p - fe^{(q-p+1)bh})\phi dv_g \\ &\leq \int_\Omega e^{(p-1)(bh+t)}((p-1)b|\nabla h|^p - fm_o)\phi dv_g \leq 0\end{aligned}$$

avec $m_o = \min_{x\in\Omega} e^{(q-p+1)bh(x)}$, puisque la fonction f est telle que $f \geq c_o > 0$, on choisit b assez petit de sorte que

$$b(p-1)|\nabla h|^p - c_o m_o \leq 0$$

2.2 Existence d'une sous-solution

Soit $\Omega \subset M$ un domaine borné de M. On rappelle que sur Ω la première valeur propre de l'opérateur non linéaire $L_g u = -\Delta_p u - a\,|u|^{p-2}\,u$ est définie par

$$\lambda_{1,p}^{\Omega} = \inf_{\{\phi \in H_{1,0}^p(\Omega) : \int_\Omega |\phi|^p = 1\}} \int_\Omega (|\nabla\phi|^p - a|\phi|^p)\,dv_g \tag{2.4}$$

Puisque $|\nabla\phi| = |\nabla|\phi||$, on peut supposer que $\phi \geq 0$. La première fonction propre associée à $\lambda_{1,p}^{\Omega}$est solution positive du problème

$$\begin{cases} \Delta_p\phi + k\phi^{p-1} = -\lambda_{1,p}^{\Omega}\phi^{p-1} & \text{sur } \Omega \\ \phi > 0 & \text{sur } \Omega \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

Soit $\{\Omega_i\}_{i\geq 0}$ une suite exhaustive de M par des domaines compacts à bords réguliers telle que $\Omega_i \subset \overset{o}{\Omega}_{i+1}$.
On démontre les lemmes suivants

Lemme 2.2 *Si a est une fonction bornée, alors la suite $\{\lambda_{1,p}^{\Omega_i}\}_i$ définie par* (2.4) *converge.*

Preuve. Par définition, la suite $\lambda_{1,p}^{\Omega_i}$ est décroissante. Soit $\lambda_{1,p}$ sa limite, puisque la fonction a est bornée, il existe une constante $c > 0$ telle que $-a + c \geq 1$ et on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|\nabla\phi|^p + (c-a)\phi^p)\,dv_g &\geq \int_\Omega (|\nabla\phi|^p + \phi^p)\,dv_g \\ &\geq 2^{1-p}\left((\int_\Omega |\nabla\phi|^p dv_g)^{1/p} + (\int_\Omega \phi^p dv_g)^{1/p} \right)^p \\ &= 2^{1-p}\|\phi\|^p_{H_1^p(\Omega)} \end{aligned}$$

L'opérateur $L_p u = -\Delta_p u + (c-a)\,|u|^{p-2}\,u$ est donc coercif et pour toute ϕ_i fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_{1,p}^{\Omega_i}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_{1,p}^{\Omega_i} &= \int_{\Omega_i} (|\nabla\phi_i|^p - k\phi_i^p) \\ &\geq -c + 2^{1-p}\|\phi_i\|^p_{H_1^p(\Omega)} \\ &\geq -c + 2^{1-p} \geq -c + 2^{1-n}. \end{aligned}$$

et donc $\lambda_{1,p} > -\infty$ ▪

Lemme 2.3 *Si la fonction a est bornée, alors le problème*

$$\begin{cases} \Delta_p \phi + a\phi^{p-1} = -\lambda_{1,p}\phi^{p-1} & sur\ M \\ \phi > 0 & sur\ M \end{cases} \tag{2.5}$$

admet une solution positive $\phi \in C^{1,\alpha}_{loc}(M)$.

Preuve. Soient $(\Omega_i)_{i\geq 1}$ une suite exhaustive de la variété M par des domaines compacts et (ϕ_i) la suite de fonctions propres positives de l'opérateur $L_p u = -\Delta_p u - a u^{p-1}$ sur chaque Ω_i.
On a

$$\int_{\Omega_i} (|\nabla \phi_i|^p - a\phi_i^p)\, dv_g = \lambda_{1,p}^{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \phi_i^p dv_g = \lambda_{1,p}^{\Omega_i} \leq \lambda_{1,p}^{\Omega_1}$$

de sorte que

$$\int_{\Omega_i} |\nabla \phi_i|^p dv_g \leq \max_{x\in M} |a| + \lambda_{1,p}^{\Omega_1} < \infty.$$

D'autre part, pour tout $i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\left(\left(\int_{\Omega_i} |\nabla \phi_i|^p dv_g\right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega_i} \phi_i^p dv_g\right)^{1/p}\right)^p &\leq 2^{p-1}(\int_{\Omega_i} (|\nabla \phi_i|^p + \phi_i^p)\, dv_g) \\ &\leq 2^{p-1}\left(1 + \max_{x\in M} |a| + \lambda_{1,p}^{\Omega_1}\right) < \infty.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Par réflexivité de l'espace $H_1^p(M)$, on déduit que ϕ_i converge vers ϕ faiblement dans $H_1^p(M)$ et en plus

$$\|\phi\|^p_{H_1^p(M)} \leq \liminf \|\phi_i\|^p_{H_1^p(M)}. \tag{2.7}$$

Maintenant, puisque $\int_M \phi_i^p = 1$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un domaine compact $K_i \subset M$ tel que $\int_{M\setminus K_i} \phi_i^p < \frac{\varepsilon}{2^i}$, soit $K = \cap_{i=1}^{\infty} K_i$

$$\int_{M\setminus K} \phi_i^p dv_g = \int_{\cup_{i=1}^{\infty}(M\setminus K_i)} \phi_i^p dv_g \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M\setminus K_i} \phi_i^p dv_g < \epsilon.$$

De (2.6), on obtient par le théorème de Rellich-Kondrakov que ϕ_i converge vers ϕ fortement dans $L^p(K)$.
On affirme que

$$\int_M \phi^p dv_g = 1; \tag{2.8}$$

car, sinon

$$1-\int_M \phi^p dv_g > 0,$$

et alors

$$1=\lim_{i\to\infty}\int_M \phi_i^p dv_g \leq \varepsilon + \lim_{i\to\infty}\int_K \phi_i^p dv_g = \varepsilon + \int_K \phi_d^p vg$$

et donc $\varepsilon \geq 1-\int_M \phi^p$, une contradiction avec le fait que ε est arbitrairement choisi.
Maintenant, de (2.7) et (2.8) on obtient

$$\int_M |\nabla\phi|^p dv_g \leq \liminf \int_M |\nabla\phi_i|^p dv_g$$

donc

$$\int_M |\nabla\phi|^p dv_g - k\phi^p dv_g \leq \liminf(\int_M |\nabla\phi_i|^p dv_g - k\phi_i^p dv_g)$$

Par le lemme 2.2 et le fait que $\int_M \phi^p dv_g = 1$, on déduit

$$\int_M |\nabla\phi|^p dv_g - a\phi^p dv_g = \lambda_{1,p}.$$

et donc ϕ est une solution faible de l'équation

$$\Delta_p\phi + a\phi^{p-1} = -\lambda_{1,p}\phi^{p-1}.$$

et d'après la proposition 2.3, $\phi \in C^{1,\alpha}_{loc}(M)$. ∎
La positivité de ϕ découle du principe du maximum suivant

Proposition 2.5 (O.Druet [27]) *Soient (Ω, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$, et $1 < p < n$. Soit $u \in C^1(\Omega)$ une fonction telle que $-\Delta_p u + h(x,u) \geq 0$ sur Ωet h une fonction satisfaisante à*

$$h(x,r) < h(x,s), \quad x\in\Omega,\ 0\leq r < s$$
$$|h(x,u)| \leq C(K+|r|^{p-2})|r|, \quad (x,r)\in M\times R,\ C>0.$$

Si $u \geq 0$ sur Ω et u est non identiquement nulle, alors $u > 0$ sur Ω.

Si λ est une valeur propre de l'opérateur $L_p\phi = -\Delta_p\phi - a|\phi|^{p-2}\phi$, alors $\lambda + c$ l'est aussi pour l'opérateur $L_p\phi = -\Delta_p\phi - (a-c)|\phi|^{p-2}\phi$ où c est une constante. Puisque a est une fonction bornée, on choisie c telle que $c - a > 0$, et donc on obtient

$$-\Delta_p\phi + h(x,\phi) \geq 0$$

où

$$h(x, \phi) = (c - a(x))\,|\phi|^{p-2}\,\phi.$$

Il est clair que la fonction h satisfait les conditions de la proposition 2.5, et par conséquent si $\phi \geq 0$ alors $\phi > 0$.
On établit le lemme suivant qui nous servira dans la suite

Lemme 2.4 *Soient (M, g) une variété Riemannienne à géométrie bornée. Supposons que a est une fonction lisse et bornée sur M et $u \in H_1^p(M)$ est une solution faible positive de l'équation*

$$\Delta_p u + a(x)u^{p-1} = 0 \tag{2.9}$$

alors $u \in L^\infty(M)$.

Preuve. On va utiliser la méthode itérative de Moser. Soient $k \geq 1$ un réel et $t = k + p - 1$. On a alors,

$$-k\int_M |\nabla u|^p u^{k-1} dv_g + \int_M a(x)u^{p+k-1} dv_g = 0. \tag{2.10}$$

et en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|u^{\frac{t}{p}}\|_{p^*}^p &= \|u\|_{t\frac{p^*}{p}}^t \\ &\leq (K(n,p)^p + \varepsilon)\|\nabla u^{\frac{t}{p}}\|_p^p + B\|u\|_t^t \\ &= (K(n,p)^p + \varepsilon)(\frac{t}{p})^p\|u^{\frac{t}{p}-1}\nabla u\|_p^p + B\|u\|_t^t \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $K(n,p)$ est la meilleure constante dans l'inclusion de Sobolev $H_1^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ et B est une constante positive qui depend de ε.
Puisque

$$\|u^{\frac{t}{p}-1}\nabla u\|_p^p = \int u^{t-p}|\nabla u|^p$$

et en tenant compte de (2.10), on obtient

$$\int u^k \Delta_p u dv_g = -k\int u^{k-1}|\nabla_g u|^p dv_g \leq \|a\|_\infty \|u\|_t^t.$$

et donc (2.11) devient

$$\|u\|_{t\frac{p^*}{p}}^t \leq (K(n,p)^p + \varepsilon)(\frac{t}{p})^p\frac{1}{k}(\|a\|_\infty + B)\|u\|_t^t$$

ou encore

$$\|u\|_{t\frac{p^*}{p}} \leq \left((K(n,p)^p+\varepsilon)\left(\frac{t}{p}\right)^p \frac{1}{k}(\|a\|_\infty + B)\right)^{\frac{1}{t}} \|u\|_t. \tag{2.12}$$

Posons $\frac{t}{p}=\beta^i$, où i est un entier positif et $\beta=\frac{p^*}{p}=\frac{n}{n-p}$. Alors (2.12) devient

$$\|u\|_{p\beta^{i+1}} \leq ((K(n,p)^p+\varepsilon)\beta^{pi}(\|a\|_\infty + B))^{\frac{1}{p\beta^i}} \|u\|_{p\beta^i}.$$

Par récurrence on obtient

$$\|u\|_{p\beta^{i+1}} \leq (K(n,p)^p+\varepsilon)^{\frac{1}{p}(\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{\beta^j})} \beta^{\sum_{j=0}^{i}\frac{j}{\beta^j}} (\|a\|_\infty + B)^{\frac{1}{p}(\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{\beta^j})} \|u\|_p. \tag{2.13}$$

Maintenant, puisque

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^j}=\frac{\beta}{\beta-1}=\frac{n}{p}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{\beta^j} &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{(1+\pi)^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\sum_{p=0}^{j}C_j^p\pi^p} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\sum_{p=0}^{j-1}C_j^p\pi^p} \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\pi)^{j-1}} = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\pi)^j} \\ &= \frac{n-p}{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^j} = \frac{n(n-p)}{p^2}\end{aligned}$$

en faisant $j\to\infty$ dans (2.13), on déduit que $u\in L^\infty(M)$. ∎

Théorème 2.6 *Soit (M,g) une variété Riemannienne complète et non-compacte de dimension $n\geq 2$ et à géométrie bornée. Supposons que $a\in C^\infty(M)\cap L^\infty(M)$ est telle que l'opérateur $L_pu=-\Delta_pu-a|u|^{p-2}u$ et coercif, alors il existe une sous-solution positive de l'équation (2.1) sur M.*

Preuve. Désignons par ϕ la fonction propre positive du l'opérateur $L_pu=-\Delta_pu-a|u|^{p-2}u$ associée à la première valeur propre $\lambda_{1,p}$ qui est positive puisque l'opérateur L_pu est coercif. Par le lemme 2.4, on peut supposer que $\phi<1$.
Pour $r>0$, on considère la fonction

$$u_-=\left(e^{r^2}-\phi^{r^3}\right)^{\frac{1}{r}+1}.$$

Un calcul direct donne

$$\nabla u_- = -r^2(r+1)(e^{r^2}-\phi^{r^3})^{\frac{1}{r}}\phi^{r^3-1}\nabla\phi,$$

$$\Delta_p u_- = \left[r^2(r+1)(e^{r^2}-\phi^{r^3})^{1/r}\phi^{r^3-1}\right]^{p-1}$$
$$\left[-\Delta_{g,p}\phi+(p-1)\left(\frac{1-r^3}{\phi}+\frac{r^2\phi^{r^3-1}}{e^{r^2}-\phi^{r^3}}\right)|\nabla\phi|^p\right].$$

donc

$$\Delta_p u_- + a u_-^{p-1} - f u_-^q$$
$$= \left[r^2(r+1)(e^{r^2}-\phi^{r^3})^{\frac{1}{r}}\phi^{r^3}\right]^{p-1}$$
$$\times\Big[-\Delta_p\phi+(p-1)\left(\frac{1-r^3}{\phi}+\frac{r^2\phi^{r^3-1}}{e^{r^2}-\phi^{r^3}}\right)|\nabla_g\phi|^p+k\left(\frac{e^{r^2}-\phi^{r^3}}{r^2(r+1)\phi^{r^3}}\right)^{p-1}\phi^{p-1}$$
$$-K\left(\frac{e^{r^2}-\phi^{r^3}}{r^2(r+1)\phi^{r^3}}\right)^{p-1}(e^{r^2}-\phi^{r^3})^{(q-p+1)(1+\frac{1}{r})}\phi^{p-1}\Big]$$
$$= \left[r^2(r+1)(e^{r^2}-\phi^{r^3})^{\frac{1}{r}}\phi^{r^3-1}\right]^{p-1}$$
$$\times\Big[\lambda_{1,p}+(p-1)\frac{1}{\phi^p}\left(1-r^3+\frac{r^2\phi^{r^3}}{e^{r^2}-\phi^{r^3}}\right)|\nabla\phi|^p+a\left(\left(\frac{e^{r^2}-\phi^{r^3}}{r^2(r+1)\phi^{r^3}}\right)^{p-1}+1\right)$$
$$-f\left(\frac{e^{r^2}-\phi^{r^3}}{r^2(r+1)\phi^{r^3}}\right)^{p-1}(e^{r^2}-\phi^{r^3})^{(q-p+1)(1+\frac{1}{r})}\Big]$$

Puisque

$$\lim_{r\to 0}(e^{r^2}-\phi^{r^3})^{1+\frac{1}{r}}=0$$

et

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{e^{r^2}-\phi^{r^3}}=1$$

on déduit que

$$u_- = (e^{r^2}-\phi^{r^3})^{1+\frac{1}{r}}\in H_{1,\mathrm{loc}}^p(M)$$

est une sous-solution de l'équation (2.1) sur M. Il est clair que $u_-\in C^o(M)\cap L^\infty(M)$

∎

Finalement, le théorème 2.4 est une simple conséquence du théorème 1.1 et du théorème 2.6

Chapitre 3

Equation de courbure scalaire prescrite de type généralisé sur les variétés Riemannienne complètes non-compactes

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème d'existence des solutions faibles et positives de l'équation de la courbure scalaire prescrite du type généralisé

$$\Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2}\,u = f(x)\,|u|^{p^*-2}\,u. \tag{3.1}$$

où $p \in (1,n), p^* = \frac{np}{n-p}$ et $\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u)$ est l'opérateur $p-$Laplacien de u.

Dans le chapitre précédent, on a traité ce problème dans le cas où la fonction f est négative, on a utilisé la méthode réduite présentée dans le chapitre 1. Si la fonction f est non-négative, cette méthode semble inadaptée. Dans cette partie on utilise la méthode variationnelle. On rappelle que l'outil principal dans cette méthode est l'inclusion $H_1^p(M) \hookrightarrow L_q(M)$, pour $1 < q \leq p^*$. Si M est compacte l'inclusion est compacte pour $p < q < p^*$ et continue pour $1 < q \leq p^*$. Si M est complète non-compacte, cette inclusion est continue pourvu que la variété soit à géométrie bornée. Nous obtenons le résultat suivant

Théorème 3.1 *Soient(M,g) une variété Riemannienne complète non-compacte de dimension $n \geq 2$ et $1 < p < n$ tel que $p^2 < n$. Soient $a, f \in C^\infty(M)$ deux fonctions lisses sur M. Supposons que l'opérateur $L_p u = \Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2}\,p$ est coercif. Sous les condition suivantes*

1. (M,g) est à géométrie bornée i.e : $Ricci > -c$, où $c \geq 0$ est une constante, et le rayon d'injectivité est strictement positif.
2. Les fonctions a et f sont bornées et f est strictement positive.
3. Il existe une constante $C > 0$ telle que $|\nabla f| \leq Cf, |\nabla^2 f| \leq Cf, \int_M |a|^{\frac{n}{p}} dv_g \leq C \int_M f dv_g < \infty$ et $\int_M f^{p/p*} dv_g < \infty$
4. En un point x_o où la fonction f atteint un maximum, on suppose l' un des cas suivants

   (i) $p < 2$, $n > 3p - 2$ et $a(x_o) < 0$

   (ii) $p = 2$ et $\frac{8(n-1)}{(n-2)(n-4)} a(x_o) < \frac{-\Delta f(x_o)}{f(x_o)} + \frac{2R(x_o)}{n-4}$

   (iii) $p > 2$ et $(\frac{n-3p+2}{p}) \frac{\Delta f(x_o)}{f(x_o)} < R(x_o)$.

Alors, il existe une solution positive faible $u \in H^p_{1,loc}(M)$ de l'équation (3.1) telle que $u \in C^{1,\alpha}(K)$ sur chaque sous-ensemble compact K de M pour certain $\alpha \in (0,1)$.

3.1 Construction d'une suite minimisante

Dans cette partie, on construit une suite minimisante pour l'équation (3.1). On commence par donner le résultat de O.Druet [26] obtenu dans le cas des domaines compacts.

Théorème 3.2 (O.Druet[27]) *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte et $1 < p < n$ tel que $p^2 < n$. Soient $a, f \in C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M. On suppose que l'opérateur $L_p u = \Delta_p u + a(x) |u|^{p-2} u$ est coercif. On suppose qu' en un point x_o où la fonction f atteint un maximum, on a les conditions suivantes*

(i) $p < 2$, $n > 3p - 2$ et $a(x_o) < 0$

(ii) $p = 2$ et $\frac{8(n-1)}{(n-2)(n-4)} a(x_o) < \frac{-\Delta f(p)}{f(p)} + \frac{2R(x_o)}{n-4}$

(iii) $p > 2$ et $(\frac{n-3p+2}{p}) \frac{\Delta f(x_o)}{f(x_o)} < R(x_o)$.

Alors, il existe une solution positive $u \in H^p_1(M)$ de l'équation (3.1) telle que $u \in C^{1,\alpha}(M)$ pour certain $\alpha \in (0,1)$.

