

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université
Aboubekr Belkaïd
Tlemcen



جامعة
أبو بكر بلقايد

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

Mémoire

Pour Obtention Du Diplôme De Magistère En Génie Civil

OPTION : Géotechnique et Environnement

Thème :

**ECOULEMENT DANS LES MILIEUX POREUX EN
REGIME TRANSITOIRE**

Présenté par :

BENYAMINA Leila Chirhane

Devant le Jury composé de :

<u>M^R D.ZENDAGUI</u>	M.C.A UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID, TLEMCEEN	PRESIDENT
<u>M^R A.ZADJAOUI</u>	M.C.A UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID, TLEMCEEN	EXAMINATEUR
<u>M^R A.ZIADI</u>	M.C.A CENTRE UNIVERSITAIRE AIN TEMOUCHENT	EXAMINATEUR
<u>M^R A.BEKKOUCHE</u>	PROF UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID, TLEMCEEN	ENCADREUR
<u>M^R Z.BENYELLES</u>	M.A.A UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID, TLEMCEEN	CO-ENCADREUR

REMERCIEMENTS

Le présent travail n'aurait pas été possible sans l'aide et l'orientation de Monsieur **A.BEKKOUCHE**. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués.

Je remercie Monsieur **Z.BENYELLES** pour son soutien, ses conseils précieux et sa grande disponibilité pour l'élaboration de ce travail.

Je remercie Monsieur **M.BELHARIZI** de m'avoir soutenu et aidé pour la réussite de ce travail.

Je tiens à exprimer très vivement du fond du cœur, ma gratitude à M^{elle} **A.TAHAR BERRABAH** de m'avoir soutenu et aidé tout le long de ce travail.

Je remercie Monsieur **D.ZENDAGUI**, d'avoir accepté d'examiner mon travail et faire partie de ce jury malgré toutes les responsabilités dont il est en charge.

Je remercie également Messieurs **A.ZADJAOUI** et **A. ZIADI** qui ont accepté de faire partie du jury, ainsi que pour leurs aides et conseils.

RESUME

Ce travail consiste à étudier les écoulements permanents et non permanents dans un sol saturé considéré comme un milieu poreux indéformable.

L'hydraulique souterraine traite principalement deux types de problèmes :

- La détermination des débits Q (pompage),
- La répartition des pressions interstitielles.

La dimension des pores dans les sols étant variable, l'écoulement ne peut être défini que par des caractéristiques moyennes.

Les problèmes de débit d'eau des sols saturés et non saturés conduisent à des équations différentielles partielles qui sont difficiles à résoudre par des méthodes analytiques ou graphiques.

L'objectif principal de ce travail a permis de mettre en évidence les différentes équations différentielles des écoulements en régime permanent et régime transitoire.

Il a permis également de déterminer la répartition du gradient hydraulique et le débit de fuite par analogie thermique, en utilisant le code éléments finis ANSYS.

Plusieurs exemples sont traités et validés dans ce manuel, en utilisant l'approche par analogie entre les équations différentielles de la thermique et de l'hydraulique.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة التدفقات الدائمة والغير الدائمة في أرضية غير قابلة للتشوه هيدروليكية الأرضية ستعالج خصوصا نوعين من المشاكل:

- ✓ تحديد معدل Q (التدفق).
- ✓ توزيع الضغط .

إذا ما كان حجم المسام في الأرضية متغير، فإن التدفق لا يكون إلا بواسطة خصائص متوسطة مشاكل نسبة التدفق في التربة المشبعة والغير مشبعة يؤدي إلى معادلات تفاضلية جزئية يصعب حلها بالطرق البيانية أو التحليلية.

ويبقى الهدف الرئيسي من هذا العمل هو مناقشة مختلف المعادلات التفاضلية من التدفق وذلك في الحالات المستقرة والعبارة، وكذا تحديد وتوزيع قوة ومعدل تسرب الماء وذلك باستعمال ANSYS هذا الأخير الذي يتعامل فقط مع المشاكل الحرارية هذا ما يؤدي بنا إلى مناقشة مختلف المعادلات الحرارية وبعدها وضع تناظر بين المجالين الهيدروليكي والحراري وبالتالي التحقق من صحة النتائج بواسطة الرسوم التوضيحية في مختلف الأمثلة.

ABSTRACT

This work has to study the permanent and non-permanent flows in saturated soil considered as a porous deformable place.

The hydraulic soil deals mainly two types of problems:

- ✓ The flow rate determining Q (pumping)
- ✓ The distribution of pore pressure.

The size of pore being variable in soils, so that the flow can be defined by the average characteristics.

The water flow problems in saturated and non saturated soils lead to partial differential equations that are difficult to resolve by graphical or analytical methods.

The main objective of this work is to discuss the various differential equations of flow in steady and transient state also to determinate the distribution of hydraulic head and the leakage rate while using the ANSYS code that it only deals that problems in heat, why we will also discuss the different thermal equations, and next do an analogy between the two domains (hydraulic and thermal), and validate results by illustrations of various examples.

TABLE DES MATIERES

Remerciements.....	1
Résumé/ ملخص/ Absract	2-3
Table des matières	4-7
Liste des figures	8-9
Liste des Notations.....	10-11
Introduction générale.....	12-13

CHAPITRE I : Description d'un milieu poreux

1. Introduction	15
2. Les milieux poreux.....	15
2.1 Définition des milieux poreux.....	15
2.2 Quelques exemples des milieux poreux.....	16
2.2.1 Milieu poreux naturel.....	16
2.2.2 Milieu poreux artificiel.....	16
2.3 Description géométrique	17
a. La porosité.....	17
b. Aire spécifique.....	19
c. Autres paramètres.....	19
3. Loi expérimentale de Darcy.....	19
4. Quelques notions d'hydraulique.....	21
4.1 La perméabilité.....	21
4.2 Vitesse de l'eau dans le sol.....	22
4.3 Charge hydraulique en un points	23
4.4 Mesure de la perméabilité.....	23
4.4.1 Au laboratoire.....	23

4.4.2 In-situ.....	24
4.Résultats d'enregistrement de la perméabilité.....	25

CHAPITRE II : Théorie sur les écoulements dans les milieux poreux.

1. Introduction	28
2. Problème d'écoulement	29
2.1 Equation de mouvement.....	29
2.2 Equation de continuité.....	29
2.3 Equation thermodynamique de l'état du sol.....	30
3. Equation générale de l'écoulement de l'eau dans les sols non saturés.....	30
4. Développement de l'équation de continuité dans le cas d'un écoulement permanent et incompressible.....	31
5. Equation générale d'un écoulement variable ou transitoire en milieu poreux	33
6. Solution des équations d'écoulement.....	34
7. Définition de la vidange rapide.....	35
7.1/Comportement de l'ouvrage pendant la vidange rapide.....	35
7.1.1 Matériau peu déformable et perméable (sable bien compacté).....	36
7.1.2 Matériau déformable et peu perméable (argile ou limon argileu).....	38
7.2/Calcul d'un barrage homogène en vidange rapide.....	40
7.2.1 Formulation du problème en régime permanent.....	40
7.2.2 Formulation du problème en régime transitoire	42
7.2.3 Application.....	42

CHAPITRE III: Analogie entre les équations d'écoulement et les équations de la chaleur

1. Introduction	45
2. Equation différentielle partielle.....	46
2.1 Equation elliptique.....	46
2.2 Equation parabolique	48
2.3 Equation hyperbolique.....	49

3. L'équation différentielle gouvernant la conduction de la chaleur dans un milieu poreux.....	50
3.1 Equation de Fourier.....	50
3.2 Fonction d'emménagement d'énergie.....	52
3.3 la conductivité thermique –courbe caractéristique.....	53
3.4 L'équation d'équilibre énergétique.....	54
3.4.1 /L'énergie générée dans un corps	54
3.4.2/L'énergie à l'intérieur d'un corps	54
3.5 L'équation générale de transfert de chaleur par conduction	56
4. Assimilation entre l'analyse thermique et l'analyse d'infiltration.....	59
4.1 Définition des propriétés du milieu	59
4.2 Le principe de la similitude.....	63
4.3 Equations différentielles similaires.....	63
4.3.1/Equation différentielle en écoulement.....	64
4.3.2/Equation différentielle en thermique.....	64

CHAPITRE IV: Régime permanent et transitoire appliquées à des exemples en Génie Civil

Exemples

1.1 Exemple 1 : le modèle de Hélé-Shaw pour la détermination des écoulements dans les petits barrages en terre.....	66
1.2 Exemple 2 : Etude de régime transitoire de l'écoulement de l'eau pendant le drainage des nappes à surfaces libre.....	70
1. Introduction au code de calcul Ansys.....	72
2.1 Exemples.....	75
a. Exemple d'analyse thermique en transitoire.....	75
b. Exemple d'analyse thermique en régime transitoire.....	76
c. Exemple de conduction de la chaleur à travers une section de cheminée.....	77
1.2 application directe au code de calcul Ansys.....	79
Première application : Analyse du transfert thermique autour d'un pipeline par la méthode des éléments finis	
2.2.1/présentation de l'exemple.....	79