Soit $(\Omega_j)_j$ une suite exhaustive de la variété complète M par des domaines compacts à bord régulier tels que $\Omega_j \subset \overset{o}{\Omega}$. On définit

$$\mu(\Omega_j) = \inf_{\{u \in H^p_1(\Omega_i) : \int_{\Omega_i} |u|^{p^*} dv_g = 1\}} \int_{\Omega_i} (|\nabla u|^p + |u|^p) dv_g$$

Soit $(u_j)_j$ une suite de solutions, donnée par le théorème 3.2, du problème

$$\begin{cases} \Delta_p u_j + a(x)u_j^{p-1} = \mu(\Omega_j) f u_j^{p^*-1} & \text{sur } \Omega_j \\ u_j > 0 & \text{sur } \Omega_j \\ u_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega_j. \end{cases} \tag{3.2}$$

D'après la décroissance de la suite $\mu(\Omega_j)$ et la coercivité de l'opérateur $L_p u = \Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2}\,u$, on obtient,

$$\|u\|_{H_1^p(\Omega_j)} \leq \frac{1}{c}\mu(\Omega_1) \tag{3.3}$$

où $c > 0$ est une constante. Puisque (3.3) implique que la suite $(u_i)_i$ est bornée dans l'espace $H_1^p(M)$, on peut en extraire une sous-suite de (u_i) encore notée par (u_i) telle que u_i converge faiblement vers une fonction u dans $H_1^p(M)$. On obtient alors

Proposition 3.3 *La suite (u_i) converge faiblement sur chaque compact K de M vers une solution $u \in C^{1,\alpha}(K)$ de*

$$\begin{cases} \Delta_p u + a(x)u^{p-1} = f u^{p*-1} & \textit{sur } K \\ u > 0 & \textit{sur } K \\ u = 0 & \textit{sur } \partial K \end{cases} \tag{3.4}$$

pour un certain $\alpha \in (0,1)$.

Pour prouver que la suite (u_i) est bornée dans $C^{1,\alpha}(K)$, on utilise les résultats obtenus par O.Druet [26] dans le contexte des variétés et dont l'origine remonte à Tolksdorf [68], Guedda & Veron [37] et Vazquez [72].

Proposition 3.4 *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. Supposons que $u \in H_1^p(M)$ est une solution de $\Delta_p u + a(x)u^{p-1} = f$, $n \geq 2, 1 < p < n, a(x) \in L^{\frac{n}{p}}(M)$ et $f \in L^{\frac{n}{p}}(M)$, alors $u \in L^t(M)$ pour $t \in [1, \infty)$.*

Proposition 3.5 *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. Supposons que $n \geq 2$, $1 < p < n$, $f \in L^s(M)$ pour certain $s > \frac{n}{p}$ et $u \in H_1^p(M)$ est une solution de $\Delta_p u = f$ sur M. Alors $u \in L^\infty(M)$.*

Proposition 3.6 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n et $h(x, r) \in C^o(M \times R)$. Supposons que $n \geq 2$, $1 < p < n$ et $\forall (x, r) \in M \times R, |h(x, r)| \leq C|r|^{p*-1} + D$. Si $u \in H_1^p(M)$ est une solution de $\Delta_p u + h(x, u) = 0$, alors $u \in C^{1,\alpha}(M)$. De plus $\|u\|_{C^{1,\alpha}(M)} \leq \tilde{c}$, où $\tilde{c}$ est une constante qui dépend seulement de $\|u\|_{L^\infty(M)}$ et de $\|h(x, r)\|_{L^\infty(M)}$.*

Preuve de la proposition 3.3. D'abord on montre que la suite (u_j) est bornée dans $L^t(K)$ pour tout $t \in [1, +\infty)$. En tenant compte de la Proposition 3.4, il suffit de vérifier que la suite $(a(x) - f u_j^{p^*-p})$ est bornée dans $L^{\frac{n}{p}}(K)$.
On a

$$\int_K |a(x) - f u_j^{p*-p}|^{\frac{n}{p}} dv_g \le 2^{\frac{n}{p}-1} \int_K (|a(x)|^{\frac{n}{p}} + |f|^{\frac{n}{p}} u_j^{p^*}) dv_g$$
$$= 2^{\frac{n}{p}-1} [(\|a\|_{\frac{n}{p}}^K)^{\frac{n}{p}} + (\|f\|_\infty^K)^{\frac{n}{p}} (\|u_j\|_{p^*}^K)^{p^*}]$$

où $\|u\|_p^K = \left(\int_K |u|^p dv_g\right)^{1/p}$. Puisque par relation(3.3) la suite (u_j) est bornée dans $L^p(K)$, donc dans $L^{p^*}(K)$, on obtient directement le résultat. En suite, on montre que (u_j) est bornée dans $L^\infty(K)$. D'après la proposition 3.5, on doit montrer que la suite $g_j(x) = -a(x)u_j(x)^{p-1} + f(x)u_j(x)^{p^*-1}$ est bornée dans $L^s(K)$ pour certain $s > \frac{n}{p}$. Mais cela est une simple conséquence de la proposition 3.4.
Enfin, on pose $h(x, u_j) = a(x)u_j^{p-1} - f(x)u_j^{p^*-1}$, puisque par hypothèse les fonctions a et f sont bornées sur la variété M, il suit que la suite $(h(x, u_j(x))$ soit bornée sur le compact K. Par la proposition 3.6, $u_j \in C^{1,\alpha}(K)$ et $\|u_j\|_K^{1,\alpha} \le c(p, n, K, \|g_j\|_{L^\infty(K)})$. Il suit du fait que (u_j) est bornée dans $L^\infty(K)$ que les suites (g_j) et $C(p, n, K, \|g_j\|_{L^\infty(K)})$ sont bornées et par conséquent, la suite (u_j) est aussi bornée dans $C^{1,\alpha}(K)$. Donc par le théorème d'Arzela-Ascoli, la suite (u_j) converge uniformément vers une solution faible u de l'équation (3.4) sur chaque sous ensemble compact de M ∎

3.2 Convergence forte de la suite minimisante

Dans cette section on montre que la solution u est non triviale. Pour cela, on donne des conditions suffisantes qui garantissent la convergence forte de la suite de solutions construite dans la section précédente.
Soient K un sous ensemble compact de M, $2K$ un compact qui contient K et $\eta \in C^\infty(M)$ la fonction

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } K \\ 1 & \text{sur } M - 2K. \end{cases}$$

Soient $k > 1$ et (u_q) la suite de solutions donnée par la proposition 3.3. On note par $\|\cdot\|_p$ la norme dans $L^p(M)$. Dans la suite, pour effectuer la convergence forte de la suite $\{u_q\}$, on estime la quantité $\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|_{L_p(M)}$. C'est là où les conditions de la décroissance à l'infinie sur la fonction f interviennent.

Soit $\{\Omega_k\}$ une suite exhaustive de la variété M. Désignons par Λ_k l'ensemble

$$\Lambda_k = \{u \in H_1^p(\Omega_k) : \int_{\Omega_k} f|u|^{p^*} dv_g = 1\}$$

et $I_k(u)$ la fonctionnelle

$$I_k(u) = \int_{\Omega_k} (|\nabla_g u|^p + |u|^p) dv_g$$

On montre la proposition suivante

Proposition 3.7 *Sous les conditions (1), (2) et (3) du théorème 3.1 et*

$$(\sup_{M-K} f(x))^{p/p^*} \inf_{u\in\Lambda_k} I_k(u) < K(n,p)^{-p},$$

la quantité $\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|_p$ *est bornée.*

Preuve. Pour $p \geq 2$, on utilise l'inégalité de Simon [65], c'est à dire pour tout deux champs de vecteurs X et Y sur la variété M, on a

$$|X+Y|^p \leq C_p \left\langle |X|^{p-2}X + |Y|^{p-2}Y, X+Y \right\rangle$$

où $C_p > 0$ est une constante et $\langle .,. \rangle$ est la métrique sur M.
On obtient alors

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|_{L_p(M)}^p \\
&= \int_M |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})|^p dv_g \\
&= \int_M |(u_q^{\frac{k+p-1}{p}} \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) + \frac{k+p-1}{p}(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) u_q^{\frac{k-1}{p}} \nabla u_q)|^p dv_g \\
&\leq C_p \int_M \Big[u_q^{(\frac{k+p-1}{p})(p-1)} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) \\
&\quad + (\tfrac{k+p-1}{p})^{p-1} (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^{(\frac{k-1}{p})(p-1)} |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q\Big] \\
&\quad \times \Big[u_q^{\frac{k+p-1}{p}} \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) + \tfrac{k+p-1}{p} (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^{\frac{k-1}{p}} \nabla u_q\Big] dv_g \\
&= C_p \Big[\int_M u_q^{k+p-1} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^p dv_g + (\tfrac{k+p-1}{p})^p \int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^{k-1} |\nabla u_q|^p dv_g \\
&\quad \times \tfrac{k+p-1}{p} \int_M \eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{k+p-2} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \langle \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}), \nabla u_q \rangle dv_g \\
&\quad + (\tfrac{k+p-1}{p})^{p-1} \int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^k |\nabla_g u_q|^{p-2} \langle \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}), \nabla u_q \rangle dv_g\Big]
\end{aligned}$$

D'une autre part,

$$\int_M \eta^p f^{p/p^*} u_q^k \Delta_p u_q dv_g = k \int_M \eta^p f^{p/p^*} u_q^{k-1} |\nabla u_q|^p dv_g$$
$$+ p \int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^k |\nabla u_q|^{p-2} \langle \nabla u_q, \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) \rangle dv_g$$

et

$$\int_M \eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{k+p-1} \Delta_p (\eta f^{\frac{1}{p^*}}) dv_g = \int_M u_q^{k+p-1} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^p dv_g$$
$$+ (k+p-1) \int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}}) u_q^{k+p-2} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \langle \nabla u_q, \nabla \eta f^{\frac{1}{p^*}} \rangle dv_g$$

donc

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|_{L_p(M)}^p \\
&\leq C_p \Big[\int_M \eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{k+p-1} \Delta_p (\eta f^{\frac{1}{p^*}}) dv_g + \frac{1}{k} (\frac{k+p-1}{p})^p \int_M \eta^p f^{p/p^*} u_q^k \Delta_p u_q dv_g \\
&\quad - \tfrac{p-1}{p}(k+p-1) \int_M \eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{k+p-2} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \langle \nabla u_q, \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) \rangle dv_g \\
&- (\tfrac{k+p-1}{p})^{p-1} \tfrac{p-1}{k} \int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^k |\nabla u_q|^{p-2} \langle \nabla u_q, \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) \rangle dv_g \Big]
\end{aligned}$$

u_q sont solutions faibles de l'équation (3.1), en utilisant $(\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^k$ comme fonctions test, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^k \Delta_p u_q dv_g \\
&= - \int_M a(x) (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^{k+p-1} dv_g + \mu_{(\Omega_q)} \int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p f u_q^{k+p^*-1} dv_g.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Par l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p f u_q^{k+p^*-1} dv_g \\
&\leq (\sup_{M-K} f)^{p/p^*} \left(\int_{M-K} f u_q^{p^*} dv_g \right)^{1-\frac{p}{p^*}} \left(\int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})^{p^*} dv_g \right)^{p/p^*}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Le terme de droite de (3.5) s'estime ainsi

$$\int_M a(x)(\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^{k+p-1} dv_g \le \left(\int_{M-K} |a(x)|^{\frac{n}{p}} dv_g\right)^{\frac{p}{n}} \left(\int_{M-K} (\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})^{p^*} dv_g\right)^{p/p^*}.$$

Puisque par hypothèse

$$\left(\int_M |a(x)|^{\frac{n}{p}} dv_g\right)^{p/n} < C \int_M f dv_g < \infty$$

on peut choisir un compact K de M tel que

$$\int_{M-K} f dv_g < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Donc

$$\begin{aligned}&\int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^k \Delta_p u_q dv_g \\ &\le \left(\left((\sup_{M-K} f)^{p/p^*} \int_M f u_q^{p^*}\right)^{1-\frac{p}{p^*}} + \varepsilon\right) \left(\int_M \left(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}}\right)^{p^*} dv_g\right)^{p/p^*}\end{aligned} \qquad (3.7)$$

d'autre part

$$\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) = f^{\frac{1}{p^*}} \nabla\eta + \frac{1}{p^*} \eta f^{\frac{1}{p^*}-1} \nabla f$$

et par hypothèse $|\nabla f| \le C$, on obtient alors

$$|\nabla \eta f^{\frac{1}{p^*}}| \le f^{\frac{1}{p^*}} |\nabla\eta| + \frac{\eta c}{p^*} f^{\frac{1}{p^*}} \le C f^{\frac{1}{p^*}}$$

où C est une constante universelle.
Donc

$$\begin{aligned}&\int_M \eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{k+p-2} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \langle \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}), \nabla u_q\rangle dv_g \\ &\le C \int_{M-K} f^{\frac{p}{p^*}} u_q^{k+p-2} |\nabla u_q| dv_g.\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Par l'inégalité d'Hölder on obtient que le terme à droite de cette inégalité est bornée supérieurement par

$$\begin{aligned}&\int_{M-K} f^{p/p^*} u_q^{k+p-2} |\nabla u_q| dv_g \\ &\le \left(\int_{M-K} |\nabla u_q|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{M-K} (f^{p/p^*} u_q^{k+p-2}\right)^{\frac{p}{p-1}} dv_g)^{1-\frac{1}{p}}\end{aligned} \qquad (3.9)$$

toujours par l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{M-K} (f^{p/p^*} u_q^{k+p-2})^{\frac{p}{p-1}} dv_g \\
&\leq \left(\int_{M-K} u_q^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p(k+p-2)}{p^*(p-1)}} \left(\int_{M-K} f^{\frac{p(p-1)}{p^*(p-1)-p(k+p-2)}} dv_g\right)^{1-\frac{p(k+p-2)}{p^*(p-1)}} \\
&\leq (\sup_{M-K} f)^{\frac{p(k+p-2)}{p^*(p-1)}} \left(\int_{M-K} u_q^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p(k+p-2)}{p^*(p-1)}} \left(\int_{M-K} f^{p/p^*} dv_g\right)^{1-\frac{p(k+p-2)}{p^*(p-1)}}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Comme précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^k |\nabla u_q|^{p-2} \langle \nabla u_q, \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})\rangle dv_g \\
&\leq C \int_{M-K} f^{p/p^*} u_q^k |\nabla u_q|^{p-1} dv_g \\
&\leq C \left(\int_{M-K} f^{p/p^*} u_q^{p^*} dv_g\right)^{\frac{k}{p^*}} \left(\int_{M-K} f^{p/p^*} |\nabla u_q|^{\frac{p^*(p-1)}{p^*-k}} dv_g\right)^{1-\frac{k}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\alpha = (p-1)\frac{p^*}{p^*-k}$, on aura $p - \alpha = \frac{p(p^*-k)-p^*(p-1)}{p^*-k} = \frac{p^*-pk}{p^*-k} > 0$ et

$$\begin{aligned}
&\int_{M-K} f^{p/p^*} |\nabla u_q|^{\alpha} dv_g \\
&\leq \left(\int_{M-K} |\nabla u_q|^p dv_g\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_{M-K} f^{\frac{p^2}{p^*(p-\alpha)}} dv_g\right)^{1-\frac{\alpha}{p}} \\
&\leq (\sup_{M-K} f)^{\frac{p(p-1)}{p^*-pk}} \left(\int_{M-K} |\nabla_g u_q|^p dv_g\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_{M-K} f^{p/p^*} dv_g\right)^{1-\frac{\alpha}{p}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
-\Delta_p(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) &= -\operatorname{div}(|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})) \\
&= |\nabla \eta f^{\frac{1}{p^*}}|^{p-2} \Delta(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) + \operatorname{trace}\left(\nabla |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \otimes \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta_g(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) &= f^{\frac{1}{p^*}} \Delta_g \eta + \eta \Delta f^{\frac{1}{p^*}} - 2trace(\nabla \eta \otimes \nabla f^{\frac{1}{p^*}}) \\
&\leq f^{\frac{1}{p^*}} \Delta \eta + \frac{1}{p^*}(1 - \frac{1}{p^*}) \eta f^{\frac{1}{p^*}-2} |\nabla f|^2 + \frac{1}{p^*} \eta f^{\frac{1}{p^*}-1} \Delta f + \frac{2}{p^*} f^{\frac{1}{p^*}-1} |\nabla f|
\end{aligned}$$

alors

$$|\Delta(\eta f^{\frac{1}{p^*}})| \leq C f^{\frac{1}{p^*}}$$

et

$$|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} |\Delta(\eta f^{\frac{1}{p^*}})| \leq C f^{\frac{p-1}{p^*}}.$$

il suit du fait que

$$|\nabla|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2}| = (p-2)|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-3} |\nabla|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})||$$

et l'inégalité $|\nabla|\nabla^r\psi|| \leq |\nabla^{r+1}\psi|$ pour $\psi \in C^{r+1}$, que

$$|\nabla|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2}| \leq (p-2)|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-3} |\nabla^2(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|.$$

Maintenant, puisque

$$\nabla^2(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) = f^{\frac{1}{p^*}}\nabla^2\eta + \frac{2}{p^*} f^{\frac{1}{p^*}-1}\nabla\eta \otimes \nabla f + \frac{1}{p^*}(1 - \frac{1}{p^*})\eta f^{\frac{1}{p^*}-2}\nabla f \otimes \nabla f + \frac{1}{p^*}\nabla^2 f$$

on aura

$$|\nabla|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \leq C f^{\frac{p-1}{p^*}}.$$

Enfin, on obtient

$$|\Delta_p(\eta f^{\frac{1}{p^*}})| \leq C f^{\frac{p-1}{p^*}}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_M \eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{k+p-1} \Delta_p(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) dv_g \\ &\leq C \int_{M-K} f^{p/p^*} u_q^{k+p-1} \\ &\leq C \left(\int_{M-K} u_q^{p^*} dv_g \right)^{\frac{k+p-1}{p^*}} \left(\int_{M-K} f^{\frac{p^*}{p^* k - p + 1}} dv_g \right)^{1 - \frac{k+p-1}{p^*}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

L'inégalité de Sobolev implique que

$$\begin{aligned} &\left(\int_{M-K} u_q^{p^*} dv_g \right)^{p/p^*} \\ &\leq (K(n,p)^p + \varepsilon) \int_{M-K} |\nabla u_q|^p dv_g + A \int_{M-K} u_q^p dv_g \\ &\leq (K(n,p)^p + \varepsilon) \left(\int_{M-K} |\nabla u_q|^p dv_g + \frac{A}{K(n,p)^p + \varepsilon} \int_{M-K} u_q^p dv_g \right). \end{aligned}$$

puisque l'opérateur $L_p u = \Delta_p u - a(x)|u|^{p-2}u$ est coercif, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{M-K} u_q^{p^*} dv_g\right)^{p/p^*} \\
&\leq \frac{1}{c}(K(n,p)^p + \varepsilon) \max\left(1, \frac{A}{K(n,p)^p + \varepsilon}\right) \int_{M-K} (|\nabla u_q|^p + u_q^p) dv_g \\
&\leq \tilde{C} \int_M (|\nabla u_q|^p + u_q^p) dv_g,
\end{aligned}$$

où $\tilde{C} = \frac{1}{c}(K(n,p)^p + \varepsilon) \max\left(1, \frac{A}{K(n,p)^p+\varepsilon}\right)$
par construction de la suite $\{u_q\}$, qui est de support compact dans Ω_q, on a

$$\int_M (|\nabla u_q|^p + a(x) u_q^p) dv_g = \lambda_q$$

donc

$$\left(\int_{M-K} u_q^{p^*} dv_g\right)^{p/p^*} \leq \tilde{C}\lambda_g.$$

Puisque par hypothèse les multiplicateurs de Lagrange satisfassent

$$\lambda_q < \frac{1}{K(n,p)^p (\sup_{M-K} f)^{p/p^*}},$$

on aura

$$\left(\int_{M-K} u_q^{p^*} dv_g\right)^{p/p^*} \leq C. \tag{3.13}$$

En combinant les inégalités : de (3.5) à (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|_{L_p(M)}^p \leq \lambda_q &\left(\left(\sup_{M-K} f\right)^{p/p^*} \left(\int_{M-K} f u_q^{p^*} dv_g\right)^{1-\frac{p}{p^*}} + \varepsilon\right) \\
&\times \left(\int_{M-K} \left(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}}\right)^{p^*} dv_g\right)^{p/p^*} + C.
\end{aligned}$$