2.2.2/Introduction des paramètres.....	81
2.2.3/le maillage.....	82
2.2.4/Analyse des résultats.....	83
2.2.5/Présentation des résultats.....	84
2.2.6/Interprétation des résultats.....	89
Deuxième application : Analyse du transfert thermique à travers deux barres l'une en cuivre et l'autre en acier trompée dans un bac d'eau	
2.3/Description de l'étude.....	92
2.3.1/Modélisation	92
2.3.2/Maillage.....	93
2.3.3/Procédure.....	94
2.3.4/Interprétation des résultats.....	95
Troisième application : Etude des réseaux d'écoulement dans le cas unidimensionnel	
2.4.1/Etude du débit pour un sol à une seule couche.....	96
A/Ecoulement horizontal	96
B/Ecoulement vertical	98
2.4.2/Etude du débit pour un sol multicouches.....	99
A/Ecoulement vertical.....	99
B/Ecoulement horizontal.....	100
Quatrième application : Modélisation numérique d'un écoulement non stationnaire à surface libre des Barrages en remblai	
2.5/Introduction.....	102
2.5.1/Présentation de l'exemple	102
2.5.2/Modélisation	103
2.5.3/ Présentation des résultats	104
Conclusion générale	108
Bibliographie et Références	109

LISTE DES FIGURES

- Figure 1.1 :** Espace des pores d'un gré de la mer Nord.
- Figure 1.2 :** Exemple d'une coupe d'un milieu poreux.
- Figure 1.3 :** Mesure de la perméabilité K au laboratoire(matériau cohérent).
- Figure 1.4 :** Mesure de la perméabilité K au laboratoire(matériau consolidé).
- Figure 1.5 :** Essai d'injection.
- Figure 1.6 :** Essai de pompage.
- Figure 1.7 :** Degré de perméabilité par type de sol.
- Figure 2.1 :** Élément d'un sol traversé par un fluide.
- Figure 2.2 :** Variation de l'écoulement massique d'un fluide fonction de la distance.
- Figure 2.3 :** Conditions aux limites de l'écoulement créé par la vidange rapide
- Figure 2.4 :** Réseau d'équipotentiels dans la recharge amont d'un barrage à noyau pendant la vidange rapide
- Figure 2.5 :** Barrage constitué d'un matériau peu déformable.
- Figure 2.6 :** Talus amont d'un barrage revêtu d'une couche en matériau très perméable.
- Figure 2.7 :** Barrage à noyau équipé d'un tapis drainant amont. Réseau d'écoulement dans la recharge amont
- Figure 2.8 :** Pression interstitielle dans le talus amont avant la vidange.
- Figure 2.9 :** Représentation du barrage dans le domaine Ω .
- Figure 2.10 :** Représentation du maillage du barrage homogène.
- Figure 2.11 :** Représentation du régime permanent.
- Figure 2.12 :** Représentation de la vidange rapide (à $t=30h$).
- Figure 2.13 :** Représentation de la vidange rapide (à $t=10j$).
- Figure 3.1 :** Distribution de la température à travers la plaque chauffante.
- Figure 3.2 :** Infiltration sous un barrage.
- Figure 3.3 :** Distribution d'un champ électrique au niveau d'un conducteur.
- Figure 3.4 :** Distribution de la température à travers la plaque chauffante en fonction du temps.
- Figure 3.5 :** Vibration de la ficelle.
- Figure 3.6 :** Exemple d'une fonction d'emménagement d'énergie.
- Figure 3.7 :** Exemple d'une fonction teneur en eau liquide.
- Figure 3.8 :** Exemple d'une fonction de conductivité thermique.
- Figure 3.9 :** Un élément de volume en coordonnées cartésiennes.
- Figure 4.1 :** Position de la ligne de saturation dans une digue avec drain à l'aval (hauteur d'eau=20cm).
- Figure 4.2 :** Variation dans le temps de la ligne de saturation d'une vidange rapide ($t=2min$).
- Figure 4.3 :** Problème d'une dalle infinie.
- Figure 4.4 :** Maillage d'une barre rectangulaire.

Figure 4.5 : Modélisation et maillage d'une cheminée.

Figure 4.6 : Conduction de la chaleur à travers une cheminée.

Figure 4.7 : Géométrie du problème et conditions aux limites (Jason.S et al, 1997).

Figure 4.8 : Fonction de la teneur en eau liquide (Jason.S et al, 1997).

Figure 4.9 : Fonction de la conductivité thermique (Jason.S et al, 1997).

Figure 4.10 : Modélisation du pipeline et une partie du sol.

Figure 4.11 : Maillage de la structure avec l'élément Plane 77.

Figure 4.12 : Contours de la température en régime permanent.

Figure 4.13 : Variation du gradient thermique suivant l'axe x en régime permanent.

Figure 4.14 : Variation du gradient thermique suivant l'axe y en régime permanent.

Figure 4.15 : Variation du flux thermique suivant l'axe x en régime permanent.

Figure 4.16 : Contours de la température pour un temps de 24 Jours.

Figure 4.17 : Contours de la température pour un temps de 332 Jours.

Figure 4.18 : Contours de la température pour un temps de 494 Jours.

Figure 4.19 : Variation de la température et du gradient suivant Y au niveau du nœud 245 en fonction du temps.

Figure 4.20 : Variation de la température et du gradient suivant Y au niveau du nœud 222 en fonction du temps.

Figure 4.21 : Variation de la température et du gradient suivant Y au niveau du nœud 2508 en fonction du temps.

Figure 4.22 : Modélisation de la structure.

Figure 4.23 : Maillage de la structure.

Figure 4.24 : Distribution de la température en régime permanent.

Figure 4.25 : Modélisation d'un sol homogène pour un monocouche.

Figure 4.26 : Maillage de la structure avec l'élément Plane 77.

Figure 4.27 : Variation du flux thermique suivant l'axe x en régime permanent.

Figure 4.28 : Variation du flux thermique suivant l'axe y en régime permanent.

Figure 4.29 : Ecoulement vertical à travers un multicouche horizontal.

Figure 4.30 : Modélisation d'un multicouche horizontal.

Figure 4.31 : Ecoulement vertical à travers un multicouche horizontal.

Figure 4.32 : Variation du flux thermique suivant l'axe x en régime permanent.

Figure 4.33 : Modélisation du barrage en remblai.

Figure 4.34 : Représentation de l'élément Plane 55.

Figure 4.35 : Représentation des résultats numériques en régime permanent.

Figure 4.36 : Représentation des résultats du modèle physique en régime permanent.

Figure 4.37 : Représentation des lignes équipotentielles à 24 heure.

Figure 4.38 : Représentation des lignes équipotentielles à 24 heure.

Figure 4.39 : Représentation des lignes équipotentielles à 24 heure.

LISTE DES NOTATIONS

P	La porosité
V _p	Volume des pores
V _T	Volume totale
φ	Fraction volumique
P _s	porosité
A _p	Surface des pores
A ₀	Surface total
J	Perte de charge
h ₁ , h ₂ , h	Hauteur du piézomètre
Q	débit
K	perméabilité
A	Surface ou l'aire spécifique
x	Constante qui dépend du fluide et du milieu poreux
μ	Viscosité dynamique du fluide
v	Vitesse d'infiltration
γ _w	Poids volumique de l'eau
z	Côte
u	Pression de l'eau
ρ	densité
t	temps
T	température
θ	Teneur en eau
x, y, z	Coordonnées cartésiennes
n	porosité
s _r	Degré de saturation
q _x , q _y , q _z	Flux massique

h	Charge hydraulique
β	Indice de compressibilité de l'eau
α	Indice de compressibilité vertical du milieu
S	Coefficient d'emmagasinement
T	transmissibilité
dQ	Quantité de chaleur élémentaire
K_F	Conductivité thermique
grad T	température
C_v	Capacité thermique volumique isobare
C_p	Capacité thermique massique isobare
C'_p, C_{pw}	Capacité thermique massique isobare
D_F	Diffusivité thermique
E_e	Flux d'énergie entrante dans le système
E_g	Flux d'énergie généré à l'intérieur du système
E_s	Flux d'énergie sortante du système
E_{ie}	Changement interne d'énergie du le système, Flux d'énergie stockée dans le système.
\dot{q}	Quantité d'énergie générée à l'intérieur du corps par unité du temps et de volume
L	Chaleur latente

INTRODUCTION GENERALE

Le développement des techniques numériques telles que des différences finies et la méthode des éléments finis a permis de résoudre des problèmes d'ingénierie des phénomènes physiques extrêmement complexes pour une variété de conditions aux limites et les propriétés des matériaux.

Dans les années 1990, il est apparu une plus grande acceptation et utilisation des méthodes des éléments finis et des codes de différences tels que le logiciel à l'équation différentielle générale partielle GEO-SLOPE et des solveurs tels que PDEase et FlexPDE.