Toujours par l'inégalité de Sobolev, cette expression est majorée par

$$\begin{aligned}
&\lambda_q \left(\left(\sup_{M-K} f\right)^{p/p^*} \left(\int_{M-K} f u_q^{p^*} dv_g\right)^{1-\frac{p}{p^*}} + \varepsilon\right) \\
&\times \left((K(n,p)^p + \varepsilon)\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|_p^p + A\|\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}}\|_p^p\right) + C,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $K(n,p)$ est la meilleure constante dans l'inclusion de Sobolev.
Maintenant, pour le dernier terme de (3.14), on écrit

$$\int_{M-K} f^{p/p^*} u_q^{k+p-1} dv_g$$
$$\leq \left(\int_{M-K} u_q^{p^*} dv_g\right)^{\frac{\kappa+p-1}{p^*}} \left(\int_{M-K} f^{\frac{p}{b}p^*-k-p+1} dv_g\right)^{1-\frac{\kappa+p-1}{p^*}}$$
$$\leq \left(\sup_{M-K} f\right)^{\frac{p(1-p-k)}{p^{*2}}} \left(\int u_q^{p^*} dv_g\right)^{\frac{\kappa+p-1}{p^*}} \left(\int f^{p/p^*} dv_g\right)^{1-\frac{\kappa+p-1}{p^*}}$$
$$< \infty$$

Par hypothèse sur les multiplicateurs de Lagrange, la quantité

$$\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|_{L_p(M)}^p$$

est majorée.
Pour $1 < p < 2$, l'inégalité de Simon [65] s'écrit

$$|X+Y|^p \leq C_p \left\langle_g |X|^{p-2}X + |Y|^{p-2}Y, X+Y\right\rangle^{\frac{p}{2}} (|X|^p + |Y|^p)^{1-\frac{p}{2}}$$

pour tout deux champs de vecteurs X, Y sur la variété M. Posons

$$X = u_q^{\frac{k+p-1}{p}} \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})$$

et

$$Y = \frac{k+p-1}{p}(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) u_q^{\frac{k-1}{P}} \frac{k+p-1}{p}(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) u_q^{\frac{k-1}{P}} \nabla u_q$$

alors

$$\left|u_q^{\frac{k+p-1}{p}} \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) + \frac{k+p-1}{p}(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) u_q^{\frac{k-1}{P}} \nabla u_q\right|^p$$
$$\leq C_p \Big[\Big(u_q^{(\frac{k+p-1}{p})(p-1)} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2} \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})$$
$$+ (\tfrac{k+p-1}{p})^{p-1} (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^{(\frac{k-1}{p})(p-1)} |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q \Big)$$
$$\times \Big(u_q^{\frac{k+p-1}{p}} \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) + \frac{k+p-1}{p}(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) u_q^{\frac{k-1}{P}} \nabla u_q \Big) \Big]^{p/2}$$
$$\times \left[u_q^{k+p-1} |\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^p + (\frac{k+p-1}{p})^p (\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^{k-1} |\nabla u_q|^p \right]^{1-\frac{p}{2}}.$$

donc

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla\left(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}}\right)\|^p_{L_p(M)}\\
&\leq C_p \int_M \Big[u_q^{k+p-1}|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^p + (\frac{k+p-1}{p})^p(\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^{k-1}|\nabla u_q|^p\\
&+ \frac{k+p-1}{p}(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) u_q^{k+p-2}|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2}\langle\nabla u_q, \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})\rangle\\
&+ (\frac{k+p-1}{p})^{p-1}(\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^{k}|\nabla u_q|^{p-2}\langle\nabla u_q, \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})\rangle\Big]^{p/2}\\
&\times \Big[u_q^{k+p-1}|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^p + (\frac{k+p-1}{p})^p(\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^{k-1}|\nabla u_q|^p\Big]^{1-\frac{p}{2}} dv_g.
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité d'Hölder, on obtient que

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla\left(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}}\right)\|^p_{L_p(M)}\\
&\leq C_p \Big(\int_M \Big[u_q^{k+p-1}|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^p + (\frac{k+p-1}{p})^p(\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^{k-1}|\nabla u_q|^p\\
&+ \frac{k+p-1}{p}(\eta f^{\frac{1}{p^*}}) u_q^{k+p-2}|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^{p-2}\langle\nabla u_q, \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})\rangle\\
&+ (\frac{k+p-1}{p})^{p-1}(\eta f^{\frac{1}{p^*}})^{p-1} u_q^{k}|\nabla u_q|^{p-2}\langle\nabla u_q, \nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})\rangle\Big] dv_g\Big)^{2/p}\\
&\times \Big(\int_M (u_q^{k+p-1}|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}})|^p + (\frac{k+p-1}{p})^p(\eta f^{\frac{1}{p^*}})^p u_q^{k-1}|\nabla u_q|^p) dv_g\Big)^{1-\frac{p}{2}}.
\end{aligned}
$$

Procédons comme dans le cas $p \geq 2$, on trouve qu'il existe une constante C positive telle que

$$\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|^p_p \leq C$$

■

3.3 Théorème générique

Dans cette partie, on donne une conditions suffisantes pour que la suite $(u_q)_q$ converge vers une solution.

Soit K un compact de M. D'abord on montre le lemme suivant

Lemme 3.1 *Supposons que toute sous suite de $\{u_q\}$ converge vers 0 dans $L^p(M)$, $p > 1$ et qu'il existe une constante $C > 0$, ne dépend pas de q, telle que*

$$\|\nabla(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}})\|_p^p \leq C$$

où $k > 1$. Alors $\lim_{q\to\infty} \sup \int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q)^{p^*} dv_g = 0$.

Preuve. Supposons que $\lim_{q\to\infty} \sup \int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q)^{p^*} > 0$,
On utilise l'inégalité d'Hölder et on obtient

$$\int_M (\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q)^{p^*} dv_g \leq \sup_{M-K} f \left(\int_M \left(\eta f^{\frac{1}{p^*}} u_q^{\frac{k+p-1}{p}} \right)^{p^*} \right)^{\frac{n(p-1)+p}{n(k+p-1)}} \left(\int_M u_q^{\frac{n(k+p-1)}{nk-p}} dv_g \right)^{\frac{nk-p}{n(k+p-1)}}$$

donc

$$\lim_{q\to\infty} \sup \int_M u_q^{\frac{n(k+p-1)}{nk-p}} dv_g > 0.$$

Ce qui fait une contradiction avec la fait que tout sous suite de u_q converge vers 0 dans $L^p(M), p > 1$ ∎

Désignons par Λ, l'ensemble

$$\Lambda = \{u \in H_1^p(M) : \int_M f|u|^{p^*} dv_g = 1\}$$

et par $I(u)$, la fonctionnelle

$$I(u) = \int_M (|\nabla u|^p + |u|^p) dv_g.$$

Soit

$$\mu = \inf_{u\in\Lambda} I(u)$$

En appliquant le lemme 3.1, on prouve le théorème générique suivant

Théorème 3.8 *Soient (M, g) une variété Riemannienne complète, non-compacte de dimension n et à géométrie bornée, $1 < p < n$, et $a, f \in C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M avec $f > 0$. On suppose que*

1. *L'opérateur $L_p u = \Delta_p u + a(x)u^{p-1}$ est coercif*
2. *Les conditions (1),(2) et (3) du théorème 3.1 sur la fonction f sont satisfaites*

3. $\mu(\sup_M f)^{\frac{p}{p^*}} < K(n,p)^{-p}$.

Alors l'"équation (3.1) *possède une solution faible et positive* $u \in C^{1,\alpha}(K)$ *pour tout compact* $K \subset M$ *et un certain* $\alpha \in (0,1)$.

Preuve. Soit u_q la suite définie dans la proposition 3.5. On suppose que

$$\mu f(x))^{p/p^*} K(n,p)^p \lim_{q\to\infty} \sup \int_{B(x_o,\delta)} f u_q^{p^*} dvg < 1$$

donc, par la proposition 3.7 et le lemme 3.1, on obtient

$$\lim_{q\to\infty} \sup \int_{B(x_o,\delta)} f u_q^{p^*} dv_{lg} = 0$$

ce qui contredit le fait que

$$\int_M f u_q^{p^*} dv_g = 1. \tag{3.15}$$

En effet,

$$\int_M f u_q^{p^*} dv_g = \int_{\cup_{i=1}^{\infty} B(x_i,\delta)} f u_q^{p^*} dv_g \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B(x_i,\delta)} f u_q^{p^*} dv_g \tag{3.16}$$

où $M = \cup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \delta)$.
Donc, on aura automatiquement

$$\mu f(x))^{p/p^*} K(n,p)^p \lim_{q\to\infty} \sup \int_{B(x_o,\delta)} f u_q^{p^*} dv_g \geq 1$$

et puisque par hypothèse $\mu f(x))^{p/p^*} K(n,p)^p < 1$, on obtient que

$$\lim_{q\to\infty} \sup \int_{B(x_o,\delta)} f u_q^{p^*} dv_g > 1.$$

ce qui est contradictoire avec (3.15). Donc la condition que toute sous suite de $\{u_q\}$ qui converge a pour limite 0 est fausse. Ce qui prouve le théorème ∎

Exemples de fonctions qui satisfassent à la condition (3) du théorème 3.1

Les conditions du théorème 3.1 sur la décroissance à l'infini sur f sont satisfaites, par exemple, par des fonctions qui ont une décroissance exponentielle : $f \sim r^{-q}$,

$\nabla f \sim \rho^{-q-1}$ et $\nabla_g^2 f \sim r^{-q-2}$ avec $r, > 0$ et $q > n\frac{p^*}{p}$. Puisque $\int_M f^{p/p^*} dv_g < +\infty$ implique que $\frac{1}{r^{(1-\frac{1}{n})q+1-n}}$ est intégrable. Si la fonction a décroît à l'infinie comme r^{-q} , alors la condition que $\int_M f^{\frac{n}{p}} dv_g \leq C \int_M f dv_g < +\infty$ implique que l'exposent q vérifie $q > p$.

3.4 Fonctions test

Dans cette section, on démontre le théorème principal de ce chapitre (le théorème 3.1). D'après ce qui précède, il suffit de vérifier les conditions du théorème 3.8. Dans la suite, on montre que la condition (3) de ce théorème est satisfaite par une fonction radiale.

Soient K un compact de M et $x_o \in M \setminus K$ un point où la fonction f est maximum. Désignons par $r = d(x_o, x)$ la fonction distance du point x_o à x, un point arbitraire de $M \setminus K$ et soit $\delta > 0$ une constante plus petite que le rayon d'injectivité. Pour $\varepsilon > 0$, on considère la fonction test suivante

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} (\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} - (\varepsilon + \delta^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} & \text{si } r < \delta \\ 0 & \text{si } r \geq \delta. \end{cases}$$

Considérons un système de coordonnées normales géodésique autour de x_o et faisons un développent limité de $\frac{I(u_\varepsilon)}{\left(\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}}$ pour $\varepsilon \to 0$.

Alors, on a

$$|\nabla u_\varepsilon(x)|^p = \begin{cases} (\frac{n-p}{p-1})^p (\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{-\frac{n}{p}} r^{(\frac{p}{p-1})} & \text{if } r < \delta \\ 0 & \text{if } r \geq \delta \end{cases}$$

donc

$$\int_{B(x_o,\delta)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dv_g = (\frac{n-p}{p-1})^p \int_0^\delta (\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n+\frac{1}{p-1}} dr \int_{S^{n-1}(r)} d\Omega. \tag{3.17}$$

Où $d\Omega$ désigne l'élément volume sur la sphère $S^{n-1}(r)$.

Le développement du $\sqrt{\det g}$ dans un système des coordonnées géodésiques en un point x_o s'écrit (voir par exemple [8])

$$\sqrt{\det g} = 1 - R_{ij} x^i x^j + o(r^2).$$

Soit $S(r) = \int_{S^{n-1}(r)} d\Omega$, un calcul effectué dans [5] donne

$$S(r) = \omega_{n-1}(1 - \frac{R}{6n} r^2 + o(r^2))$$

où w_{n-1} est le volume de la sphère standard S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$.
L'intégrale dans (3.17) devient

$$\int_{B(x_o,\delta)} |\nabla_g u_\varepsilon(x)|^p dv_g = (\frac{n-p}{p-1})^p \omega_{n-1} \int_0^\delta (\varepsilon + r^{\frac{p}{1-p}})^{-n} r^{n+\frac{1}{p-1}} \left(1 - \frac{R}{6n} r^2 + o(r^2)\right) dr.$$

Posons $s = r\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}$, on aura

$$\begin{aligned}\int_{B(x_o,\delta)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dv_g = (\frac{n-p}{p-1})^p \omega_{n-1} \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \int_0^{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}} \left(1 + s^{\frac{p}{1-p}}\right)^{-n} s^{n+\frac{1}{p-1}} \\ \times \left(1 - \frac{R}{6n} s^2 \varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}} + o(s^2 \varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}})\right) ds.\end{aligned} \quad , \qquad (3.18)$$

On pose

$$I_p^q = \int_0^\infty t^{q-1}(1+t)^{-p} dt \quad \text{avec } p - q - 1 > 0,$$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \quad \text{avec } p > 0,\ q > 0.$$

prenons $t = s^{\frac{p}{p-1}}$, alors l'intégrale dans (3.18) devient

$$\begin{aligned}&\int_{B(x_o,\delta)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dv_g \\ &= \frac{p-1}{p}(\frac{n-p}{p-1})^p \omega_{n-1} \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \Big[\int_0^{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}} (1+t)^{-n} t^{n(1-\frac{1}{p})} dt \\ &\quad - \varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} \frac{R(x_o)}{6n} \int_0^{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}} (1+t)^{-n} t^{(n+2)(1-\frac{1}{p})} dt + o(\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}}) \Big] \\ &= \frac{p-1}{p}(\frac{n-p}{p-1})^p \omega_{n-1} \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \Big[\int_0^\infty (1+t)^{-n} t^{n(1-\frac{1}{p})} dt \\ &\quad - \varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} \frac{R(x_o)}{6n} \int_0^\infty (1+t)^{-n} t^{(n+2)(1-\frac{1}{p})} dt - \int_{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}}^\infty (1+t)^{-n} t^{n(1-\frac{1}{p})} dt \\ &\quad + \varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} \frac{R(x_o)}{6n} \int_{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}}^\infty (1+t)^{-n} t^{(n+2)(1-\frac{1}{p})} dt + o(\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}}) \Big].\end{aligned}$$

On a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}}^\infty (1+t)^{-n} t^{n(1-\frac{1}{p})} dt = 0$$

et si $n+2>3p$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}}^{\infty}(1+t)^{-n}t^{(n+2)(1-\frac{1}{p})}dt=0.$$

Donc

$$\int_{B(x_o,\delta)}|\nabla u_\varepsilon(x)|^p dv_g$$
$$=\frac{p-1}{p}(\frac{n-p}{p-1})^p\omega_{n-1}\varepsilon^{1-\frac{n}{p}}\Big[I_n^{n(1-\frac{1}{p})}-\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\frac{R(x_o)}{6n}I_n^{(n+2)(1-\frac{1}{p})}+o(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})})\Big].$$

D'autre part, un calcul simple, donne pour $(p>q+1)$, la formule suivante

$$I_p^q=B(q+1,p-q-1)=\frac{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q-1)}{\Gamma(p)},$$

où Γ désigne la fonction d'Euler, par laquelle on obtient la relation suivante

$$I_n^{(n+2)(1-\frac{1}{p})}=\frac{\Gamma((n+2)(1-\frac{1}{p})+1)\Gamma(\frac{n+2}{p}-3)}{\Gamma(n(1-\frac{1}{p})+1)\Gamma(\frac{n}{p}-1)}I_n^{n(1-\frac{1}{p})}=a(n,p)I_n^{n(1-\frac{1}{p})}.$$

Enfin, l'inégalité (3.18) devient

$$\int_{B(x_o,\delta)}|\nabla u_\varepsilon(x)|^p dv_g$$
$$=\frac{p-1}{p}(\frac{n-p}{p-1})^p\omega_{n-1}\varepsilon^{1-\frac{n}{p}}I_n^{n(1-\frac{1}{p})}[1-\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}a(n,p)\frac{R(x_o)}{6n}+o(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})})]. \tag{3.19}$$

Le développement de $\int_{B(x_o,\delta)}au_\varepsilon^p dv_g$ s'effectue de la manière suivante ; on écrit d'abord

$$a(x)=a(x_o)+\nabla_i a(x_o)x^i+o(r^2),$$

et

$$dv_g=(1+o(r^2))dx.$$

Posons $\nu = (\varepsilon + \delta^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}}$, on a alors

$$\int_{B(x_o,\delta)} a u_\varepsilon^p dv_g$$
$$= \int_{B(x_o,\delta)} \left(a(x_o) + \nabla_i a(x_o) x^i + o(r^2)\right) \left((\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} - \nu\right)^p \left(1 + o(r^2)\right) dx$$
$$= \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} \left(a(x_o) + \nabla_i a(x_o) x^i + o(r^2)\right)$$
$$\times \left(1 - p\nu \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n}{p}-1} + o\left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n}{p}-1}\right) \left(1 + o(r^2)\right) dx$$
$$= a(x_o) \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} dx - p\nu a(x_o) \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n+\frac{n}{p}-1} dx$$
$$+ \nabla_i a(x_o) \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} x^i dx - p\nu \nabla_i a(x_o) \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n+\frac{n}{p}-1} x^i dx$$
$$+ \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} o\left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n}{p}-1} dx + \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} o(r^2) dx$$
$$+ \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} o\left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n}{p}-1} o(r^2) dx$$

on note que

$$\int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} x^i dx = 0 \text{ et } \int_{B(x_o,\delta)} \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n+\frac{n}{p}-1} x^i dx = 0$$

cela entraîne que pour tout i,

$$\int_{B(x_o,\delta)} a u_\varepsilon^p dv_g$$
$$= \omega_{n-1} a(x_o) \int_0^\delta \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} r^{n-1} dr - p\nu a(x_o) \int_0^\delta \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n+\frac{n}{p}-1} r^{n-1} dr$$
$$+ \int_0^\delta \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} o\left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n}{p}-1} r^{n-1} dr + \int_0 \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} o(r^2) r^{r-1} dr$$
$$+ \int_0^\delta \left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n} o\left(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n}{p}-1} o(r^2) r^{n-1} dr$$

Posons $r = (\varepsilon t)r^{\frac{p-1}{p}}$, on obtient

$$\int_{B(x_o,\delta)} au_\varepsilon^p dv_g$$
$$= \frac{p-1}{p}\omega_{n-1}a(x_o)\varepsilon^{p-\frac{n}{p}} \int_0^{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}} t^{n(1-\frac{1}{p})-1}(1+t)^{p-n}dt + o(\varepsilon^{p-\frac{n}{p}})$$

Puisque $p < n^2$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}}^{\infty} t^{n(1-\frac{1}{p})-1}(1+t)^{p-n}dt = 0;$$

donc,

$$\int au_\varepsilon^p dv_g = \frac{p-1}{p}\omega_{n-1}a(x_o)\varepsilon^{p-\frac{n}{p}} I_{n-p}^{n(1-\frac{1}{p})-1} + o(\varepsilon^{p-\frac{n}{p}}).$$

d'après les formules suivantes

$$I_{n-p}^{n(1-\frac{1}{p})-1} = \frac{\Gamma\left(n(1-\frac{1}{p})\right)\Gamma(\frac{n}{p}-p)}{\Gamma(n-p)},$$
$$I_n^{n(1-\frac{1}{p})} = \frac{\Gamma\left(n(1-\frac{1}{p})+1\right)\Gamma(\frac{n}{p}-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n(1-\frac{1}{p})\Gamma\left(n(1-\frac{1}{p})\right)\Gamma(\frac{n}{p}-1)}{\Gamma(n)}$$

on déduit que

$$I_{n-p}^{n(1-\frac{1}{p})-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{n}{p}-p)}{n(1-\frac{1}{p})\Gamma(n-p)\Gamma(\frac{n}{p}-1)} I_n^{n(1-\frac{1}{p})} = b(p,n) I_n^{n(1-\frac{1}{p})}.$$

et finalement

$$\int_{B(x_o,\delta)} au_\varepsilon^p dv_g = \varepsilon^{p-\frac{n}{p}} \frac{p-1}{p}\omega_{n-1}a(x_o)b(p,n)I_n^{n(1-\frac{1}{p})} + o(\varepsilon^{p-\frac{n}{p}}). \tag{3.20}$$