En l'on a profité des programmes de ce dernier pour la flexibilité offerte aux chercheurs, permettant la modélisation un nombre de problèmes.

Au même moment, une grande quantité de recherches a été menée dans les années 1970 pour le développement des modèles numériques pour prédire le flux de chaleur dans les sols.

Cette démarche a eu lieu en réponse à plusieurs propositions de construction d'oléoducs et de gazoducs dans le Nord Canada et en Alaska. Les modèles nécessaires compte tenu des effets de changements de phases de la chaleur latente.

Le présent travail a été mené sur l'étude des différentes équations hydrauliques, pour la détermination de la répartition de la charge hydraulique et du débit de fuite en régime permanent et transitoire dans les milieux poreux .Dans ce cadre le premier chapitre définit les milieux poreux et leurs différentes caractéristiques ainsi que la loi de Darcy qui définit la théorie des écoulements dans ces milieux .

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des écoulements ainsi que les différentes équations de mouvement et de continuité.

Le troisième chapitre est réservé à la théorie des écoulements dans un milieu poreux dans les deux formes thermique et hydraulique avec analogie.

Le quatrième et derniers chapitre sera caractérisé par l'application de plusieurs exemples tout en utilisant le code de calcul Ansys et en introduisant les paramètres thermiques au lieu d'hydrauliques et valider par la suite l'analogie faite entre les deux domaines et faisant ressortir les résultats des différents modèles appliqués.

Ce travail est achevé par une conclusion , ou les principaux résultats sont mis en valeur, et des perspectives pour des travaux futures sont présentés.

CHAPITRE 1 : DESCRIPTION D'UN MILIEU POREUX

1. INTRODUCTION :

Aussi bien de son intérêt scientifique que de son importance pour l'industrie (hydraulique, génie pétrolier, géologie, agriculture, génie civil, industrie chimique, etc) ; l'écoulement des fluides en milieu poreux a fait l'objet d'études approfondies qui reposent essentiellement sur la loi expérimentale de Darcy .

Cette loi est d'ailleurs en bon accord avec des théories récentes développées à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides et d'une interprétation statique de l'écoulement en milieu poreux.

2. LES MILIEUX POREUX :

Un milieu poreux est un solide contenant des pores, c'est-à-dire des espaces vides pouvant être ou non reliés entre eux .Evidemment, l'écoulement d'un fluide à travers un tel milieu n'est possible que si les pores sont reliés (encyclopédie hydraulique).

L'équilibre statique d'un élément fluide dans un milieu poreux obéit aux mêmes lois que dans un milieu liquide ,mais la proximité des parois des pores introduit des modifications importantes par suite des interactions moléculaires fluide-solide.

Parmi ces phénomènes d'interactions on peut citer : l'adsorption(certaines molécules du fluide sont fixées par les parois des pores ,et la corrélation pression-volume du fluide n'est plus la même que pour le fluide seul) ;et la condensation capillaire(condensation au contact des parois solides, du fluide initialement à l'état de vapeur).

Par ailleurs, la coexistence de plusieurs fluides dans le milieu poreux peut donner naissance à des forces capillaires modifiant l'équilibre des pressions.

2.1/Définition des milieux poreux :

Dans le catalogue des milieux divisés, les milieux poreux désignent des matériaux pour lesquels la phase solide, fortement imbriquée avec la phase fluide, est fixe (Maxime NICOLAS -Groupe Ecoulements de Particules-).

On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie : les sols, les couches sédimentaires, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux soit dans le processus de fabrication, soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique par exemple).

D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

- (1) le matériau doit contenir de petits espaces vides, appelés pores, délimités par une matrice solide ;
- (2) le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide).

Ces deux critères renvoient à deux caractéristiques essentielles d'un milieu poreux :

la porosité, la fraction de vide, et la perméabilité, qui indique l'aptitude d'un milieu poreux à être traversé par un écoulement.

Ces deux quantités sont des variables macroscopiques, c'est-à-dire estimées sur un volume contenant de nombreuses entités microscopiques composant le matériau: les pores.

2.2/Quelques exemples de milieux poreux

2.2.1/Milieux poreux naturels

Dans la nature, les roches et les sols sont certainement les milieux poreux les plus exploités. L'étude géologique des sous-sols permet de classer les différentes couches géologiques selon la perméabilité à un écoulement de fluide.

Les couches d'argile constituent en général les parois imperméables de réservoirs naturels d'eau ou d'hydrocarbures. On nomme aquifère un réservoir qui non seulement contient de l'eau mais qui peut aussi être le lieu d'écoulement, par gravité ou par pompage.

Les roches poreuses peuvent contenir également des hydrocarbures.

La porosité des roches est très variable selon les conditions de température et de pression lors de la formation et de l'évolution géologique.

Les roches denses comme le granit ont des porosités inférieures à 2 %. Au contraire, les roches volcaniques formées à la surface (faible pression) ont des porosités élevées à cause des processus de dégazage associés au refroidissement.

Certaines roches atteignent ainsi une porosité de 60 %, Les roches sédimentaires se sont formées à partir d'agglomération de grains cimentés entre eux, Les schistes argileux ont une porosité de l'ordre de 10 à 25 %. Le grès, formé en général de grains de quartz, a une porosité qui dépend fortement du matériau de cimentation des grains (entre 10 et 45 %).

De plus, la compaction géologique peut réduire considérablement la porosité.

2.2.2 /Milieux poreux artificiels :

Lors de la fabrication des bétons et des ciments, une certaine porosité est nécessaire pour permettre un séchage lent et progressif et l'obtention d'un matériau robuste.

Parfois, la porosité ((fine)) est complétée par un réseau de fractures qui fragilise le béton. La porosité d'un bon béton est comprise entre 6 et 10 %.

Le contrôle de la porosité et de la structure poreuse joue un grand rôle dans l'industrie du papier.

Selon les méthodes de fabrication, on peut obtenir un papier filtre très absorbant avec une porosité de 80 %, ou au contraire un papier très ((serré)) et transparent (le papier calque) avec une porosité proche de 0.

On a alors des pores de diamètres compris entre 0,2 _a 4 μm . Une méthode de réalisation de poreux de formes diverses est le frittage. Un empilement de grains en contact est chauffé de manière à ce que les contacts entre grains fondent et réalisent une soudure. Le frittage peut se réaliser avec des grains en métal (bronze, cuivre par exemple), en plastique ou en verre.

2.3/Description géométrique

Les milieux poreux ont une géométrie complexe. Pour illustration, la Figure montre l'espace des pores d'un gré de la mer du Nord, obtenu par des mesures tomographiques.

a /La porosité :

Le paramètre principal décrivant un milieu poreux est la porosité définie par

$$P = V_p/V_0 = \text{volume des pores/volume total} \quad (1.1)$$

qui varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Ce paramètre de porosité est complémentaire de la fraction volumique de solide ϕ telle que :

$$\varepsilon + \phi = 1: (1.2)$$

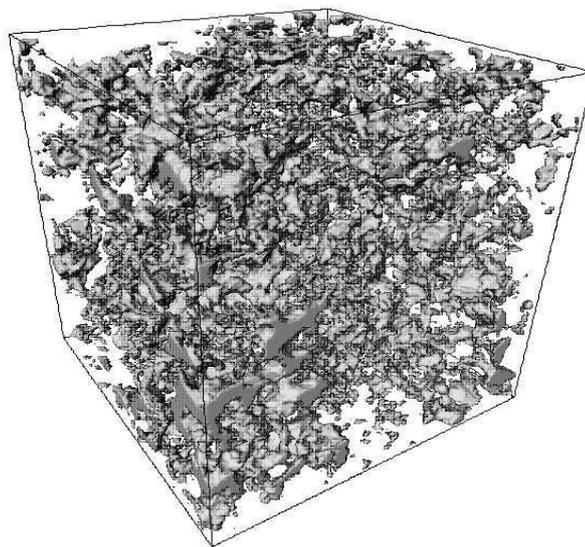


Figure 1.1. Espace des pores d'un grés de la mer du Nord (données Statoil).

La définition (1.1) de la porosité est une définition tridimensionnelle. Elle peut être transposée à un rapport de surfaces.

En effet, une coupe d'un échantillon poreux (un exemple est donné sur la figure 1.2) montre une surface composée de deux phases. On définit alors la porosité surfacique (à deux dimensions):

$$P_s = A_p/A_0 = \text{surface des pores/surface totale} \quad (1.3)$$

Pour chaque section effectuée à la cote z , on peut mesurer l'aire $A_p(z)$ occupée par les pores. Si le milieu est homogène (donc la porosité surfacique ne dépend pas de la cote z), on peut écrire que cette aire vaut $\varepsilon_s A_0$, où A_0 est l'aire totale de la section.