Maintenant, on développe le terme $\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g$

$$\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g = \int_0^\delta r^{n-1}\left((\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} - \nu\right)^{p^*} dr \int_{S^{n-1}(r)} f\sqrt{g}d\Omega$$
$$= \int_0^\delta r^{n-1}\left((\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} - \nu\right)^{p^*} dr$$
$$\times \int_{S^{n-1}(r)} \left(f(x_o) + \frac{1}{2}\nabla_{ij} f(x_o) x^i x^j + o(r^2)\right)\left(1 - \frac{1}{6}R_{ij}(x_o)x^i x^j + o(r^2)\right) d\Omega$$
$$= \int_0^\delta r^{n-1}\left((\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} - \nu\right)^{p^*} dr$$
$$\times \int_{S^{n-1}(r)} \left[f(x_o) + \left(\frac{1}{2}\nabla_{ij} f(x_o) - f(x_o)\frac{R_{ij}(x_o)}{6}\right) x^i x^j + o(r^2)\right] d\Omega$$
$$= \omega_{n-1} f(x_o) \int_0^\delta r^{n-1}\left((\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} - \nu\right)^{p^*}\left(1 - \left(\frac{R(x_o)}{6n} + \frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)}\right) r^2 + o(r^2)\right) dr$$
$$= \omega_{n-1} f(x_o) \int_0^\delta r^{n-1}(\varepsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n}\left(1 - \left(\frac{R(x_o)}{6n} + \frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)}\right) r^2 + o(r^2)\right) dr.$$

Soit $s = r\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}$, on obtient

$$\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g = \frac{p-1}{p}\omega_{n-1} f(x_o)\varepsilon^{\frac{-n}{p}} \int_0^{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}} s^{n-1}(1 + s^{\frac{p}{p-1}})^{-n}$$
$$\times \left[1 - \left(\frac{R(x_o)}{6n} + \frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o p)}\right) s^2\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} + o(s^2)\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right] ds.$$

Posons $t = s^{\frac{p}{p-1}}$, on aura

$$\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g = \frac{p-1}{p}\omega_{n-1} f(x_o)\varepsilon^{\frac{-n}{p}} \int_0^{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}} t^{n(1-\frac{1}{p})-1}(1+t)^{-n}$$
$$\times \left(1 - \left(\frac{R(x_o)}{6n} + \frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)}\right) t^{2(1-\frac{1}{p})}\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} + o(t^{2(1-\frac{1}{p})})\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right) dt.$$

et si $p < 1 + \frac{n}{2}$, c'est la cas si $p^2 < n$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}}^{\infty} t^{n(1-\frac{1}{p})-1}(1+t)^{-n} dt = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\delta^{\frac{p}{p-1}}\varepsilon^{-1}}^{\infty} t^{(n+2)(1-\frac{1}{p})-1}(1+t)^{-n}dt = 0$$

on déduit alors que

$$\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g = \frac{p-1}{p}\omega_{n-1} f(x_o)\varepsilon^{\frac{-n}{p}}\Big[I_n^{n(1-\frac{1}{p})-1} - \left(\frac{R(x_o)}{6n}+\frac{\Delta f(x_o)}{2nf(x_o)}\right) I_n^{(n+2)(1-\frac{1}{p})-1}\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} + o(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})})\Big]$$

en posant

$$c(n,p) = \frac{\Gamma\left((n+2)(1-\frac{1}{p})\right)\Gamma\left(\frac{n-2p+1}{p}\right)}{\Gamma\left(n(1-\frac{1}{p})\right)\Gamma(\frac{n}{p})}$$

on obtient

$$\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g$$
$$= \varepsilon^{\frac{-n}{p}}\frac{p-1}{p}\omega_{n-1} f(x_o) I_n^{n(1-\frac{1}{p})-1}\Big[1 - \left(\frac{R(x_o)}{6n}+\frac{\Delta f(x_o)}{2nf(x_o)}\right) c(p,n) I_n^{n(1-\frac{1}{p})} + \varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} + o\left(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right)\Big]$$

et puisque

$$I_n^{n(1-\frac{1}{p})-1} = \frac{\Gamma(\frac{n}{p})}{n(n-\frac{1}{p})\Gamma(\frac{n}{p}-1)} I_n^{n(1-\frac{1}{p})} = d(n,p) I_n^{n(1-\frac{1}{p})}$$

alors

$$\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g = \varepsilon^{\frac{-n}{p}}\frac{p-1}{p}\omega_{n-1} f(x_o) d(n,p) I_n^{n(1-\frac{1}{p})} \times \Big[1 - \left(\frac{R(x_o)}{6n}+\frac{\Delta f(x_o)}{2nf(x_o)}\right) c(n,p)\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} + o\left(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right)\Big]. \tag{3.21}$$

en combinant les égalités (3.19), (3.20) et (3.21) on trouve

$$
\begin{aligned}
&\frac{\int_{B(x_o,\delta)}(|\nabla u_\varepsilon^p| + au_\varepsilon^p)dv_g}{\left(\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g\right)^{p/p^*}} \\
&= \left(\frac{p-1}{p}\omega_{n-1} I_n^{n(1-\frac{1}{p})}\right)^{\frac{p}{n}} (\frac{n-p}{p-1})^p \left(d(n,p)f(x_o)\right)^{-\frac{p}{p^*}} \qquad (3.22)\\
&\times \Big[1 - \left(\frac{a(n,p)}{6n}R(x_o)\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} - b(n,p)a(x_o)\varepsilon^{p-1}\right) + o\left(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right) + o\left(\varepsilon^{p-1}\right)\Big] \\
&\times \Big[1 + \frac{p}{p^*}\left(\frac{R(x_o)}{6n} + \frac{\Delta f(x_o)}{2nf(p)}\right) c(n,p)\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} + o\left(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right)\Big].
\end{aligned}
$$

On rappelle que la fonction

$$\phi = \left(1 + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{n}{p}}$$

réalise la meilleur constante dans l'inclusion de Sobolev $H_1^p(R^n) \subset L^{p^*}(R^n)$, c'est à dire

$$\left(\int_{R^n} \phi^{p^*} dx\right)^{p/p^*} dx = K(n,p)^p \int_{R^n} |\nabla\phi|^p dx,$$

on obtient alors que

$$(\frac{n-p}{p-1})^p \omega_{n-1} \int_0^\infty (1+r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n+\frac{1}{p-1}} dr = K(n,p)^{-p} \left(\omega_{n-1} \int_0^\infty (1 + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n-1} dr\right)^{p/p^*}$$

En posant $t = r^{\frac{p}{p-1}}$, on aura

$$
\begin{aligned}
&\frac{p-1}{p}(\frac{n-p}{p-1})^p \omega_{n-1} \int_0^\infty (1+t)^{-n} t^{n(1-\frac{1}{p})} dt \\
&= K(n,p)^{-p} \left(\omega_{n-1}\frac{p-1}{p} \int_0^\infty (1+t)^{-n} t^{n(1-\frac{1}{p})-1} dr\right)^{p/p^*}.
\end{aligned}
$$

par conséquent,

$$\frac{p-1}{p}(\frac{n-p}{p-1})^p \omega_{n-1} I_n^{n(1-\frac{1}{p})} = K(n,p)^{-p} \left(\frac{p-1}{p}\omega_{n-1} d(n,p) I_n^{n(1-\frac{1}{p})}\right)^{p/p^*}$$

ce qui implique que

$$K(n,p)^{-p} = (\frac{n-p}{p-1})^p \left(\frac{p-1}{p}\omega_{n-1} I_n^{n(1-\frac{1}{p})}\right)^{\frac{p}{n}} d(n,p)^{-\frac{p}{p^*}}.$$

Donc l'égalité (3.22) devient

$$\frac{\int_{B(x_o,\delta)}(|\nabla u_\varepsilon^p| + au_\varepsilon^p)dv_g}{\left(\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}} = K(n,p)^{-p} f(x_o)^{-\frac{p}{p^*}} \left[1 - \left(\frac{a(n,p)}{6n} R(x_o)\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right.\right.$$
$$\left.\left. -(\frac{p-1}{n-p})^p b(n,p)a(x_o)\varepsilon^{p-1}\right) + o\left(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right) + o(\varepsilon^{p-1})\right]$$
$$\times \left[1 + \frac{p}{p^*}\left(\frac{R(x_o)}{6n} + \frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)}\right) c(n,p)\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} + o(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})})\right]$$
$$= K(n,p)^{-p} f(x_o)^{-\frac{p}{p^*}} \left[1 - \left\{\left[\left(\frac{a(n,p)}{6n} - \frac{p}{p^*}\frac{c(n,p)}{6n}\right) R(x_o)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{p}{p^*}c(n,p)\frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)}\right] \varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})} - (\frac{p-1}{n-p})^p b(n,p)a(x_o)\varepsilon^{p-1}\right\} \tag{3.23}$$
$$\left. +o\left(\varepsilon^{p-1}\right) + o\left(\varepsilon^{2(1-\frac{1}{p})}\right)\right].$$

Si $1 < p < 2$ et $n + 2 > 3p$, l'expression entre crochets dans (3.23) se réduit à

$$1 + (\frac{p-1}{n-p})^p b(n,p)a(x_o)\varepsilon^{p-1}.$$

Donc, si $a(x_o) < 0$, on aura

$$1 + (\frac{p-1}{n-p})^p b(n,p)a(x_o)\varepsilon^{p-1} < 1.$$

c'est à dire que la condition

$$\frac{I(u_\varepsilon)}{\left(\int_{B(x_o,\delta)} f u_\varepsilon^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}} < K(n,p)^{-p} f(x_o)^{-\frac{p}{p^*}} \tag{3.24}$$

est satisfaite.
Si $p = 2$, le crochet (3.23) s'écrit

$$1 - \left(\left(\frac{a(n,2)}{6n} - \frac{n-2}{n}\frac{c(n,2)}{6n}\right) R(x_o) - (\frac{1}{n-2})^2 b(n,2)a(x_o) - \right.$$
$$\left. \frac{n-2}{n}\frac{\Delta f(x_o)}{2nf(x_o)} c(n,2)\right) \varepsilon + o(\varepsilon)$$

Chapitre 4

L'équation de courbures scalaires prescrite du type généralisé sur les variétés compactes à courbure scalaire negative

Dans ce chapitre, on étudie l'équation de la courbure scalaire prescrite du type généralisé (3.1) sur une variété Riemannienne compacte . On considère le cas où la fonction f change de signe. Comme il est facile de constater, l'approche variationnelle présentée dans les chapitres précédents ne convienne pas ce cas. En effet, si f change de sign l'ensemble Λ_q défini plus haut peut être vide et la fonctionnelle $I(u)$ n'est pas minorée sur cet ensemble. On procède par troncature.
Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte munie d'une métrique g et f une fonction lisse sur M. Avec les mêmes notations du chapitres précédents, pour $p \in (1, n)$, on considère sur la variété M l'équation

$$\Delta_p u + au^{p-1} = f(x)u^{p^*-1} \tag{4.1}$$

où $\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ est l'opérateur $p-$Laplacien de u et a est une constante négative.
Notons $f^- = \inf(0, f)$ et $f^+ = \max(0, f)$.
Soit A l'ensemble

$$A = \{u \in H_1^p, u \geq 0, u \neq 0 : \int_M f^- dv_g = 0\}$$

Posons

$$\lambda_f = \inf_{u \in A} \frac{\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g}{\int_M |u|^p \, dv_g}$$

et

$$\lambda_f = \infty \text{ si } A = \phi$$

Dans la première section de ce chapitre, on démontre le théorème suivant

Théorème 4.1 *Il existe une constante positive $C > 0$ dépendant seulement de $f^- / \int f^- dv_g$ telle que si $f \in C^\infty(M)$ satisfait les conditions suivantes*

1. $|a| < \lambda_f$
2. $\sup f^+ dv_g / \int f^- dv_g < C$
3. $\sup f > 0$.

Alors l'équation (4.1) *admet une solution positive de classe $C^{1,\alpha}(M)$, pour certain $\alpha \in (0,1)$.*

Dans la deuxième section , on démontre que les équations sous-critiques

$$\Delta_p u + a(x) |u|^{p-2} u = f(x) |u|^{q-2} u, q \in (p, p^*). \tag{4.2}$$

admettent au moins deux solutions distinctes. Cela est énoncé dans le théorème suivant

Théorème 4.2 *Il existe une constante positive $C > 0$ dépendant seulement de $f^- / \int f^-$ telle que si $f \in C^\infty(M)$ satisfait les conditions suivantes*

1. $|a| < \lambda_f$
2. $\sup f^+ / \int f^- dv_g < C$
3. $\sup f > 0$.

Alors l'équations (4.2) *admet au moins deux solutions positives distinctes de classe $C^{1,\alpha}(M)$, pour certain $\alpha \in (0,1)$*

4.1 Cas critique

Dans cette section, on prouve le théorème 4.1. Pour cela on utilise le résultat suivant

Théorème 4.3 *Soient V un espace de Banach reflexive et X un sous ensemble faiblement fermé de V. Soit encore $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction sur X telle que*

1. f est coercive

2. f est faiblement semi continue inférieurement, i.e. $u_n \to u$ implique que $f(u) \leq \liminf f(u_n)$

alors

1. $\beta = \inf_{x \in X} f > -\infty$

2. il existe $x_o \in X$ tel que $f(x_o) = \beta$.

On considère la fonctionnelle

$$F_q(u) = \int_M (|\nabla u|^p + a\,|u|^p) dv_g - \int_M f\,|u|^q\, dv_g, q \in]p, p^*] \tag{4.3}$$

On va montrer que la fonctionnelle F_{p^*} est faiblement semi continue inférieurement sur une boule

$$\overline{B}_{H_1^p(M)}(0, \rho) = \{u \in H_1^p(M), u \geq 0, \| u \|_{H_1^p(M)} \leq \rho\}$$

Lemme 4.1 *Il existe $\rho > 0$ tel que F_{p^*} est semi continue inférieurement sur la boule fermée $\overline{B}_{H_1^p}(M)(0, \rho)$.*

Preuve. Soit $\{u_i\}_{i \geq 1}$, $u_i \in \overline{B}_{H_1^p}(M)(0, \rho)$, une suite telle que u_i converge faiblement vers une fonction u dans $H_1^p(M)$. Il existe sous-suite, notée encore u_i telle que

1. $u_i \to u$ fortement dans $L_s(M)$ pour $s < p^*$
2. $\| u \|_{H_1^p(M)} \leq \liminf \| u_i \|_{H_1^p(M)}$
3. $u_i(x) \to u(x)$ presque par tout dans M.

On doit montrer que

$$\int_M |\nabla u_i|^p\, dv_g - \int_M |\nabla u|^p\, dv_g - \int_M f \left(u_i^{p^*} - u^{p^*}\right) dv_g \geq o(1). \tag{4.4}$$

D'après le lemme de Bresis-Lieb [19] et la propriété (2) sus-citée, on a

$$\int_M |\nabla u_i|^p\, dv_g - \int_M |\nabla u|^p\, dv_g \geq \| u_i - u \|_{H_1^p(M)} + o(1)$$

et

$$\int_M f \left(u_i^{p^*} - u^{p^*}\right) dv_g = \int_M f\,|u_i - u|^{p^*}\, dv_g + o(1)$$

D'autre part, l'inégalité de Sobolev nous permet d'écrire

$$\int_M f\left|u_i - u\right|^{p^*} dv_g \leq \sup_M f(x) \max\left(K(n,p)^p + \varepsilon, A\right)^{\frac{p^*}{p}} \| u_i - u \|^{p^*}_{H_1^p(M)}$$

où $\varepsilon > 0$ et $K(n,p)$, A sont les constantes apparaissantes dans l'inégalité de Sobolev. Alors, le terme de gauche dans l'expression (4.4) est supérieur ou égale à

$$\begin{aligned}
& \| u_i - u \|^p_{H_1^p(M)} \left(1 - \sup_M f(x) \max\left(K(n,p)^p + \varepsilon, A\right)^{\frac{p^*}{p}}\right) \| u_i - u \|^{p^*-p}_{H_1^p(M)} + o(1) \\
\geq\ & 2^{p^*-p} \| u_i - u \|^p_{H_1^p(M)} \left(1 - \sup_M f(x) \max\left(K(n,p)^p + \varepsilon, A\right)^{\frac{p^*}{p}}\right) \\
& \max\left(\| u_i \|^{p^*-p}_{H_1^p(M)}, \| u \|^{p^*-p}_{H_1^p(M)}\right) + o(1)
\end{aligned}$$

il suffit de choisir ρ, le rayon de la boule $\overline{B_{H_1^p}(0,\rho)}$ petit, et le lemme est démontré ∎
Maintenant, on introduit pour $\eta > 0, p < q < p^*$, les quantités

$$\lambda_{f,\eta,q} = \inf_{A(\eta,q)} \frac{\| \nabla_g u \|^p_{L_p(M)}}{\| u \|^p_{L_p(M)}}$$

où

$$A(\eta,q) = \left\{u \in H_1^p(M) : u \geq 0, \| u \|^q_{L_q(M)} = 1, \int_M f^- u^q dvg = \eta \int_M f^- dvg\right\}$$

et

$$\lambda'_{f,\eta,q} = \inf_{A'(\eta,q)} \frac{\| \nabla u \|^p_{L_p(M)}}{\| u \|^p_{L_p(M)}} \tag{4.5}$$

avec

$$A'(\eta,q) = \left\{u \in H_1^p(M) : u \geq 0, \| u \|^q_{L_q(M)} = 1, \int_M f^- u^q dvg \leq \eta \int_M f^- dvg\right\}.$$

On suit les mêmes arguments utilisés dans A. Rauzy [53] pour le cas $p = 2$, on montre que pour $p \in]1,n[$, $\lambda'_{f,\eta,q}$ est décroissante par rapport à η et est majoré par λ_f pour tout $\eta > 0$. On montre aussi que $\lambda_{f,\eta,q} = \lambda'_{f,\eta,q}$ donc $\lambda_{f,\eta,q}$ est aussi décroissante par rapport à η et est majoré par λ_f.
Les lemmes suivants qui ont été prouvés dans Rauzy [53] pour $p = 2$ restent aussi vrais pour $n > p > 1$.

Lemme 4.2 *Pour tout $q \in]p, p^*[$, $\lambda_{f,\eta,q}$ tend vers λ_f quand η tend vers 0.*

Lemme 4.3 *Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe η_o tel que pour tout $\eta < \eta_o$, il existe q_η tell que pour tout $q > q_\eta, \lambda_{f,\eta,q} \geq \lambda_f - \varepsilon$.*

Lemme 4.4 *Il existe η_o tel que pour tout $\eta < \eta_o$, il existe q_η tel que pour tout $q > q_\eta, \lambda_{f,\eta,q} > |a|$.*

On note $K(n,p)$ et A les meilleurs constante dans l'inégalité de Sobolev :

$$\|u\|^p_{L_{p^*}(M)} \leq (K(n,p)^p + \varepsilon) \|\nabla_g u\|^p_{L_p(M)} + A\|u\|^p_{L_p(M)}.$$

On montre le lemme suivant :

Lemme 4.5 *Supposons que $\sup\limits_M f^+ / \int_M f^- dv_g < \eta\mu/8|a|$, où*

$$\mu = \inf\left(|a|, \delta/(A + (|a| + \delta)(K(n,p)^p + \varepsilon))\right)$$

Alors pour tout $\rho > 0$, il existe $\xi > 0$ tel que pour tout $u \in H_1^p(M)$ avec $\| u \|^q_{L_q(M)} = \rho$, on a $F_q(u) > \xi \| u \|^q_{L_q(M)}$ pour tout $q \in]p, p^*[$.