A partir de ces mesures, on peut calculer le volume des pores de l'échantillon par :

$$V_p = \int A_z(Z) dZ = A_z \varepsilon_s \int dz = \varepsilon_s V_0$$

Par conséquent, on obtient une égalité entre la porosité volumique et la porosité surfacique :

$$P_s = P \quad (1.4)$$

La définition peut être appliquée à une dimension, en introduisant une *porosité linéique* P_L , calculée par des mesures de longueurs de segments occupés par le solide ou le vide. Si le matériau est homogène et isotrope, on peut montrer que :

$$P = P_L = P_s \quad (1.5)$$

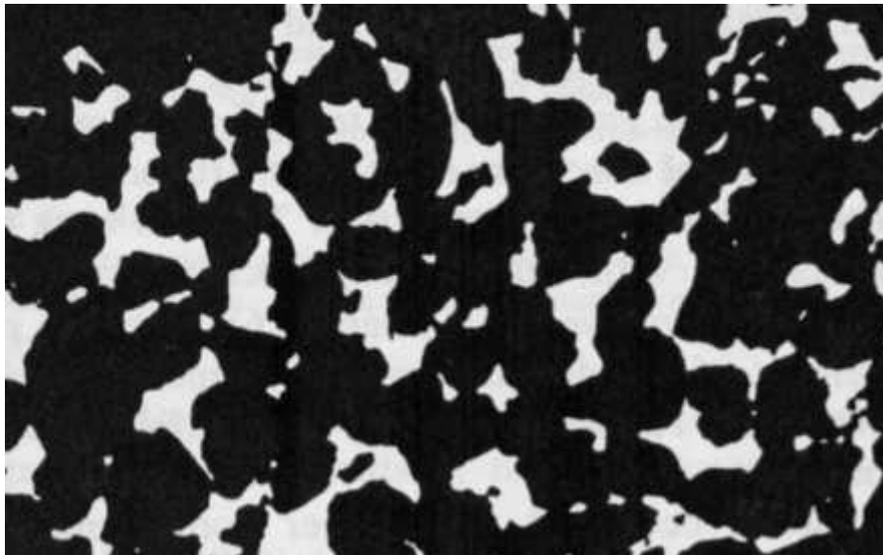


Figure 1.2 Exemple de coupe d'un poreux (grés).

b/Aire spécifique :

La grande surface interne de la matrice solide est une caractéristique des milieux poreux. À partir d'un échantillon de volume V_0 , on peut définir par S la surface interne des pores. L'aire spécifique d'un poreux est définie comme le rapport $A_s = S/V_0$, avec une dimension de l'inverse d'une longueur. (cour de MDS 3^{ème} année).

Les méthodes classiques de mesures d'aire spécifique sont :

- Absorption d'un gaz ;
- Analyse de coupes.

c/Autres paramètres :

La porosité et l'aire spécifique sont des propriétés macroscopiques pour le matériau poreux. Mais d'autres paramètres peuvent être importants au niveau microscopique, en particulier quand un fluide circule dans l'espace des pores.

On peut citer la connectivité, qui caractérise le nombre de voisins pour un pore, la présence de bras morts (pores bouchés), ou encore la topologie du volume des pores. Le désordre géométrique est un caractère essentiel des milieux poreux. Cela empêche toute trajectoire en ligne droite incluse dans le volume des pores. On peut alors définir une tortuosité, qui représente le caractère non rectiligne des trajectoires.

3. LOI EXPERIMENTALE DE DARCY

La théorie des écoulements en milieu poreux est fondée sur les résultats d'expériences réalisées par H.Darcy au milieu du XIX^e siècle (encyclopédie hydraulique).

Un milieu homogène de hauteur h , limité horizontalement par deux surfaces planes horizontales de section A , est traversé par un liquide incompressible.

Le liquide filtrant s'écoule depuis le niveau supérieur vers la base de la colonne à travers la couche poreuse et remonte dans les tubes manométriques à des niveaux décroissants dans le sens de l'écoulement .

La hauteur piézométrique décroît linéairement en fonction de la distance verticale parcourue ; la pente de la droite piézométrique mesure la perte de charge linéaire :

$$J = \frac{h_2 - h_1}{h}$$

Si le milieu poreux est assez fin, l'expérience montre que le débit de l'appareil est proportionnel à la pente de cette droite tant que celle -ci n'est pas trop forte ; avec la convention de signe habituelle, on a l'équation :

$$Q = -KA \frac{h_2 - h_1}{h}$$

K étant une constante qui dépend à la fois des propriétés du fluide et du milieu poreux.

Si, au lieu de raisonner en hauteur manométrique, on écrit la loi précédente en termes de pression, on obtient :

$$q = \frac{Q}{A} = -x \left(\frac{p_2 - p_1 + \rho gh}{h} \right) ; \quad (1.6)$$

De même que K, x est une constante qui dépend à la fois du fluide et du milieu poreux.

On a montré que $x = \frac{k}{\mu}$, μ étant la viscosité dynamique du fluide.

La nouvelle constante k appelée perméabilité, ne dépend que du milieu poreux.

La loi de Darcy est valable pour les faibles valeurs de la charge motrice et corrélativement pour les faibles valeurs de débit.

Lorsque $h_2 - h_1$ augmente jusqu'à des valeurs relativement élevées, on constate que le débit croît moins rapidement que ne le voudrait la loi. la cause de cette défaillance été très discutés ; elle semble liée aux effets d'inertie qui se manifestent par suite du caractère essentiellement non uniforme de l'écoulement en milieu poreux .

La généralisation de la loi de Darcy consiste à admettre que ,telle qu'elle résulte des expériences précédentes ,elle demeure valable en tout point et dans toutes directions, sous réserve ,pour rester dans le domaine d'homogénéité du milieu est considérer des volumes élémentaires très supérieurs au volume moyen des pores.

L'expression scalaire précédente est alors remplacée par une relation vectorielle :

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}} p - \overrightarrow{\rho g}) \quad (1.7)$$

En introduisant la fonction potentielle ,l'expression (1.7) s'écrit :

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (1.8)$$

Lorsque le milieu n'est pas isotrope ,la perméabilité ,variable suivant la direction considérée ne s'exprime plus par un nombre unique , mais par un tenseur (φ) qui s'explicité dans l'espace tridimensionnel par un tableau de neuf composantes (trois pour chaque axe)appelées coefficients de perméabilité.

Sous sa forme globale ,la notion de perméabilité ,déduite de la loi de Darcy ne permet pas d'expliquer les mécanismes fondamentaux de l'écoulement en milieu poreux.

***Application de la loi de Darcy**

En milieu isotrope, un écoulement de Darcy est caractérisé par la loi :

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (1.9)$$

C'est-à-dire une relation univoque , valable en tout point ,entre le vecteur vitesse de filtration et le vecteur gradient de charge hydraulique.

A cette équation on doit ajouter les relations qui tiennent compte du comportement du fluide filtrant (équation de continuité et équation d'état).

Si par hypothèse le fluide est incompressible et isotherme , ces équations se réduisent à l'équation de continuité :

$$\text{div}.\vec{V} = 0 \quad (1.10)$$

En combinant les équations (1.9) et (1.10),on obtient l'expression fondamentale :

$$\Delta\Phi = 0 \text{ (Équation de Laplace).}$$

En effectuant une transformation simple, l'écoulement en milieu poreux non isotrope mais homogène peut également se ramener à la solution d'une équation de Laplace.

Mathématiquement, une telle fonction est entièrement déterminée à l'intérieur d'un domaine, et cela de façon univoque si l'on se donne sur la frontière de ce domaine soit la valeur de Φ , soit les valeurs de $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$,dérivée normale, les conditions sont évidemment spécifiques du problème.

Dans le cas des écoulements non permanents on peut encore utiliser l'équation de Darcy sous réserve que les accélérations soient faibles.

La résolutions des problèmes pratiques d'écoulement en milieu poreux consiste à résoudre l'équation de Laplace , compte tenu du domaine considéré et des conditions aux limites ;cette résolution peut s'effectuer soit à partir de l'analyse mathématique soit en utilisant des méthodes numériques ,analogiques ou graphiques.

4. QUELQUES NOTIONS D'HYDRAULIQUE DES SOLS : **4.1/LA PERMEABILITE**

La perméabilité est une caractéristique physique qui représente la facilité qu'a un matériau à permettre le transfert de fluide au travers d'un réseau connecté. La Loi de Darcy permet de relier un débit à un gradient de pression appliqué au fluide grâce à un paramètre caractéristique du milieu traversé : la perméabilité k .(hydraulique générale).

La loi de Darcy (Henry Darcy, 1856) s'exprime par :

$$\frac{Q}{S} = \frac{k}{\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x}$$

Avec Q le débit, S la section de l'éprouvette qui pour une éprouvette cylindrique est PR^2 avec R le rayon de l'éprouvette, k la perméabilité, η la viscosité dynamique du fluide et $\Delta P/\Delta x$, le gradient de pression.

La perméabilité k est donc :

$$k = \frac{Q}{S} \frac{\Delta x}{\Delta P} \eta$$

$$\frac{m^3 s^{-1}}{m^2} \cdot \frac{m}{Pa} Pa.s = m^2$$

La perméabilité k s'exprime en m^2 . Lorsque les unités suivantes sont utilisées : Q en $cm.s^{-1}$, S en cm^2 , $\Delta P/\Delta x$ en $atm.cm^{-1}$ et h en poises, la perméabilité k s'exprime également en Darcy. Ainsi, 1 Darcy = 0,97. 10⁻¹² m^2 . Le darcy est couramment utilisé par les hydrogéologues et par les pétroliers. Le m^2 est plutôt utilisé par les physiciens des matériaux.