Preuve. Soit $u \in H_1^p(M)$ telle que $\| u \|^q_{L_q(M)} = k$ avec $k^{1-(p/q)} \geq 2\ |a|\ /\eta \int_M f^- dv_g$.
Considérons la fonctionnelle

$$G_q(u) = \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + a\ |u|^p dv_g + \int_M f^- u^q dv_g,$$

alors

$$G_q(u) \geq a \int_M |u|^p dv_g + \int_M f^- u^q dv_g,$$

et si

$$\int_M f^- u^q dvg \geq \eta k \int_M f^- dvg$$

on a

$$\begin{aligned}
G_q(u) &\geq a \int_M |u|^p dv_g + \eta k \int_M f^- dv_g, \\
&\geq a k^{p/q} + \eta k \int_M f^- dv_g, \\
&= |a|\, k^{p/q} \left(-1 + k^{1-p/q} \frac{\eta \int_M f^- dv_g}{|a|} \right) \\
&\geq |a|\, k^{p/q}.
\end{aligned}$$

De même, si

$$\int_M f^- u^q dvg \leq \eta k \int_M f^- dvg$$

on obtient d'après 4.5

$$G_q(u) \geq (\lambda_{f,\eta,q} + a) \|u\|^p_{L_p(M)} + \int_M f^- u^q dvg$$

d'après le lemme 4.3, on peut choisir η_o et q_η de telle façon que pour tout $q < \eta_o$ et $q > q_\eta$, on a $\delta = \lambda_{f,\eta,q} + a > 0$. Donc, G_q sera minorée par

$$\begin{aligned}
G_q(u) &\geq \delta \|u\|^p_{L_p(M)} + \int_M f^- u^q dv_g \\
&= \delta_1 \|u\|^p_{L_p(M)} + \frac{\delta_2}{|a|} \left(\|\nabla u\|^p_{L_p(M)} + \int_M f^- u^q dv_g - G_q(u) \right) \\
&\quad + \int_M f^- u^q dv_g
\end{aligned}$$

où δ_1, δ_2 sont deux constantes vérifiant $\delta = \delta_1 + \delta_2$, donc

$$\left(1 + \frac{\delta_2}{|a|}\right) G_q(u) \geq \delta_1 \|u\|^p_{L_p(M)} + \delta_2 \|\nabla u\|^p_{L_p(M)} + \left(1 + \frac{\delta_2}{|a|}\right) \int_M f^- u^q dvg.$$

Posons $\delta_1 = \delta_2 A / |a| \left(K(n,p)^p + \varepsilon\right)$, on obtient d'après l'inégalité de Sobolev

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\delta_2}{|a|}\right) G_q(u) &\geq \frac{\delta_2}{|a| \left(K(n,p)^p + \varepsilon\right)} \left(\left(K(n,p)^p + \varepsilon\right) \|\nabla u\|^p_{L_p(M)} + A \|u\|^p_{L_p(M)} \right) \\
&\quad + \left(1 + \frac{\delta_2}{|a|}\right) \int_M f^- u^q dv_g \\
&\geq \frac{\delta_2}{|a| \left(K(n,p)^p + \varepsilon\right)} \|u\|^{p/q}_{L_q(M)}
\end{aligned}$$

et alors

$$G_q(u) \geq \frac{\delta}{A + (|a| + \delta)\left(K(n,p)^p + \varepsilon\right)} k^{p/q}.$$

Posons $\mu = \inf(|a|, \delta/(A + (|a| + \delta)(K(n,p)^p + \varepsilon)))$, alors si $k \leq \left(\frac{\mu}{2}\sup_M f^+\right)^{q/q-p}$, on a

$$\begin{aligned} F_q(u) &= G_q(u) - \int_M f^+ u^q dv_g \\ &\geq \mu k^{p/q} - \sup_M f^+ k \\ &= \frac{1}{2}\mu k^{p/q} + k^{p/q}\left(\frac{\mu}{2} - \sup_M f^+ k^{1-p/q}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\mu k^{p/q}. \end{aligned}$$

Puisque par hypothèse on a supposé que $\sup_M f^+ / \int_M f^- dvg < \eta\mu/8|a|$, il s'ensuit que $F_q(u) \geq \frac{1}{2}\mu k^{p/q}$ pourvu que $k \leq 2^{q/q-p}\left(2|a|/\eta \int_M f^- dv_g\right)^{q/q-p}$. De plus, si q tend vers p^*, μ **ne tend pas vers 0** puisque, en effet d'après le lemme 4.4 on peut choisir η_o tel que pour tout $\eta < \eta_o$, il existe q_η tel que pour tout $q > q_\eta$, $\delta = \lambda_{f,\eta,q} + a > 0$ et $F_{p^*}(u) = \lim_{q \to p^*} F_q(u) \geq \frac{1}{2}\mu k^{n/n-p}$ à condition que $k \leq 2^{n/p}\left(2|a|/\eta \int_M f^- dv_g\right)^{n/p}$. Puisque on a déjà supposé au début de cette démonstration que $k \geq \left(2|a|\eta \int_M f^- dv_g\right)^{q/q-p}$, alors en passant à la limite, k appartiendra à l'intervalle

$$\left[\left(2|a|/\eta \int_M f^- dv_g\right)^{n/p}, 2^{n/p}\left(2|a|/\eta \int_M f^- dv_g\right)^{n/p}\right].$$

Enfin, fixons $\rho > 0$, et soit $u \in H_1^p(M)$ avec $\|u\|_{H_1^p(M)} = \rho$ et ξ_1 tel que $k^{n/n-p} \geq \xi_1 \rho$, il s'ensuit que

$$F_{p^*}(u) \geq \frac{1}{2}\xi \|u\|_{H_1^p(M)} \text{ avec } \xi = \mu\xi_1$$

et la preuve du lemme est achevée. ∎

Lemme 4.6 *Pour tout $t > 0$ assez petit,* $\inf_{\|u\|_{H_1^p(M)} \leq t} F_q(u) < 0, q \in]p, p^*]$.

Preuve. En effet, $F_q(t) = aVol(M)t^p - t^{q-p}\int_M f dv_g$, donc il existe t_o assez petit tel que $\inf_{\|u\|_{H_1^p(M)} \leq t} F_q(u) < 0$ pour tout $t \in]0, t_o[$ ∎

Preuve du Théorème 4.1. Par théorème 4.3 et les lemmes 4.1, 4.5 et 4.6, il existe une fonction $u_1 \in \overline{B}_{H_1^p(M)}(0,\rho)$ tell que $F_{p^*}(u_1) = \inf_{\|u\|_{H_1^p(M)} \leq \rho} F_{p^*}(u) < 0$, et pour ρ assez petit u_1 doit vérifier $\|u\|_{H_1^p} < \rho$, sinon on obtient par le lemme 4.5 $F_q(u_1) > 0$.

En particulier, u_1 est une solution faible de l'équation 4.1. ∎
La régularité et la positivité de la solution se déduisent du théorème suivant

Théorème 4.4 (Druet [27]) *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ et $p \in (1, n)$. Soit $h \in C^o(M \times \mathbb{R})$ une fonction telle que pour tout $(x, r) \in M \times \mathbb{R}$, on a*

$$|h(x,r)| \leq C|r|^{p^*-1} + D$$

C et D sont des constantes positives.
Si $u \in H_1^p(M)$ est une solution de $\Delta_p u + h(x, r) = 0$, alors $u \in C^{1,\alpha}(M)$, pour certain $\alpha \in (0, 1)$

Théorème 4.5 (Druet[27]) *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n et $p \in (1, n)$. Soit $u \in C^1(M)$ une fonction telle que*

$$\Delta_p u + h(x, r) \geq 0 \text{ sur } M$$

h est telle que

$$\begin{cases} h(x,s) \leq f(x,r) & \forall x \in M, \forall r, 0 \leq r \leq s \\ |h(x,s)| \leq C(K + |r|^{p-2})|r| & \forall (x,r) \in M \times \mathbb{R}, C > 0, K > 0 \end{cases}$$

Si $u \geq 0$ sur M et u n'est pas identiquement nulle, alors $u > 0$ sur M.

4.2 Cas sous-critique

Dans cette section on montre que les équations sous-critique (4.2) admettent au moins deux solutions distinctes. La première solution est obtenue en minimisant la fonctionnelle F_q définie à la section 4.1 sur un sous ensemble fermé de $H_1^p(M)$. La deuxième solution s'obtient en appliquant le théorème du col d'Embrosetti-Rabinowitz.

4.2.1 Première solution sous-critique

Soit $B_{k,q}$ l'ensemble

$$B_{k,q} = \{u \in H_1^p(M) : u \geq 0, \|u\|_{L_q(M)} = k\}$$

Considérons le problème variationnel suivant

$$\mu_{k,q} = \inf_{u \in B_{k,q}} F_q(u)$$

où F_q est donnée par (4.3)

Proposition 4.6 *L' équation sous-critique (4.2) admet une solution positive v avec $F_q(v) < 0$.*

Preuve. Soit $\{u_{q,j}\} \subset B_{k,q}$ une suite minimisante i.e

$$\lim_{j\to\infty} F_q(u_{q,j}) = \mu_{k,q}$$

alors, pour j grand on a

$$F_q(u_{q,j}) \leq \mu_{k,q} + 1$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\nabla_g u_{q,j}\|^p_{L_p} &\leq -a\|u_{q,j}g\|^p_{L_p} + \sup_M |f(x)|\|u_{q,j}g\|^p_{L_p} + \mu_{k,q} + 1 \\ &= -ak^{\frac{p}{q}} - k\sup_M|f(x)|\|u_{q,j}g\|^p_{L_p} + \mu_{k,q} + 1 < \infty \end{aligned}$$

et

$$\|u_{q,j}\|^p_{L_p} = k^{\frac{p}{q}}$$

Donc, la suite $u_{q,j}$ est bornée dans $H^p_1(M)$, et il existe une sous suite notée toujours $(u_{q,j})_j$ qui converge faiblement vers une fonction u_q dans $H^p_1(M)$. L'inclusion compacte $H^p_1(M) \subset L_q(M)$ implique que la sous suite $(u_{q,j})_j$ converge fortement vers u_q dans $L_q(M)$. C'est à dire

$$\|u\|^q_{L_p} = k$$

et pour tout $v \in H^p_1(M)$

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla u_q|^{p-2}\langle\nabla u_q, \nabla v\rangle dv_g + a\int_M u^{p-1} v dv_g - \tfrac{q}{2}\int_M f u_q^{q-1} v dv_g \\ = \mu_{k,q}\int_M u_q^{q-1} v dv_g \end{aligned}$$

Les théorèmes 4.4 et 4.5 montrent que $u_q \in C^{1,\alpha}(M)$ et u_q est positive.
Pour montrer que $F_q(u_q) < 0$ pour k petit , il suffit de remarquer que $F_q(u_q) \leq F_q(k^{1/q}) = aVol(M)k^{p/q} - k^{1-p/q}\int_M f dv_g$, on choisie donc k petit pour que $F_q(k^{1/q}) < 0$ ∎

4.2.2 La deuxième solution sous-critique

Dans cette partie, on montre que les équations (4.2) admettent une deuxième solution. D'abord, on rappelle la définition suivante :

Définition 4.1 *soit V un espace de Banach, et $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c , si toute suite u_i de V telle que*

1. $J(u_i)$ *converge vers* c *fortement dans* $\mathbb{R}$
2. $j'(u_i)$ *converge vers* 0 *fortement dans* V'

contient une suite sous-suite convergente.

Une suite u_i qui vérifie les conditions (1) et (2) est dite une suite de Palais -Smale au niveau c et sera notée $(PS)_c$.
Le théorème suivant, appelé souvent le théorème du col, nous permet d'obtenir une deuxième solution.

Théorème 4.7 *Soient* V *un espace de Banach et* $f \in C^1(V)$ *une fonction sur* V *telle que*

1. $f(0) = 0$
2. *Il existe* $r > 0$ *tel que* $f(u) > \alpha$ *pour tout* u *telle que* $\|u\|_v = r$
3. *Il existe* $\tilde{u} \in V$ *telle que* $\|\tilde{u}\|_v > r$ *et* $f(\tilde{u}) < 0$.

Posons

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], V) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \tilde{u}\}$$

et

$$\beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} f(\gamma(t))$$

alors on a $\beta \geq \alpha > 0$ *et il existe une suite de Palais-Smale* $(PS)_\beta$*. De plus si* f *vérifie la condition de Palais-Smale au niveau* β *alors* β *est une valeur critique de* f.

On montre d'abord que $F_q, q \in]p, p^*[$ vérifie les conditions de Palais-Smale

Lemme 4.7 *La fonctionnelle* $F_q, q \in]p, p^*[$ *vérifie les conditions de Palais-Smale.*

Preuve. On procède par contradiction. Supposons qu 'il existe une suite $\{u_j\}$ telle que $F_q(u_j)$ tend vers une limite finie c, $F_q'(u_j)$ tend vers 0 et u_j tend vers l'infinie en norme dans H_1^p.
Autrement dit, pour $v \in H_1^p$,

$$\int_M |\nabla u_j|^p + a \int_M u^p dv_g - \int_M f u_j^q dv_g \to c$$

et

$$\int_M |\nabla u_j|^{p-2} \langle \nabla u_j, \nabla_g v \rangle dv_g + a \int_M u^{p-1} v dv_g - \frac{q}{p} \int_M f u_q^{q-1} v dv_g \to 0$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif N tel que pour tout $j \geq N$, on a

$$\left| \int_M |\nabla u_j|^p + a \int_M u^p dv_g - \int_M f u_j^q dv_g - c \right| \leq \varepsilon$$

et

$$|\int_M |\nabla u_j|^{p-2}\langle\nabla u_j, \nabla v\rangle dv_g + a\int_M u^{p-1} v dv_g - \frac{q}{p}\int_M f u_q^{q-1} v dv_g| \leq \varepsilon$$

en particulier, pour $v = u_j$, on a

$$|\int_M |\nabla u_j|^p + a\int_M u^p dv_g - \int_M f u_j^q dv_g - c| \leq \varepsilon$$

et

$$|\int_M |\nabla u_j|^p + a\int_M u^p dv_g - \frac{q}{p}\int_M f u_j^q dv_g - c| \leq \varepsilon \tag{4.6}$$

en outre

$$|\int_M |\nabla u_j|^p + a\int_M u^p dv_g - qc| \leq \frac{p+q}{q-p}\varepsilon \tag{4.7}$$

et

$$|(q-p)\int_M f u_j^q dv_g - pc| \leq 2p\varepsilon \tag{4.8}$$

Par lemme 4.5, on choisie k, une norme dans $L_q(M)$, telle que

$$\inf_{\|u\|^q_{L_q(M)}=k} F_q(u) > 0.$$

Prenons la suite $v_j = k^{1/q}(u_j / \| u_j \|_{L_q(M)})$, on obtient de (4.7) et (4.8) que

$$|(q-p)\int_M f u_j^q dv_g - \frac{pck^{p/q}}{\| v_j \|^p_{L_q(M)}}| \leq 2p\varepsilon \leq 2p\varepsilon \frac{pck^{p/q}}{\| u_j \|^p_{L_q(M)}} \tag{4.9}$$

Maintenant, si $\| u_j \|_{L_q(M)}$ tend vers l'infinie, il suit de (4.6) et (4.9) que $F_q(u)$ tend vers 0, et puisque $\| v_j \|^q_{L_q(M)} = k$ alors

$$\inf_{\|u\|^q_{L_q(M)}=k} F_q(u) \leq F_q(v_j).$$

donc

$$\inf_{\|u\|^q_{L_q(M)}=k} F_q(u) \leq 0$$

ce qui fait une contradiction. Donc, la suite v_j est une suite bornée dans $H_1^p(M)$. Puisque $p < q < p^*$, les injections de Sobolev sont compactes, donc les conditions de Palais-Smale sont vérifiées ∎

Preuve du théorème 4.2. On va utiliser le théorème du col 4.7.

Par lemme 4.5, il existe $\rho > 0$ tel que $F_q(u) > \eta$ pour tout u telle que $\|u\|_{H_1^p(M)} = \rho$. Soit $u \in C^1(M)$ telle que $\int_M fu^q dv_g > 0$ et $\|u\|^q_{L_q(M)} = 1$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to\infty} F_q(tu) = \lim_{t\to\infty} t^p(\| \int_M |\nabla u_j|^p + a \int_M u^p dv_g - t^{q-p} \int_M f u_j^q dv_g) \\ = & -\infty \end{aligned}$$

alors, il existe $t_o > 0$ avec $\sup_{t\geq t_o} F_q(tu) < 0$. Posons $\omega = t_1 u$ avec $t_1 > \rho$, et considérons l'ensemble

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_1^p) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \omega\}$$

posons $\beta = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} f(\gamma(t))$. D'après le théorème du col 4.7, $\beta \geq \eta > 0$, et il existe une suite de Palais-Smale au niveau β. Puisque par lemme 4.7, les conditions de Palais-Smale au niveau β sont satisfaites, β est une valeur critique de $F_q(u)$ et les equations sous-critiques (4.2) possèdent alors une deuxième solution $v_q \in H_1^p(M)$ avec $F_q(v_q) > 0$. D'après les théorèmes 4.4 et 4.5, $v_q > 0$ et $u \in C^{1,\alpha}$, pour certain $\alpha \in (0,1)$ ∎

Chapitre 5

Multiplicité des solutions pour une équation elliptique quasi-linéaire avec exposant critique sur les variétés compactes

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte munie d'une métrique g et de dimension $n \geq 2$. Soient a, f et h des fonctions lisses sur M. Pour $p \in (1, n)$, on considère sur M l'équation quasi-linéaire suivante

$$\Delta_p u + a(x) |u|^{p-2} u = f |u|^{p^*-2} u + \lambda |u|^{q-2} u + \varepsilon h \tag{5.1}$$

où $\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ est l'opérateur $p-$Laplacien, $p < q < p^* = \frac{np}{n-p}, \lambda > 0$, un paramètre réel et $\varepsilon > 0$ est petit.
Dans ce chapitre, on montre que, sous certaines conditions, l'équations (5.1) admet au moins deux solutions distinctes faibles et positives. On note que cette équation contient l'exposant critiques de Sobolev p^* pour le quel l'inclusion $H_1^p(M) \hookrightarrow L_{p^*}(M)$ n'est pas compacte et la difficulté dans la recherche des solutions via la méthode variationnelle réside dans cette manque de compacité.
Dans la première section de ce chapitre, on donne une condition suffisante pour qu'une suite de Palais-Smale converge fortement dans $H_1^p(M)$ vers une solution.
Dans la deuxième section, on montre l'existence d'une première solution.
Dans la troisième section, on montre l'existence d'une deuxième solution en procédant par les techniques variationnelles d'Ambrosetti et Rabinowitz [3].
Les résultats principals de ce chapitre sont énoncés comme suit :

Théorème 5.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte munie d'une métrique g, de dimension $n \geq 2$ et $p \in (1,n), q > 0$ tels que $p < q < p^*$. Soient a, f et h des fonctions lisses sur M telles que*

1. *$f(x) > 0$ et $h(x) > 0$ sur M*
2. *l'opérateur $L_p(u) = \Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$ est coercif.*

Alors il existe $\lambda_o > 0$ et $\varepsilon_o > 0$ tels que pour tout $\lambda \leq \lambda_o$ et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ l'équation (5.1) admet au moins deux solutions distinctes positives de classe $C_{1,\alpha}, \alpha \in (0,1)$.

Théorème 5.2 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte munie d'une métrique g, de dimension $n \geq 2$ et $p \in (1,n), q > 0$ tels que $p^2 < n$ et $p < q < p^*$. Soient a, f et h des fonctions lisses sur M telles que*

1. *$f(x) > 0$ et $h(x) > 0$ sur M*
2. *l'opérateur $L_p(u) = \Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2}\,u$ soit coercif.*

Soit x_o un point de M où la fonction f atteint un maximum. On suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite

1. *$1 < p < 2, n - 3p + 2 > 0$ et $a(x_o) < 0$*
2. *$p = 2, \frac{4(n-1)}{n-2}a(x_o - Scal(x_o) + (n-4)\frac{\Delta f(x_o}{f(x_o} < 0$*
3. *$p > 2, \frac{\Delta_g f(x_o}{f(x_o} < \frac{p}{n-3+2}Scal(x_o)$*

Alors l'équations (5.1) possède au moins deux solutions distinctes positives et faibles.

5.1 Existence d'une première solution

Soit $K(n,p)$ la meilleur constante de Sobolev dans l'inclusion $H_1^p(\mathbb{R}^n) \subset L_{p^*}(\mathbb{R}^n)$, i.e pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe une constante positive A_{ε_1} telle que pour toute fonction $u \in H_1^p(M)$, on a

$$\|u\|_{p*}^p \leq \|(k(n,p) + \varepsilon_1)\nabla u\|_{p*}^p + A_{\varepsilon_1}\|u\|_p^p \tag{5.2}$$

Sur $H_1^p(M)$, on considère la fonctionnelle suivante :

$$I_{\varepsilon,\lambda}(u) = \int_M (|\nabla_g u|^p + a\,|u|^p)dv_g - \frac{p}{p^*}\int_M f u^{p*} dv_g - \lambda\frac{p}{q}\int_M |u|^q\, dv_g - \varepsilon\int_M h(x) u dv_g$$

Dans cette section, on montre l'existence d'une solution u de l'equation (5.1) avec $I_{\varepsilon,\lambda}(u) < 0$.

On commence par prouver les lemmes suivant :

Lemme 5.1 *Il existe une constante $\rho > 0$ telle que pour tout $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$ la fonctionnelle $I_{\varepsilon,\lambda}(u)$ est faiblement semi-continue inférieurement sur la boule fermée $\{u \in H_1^p(M) : \|u\|_{H_1^p(M)} \leq \rho\}$*

Preuve. Soit $\{u_k\}_k$ une suite dans $H_1^p(M)$ qui converge faiblement vers une fonctions u dans $H_1^p(M)$ et $\|u\|_{H_1^p(M)} \leq \rho$. A une sous suite prés, on a

1. $\nabla u_k \to \nabla u$ faiblement dans $H_1^p(M)$
2. $u_k \to u$ fortement dans $L^r(M), r < p^*$
3. $u_k \to u$ presque partout dans M

On doit montrer que

$$\lim_{k\to\infty} \inf I_{\varepsilon,\lambda}(u) \geq I_{\varepsilon,\lambda}(u)$$

Par le lemme Brezis-Lieb [19], on a

$$\|\nabla u_k\|_p^p - \|\nabla u\|_p^p = \|\nabla_g(u_k - u)\|_p^p + o(1)$$

et

$$\int_M f(x)(|u_k|^{p^*} - |u|^{p^*})dv_g = \int_M f(x)|u_k - u|^{p^*}dv_g + o(1).$$

D'autre part, par l'inégalité de Sobolev (5.2) on a

$$\int_M f(x)|u_k - u|^{p^*}dv_g \leq \sup_{x\in M} \max(K(n,p)^p + \varepsilon_1, A_{\varepsilon_1})^{\frac{p^*}{p}} \|u_k - u\|_{H_1^p(M)}^{p^*}$$

donc

$$I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) - I_{\varepsilon,\lambda}(u) \geq \|u_k - u\|_{H_1^p(M)}^{p^*} [1 - \sup_{x\in M} \max(K(n,p)^p + \varepsilon_1, A_{\varepsilon_1})^{\frac{p^*}{p}} 2^{p^*-p}$$
$$\max(\|u\|_{H_1^p(M)}^{p^*-p}, \|u\|_{H_1^p(M)}^{p^*-p}]$$

Il suffit pour conclure le lemme de choisir le rayon ρ petit ∎

Lemme 5.2 *On suppose que l'opérateur $L_p = \Delta_p u + a|u|^{p-2}u$ est coercif. Pour $\lambda > 0$, il existe $\varepsilon_o > 0, \rho > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour tout $u \in H_1^p(M) = \rho$ avec $\|u\|_{H_1^p(M)}$ on a $I_{\varepsilon,\lambda}(u) > \eta$ pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$*

Preuve. Puisque l'opérateur est coercif, d'après l'inégalité de Sobolev (5.2) , il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que

$$
\begin{aligned}
&I_{\varepsilon,\lambda}(u) \\
&\Lambda\|u\|^p_{H_1^p(M)} - \frac{p}{p^*}\sup_{x\in M} f(x)\|u\|^{p^*}_{p^*} - \lambda\|u\|^q_{p^*} Vol(M)^{1-\frac{q}{p^*}} - \varepsilon\|h\|_{p'}\|u\|^{p^*}_p Vol(M)^{1-\frac{p}{p^*}} \\
&\geq \Lambda\|u\|^p_{H_1^p(M)} - \frac{p}{p^*}\sup_{x\in M} f(x)\left[(K(n,p)^p+\varepsilon_1)\|\nabla u\|^p_p + A_{\varepsilon_1}\|u\|^p_{p}\right]^{\frac{p^*}{p}} \\
&- \lambda Vol(M)^{1-\frac{p}{p^*}}\left[(K(n,p)^p+\varepsilon_1)\|\nabla u\|^p_p + A_{\varepsilon_1}\|u\|^p_{p}\right]^{\frac{q}{p}} \\
&- \varepsilon\|h\|_{p'} Vol(M)^{1-\frac{q}{p^*}}\left[(K(n,p)^p+\varepsilon_1)\|\nabla u\|^p_p + A_{\varepsilon_1}\|u\|^p_{p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \|u\|_{H_1^p(M)}\Big(\|u\|^{p-1}_{H_1^p(M)}\big[\Lambda - \frac{p}{p^*}\sup_{x\in M} f(x)\max[K(n,p)^p+\varepsilon_1, A_{\varepsilon_1}]^{\frac{p^*}{p}} \\
&-\lambda Vol(M)^{1-\frac{p}{p^*}}\max[K(n,p)^p+\varepsilon_1, A_{\varepsilon_1}]^{\frac{q}{p}}\|u\|^{q-p}_{H_1^p(M)}\big] - \varepsilon\|h\|_{p'} Vol(M)^{1-\frac{q}{p^*}}\Big)
\end{aligned}
$$

où $p > 1$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Don, il existe $\rho > 0, \varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour tout $u \in H_1^p(M)$ avec $\|u\|_{H_1^p(M)} = \rho$, on a $I_{\varepsilon,\lambda}(u) > \eta$ ∎

Théorème 5.3 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 2, p \in (1,n)$ et $p < q < p^*$. Supposons que les fonctions a, h et f lisses sur M vérifient les conditions suivantes*

1. *L'opérateur $L_p(u) = \Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2}\,u$ est coercif*
2. *$f(x) > 0$ et $h(x) > 0$ sur M toute entière.*

Alors, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, suffisamment petit, il existe une solution positive u de (5.1) avec $I_{\lambda,\varepsilon}(u) < 0$.

Preuve. Soit $v \in H_1^p(M)$ une fonction telle que $\int_M h(x)v dv_g > 0$. Pour tout $t > 0$, on a

$$
\begin{aligned}
I_{\varepsilon,\lambda}(tv) &= t^p\int_M \left(|\nabla_g u|^p + a(x)|v|^p\right) dv_g - t^{p^*}\frac{p}{p^*}\int_M f(x)|v|^{p^*} dv_g \\
&\quad - t^q\frac{p}{q}\lambda\int_M |v|^q dv_g - tp\varepsilon\int_M h(x)u dv_g
\end{aligned}
$$

alors, il existe $t_1(\lambda,\varepsilon) > 0$, tel que pour tout $t \in]0, t_1(\lambda,\varepsilon)[$, $I_{\varepsilon,\lambda}(tv) < 0$, et pour tout $\rho > 0$

$$\inf_{\|u\|_{H_1^p}\leq\rho} I_{\varepsilon,\lambda}(u) < 0$$

Par les Lemmes 5.1 et 5.2, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\rho > 0$, assez petit, et une fonction $w \in H_1^p(M)$ avec $\|w\|_{H_1^p(M)} \leq \rho$ telles que

$$I_{\varepsilon,\lambda}(w) = \inf_{\|w\|_{H_1^p(M)} \leq \rho} < 0$$

et donc w est une solution faible de l'équation 5.1 et qui est positive et de classe $C^{1,\alpha}$, pour certain $\alpha \in (0,1)$, par les théorèmes 4.4 et 4.5 ▪

5.2 Les conditions de Palais-Smale

Dans cette section, on montre, sous certaines conditions, que la fonctionnelle $I_{\varepsilon,\lambda}$ définie dans la première section vérifie les conditions de Plais-Smale à certain niveau. D'abord, on prouve les lemmes suivants :

Lemme 5.3 *La fonctionnelle $I_{\varepsilon,\lambda}$ est de classe C^1 sur $H_1^p(M)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que la fonctionnelle $F(u) = \int_M f u^{p*} dv_g$ est de classe C^1 sur $H_1^p(M)$.
Soient $u, v \in H_1^p(M)$, on a

$$\begin{aligned} & \mid F(u+v) - F(u) - p^* \int_M f u^{p*-2} uv dv_g \mid \\ = & \int_M f(|u+v|^{p*} - |u|^{p*}) dv_g - p* \int_M f u^{p*-2} uv dv_g \mid \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor

$$\mid u + v \mid^{p^*} - \mid u \mid^{p^*} = p^* \int_0^1 \mid u + tv \mid^{p^*-2} \mid (u+tv) v dt$$

on obtient

$$\begin{aligned} & |u+v|^{p^*} - |u|^{p^*} - p^* |u|^{p^*-2} uv \\ = \; & p^* \int_0^1 \left(|u+tv|^{p^*-2} (u+tv)^* - |u|^{p^*-2} u \right) vdt \end{aligned}$$

Si $1 < p^* \leq 2$, alors

$$\begin{aligned} \mid (\mid u + tv \mid^{p^*-2} (u+tv) - \mid u \mid^{p^*-2} u) v \mid & \leq (|u+v| - |u|)^{p^*-2} |v| \\ & \leq |v|^{p^*} \end{aligned}$$

et si $2 < p^*$,

$$\begin{aligned} & \mid (\mid u+tv \mid^{p^*-2} (u+tv) - \mid u \mid^{p^*-2} u)v \mid \\ = \;& (|u+v|^{p^*-2} - |u|^{p^*-2})uv + |u+v|^{p^*-2}tv^2 \end{aligned}$$

si $2 < p^* \leq 3$,

$$\begin{aligned} & \mid (\mid u+tv \mid^{p^*-2} (u+tv) - \mid u \mid^{p^*-2} u)v \mid \\ \leq \;& |v|^{p^*-1}|u| + |u+v|^{p^*-2}v^2 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité d'Hölder, on a

$$\begin{aligned} & \mid F(u+v) - F(u) - p^* \int_M f u^{p*-2} uv dv_g \mid \\ & \leq p^* \sup_{x\in M} f(x) \int_M (|v|^{p^*-1}|u| + |u+v|^{p^*-2}v^2) dv_g \\ & \leq p^* \sup_{x\in M} f(x)(\| u \|_{L_{p^*}(M)} + \| u+v \|^{p^*-2}_{L_{p^*}(M)} \| v \|^{3-p^*}_{L_{p^*}(M)}) \| v \|^{p^*-1}_{L_{p^*}(M)} \end{aligned}$$

pour $p^* > 3$, on a

$$\begin{aligned} & \mid (\mid u+tv \mid^{p^*-2} (u+tv) - \mid u \mid^{p^*-2} u)v \mid \\ & \leq (|u+v|^{p^*-2} - |u|^{p^*-2})|u||v| + (|u|^{p^*-2} + |u|^{p^*-2})v^2 \end{aligned}$$

Par le développement de Taylor, on a pour tout $x > 0$ et $N > 1$ un réel

$$\begin{aligned} (1+x)^N < x^N + Nx^{N-1} + \frac{1}{2}N(N-1)x^{N-2} + ... \\ \frac{1}{[N]}N(N-1)...(N-[N]+1)x^{N-[N]} \end{aligned}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} (|u+v|^{p^*-2} - |u|^{p^*-2})|u||v| \leq \Big[(p^*-2)|u|^{p^*-1} + ... + \frac{1}{[p^*-2]}(p^*-2) \\ ...(p^*-1-[p^*-2])|u|^{p^*-1-[p^*-2]}|v|^{[p^*-2]-1}\Big]v^2 \end{aligned}$$

toujours par l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} & \mid F(u+v) - F(u) - p^* \int_M f u^{p*-2} uv dv_g \mid \\ & \leq p^* \sup_{x\in M} f(x) \Big[(p^*-2) \| u \|^{p^*-1}_{L_{p^*}(M)} + ... + \frac{1}{[p^*-2]}(p^*-2) \\ & ...(p^*-1-[p^*-2]) \| u \|^{p^*-1-[p^*-2]}_{L_{p^*}(M)} |v|^{[p^*-2]-1}\Big] \| v \|^2_{L_{p^*}(M)} \end{aligned}$$

Enfin, par l'inégalité de Sobolev, on déduit que dans tout les cas on a

$$F(u+v) - F(u) - p^* \int_M f|u|^{p^*-2} uvdv_g \,| = o(\|u\|_{H_1^p(M)})$$

ce qui signifie que la fonctionnelle est derivable et que sa dérivée en u est donnée par $f'(u)v = p^* \int_M fu^{p*-2}uvdv_g$ ▪

Lemme 5.4 *On suppose que la fonction lisse a est telle que l'opérateur $L_p(u) = \Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$ soit coercif et les fonctions f et h sont positives et lisses sur M. Alors toute $(PS)_c$ est bornée.*

Preuve. Soit $(u_k)_k$ une suite de Palais-Smale à niveau c, i.e une suite telle que $I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) \to c$ et $I'_{\varepsilon,\lambda}(u_k) \to 0$. On a alors

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) \quad - \quad & \frac{1}{q} I'_{\varepsilon,\lambda}(u_k)u_k = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\int_M (|\nabla_g u_k|^p + a\,|u_k|^p) dv_g\right) \\ & + p(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}) \int_M f|u_k|^{p*} dv_g - \varepsilon p \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_M h u_k dv_g \end{aligned}$$

par coercivité de l'opérateur $L_p(u) = \Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$, il existe une constante Λ telle que pour tout $\eta > 0$

$$\begin{aligned} c + \eta \geq \Lambda(1 - \tfrac{p}{q})\|u\|^p_{H_1^p(M)} + p(\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{p^*}) \textstyle\int_M f|u_k|^{p^*} dv_g \\ -\varepsilon p(1 - \tfrac{1}{q}) \sup_{x\in M} h(x) \|u_k\|_{p^*} Vol(M)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Sobolev (5.2), on obtient

$$\begin{aligned} & c + \eta \geq \|u_k\|_{H_1^p(M)} [\Lambda(1 - \frac{p}{q})\|u_k\|^{p-1}_{H_1^p(M)} - \\ & \varepsilon p(1 - \frac{1}{q}) \sup_{x\in M} h(x) \max(K(n,p)_p + \varepsilon_1, A_{\varepsilon_1}) Vol(M)^{\frac{1}{p^*}}] \end{aligned}$$

ce qui fait dire que u_k est bornée dans $H_1^p(M)$ ▪

Lemme 5.5 *Soit $(u_k)_k$ une suite de Palais-Smale à niveau c. Supposons que $\sup_{x\in M} f(x) > 0$ et*

$$c < \frac{p}{n}(\sup_{x\in M} f(x))^{1-n/p} K(n,p)^{-\frac{n}{p}}$$

alors il existe une sous-suite de $(u_k)_k$ qui converge fortement dans $H_1^p(M)$.

Preuve. Soit $(u_k)_k$ une suite de Palais-Smale à niveau c. D'après le lemme 5.4 $(u_k)_k$ est bornée dans $H_1^p(M)$. La réflexivité de l'espace $H_1^p(M)$ et la compacité de l'inclusion $H_1^p(M) \subset L_q(M), q < p^*$, impliquent qu'il existe une sous-suite notée toujours u_k telle que

1. $u_k \to u$ faiblement dans $H_1^p(M)$
2. $u_k \to u$ fortement dans $L_q(M)$
3. $\nabla u_k \to \nabla u$ faiblement dans $L_p(M)$
4. $u \to u$ presque partout dans M

Posons $w_k = u_k - u$, d'après le lemme de Bresis-Lieb [19], on a

$$\int_M |\nabla_g w_k|^p \, dv_g = \int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g - \int_M |\nabla u|^p \, dv_g + o(1)$$

D'une autre part, on peut avoir

$$\int_M f|u_k - u|^{p^*} \, dv_g = \int_M f|u_k|^{p^*} \, dv_g - \int_M f|u|^{p^*} \, dv_g + o(1)$$

donc, on obtient

$$\begin{aligned} & I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) - I_{\varepsilon,\lambda}(u) \\ &= \int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g - \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g - \frac{p}{p^*} \int_M f|u_k|^{p^*} \, dv_g - \int_M f|u|^{p^*} dv_g + o(1) \\ &= \int_M |\nabla_g (u_k - u)|^p \, dv_g - \frac{p}{p^*} \int_M f|u_k - u|^{p^*} dv_g + o(1) \end{aligned} \tag{5.3}$$

en testant $I'_{\varepsilon,\lambda}(u_k)$ sur $u_k - u \rightharpoonup 0$ dans $H_1^p(M)$, on obtient

$$\begin{aligned} o(1) &= \frac{1}{p}\langle I'_{\varepsilon,\lambda}(u_k), (u_k - u)\rangle = \frac{1}{p}\langle I'_{\varepsilon,\lambda}(u_k) - I'_{\varepsilon,\lambda}(u), (u_k - u)\rangle \\ &= \int_M |\nabla_g (u_k - u)|^p \, dv_g - \int_M f|u_k - u|^{p^*} dv_g + o(1) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\int_M |\nabla_g (u_k - u)|^p \, dv_g = \int_M f|u_k - u|^{p^*} dv_g + o(1)$$

donc, on obtient en remplaçant dans (5.3)

$$I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) - I_{\varepsilon,\lambda}(u) = (1 - \frac{p}{p^*}) \int_M |\nabla_g (u_k - u)|^p \, dv_g + o(1) \tag{5.4}$$