La perméabilité peut être considérée comme significative de la surface utilisable pour l'écoulement, elle dépend de la géométrie du réseau poreux. La loi de Darcy, et donc la perméabilité, est définie pour des conditions d'écoulement laminaire dans un milieu homogène, isotrope et continu ; le fluide n'interagissant pas avec le milieu.

Remarque sur la perméabilité k et le coefficient de perméabilité K :

On définit la conductivité hydraulique K , ou coefficient de perméabilité, comme :

$$K = \frac{k}{\eta}$$

avec η la viscosité dynamique. K s'exprime en $m.s^{-1}$. Ainsi si la perméabilité k est une caractéristique du matériau fortement contrôlée par la porosité, la conductivité hydraulique K est caractéristique des conditions d'écoulement dans un matériau donné pour un fluide donné.

Les hydrauliques des sols déterminent la capacité des ouvrages et de leurs fondations à être étanches, à résister au risque d'érosion interne (renard) et à maintenir l'intégrité de ses matériaux constitutifs (non colmatage des drains).

4.2/VITESSE DE L'EAU DANS LE SOL

Par définition, la vitesse apparente est la valeur $v=Q/S$, rapport du débit de l'eau écoulée (Q) à la section de l'échantillon de sol (S). En fait, la vitesse réelle (entre les grains) moyenne est v/η où η est la porosité, mais il est plus simple de raisonner sur la vitesse apparente. Dans ce qui suit, v représente toujours la vitesse apparente.

4.3/CHARGE HYDRAULIQUE EN UN POINT

Considérons un point situé dans un massif saturé siège d'un écoulement permanent. Soit u la pression de l'eau en ce point et z sa cote par rapport à un repère quelconque. La charge hydraulique en point est, par définition :

$$h = u/\gamma_w + z + v^2/2g$$

Les vitesses dans les sols sont toujours faibles, et on néglige le terme en $v^2/2g$

D'où : $h = u/\gamma_w + z$

4.4/MESURE DE LA PERMEABILITE :

4.4.1 /Au laboratoire :

Dans le cas de matériaux peu cohérents

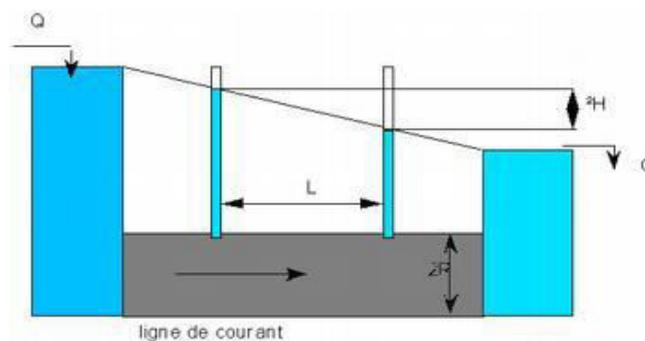


Figure 1.3

L'expérience de Darcy consiste à mesurer un débit et un gradient de charge qui permettent de calculer une perméabilité grâce à la formule précédente. Cette expérience a été développée au départ pour des sables ou des matériaux peu cohérents.

L'échantillon est dans un tube de rayon R , et soumis à un gradient de charge du à la différence de hauteur d'eau dans les deux réservoirs amont et aval, dont les niveaux sont maintenus constants. Le sens d'écoulement est inverse au gradient de charge. Ce gradient de charge peut également être déterminé grâce à la mesure de la différence de hauteur d'eau (DH) dans deux tubes piézométriques distant de L .

Dans le cas des matériaux consolidés et moins perméables

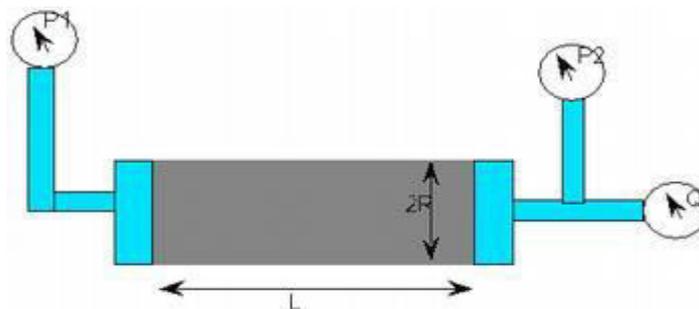


Figure 1.4

L'essai consiste à injecter un fluide sous pression (P_1) et à mesurer la pression (P_2) et le débit (Q) en sortie de l'éprouvette. Le gradient de pression est $(P_1 - P_2)/L$. Connaissant le rayon de l'éprouvette, il est facile de calculer la perméabilité.

Dans le cas de matériau très peu perméable

La mesure d'un débit devient très difficile. La technique du pulse est alors utilisée. Il s'agit de mesurer la décroissance en fonction du temps de la pression appliquée en tête de l'échantillon, au prix de certaines suppositions sur la morphologie du réseau poreux il est possible d'en déduire une valeur de perméabilité.

4.4.2 /in situ :

- À partir d'essai d'injection en puits

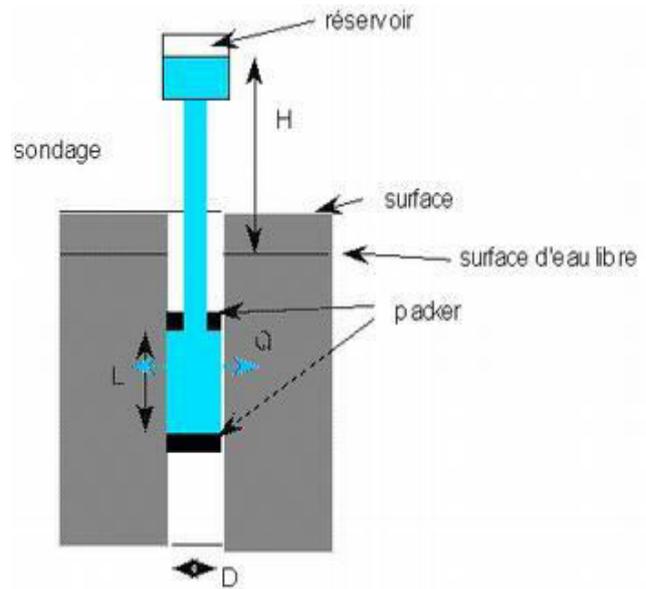


Figure 1.5

Une section du puits est rendue étanche grâce à la mise en place de « bouchons » gonflables, les packers, qui obturent le puits à deux profondeurs différentes définissant la zone d'injection de longueur L et de rayon R . Un fluide est injecté sous pression entre les deux packers. Le centre du dispositif se situe à une distance H de la surface du réservoir d'injection.

Le débit mesuré correspond au fluide (Q) qui s'écoule dans le massif entre les deux packers. Au cours de ces essais la perméabilité est calculée :

$$K = \frac{Q \cdot \ln(2L/D)}{2 \cdot \pi \cdot H}$$

- A Partir D'essais De Pompage

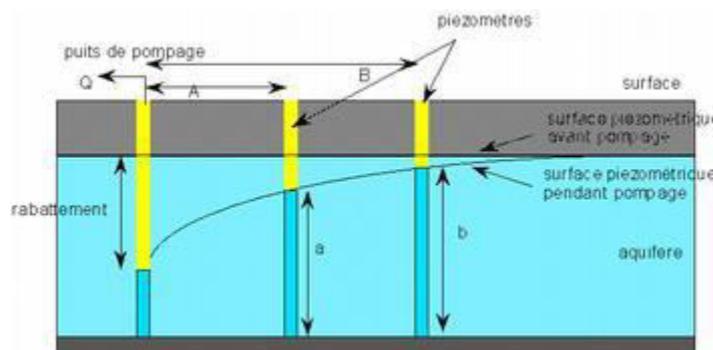


Figure 1.6

Le dispositif utilise des piézomètres qui permettent de mesurer la profondeur de la surface libre de la nappe (dans le cas d'une nappe libre).

Au cours d'un essai de pompage, une déformation de la surface libre de la nappe est observée autour du puits de pompage : c'est le rabattement. L'importance du rabattement dépend, entre autres des paramètres, de la perméabilité de l'aquifère. La perméabilité s'exprime par :

$$K = \frac{Q \cdot \ln(B/A)}{\Pi \cdot (b^2 - a^2)}$$

4.5/RESULTATS D'ENREGISTREMENT DE LA PERMEABILITE

Dans le cas des aquifères formés par des matériaux non consolidés (graviers, sables), la perméabilité peut être très supérieure au Darcy et atteindre 103 D (soit 10⁻⁹ m²). Dans les matériaux consolidés, les roches les plus poreuses sont les grès. Certains grès peu ou pas cimentés ont des perméabilités de l'ordre du Darcy (10⁻¹² m²). Les matériaux les moins perméables sont les argilites avec des perméabilités de 10⁻²²-10⁻²³ m².