D'autre part, il existe une constante C telle que

$$||u_k|^{p^*} - |u_k|^{p^*-p}|u_k - u|^p| \leq C|u_k|^{p-p^*}[|u_k|^{p-1} + |u|^{p-1}]|u|$$

et par conséquent, on obtient que

$$|u_k|^{p^*} - |u_k|^{p^*-p}|u_k - u|^p \to u|^{p^*} \text{ dans } L_1(M)$$

alors

$$I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) - I_{\varepsilon,\lambda}(u) = \int_M |\nabla_g(u_k - u)|^p \, dv_g - \frac{p}{p^*}\int_M f|u_k|^{p^*-p}(u_k - u)^p dv_g + o(1)$$

par l'inégalité d'Hölder on obtient

$$I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) - I_{\varepsilon,\lambda}(u) \geq \|\nabla_g(u_k - u)\|_p^p - \frac{p}{p^*}\sup_{x\in M} f(x)\|u_k\|_{p^*}^{p^*-p}\|u_k - u\|_{p^*}^p + o(1)$$

ce qui donne par l'inégalité de Sobolev (5.1) et la convergence forte de u_k vers u dans $L_p(M)$,

$$I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) - I_{\varepsilon,\lambda}(u) \geq \|\nabla_g(u_k - u)\|_p^p[1 - (K(n,p)^p + \varepsilon_1)\frac{p}{p^*}\sup_{x\in M} f(x)\|u_k\|_{p^*}^{p^*-p}] + o(1)$$

en tenant compte de l'égalité (5.4), on obtient

$$(1-\frac{p}{p^*})\|\nabla_g(u_k-u)\|_p^p \geq \|\nabla_g(u_k-u)\|_p^p[1-\frac{p}{p^*}(K(n,p)^p+\varepsilon_1)\sup_{x\in M} f(x)\|u_k\|_{p^*}^{p^*-p}] + o(1)$$

où encore

$$[1 - (K(n,p)^p + \varepsilon_1)\sup_{x\in M} f(x)\|u_k\|_{p^*}^{p^*-p}]\|\nabla_g(u_k - u)\|_p^p \leq o(1)$$

et par conséquent si

$$\limsup \|u_k\|_{p^*}^{p^*-2} < ((K(n,p)^p + \varepsilon_1)\sup_{x\in M} f(x))^{\frac{n-p}{p^2}} \tag{5.5}$$

alors la suite u_k converge fortement dans $H_1^p(M)$ vers u.
Maintenant, du fait que $I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) \longrightarrow C$ on tire que

$$\int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g - \frac{p}{p^*}\int_M f(x)|u_k|^{p^*} dv_g = -\int_M a(x)|u_k|^p dv_g + \lambda\frac{p}{q}\int_M |u_k|^q dv_g$$
$$+\varepsilon p\int_M h(x)u_k dv_g + c + o(1) \tag{5.6}$$

et d'après le fait que $I'(u)(u_k) \to 0$, on obtient

$$\int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g - \int_M f(x)|u_k|^{p^*} dv_g \tag{5.7}$$
$$= -\int_M a(x)\,|u_k|^p + \lambda \int_M |u_k|^q dv_g + \varepsilon \int_M h(x) u_k dv_g + o(1).$$

combinons (5.6) avec (5.7), on obtient

$$\left(1 - \frac{p}{p^*}\right) \int_M f(x)\,|u_k|^{p^*} dv_g + \lambda(1-\frac{p}{q}) \int_M |u_k|^q dv_g + \varepsilon(1-p) \int_M h(x) u_k dv_g = c + o(1).$$

maintenant, puisque $\lambda > 0$ et ε est petit, pour que (5.5) soit satisfaite, il faut que

$$c < \frac{p}{n}\left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*-p}} \left(\sup_{x\in M} f(x)\right)^{1-\frac{n}{p}} (K(n,p)^p + \varepsilon)^{-\frac{n}{p}}$$

puisque ε est arbitrairement choisi , cette condition s'écrit

$$c < \frac{p}{n}\left(\frac{n}{n-p}\right)^{\frac{n}{p}} (\sup_{x\in M} f(x))^{1-\frac{n}{p}} K(n,p)^{-n}$$

■

5.3 Théorème générique d'existence d'une deuxième solution

Dans cette section, on montre l'existence d'une deuxième solution de (5.1). Pour ce fait, on applique le théorème du col (théorème 4.7) cité en chapitre 4. On prouve donc que la fonctionnelle $I_{\varepsilon,\lambda}$ répond aux conditions géométriques de ce théorème.

Lemme 5.6 *Supposons que les fonctions a, f et h vérifient les conditions suivantes :*

1. *L'opérateur $L_p(u) = \Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$ est coercif*
2. *$f(x) > 0, h(x) > 0$ partout dans M.*

Alors , pour tout $\lambda > 0$ et tout $\varepsilon >$ suffisamment petit, on a

1. *Il existe des constantes positives η et ρ telles que $I_{\varepsilon,\lambda}(u)(u) > \eta > 0$ pour tout u vérifiant $\|u\|_{H_1^p(M)} = \rho$, et*
2. *Il existe une fonction $v \in H_1^p(M)$ telle que $I_{\varepsilon,\lambda}(v) < 0$ et $\|v\|_{1,p} > \rho$.*

Preuve. La preuve de la condition(1) est similaire que celle présentée dans le lemme 5.4. En effet, on prend $\rho < \left(\frac{p^*\Lambda}{p}\right)^{\frac{1}{p^*-p}} \left(\sup_{x\in M} f(x))^{\frac{1}{p^*-p}} \max(K(n,p)^p + \varepsilon_1, A(\varepsilon_1))\right)^{-\frac{n}{p^2}}$.
La condition (2) s'ensuit directement en remarquant que $I_{\varepsilon,\lambda}(tu)$ rend vers $-\infty$ quand $t \to +\infty$ ▪

Théorème 5.4 *Supposons que les fonctions a, f et h vérifient les conditions suivantes :*

1. *L'opérateur $L_{p,g}(u) = \Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$ est coercif*
2. *$f(x) > 0, h(x) > 0$ partout dans M.*
3. *Le niveau c de la suite de Palais-Smale satisfait*

$$c < \frac{p}{n}(\sup_{x\in M} f(x))^{1-\frac{n}{p}} K(n,p)^{-n}$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$ et tout $\varepsilon >$ suffisamment petit, l'équation (5.1) *admet une solution u de classe $C^{1,\alpha}, \alpha \in (0,1)$ avec $I_{\varepsilon,\lambda}(u) > 0$*

Preuve. Soit $v \in H_1^p(M)$ avec $I_{\varepsilon,\lambda}(u)(v) < 0$, et considérons l'ensemble

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]), H_1^p(M))\, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$$

et $c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$.
D'après le théorème du col 4.7 et le lemme 5.6 , $c > \eta > 0$ et il existe une suite de Palais-Smale $u_i \subset H_1^p(M)$ au niveau c. Par le lemme (5.5), si la condition

$$0 < c < \frac{p}{n}(\sup_{x\in M} f(x))^{1-\frac{n}{p}}(K(n,p))^{-\frac{n}{p}}$$

est vérifié, alors $c > 0$ sera une valeur critique de $I_{\varepsilon,\lambda}(u)$. ▪

5.4 Preuve des résultats principals

Dans cette section, on démontre les théorèmes 5.1 et 5.2. D'abord, on montre le lemme suivant qui assure la convergence forte sans utiliser les techniques de concentration.

Lemme 5.7 *Il existe $\lambda_o > 0$ et ε_o tels que pour tout $\lambda \leq \lambda_o > 0$ et $0 < \varepsilon \geq \varepsilon_o$, on a*

$$c < \frac{p}{n}(\sup_{x\in M} f(x))^{1-\frac{n}{p}}(K(n,p))^{-\frac{n}{p}}$$

Preuve. Soit $\phi \in H_1^p(M)$ une fonction telle que $\int_M f|\phi|^{p^*}dv_g = 1$. Alors , on a

$$\lim_{t\to\infty} I_{\varepsilon,\lambda}(t\phi) = -\infty$$

donc il existe $t_{\varepsilon,\lambda}$ tel que

$$I_{\varepsilon,\lambda}(t_{\varepsilon,\lambda}\phi) = \sup_{t\leq 0} I_{\varepsilon,\lambda}(t\phi) > 0 \tag{5.8}$$

alors

$$t_{\varepsilon,\lambda}^{q-1}\left[t_{\varepsilon,\lambda}^{p-q}(\|\nabla\phi\|_p^p + \int_M a(x)|\phi|^p dv_g) - t_{\varepsilon,\lambda}^{p^*-q} - \lambda\|\phi\|_q^q\right] = \varepsilon\int_M h(x)\phi dv_g$$

on note que

$$\lim_{\lambda\to\infty} t_{\varepsilon,\lambda}^{p^*-q} + \lambda\|\phi\|_q^q = \infty$$

il 'ensuit que

$$\lim_{t\to 0} t_{\varepsilon,\lambda} = 0$$

Donc, de (5.8), on obtient

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{t\leq 0} I_{\varepsilon,\lambda}(t\phi) = 0.$$

Donc, il existe $\lambda_o > 0$ tel que

$$0 < \sup_{t\leq 0} I_{\varepsilon,\lambda}(t\phi) < \frac{p}{n}(\sup_{x\in M} f(x))^{1-\frac{n}{p}} K(n,p)^{-n}.$$

Soient $\psi = t\phi$ avec t assez grand de sorte que $I_{\varepsilon,\lambda}(\psi)<0$ et

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_1^p(M) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \psi\}$$

soit

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} I_{\varepsilon,\lambda}(t\gamma)$$

par le théorème du col 4.7 et le lemme 5.6, il existe une suite $u_k \in H_1^p(M)$ telle que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o$, $I_{\varepsilon,\lambda}(u_k) \to c$ et $I'_{\varepsilon,\lambda}(u_k) \to 0$ avec

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} I_{\varepsilon,\lambda}(t\gamma) \leq \sup_{t\in[0,1]} I_{\varepsilon,\lambda}(t\phi)$$

donc par (5.8), on obtient

$$0 < c < \frac{p}{n}(\sup_{x\in M} f(x))^{1-\frac{n}{p}}(K(n,p))^{-\frac{n}{p}}$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et pour tout $\lambda > \lambda_o$ ▪

Preuve du théorème 5.1. Le théorème 5.1 est une conséquence des théorèmes 5.3, 5.4 et de lemme 5.7

▪ **Preuve du théorème 5.2.** Soit $x_o \in M$ un point de M où la fonction f atteint son maximum et supposons que $f(x_o) > 0$. On va travailler dans le système des coordonnées normales autour de x_o. Considérons la fonction

$$\psi_\eta = \begin{cases} f(x_o)^{\frac{p-n}{p^2}} \eta^{\frac{n-p}{p^2}} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} C(n,p) - \mu, & \text{pour } 0 < r < \delta \\ 0 & \text{pour } r > \delta \end{cases}$$

où $C(n,p) = \left(n(\frac{n-p}{p-1})^{p-1}\right)^{\frac{n-p}{p^2}}$, $\mu = f(x_o)^{\frac{p-n}{p^2}} \eta^{\frac{n-p}{p^2}} (\eta + \rho^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} C(n,p)$, ρ et η sont des constantes positive petites et r est la fonction distance $r(x) = dist(x_o, x)$.

D'après ce qui précède, le théorème 5.2 sera démontré si la condition suivante est satisfaite

$$0 < c < \frac{p}{n} (\sup_{x \in M} f(x))^{1-\frac{n}{p}} (K(n,p))^{-\frac{n}{p}}$$

D'abord, si la fonction h est positive sur toute la variété M, on aura

$$I_{\varepsilon,\lambda}(t\psi_\eta) \leq I^o_{\varepsilon,\lambda}(t\psi_\eta) = t^p \int_M \left(|\nabla \psi_\eta|^p + a(x)\psi_\eta^p\right) dv_g - \frac{p}{p^*} t^{p^*} \int_M f(x) \psi_\eta|^{p^*} dv_g.$$

donc il suffit de prouver que

$$\sup_{t \in [0,1]} I^o_{\varepsilon,\lambda}(t\psi_\eta) < \frac{p}{n} (\sup_{x \in M} f(x))^{1-\frac{n}{p}} (K(n,p))^{-\frac{n}{p}}$$

On a

$$\int_M |\nabla \psi_\eta|^p \, dv_g = \eta^{\frac{n}{p}-1} C(n,p)^p \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} \int_M (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{\frac{p}{p-1}} dv_g \qquad (5.9)$$

en utilisant le développement de la mesure Riemannienne

$$dv_g = (1 - \frac{1}{6} Ric_g(x_o)_{ij} x^i x^j + r^{2*\alpha} o(1)) dx \alpha \in (0,1) \qquad (5.10)$$

où Ric_g désigne la courbure de Ricci de la métrique g, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_M |\nabla \psi_\eta|^p \, dv_g \\ &= \eta^{\frac{n}{p}-1} C(n,p)^p \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} \left[\int_{B(0,\delta)} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{\frac{p}{p-1}} dx \right. \\ &\left. -\frac{1}{6} Ric_g(x_o)_{ij} \int_{B(0,\delta)} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{\frac{p}{p-1}} x^i x^j dx + \int_{B(0,\delta)} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{\frac{p}{p-1}+\alpha+2} o(1) dx \right] \end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\int_{B(0,\delta)} (\epsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} x^i x^j dx = \frac{\omega_n}{n} \delta^{ij} \int_0^\delta (\epsilon + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n+1} dr$$

où ω_n est le volume de la sphère standard S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_M |\nabla \psi_\eta|^p \, dv_g \\
&= \eta^{\frac{n}{p}-1} C(n,p)^p \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} \omega_{n-1} \\
&\left[\int_0^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{\frac{p}{p-1}+n-1} dr - \frac{1}{6n} Scal(x_o) \int_0^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{\frac{p}{p-1}+n+1} dr \right. \\
&\left. + \int_0^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{\frac{p}{p-1}+n+1} o(1) dr \right].
\end{aligned}$$

Posons $t = \eta^{-\frac{p-1}{p}} r$, on a alors

$$\begin{aligned}
&\int_M |\nabla \psi_\eta|^p \, dv_g \\
&= C(n,p)^p \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} \omega_{n-1} \\
&\times \left[\int_0^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{\frac{p}{p-1}+n-1} dt - \eta^{2(1-\frac{1}{p})} \frac{Scal(x_o)}{6n} \int_0^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{\frac{p}{p-1}+n+1} dt \right. \\
&- \int_{\delta\eta^{-\frac{p-1}{p}}}^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{\frac{p}{p-1}+n+1} dt + \eta^{2(1-\frac{1}{p})} \frac{Scal(x_o)}{6n} \int_{\delta\eta^{-\frac{p-1}{p}}}^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{\frac{p}{p-1}+n+1} dt \\
&\left. + \int_0^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{\frac{p}{p-1}+n+1} o(1) dr \right].
\end{aligned}$$

on a

$$\lim_{\eta \to 0} \int_0^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{\frac{p}{p-1}+n-1} dt = 0$$

et si $n + 2 - 3p > 0$, on aura

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{\delta\eta^{-\frac{p-1}{p}}}^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{\frac{p}{p-1}+n-1} dt = 0$$

par conséquent

$$
\begin{aligned}
&\int_M |\nabla\psi_\eta|^p\, dv_g \\
&= C(n,p)^p \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}}\omega_{n-1} \\
&\times \left[\int_0^\infty (1+t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{\frac{p}{p-1}+n-1} dt - \eta^{2(1-\frac{1}{p})}\frac{Scal(x_o)}{6n}\int_0^\infty (1+t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{\frac{p}{p-1}+n+1} dt\right] \\
&+ o(\eta^{2(1-\frac{1}{p})})
\end{aligned}
$$

en utilisant la relation suivante : pour tout p, q des réels tels que $p > q+1$

$$
I_p^q = \int_0^\infty (1+t)^{-p}\, t^q dt = \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q-1)}{\Gamma(p)}
$$

où Γ désigne la fonction d'Euler, on obtient les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
I_{1-\frac{1}{p}}^{n+2} &= \frac{\Gamma\left((n+2)(1-\frac{1}{p})+1\right)\Gamma\left(\frac{n-3P+2}{p}\right)}{\Gamma\left(n\left(1-\frac{1}{p}\right)+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{p}-1\right)} \\
&= a(n,p) I_n^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}
\end{aligned}
$$

on obtient alors,

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla\psi_\eta|^p\, dv_g &= \frac{p-1}{p} C(n,p)^p \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}}\omega_{n-1} \\
\times &\left[1-\eta^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}\frac{Scal(x_o)}{6n} a(n,p)\right] I_n^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} + o(\eta^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}).
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Maintenant, on calcule le terme $\int_M a(x)\psi_\epsilon^p$
on écrit

$$
a(x) = a(x_o) + \frac{\partial a(x_o)}{\partial x_i} x^i + r^{1+\alpha}.o(1)
$$

alors

$$\int_M a(x)\psi_\eta^p dv_g$$
$$= \int_{B(0,\delta)} a(x) \left(\eta^{\frac{n-p}{p^2}}(\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} C(n,p) f(x_o)^{\frac{p-n}{p}} - \mu\right)^p dv_g$$
$$\times \left(1 - \frac{1}{6} Ric_g(x_o)_{ij} x^i xj + r^2 o(1)\right) dx$$
$$= \eta^{\frac{n-p}{p}} C(n,p)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} \int_{B(0,\delta)} \left(a(x_o) + \frac{\partial a(x_o)}{\partial x_i} x^i + r^{1+\alpha}.o(1)\right) \left(\eta + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-n}$$
$$\times \left(1 - p\mu\eta^{-\frac{n-p}{p^2}} C(n,p)^{-1} f(x_o)^{\frac{n-p}{p^2}} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{n}{p}-1} + (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{n}{p}-1} o(1)\right) dt$$
$$\times \left(1 - \frac{1}{6} Ric_g(x_o)_{ij} x^i xj + r^2 o(1)\right) dx$$

ou encore

$$\int_M a(x)\psi_\eta^p dv_g = \eta^{\frac{n-p}{p}} C(n,p)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} \left[a(x_o \int_{B(0,\delta)} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} dx\right.$$
$$+ \frac{\partial a(x_o)}{\partial x_i} \int_{B(0,\delta)} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} r^{n+1} x^i dx + \int_{B(0,\delta)} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} r^{n+2} o(1) dx$$

on note que

$$\int_{B(0,\delta)} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} r^{n+1} x^i dx = 0, \text{ pour tout } i = 1, ..., n$$

alors on aura

$$\int_M a(x)\psi_\eta^p dv_g = \eta^{\frac{n-p}{p}} C(n,p)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} a(x_o)\omega_{n-1} \int_0^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} r^{n-1} dr$$
$$+ \eta^{\frac{n-p}{p}} C(n,p)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} a(x_o)\omega_{n-1} \int_0^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} r^{n+\alpha} o(1) dr$$

posons $t = \eta^{-\frac{p-1}{p}} r$, on obtient

$$\int_M a(x)\psi_\eta^p dv_g = \eta^{p-1} C(n,p)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} a(x_o)\omega_{n-1} \left[\int_0^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} t^{n-1} dt\right.$$
$$- \int_{\delta\eta^{\frac{1}{p}-1}}^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} t^{n-1} dt + \eta^{(1-\frac{n}{p})+(\alpha+1)(1-\frac{1}{p})} \int_0^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} t^{n+\alpha} o(1) dt -$$
$$\left.\eta^{(1-\frac{n}{p})+(\alpha+1)(1-\frac{1}{p})} \int_{\delta\eta^{\frac{1}{p}-1}}^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{p-n} t^{n+\alpha} o(1) dt\right]$$

or, pour $p^2 < n$

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\delta\eta^{\frac{1}{p}-1}}^{\infty}(1+t^{\frac{p}{p-1}})^{p-n}t^{n-1}dt = 0$$

on obtient alors,

$$\begin{aligned}\int_M a(x)\psi_\eta^p dv_g &= \eta^{p-1}C(n,p)^p a(x_o)f(x_o)^{1-\frac{n}{p}}\omega_{n-1}\int_0^\infty (1+t^{\frac{p}{p-1}})^{p-n}t^{n-1}dt \\ &+ o(\eta^{(1-\frac{n}{p})+(\alpha+1)(1-\frac{1}{p})}) \\ &= \frac{p-1}{p}\eta^{p-1}C(n,p)^p a(x_o)f(x_o)^{1-\frac{n}{p}}\omega_{n-1}I_{n-p}^{n(1-\frac{1}{p})-1} + o(\eta^{(1-\frac{n}{p})+(\alpha+1)(1-\frac{1}{p})})\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}I_{n-p}^{n(1-\frac{1}{p})-1} &= \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{n}{p}-p\right)}{n\left(1-\frac{1}{p}\right)\Gamma(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{p}-1\right)}I_n^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \\ &= b(n,p)I_n^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\end{aligned}$$

on aura,

$$\begin{aligned}\int_M a(x)\psi_\eta^p dv_g = \eta^{p-1}C(n,p)^p a(x_o)f(x_o)^{1-\frac{n}{p}}\omega_{n-1}b(n,p)I_n^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \\ o(\eta^{(1-\frac{n}{p})+(\alpha+1)(1-\frac{1}{p})}).\end{aligned} \tag{5.12}$$