Figure 1.7 montre l'enregistrement des degrés de perméabilité par type de sol

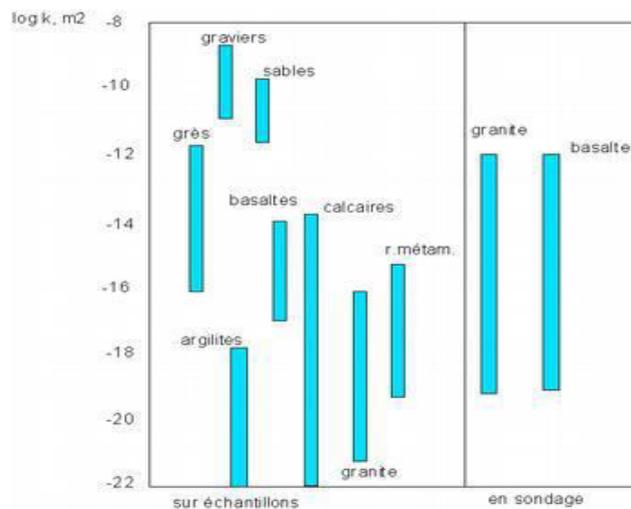


Figure 1.7

A partir de *données de laboratoire sur échantillons*, le domaine de variation de la perméabilité pour un même matériau est large, cette variabilité illustre le fait que la perméabilité dépend d'un certain nombre de caractéristiques de la porosité (volume, dimensions, forme, connectivité) qui sont eux-mêmes variables pour un matériau. Cette variabilité est maximale pour les carbonates.

Par contre les mesures effectuées en sondage montrent des valeurs généralement plus élevées que les mesures effectuées au laboratoire. A cette échelle, les discontinuités mises en jeu sont des fractures ou des failles alors qu'au laboratoire les discontinuités sont des fissures et des tubes.

A partir de données de perméabilité, les pétroliers ont défini différentes classes de réservoirs :

Perméabilité nulle à faible : $<1-15$ mD

Modérée : 15-50

Bonne : 50-250

Très bonne : 250-1000

Excellente : >1000

Dans les réservoirs pétroliers, il n'y a pas, en général, qu'une seule phase fluide, on trouve un mélange de gaz, d'huile et d'eau. Dans ce cas on définit la perméabilité relative d'un fluide comme le rapport entre la perméabilité mesurée pour la saturation du fluide considéré et la perméabilité du milieu définie pour un seul fluide.

Afin de mieux comprendre l'hydrodynamique en milieu poreux, on a tout d'abord schématisé ce dernier par des tubes capillaires pour lesquels la corrélation pression-débit peut être explicitée sous la forme d'une équation de type Darcy .

On a pu ainsi mettre en évidence le fait que la perméabilité est une fonction de la porosité et de la surface spécifique.

Plus récemment on est parvenu à une interprétation des phénomènes hydrodynamiques en milieu poreux à partir d'une théorie statistique de la perméabilité.

CHAPITRE 2 : THEORIE SUR LES ECOULEMENTS DANS LES MILIEUX POREUX

1. Introduction :

L'analyse des infiltrations à travers les milieux poreux intéresse de nombreuses disciplines de l'ingénierie.

En géotechnique, l'étude d'infiltration est nécessaire dans l'analyse de la stabilité des pentes, en contrôle de la contamination des eaux souterraines, et dans la conception de divers ouvrages hydrauliques.

Les géotechniciens ont eu tendance à concentrer leur attention sur la zone saturée en analyse d'infiltration.

En fait, l'écoulement non saturé joue un rôle important dans de nombreux problèmes d'ingénierie. Par exemple, la circulation des lixiviats toxiques sous dépôts de résidus miniers et les sites d'enfouissement sanitaires ont eu lieu principalement dans des conditions non saturées.

L'analyse transitoire des infiltrations à travers un barrage en raison des fluctuations du niveau de réservoir aussi fortement influencée par l'état de la zone non saturée.

En outre, des problèmes d'infiltration des eaux souterraines comportant l'infiltration et l'évaporation, des solutions réalistes peuvent être obtenus que si la zone non saturée est correctement pris en compte.

Les problèmes de débit d'eau des sols saturés et non saturés conduisent à des équations différentielles partielles qui sont difficiles à résoudre par des méthodes graphiques ou analytiques.

Avec le développement des ordinateurs à grande vitesse numérique, les méthodes numériques sont de plus en plus utilisées dans la résolution de l'équation différentielle régissant.

Les régimes transitoires correspondent à l'évolution d'un système d'un état initial (permanent ou en équilibre) vers un état final (permanent ou en équilibre) provoquée par un changement à l'instant initial des sources (Donald M.Gray,Donald I.Norum 1964)

L'équation partielle différentielle est écrite en termes de variable indépendante en pression interstitielle ; l'approche en élément finie appliquée pour solutionner l'équation utilise la formulation isoparamétrique.

2. PROBLEME D'ÉCOULEMENT :

Pour une description complète du mouvement d'un fluide, on doit tenir compte de trois aspects :

- a) Les conditions que le milieu imposé au mouvement du fluide ;
- b) Les propriétés du fluide ;
- c) La conservation de la masse.

La loi de Darcy décrit l'aspect dynamique de l'écoulement en fonction du milieu et remplit ainsi la condition (a) ; pour compléter la description, il reste à considérer les conditions (b) et (c) c'est à dire : l'état (propriété) du fluide et la conservation de la masse (Donald M.Gray,Donald I.Norum 1964).

Le problème d'écoulement repose sur la combinaison de trois équations qui sont :

1/équation de mouvement.

2/équation de continuité.

3/équation de thermodynamique.

Ces équations peuvent exprimer mathématiquement le phénomène étudié de l'écoulement dans le sol (Z.Benyelles 1988).

2.1/Equation de mouvement :

Cette équation est prise de la loi de Darcy pour l'équation de Navier stokes pour un écoulement laminaire où les forces d'inertie sont négligeables.

$$v = k.F \quad (2.1)$$

En prenant en considération le gradient hydraulique, l'équation peut s'écrire

$$v = k. \nabla. \Phi \quad (2.2)$$

Le gradient ∇ est définie par : $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$

2.2/Equation de continuité :

L'équation de la conservation de la masse appliquée à l'écoulement de l'eau est : $\frac{\partial(\rho.\theta)}{\partial t} = -\nabla(\rho.v) \quad (2.4)$

Pour simplifier le problème ,on considère que le sol est homogène , isotrope, et donc la densité de l'eau est constante, et l'équation peut s'écrire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla v \quad (2.5)$$

2.3/équation thermodynamique de l'état du sol :

La forme générale de l'équation thermodynamique de l'état du sol s'écrit de la manière suivante :

$$P=P(U,T). \quad (2.6)$$

En supposant la densité du sol constante, il s'avère que la pression est indépendante du temps : c'est-à-dire que l'état du sol est en condition adiabatique (sans conduction de chaleur) et on peut écrire la formule précédente comme suit :

$$P=P(\theta) \quad (2.7)$$

Pour cela ,lorsque l'état du sol est adiabatique, et homogène ,isotrope, on peut négliger l'équation thermodynamique pour la résolution du problème d'écoulement.

3. L'EQUATION GENERALE DE L'ECOULEMENT DE L'EAU DANS LES SOLS NON SATTURES :

En remplaçant l'équation (2.2) dans (2.4) on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla v = -\nabla \cdot (k \cdot \nabla \Phi) \quad (2.8)$$

*application à la règle vectorielle l'équation 3.8 peut s'écrire encore :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla k \cdot \nabla \Phi + k \cdot \nabla^2 \Phi \quad (2.9)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} + k \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (2.10)$$

Finalement, la forme générale de l'écoulement dans les sols non saturés :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \quad (2.11)$$

Ainsi, la perméabilité du sol (k) ,dépend uniquement de la teneur en eau :

$$k=k(\theta) \quad (2.12)$$

Forme bidimensionnelle :

Dans le cas bidimensionnel l'équation de l'écoulement prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \quad (2.13)$$

Où θ est la teneur en eau au point (x,z) donnée dans un domaine Ω sous une pression Φ et une perméabilité suivant un temps donnée.