Pour calculer le terme $\int_M f\psi_s^{p^*}dv_g$, on écrit d'abord

$$f(x) = f(x_o) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_i\partial x_j}x^i x^j + r^2 o(1)$$

alors,

$$\begin{aligned}f(x)dv_g &= f(x_o)\left(1+\frac{1}{2f(x_o)}\frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_i\partial x_j}x^i x^j + r^2 o(1)\right) \\ &\times\left(1-\frac{1}{6}Ric_g(x_o)x^i x^j + r^2 o(1)\right)dx \\ &= f(x_o)\left(1+\left(\frac{1}{2f(x_o)}\frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{1}{6}Ric_g(x_o)\right)x^i x^j + r^2 o(1)\right)dx\end{aligned}$$

donc

$$\int_M f\psi_s^{p^*} dv_g = \int_{B(0,\delta)} f(x)\left[C(n,p)f(x_o)^{\frac{p-n}{p^2}}\eta^{\frac{n-p}{p^2}}(\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}} - \mu\right]^{p^*} dv_g$$

$$= C(n,p)^{p^*}\eta^{\frac{n}{p}} f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} \int_{B(0,\delta)} (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n}$$

$$\times \left(1 + \left(\frac{1}{2f(x_o)}\frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{6}Ric_g(x_o)\right)x^i x^j + r^2 o(1)\right)$$

$$\times \left(1 - p^*\mu\eta^{-\frac{n-p}{p^2}} f(x_o)^{-\frac{p-n}{p^2}}(\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{n-p}{p}} + (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{n-p}{p}} o(1)\right) dx$$

$$= C(n,p)^{p^*}\eta^{\frac{n}{p}} f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} w_{n-1}\left[\int_o^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n-1} dr\right.$$

$$-\left(\frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)} + \frac{Scal(x_o)}{6n}\right)\int_o^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n+1} dr$$

$$\left.+\frac{1}{f(x_o)}\int_o^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n+1+\alpha} dr + o(\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{n-p-np^2}{p^2}} o(1)\right].$$

Maintenant, puisque

$$\int_0^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n-1} dr = \tfrac{p-1}{p}\eta^{-\frac{n}{p}} \int_0^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{n(1-\frac{1}{p})-1} dt,$$

$$\int_0^\delta (\eta + r^{\frac{p}{p-1}})^{-n} r^{n+1} dr = \tfrac{p-1}{p}\eta^{-\frac{n}{p}+2(1-\frac{1}{p})} \int_0^\infty (1 + t^{\frac{p}{p-1}})^{-n} t^{n+1-(n+2)\frac{1}{p}} dt,$$

on peut écrire

$$\int_M f\psi_s^{p^*} dv_g = \frac{p-1}{p}C(n,p)^{p^*}\eta^{\frac{n}{p}} f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} w_{n-1}\left[I_n^{n(1-\frac{1}{p})-1}\right.$$

$$\left.-\eta^{2(1-\frac{1}{p})}\left(\frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)} + \frac{Scal(x_o)}{6n}\right) I_n^{(n+2)(1-\frac{1}{p})-1} + o\left(\eta^{2(1-\frac{1}{p})}\right)\right]$$

et comme

$$I_n^{(n+2)(1-\frac{1}{p})-1} = \frac{\Gamma((n+2)(1-\frac{n}{p}))\Gamma(\frac{n+2}{p} - 2)}{\Gamma(n(1-\frac{1}{p}))\Gamma(\frac{n}{p})} I_n^{n(1-\frac{1}{p})-1}$$

$$= c(n,p) I_n^{n(1-\frac{1}{p})-1}$$

on obtient alors,

$$\int_M f\psi_s^{p^*} dv_g = \frac{p-1}{p}C(n,p)^{p^*}\eta^{\frac{n}{p}} f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} w_{n-1} I_n^{n(1-\frac{1}{p})-1}$$

$$\times\left[1 - \eta^{2(1-\frac{1}{p})}\left(\frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)} + \frac{Scal(x_o)}{6n}\right)c(n,p) + o\left(\eta^{2(1-\frac{1}{p})}\right)\right]$$

puisque

$$I_n^{n(1-\frac{1}{p})-1} = \frac{n-p}{n(p-1)} I_n^{n(1-\frac{1}{p})}$$

on obtient enfin que

$$\begin{aligned}\int_M f\psi_s^{p^*} dv_g &= \frac{n-p}{np} I_n^{n(1-\frac{1}{p})} C(n,p)^{p^*} \eta^{\frac{n}{p}} f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} w_{n-1} \\ &\times \left[1 - \eta^{2(1-\frac{1}{p})} \left(\frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)} + \frac{Scal(x_o)}{6n}\right) c(n,p) + o\left(\eta^{2(1-\frac{1}{p})}\right)\right].\end{aligned} \tag{5.13}$$

On rappelle que la fonction : $x \in \mathbb{R}^n \to C(n,p)(1 + \|x\|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}}$ est extrémale pour l'inclusion $H_1^p(M) \subset L_{p^*}(M)$, c'est à dire que u vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx = K(n,p)^{-\frac{n}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx$$

En combinant les égalités (5.11), (5.12) et (5.13), on obtient

$$\begin{aligned}I^o_{\epsilon,\lambda}(t\psi_\eta) = \left(t^p - \frac{p}{p^*}\right) \frac{p-1}{n} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p C(n,p)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} w_{n-1} I_n^{n(1-\frac{1}{p})} \\ + F(t,n,p,\eta)\end{aligned}$$

on note que

$$K(n,p)^{-n} = \frac{p-1}{p} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p C(n,p)^p w_{n-1} I_n^{n(1-\frac{1}{p})}$$

alors, on obtient

$$I_o(t\psi_\eta) = \left(t^p - \frac{p}{p^*}\right) \frac{p}{n} K(n,p)^{-n} f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} + F(t,n,p,\eta)$$

où

$$\begin{aligned}F(t,n,p,\eta) &= t^p a(n,p) C(n,p)^p \frac{p}{p-1} \left(\frac{n-p^p}{np}\right) f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} w_{n-1} I_n^{n(1-\frac{1}{p})} \\ &\times \left[-\frac{Scal(x_o)}{6n} \eta^{2(1-\frac{1}{p})} + \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^p a(x_o) \frac{b(n,p)}{a(n,p)} \eta^{p-1}\right. \\ &\left. + t^{p^*-p} \frac{n-p}{n} \left(\frac{\Delta_g f(x_o)}{2nf(x_o)} + \frac{Scal(x_o)}{6n}\right) \frac{c(n,p)}{a(n,p)} \eta^{2(1-\frac{1}{p})}\right] \\ &+ o(\eta^{2(1-\frac{1}{p})}) + o(\eta^{p-1}).\end{aligned}$$

Soit $t_1 \in [0,1]$ tel que $I_o(t_1\psi_\eta) = \sup\limits_{t\in[0,1]} I_o(t\psi_\eta)$. Puisque la fonction $\phi(t) = t^p - \frac{p}{p^*}t^{p^*}$ atteint son maximum dans l'intervalle $[0,1]$ en $t_o = 1$, on constate que si $F(t_1, n, p\eta) < 0$, alors

$$\sup_{t\in[0,1]} I_o(t\psi_\eta) < \frac{p}{n}K(n,p)^{-n}f(x_o)^{1-\frac{n}{p}} \tag{5.14}$$

on est donc dans les cas suivants :

1. si $p < 2$, $F(t_1, n, p\eta)$ est équivalente à

$$F(t_1, n, p\eta) =$$
$$t^p a(n,p)C(n,p)^p \tfrac{p}{p-1}\left(\tfrac{n-p}{np}\right)^p f(x_o)^{1-\frac{n}{p}}\omega_{n-1}I_n^{n(1-\frac{1}{p})}\left(\tfrac{p-1}{n-p}\right)^p a(x_o)\tfrac{b(n,p)}{a(n,p)}\eta^{p-1}$$

   et pour avoir (5.14) on doit avoir $a(x_o) < 0$

2. Si $p = 2$, on a

$$\begin{aligned}F(t_1,n,2,\eta) &\leq t_1^2\frac{a(n,2)}{6n}C(n,2)(n-2)^2 f(x_o)^{1-\frac{1}{n}}\omega_n I_n^{\frac{n}{2}}\eta \\ &\times \left[-Scal(x_o) + \frac{6n}{(n-2)^2}\frac{b(n,2)}{a(n,2)}a(x_o)\right. \\ &\left.+\frac{n-2}{n}\left(\frac{3\Delta_g f(x_o)}{f(x_o)} + Scal(x_o)\right)\frac{c(n,2)}{a(n,2)}\right] \\ &= t_1^2\frac{a(n,2)}{6n}C(n,2)(n-2)^2 f(x_o)^{1-\frac{1}{n}}\omega_n I_n^{\frac{n}{2}}\eta \\ &\times \left[-Scal(x_o) + \frac{24(n-1)}{(n+2)(n-2)}a(x_o)\right. \\ &\left.+\frac{n-4}{n+2}\left(\frac{3\Delta_g f(x_o)}{f(x_o)} + Scal(x_o)\right)\right]\end{aligned}$$

   donc pour avoir (5.14), on doit avoir

$$\frac{4(n-1)}{(n-2)}a(x_o) - Scal(x_o) + \frac{1}{2}(n-4)\frac{\Delta_g f(x_o)}{f(x_o)} < 0$$

3. Si $p > 2$, pour avoir (5.14), on doit supposer que

$$\left(1 - \frac{n-p}{n}\frac{c(n,p)}{a(n,p)}\right)Scal(x_o) + > \frac{3(n-p)}{n}\frac{\Delta_g f(x_o)}{f(x_o)}\frac{c(n,p)}{a(n,p)}$$

   c'est à dire

$$\frac{\Delta_g f(x_o)}{f(x_o)} < \frac{p}{n-3p+2}Scal(x_o)$$

■

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, Critical points and nonlinear variational problems Mémoir N°49, Société Mathématique de France Tome 120, Fascicule 2, 1992.

[2] A. Ambrosetti, J. Garcia & I. Peral, Multiplicity of solutions for semilinear and quasilinear elliptic problems, J. Funct. Anal. 137 (1996), 219-242.

[3] A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[4] P.Aviles and R.McOwen, Conformal deformation of the metric to constant negative scalar curvature on noncompact Riemannian manifolds. J. Dif. Geom. 27(1988),225-239.

[5] T.Aubin, Equations différentielles nonlinéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J.Math. Pures et App. 55(1976), 269-296.

[6] T. Aubin, Problèmes isopémétriques et espaces de Sobolev. J.Diff.Goem. 11(1976), 573-598.

[7] T.Aubin, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm nonlinéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire, J. Funct. Annal. 32(1979), 148-174.

[8] T. Aubin, Some nonlinear problems in Riemannian geometry, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlagen ,Berlin,1998.

[9] J. G. Azorero & I. P. Alonso, Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with nonsymmetric terms,Trans.A.M.S. 323(1991), 877-895.

[10] J. G. Azorero & I. P. Alonso, Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem, Indiana University Math. Jou. 43 N°3(1994), 941-957.

[11] A. Bahri, Another proof of the Yamabe conjecture for locally conformally flat manifolds, Nonlinear analysis, Theory, Methods and Applications , 20(1993) 1261-1278.

[12] A. Bahri & H. Brezis, Equations elliptiques nonlinéaires sur des variétés avec exposant de Sobolev critique. C.R. Acad. Sci. Paris,307(1985) 573-576.

[13] M. Benalili & Y. Maliki, A reduction method for proving existence of solutions to elliptic equations involving $p-$ Laplacian, E. J. D. E. N°106(2003), 1-10.

[14] M. Benalili & Y. Maliki , Generalized scalar curvature type equation on complete Riemannian manifolds, E. J. D.E.146(2004),1-18.

[15] M. Benalili & Y. Maliki , Solving $p-$Laplacian on complete Riemannian manifolds, E.J.D.E, N° 155(2006),1-9.

[16] M. Benalili & Y. Maliki , Generalized prescribed scalar curvature type equation on compact manifolds of negative scalar curvature, Rocky Mountain Journal of Mathematics Vol(5) N°37 (2007), 1399-1413.

[17] M. Benalili & Y. Maliki , Multiplicity of solutions for elliptic quasilinear equation with critical exponent on compact manifolds. Preprint.

[18] E.Dibenedetto, $C^{1,\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations, Nonlinear analysis, TMA,7 N°8(1983),827-850.

[19] H. Brezis and E.A. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. A.M.S.88(1983), 486-490.

[20] H. Brezis & L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. Comm.Pure. App. Math.36(1983),437-477.

[21] L. Damascelli, Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results, Annal. I.H.P. Anal. Nonlinéaire, 15 N4(1998), 493 -516.

[22] F. Demengel & E. Hebey, On some nonlinear quations involving the $p-$Laplacian with critical sobolev growth, Advances in differential equations, 3 N4(1998), 533-574.

[23] F. Demengel & E. Hebey, On some nonlinear equations involving the $p-$Laplacian with critical Sobolev growth and perturbation terms, Appl. Anal. 72(1999), 75-109.

[24] Z. Djadli, Nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds, Cal.Var.8(1999) , 293-326.

[25] I. Diaz , J.E. Saa, Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires C.R.A.S. de Paris t. 305, Serie I (1987), 521-524.

[26] O.Druet, Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riamannian manifolds, Mathematische Annalen 314(1999), 327-346.

[27] O.Druet, Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,130A(2000), 269-289.

[28] O. Druet & E. Hebey, Blow up examples for second order elliptic PDE's of critical Sobolev growth. Preprint 2003.

[29] O. Druet, E. Hebey & F. Robert, Blow up analysis for elliptic PDEs in Riemannian geometry. Princton university press, 2004.

[30] O. Druet, E. Hebey & M. Vaugon, A C^0- theory for the blow up of second order elliptic equations of critical Sobolev growth, Elerct, Res. Announ.A.M.S. 9(2003), 19-25.

[31] I. Ekeland, On the variational principle J. Math. Anal.Appl. Vol 47 (1974), 324-353.

[32] J. F. Escobar & R. Schoen, The Yamabe problem on manifolds with boundary. J. Diff. Geom.135(1992), 21-84.

[33] J. F. Escobar and R. Schoen, Conformal metrics with prescribed scalar curvature. Inventiones Mathematicae, 86(1986),243-254.

[34] M.J. Esteban & P. L. Lions, Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains, Proc. Roy.Soc. Edd, 93A(182), 1-14.

[35] G. Gilbarg & N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Second edition Graudlehren der Mathematishen Wissenschaften 224, Springer, Berlin, New York, 1983.

[36] O. Gil-Mederano, On the Yamabe problem concerning the compact conformally flat manifolds , J. funct. annl., 66(1986)42-53.

[37] M. Guedda & L. Veron, Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Nonlinear analysis TMA, 13(1989),879-902.

[38] E. Hebey, Courbure scalaire et géometrie conforme, J.Geom. Phys. 10(1993),345-380.

[39] E. Hebey, Optimal Sobolev inequalities on complete Riemannian manifolds with Ricci curvature bouded from below and positive injectivity radius, Amer.J. Math, 118(1996), 291-300.

[40] E. Hebey, Introduction à l'analyse nonlinéaire sur les variétés , Fondations, Didenot, Editeurs, Arts et sciences 1977.

[41] E. Hebey, Nonlinear analysis on manifolds, Sobolev spaces and inequalities, Courant Lecture Notes 5, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New york , 1999.

[42] E. Hebey, Sobolev spaces on Riemannnian manifolds, Lecture notes in mathematics, Berlin, Vol 1635, 1996.

[43] E. Hebey & M. Vaugon, Remarque sur le problème de Yamabe, J. Funct. Anal., 96(1991), 31-37.

[44] E. Hebey & M. Vaugon, Multiplicité pour le problème de Yamabe, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.312 N°2(1991),237-240.

[45] E. Hebey & M. Vaugon, Meilleurs constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et multiplicité pour les problemes de Nirenberg et Yamabe, Indiana university mathematics journal ,41(1992), 377-407.

[46] E. Hebey & M. Vaugon, Existence and multiplicity of nodal solutions for nonlinear elliptic equations with critical Sobolev growth, J. Funt. Ana.119 N°2(1994),298-318.

[47] E. Hebey & M. Vaugon, The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds, Duke Math.J, 79(1995), 235-279.

[48] E. Hebey and M. Vaugon, Meillleurs constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev. Ann. Inst. H. Poincarée Anal.Nonlinéaire 13(1996),57-93.

[49] D. Holeman, Prescribed scalar curvature problem on complete manifolds, J. Math. Pures Appl.80 N°2(2001),223-244.

[50] Z. Jin, Prescribing scalar curvature on the conformal classes of complete metrics with negative curvature, Trans. A. M. S. ,340(1993), 785-810.

[51] A. Jourdain, Solutions nodales pour des équations de type courbure scalaire sur la sphère, Bull. Sci. Math, 123 N4(1999), 299-327.

[52] Y.T. Jung, On the elliptic equation $\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u+K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}}=0$ and the conformal deformation of Riemannian metrics, Indiana univesrity mathematics journal, 43(1994), 737-746.

[53] J. L. Kazdan and F. W. Warner, Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure, J. diff. Geom, 10(1975),113-134.

[54] J. M. Lee and T. h. Parker, The Yamabe problem, Bull. Amer. Math. Soc, 17(1978), 37-91.

[55] P. Li, L. F. Tam and D.Yang, on the ellitpic equation $\Delta u + ku + Ku^p = 0$ on complete manifolds and their geometric applications, Trans. A. M. S., 350 N2(1998),1045-1078.

[56] Y.Li and W. Ni, On coformal scalar curvature equations in R^n, Duke Math.J. 57(1988), 895-924.

[57] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limite case , Part 1, Rev. Math, Iberoamericana, 1(1985), 145-201.

[58] P. L. Lions, the concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case , Part 2, Rev. Math, Iberoamericana,1(1985), 45-121.

[59] M. C. Leung, Conformal scalar curvature equations on complete manifolds, Comm.Part. Diff. Eqnts., 20(3 and 4)(1995), 367-417.

[60] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, Ann. Scuola. Norm. sup. Pisa, 13(1959)116-162.

[61] T. Ouyang, On the positive solutions of semilinear equation $\Delta u+\lambda u+hu^p = 0$ on compact manifolds. Pat II, Indiana University Mathematics Journal, 40(1991), 1083-1141.

[62] A. Rauzy, Multiplicité pour un problème de courbure scalaire prescrite. Bull. Sci. Math.,120(1996), 135-194.

[63] A. Rauzy, Courbures scalaires des variétés d'invariant confome négatif, Trans. A. M. S., 347 N°12(1995), 4729-4745.

[64] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Diff. Geom.,20(1984), 479-495.

[65] S. Simon, Régularité de la solution d'une équation nonlinéaire dans $\mathbb{R}^n$. Ph. Benilan and J. Robent eds. Lecture notes in Math 665, Spinger Verlag, Berlin (1978), 205-227.

[66] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, Ann. Math. Pure. Appl. ,110(1976), 34-73.

[67] P. Tolksdorf, On the Dirichlet problem for quaslinear equations in domains with conical boundary points, Comm.in PDE.,8(1983),773-817.

[68] P. Tolksdorf, Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations , J. Diff. Eqnts., 511984), 126-150.

[69] N.S. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Scuola. Norm. Sdup. Pisa 22(1968), 265-274.

[70] R. Van der Vost, Variational identities and applications to differential systems. Arch. Rat. Mech. Anal.,116(1991),375-398.

[71] M. Vaugon, Equations différentielles nonlinéaires sur les variétés Riemanniennes compactes. Bull. Sci. Math.,103(1979),263-272.

[72] J.L. Vazquez, A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations, Appl. Math. Opt, 12(1984)191-202.

[73] H. Yamabe, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math.J. 12(1960), 21-37.