Sachant que $\theta = n \cdot S_r$ (2.14)

On peut encore écrire : $\frac{\partial \theta}{\partial t} = n \cdot \frac{\partial S_r}{\partial t}$ (2.15)

4. DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DE CONTINUITÉ DANS LE CAS D'UN ÉCOULEMENT PERMANENT ET INCOMPRESSIBLE :

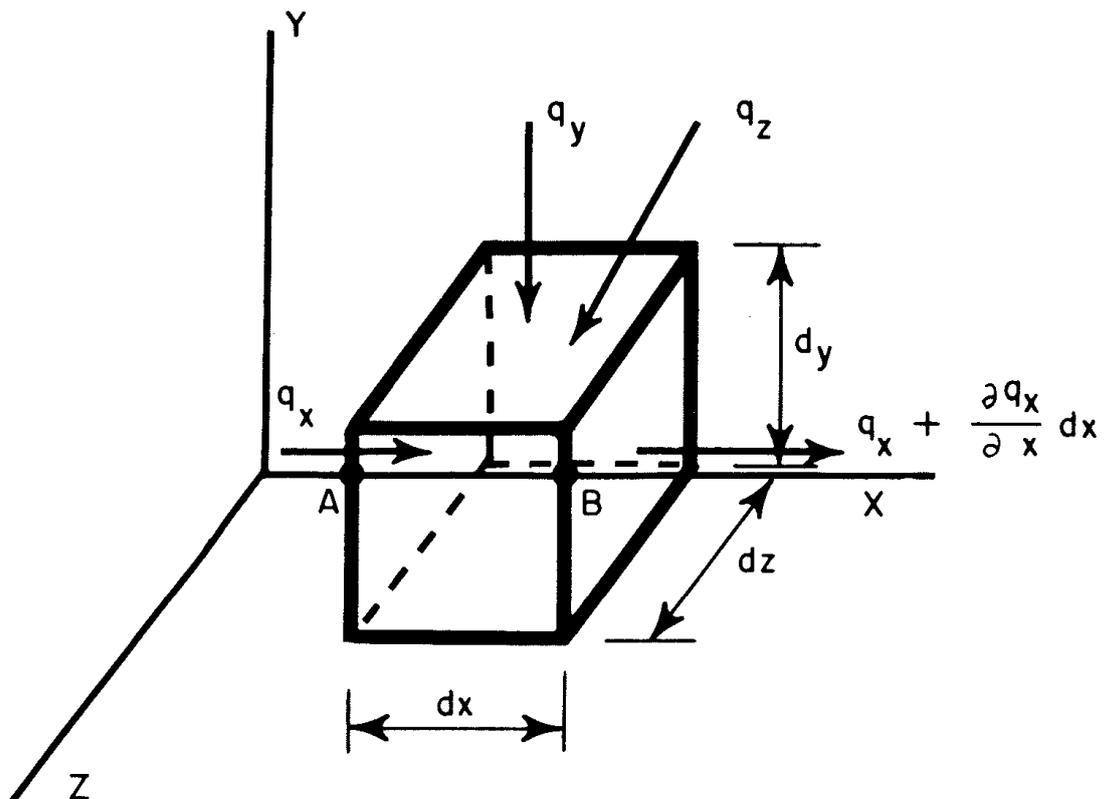


Figure 2.1:Elément d'un sol traversé par un fluide.

A partir de la loi de conservation de masse:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Le flux massique net d'eau pénétrant} \\ \text{dans le cube dans la direction de } x \end{array} \right\} = \text{masse qui entre} - \text{masse qui sort}$$

dans le cube dans la direction de x

$$= \rho q_x d_y d_z - \left[\rho q_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho q_x) dx \right] d_y d_z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho q_x) d_x d_y d_z$$

De même on peut démontrer dans les directions y et z tel:

$$-\frac{\partial}{\partial y} (\rho q_y) d_x d_y d_z \quad \text{et} \quad -\frac{\partial}{\partial z} (\rho q_z) d_x d_y d_z$$

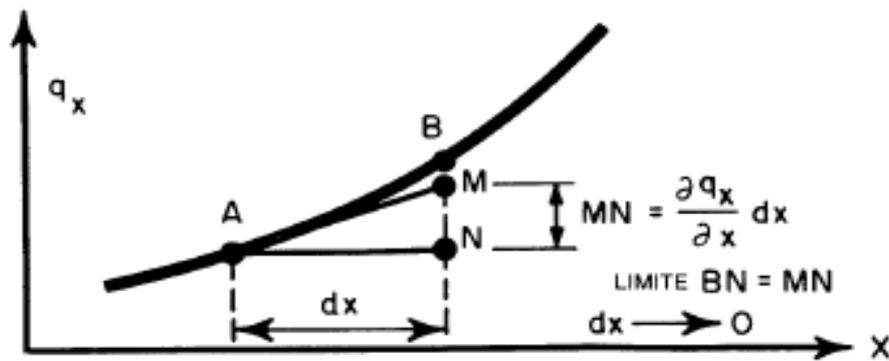


Figure 2.2 : Variation de l'écoulement massique du fluide en fonction de la distance

Le flux massique net qui entre ou sort du cube par l'unité de temps, est déterminé en additionnant les trois équations précédentes ce qui donne:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho q_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho q_z) \right] d_x d_y d_z$$

En appliquant la loi de la conservation de la masse le flux doit être égal au taux de variation de la masse à l'intérieur du cube en fonction du temps:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho q_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho q_z) \right] d_x d_y d_z = \frac{\partial}{\partial t} (\rho F) d_x d_y d_z \quad (2.16)$$

C'est l'équation de continuité de l'écoulement d'un fluide

D'après la loi de Darcy on a:

$$q_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}, q_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}, q_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

En remplaçant dans l'équation précédente on obtient:

$$\left[k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial k_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \left[k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial k_y}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \left[k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.17)$$

En supposant que le milieu est homogène isotrope tel $k_x = k_y = k_z$, l'équation précédente peut s'écrire:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Ou bien} \quad \nabla^2 h = 0$$

Cette expression est l'équation de LAPLACE régissant l'écoulement permanent.

5. ÉQUATION GENERALE D'UN ÉCOULEMENT VARIABLE OU TRANSITOIRE EN MILIEU POREUX

✚ Dans le cas d'un écoulement en régime transitoire on doit spécifier les conditions initiales et suivre la variation du comportement dans le temps.

✚ Ainsi Jacob en 1949 a décrit l'équation de continuité de l'écoulement variable sous la forme générale:

$$-\left[\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} \right] = \rho F \left[\beta + \frac{\alpha}{F} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.18)$$

β : est l'indice de la compressibilité de l'eau ou la réciproque de son module d'élasticité

α : est l'indice de la compressibilité verticale du milieu et peut atteindre 10β dépendant de la structure des cristaux du milieu.

Si de plus on considère le milieu homogène isotrope, l'équation précédente devient:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.19)$$

S : le coefficient d'emmagasinement.

T : transmissibilité.

6. SOLUTION ANALYTIQUE DES EQUATIONS D'ECOULEMENT :

Selon la théorie des équations différentielles, on sait que l'équation de Laplace, développée pour décrire l'écoulement en milieu poreux, présente un nombre indéfini de solution –alors comment choisir celle qui s'applique spécifiquement à un problème particulier ?

Puisque tous les problèmes que nous considérons ont les mêmes caractéristiques dynamiques, la solution choisie doit nécessairement être basée sur des différences dans les limites qui définissent le système, et dans les conditions physiques imposées à ces limites à l'instant initial où on introduit les conditions limites.

Ces limites ne sont pas nécessairement des limites physiques imperméables qui confinent le fluide dans l'espace, mais on peut se les représenter comme étant des conditions géométriques où la vitesse du fluide, ou potentiel de vitesse (distribution de la charge), est connue.

On sait par exemple que le long de l'interface d'une couche imperméable, la vitesse normale est égale à zéro, ou $\partial h / \partial n = 0$.

En régime permanent, il suffit d'assigner des valeurs de potentiel de vitesse et de vitesses normales, ou une combinaison des deux, en tout point formant les limites du système pour déterminer de façon unique la pression ou la distribution hydraulique à l'intérieur des régions définies par les limites.

En régime variable (transitoire), on doit spécifier les conditions initiales (la distribution de la densité à l'instant où débute l'analyse du système) et suivre la variation dans son comportement au cours du temps.

Un fluide incompressible, dont les limites varient dans le temps, passera par une succession continue de distribution de régime permanent.

Chacune de ces distributions correspondra aux conditions instantanées aux limites.

Avec le temps, ces conditions limites détermineront de nouvelles limites-une distribution du régime permanent –indépendante des conditions initiales et influencée seulement par les valeurs limites des conditions limites initiales.

Ainsi, dans le cas de l'écoulement des fluides en milieu poreux, le problème physique se définit en général par :

1. Un énoncé des conditions géométriques de la zone du milieu dont on désire une solution ;
2. La spécification des conditions limites à satisfaire aux limites, et
3. La connaissance de la densité, et par suite, de la distribution de pression à l'instant initial.
4. Lorsqu'on a choisi une fonction qui peut satisfaire les conditions limites et l'équation de continuité, on obtient la solution unique pour le problème d'écoulement considéré.

7. DEFINITION DE LA VIDANGE RAPIDE :

Lors de la vidange rapide, les écoulements changes de sens et vont refluer vers le talus amont : le reflux s'effectue avec un certain décalage qui est lié à la perméabilité des sols généralement trop faible pour que la ligne de saturation s'abaisse en même temps que le marnage dans la retenue. Le retard qui se traduit par une hauteur dans le remblai supérieur à la côte de l'eau dans la retenue dépend du coefficient de perméabilité du sol. On parle de la vidange rapide dès qu'il ya un décalage des niveaux d'eau entre le remblai et la retenue.(Danielle lautrin).

7.1COMPORTEMENT DE L'OUVRAGE PENDANT LA VIDANGE RAPIDE :

La perméabilité des sols constituant un barrage en terre est généralement trop faible pour que la surface de l'eau dans l'ouvrage s'abaisse de façon sensible lorsque l'on vide rapidement la retenue. La vidange rapide peut être considérée instantanée et c'est dans cette hypothèse que l'on se place pour étudier la stabilité du talus amont. Lorsque la retenue est pleine, les forces d'écoulement à travers l'ouvrage tendent à stabiliser le talus amont.(H.JAUSSEAUME).

La vidange rapide, en inversant le sens de l'écoulement dans la partie amont de l'ouvrage, crée des forces hydrauliques dirigées vers l'intérieur de la retenue .ces forces sont suffisamment intense pour entrainer une réduction importante du coefficient de sécurité du talus amont.

Inversement la vidange rapide améliore la stabilité du talus aval ou est sans effet sur elle.

On étudie généralement la stabilité du talus amont pendant la vidange rapide à partir des contraintes effectives.

Les paramètres de cisaillement pris en compte dans le calcul sont les paramètres de cisaillement inter-granulaires du sol saturé.

La distribution de la pression interstitielle dans le corps de la digue dépend de la déformabilité des matériaux qui le constituent.

7.1.1 Matériau peu déformable et perméable : (sable bien compacté)

Un écoulement s'amorce dans l'ouvrage dès que l'on abaisse le niveau de l'eau dans la retenue.

Cet écoulement est transitoire et la position de la surface libre varie dans le temps.

Les pressions interstitielles qui se développent dans le temps pendant la première phase de cet écoulement correspondent au coefficient de sécurité minimal du talus amont.

Leur distribution est identique à celle que l'on obtient pour un écoulement permanent satisfaisant aux conditions aux limites représentées par la figure 2.3, dans le cas d'un barrage homogène et d'un barrage à noyau.

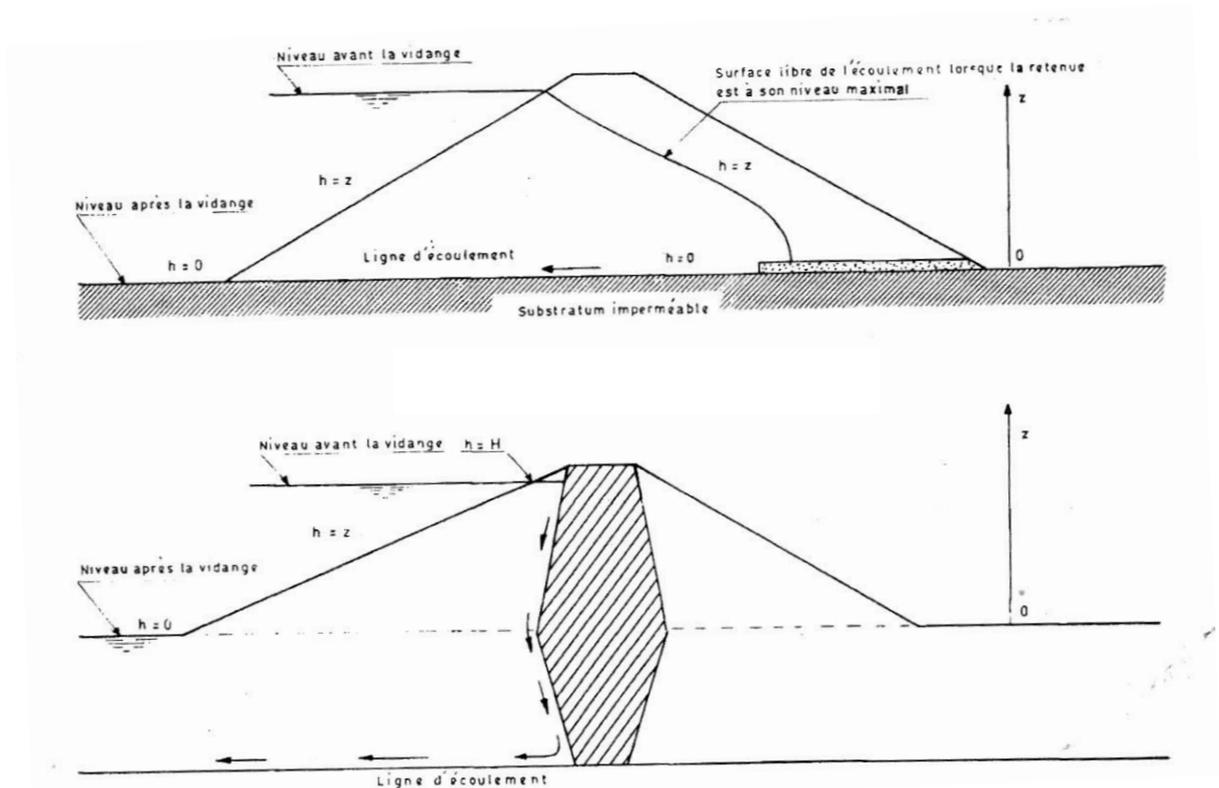


Figure 2.3 : Conditions aux limites de l'écoulement créé par la vidange rapide

Les réseaux d'équipotentiels peuvent être déterminés par analogie électrique. Sur la figure 2.4 , est représenté le réseau d'équipotentiels dans la recharge amont d'un barrage à noyau fondé sur couche de même perméabilité que les recharges et limité à sa partie inférieure par une couche imperméable.

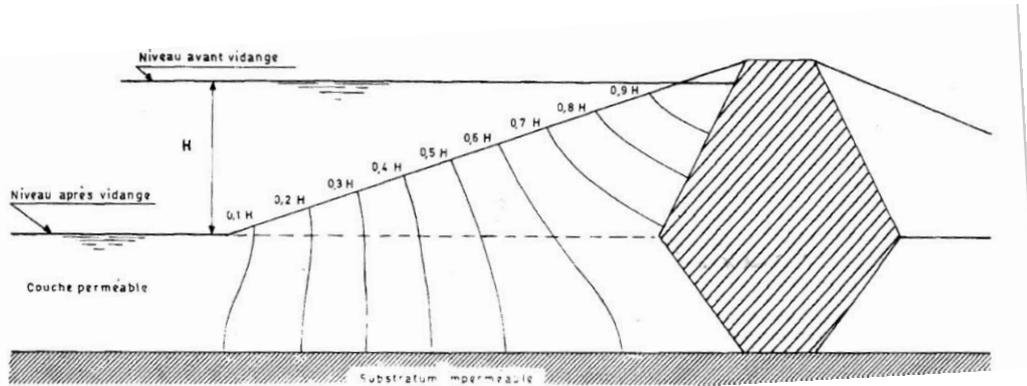


Figure 2.4 : Réseau d'équipotentiels dans la recharge amont d'un barrage à noyau pendant la vidange rapide.

Dans le cas fréquent d'un barrage s'appuyant sur une couche imperméable et lorsque la pente du talus amont est inférieure à $2,5/L$, Terzaghi et Peck ont montré que les équipotentiels peuvent être assimilés à des droites verticales : la pression interstitielle en un point M est alors $u = \gamma_w h_f$ avec les notations de la figure 2.5. Mais on surestime ainsi les coefficients de sécurité du talus amont de 10% à 15%.

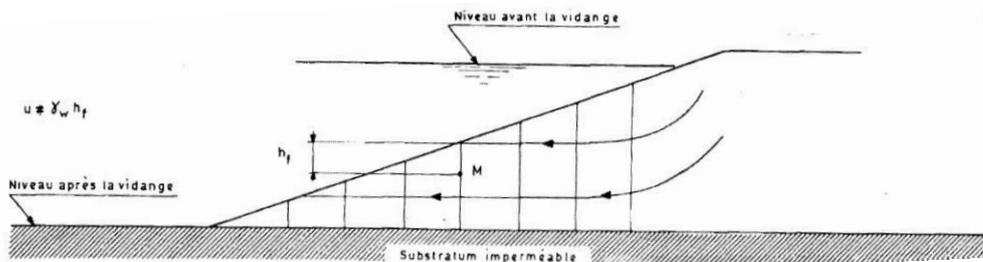


Figure 2.5 : Barrage constitué d'un matériau peu déformable.

On est alors conduit à adopter des pentes très faibles pour le talus amont si l'on ne prend pas l'une des mesures suivantes :

- ✓ Revêtement du talus amont par une couche suffisamment épaisse de matériaux très perméable (grave propre, enrochement) dans laquelle le niveau de l'eau pendant la vidange rapide s'abaisse à la même vitesse que le niveau de l'eau dans la retenue figure 2.6 ; on peut alors considérer

la pression comme nulle dans cette couche, d'où une réduction substantielle de la pression interstitielle moyenne dans le talus amont.

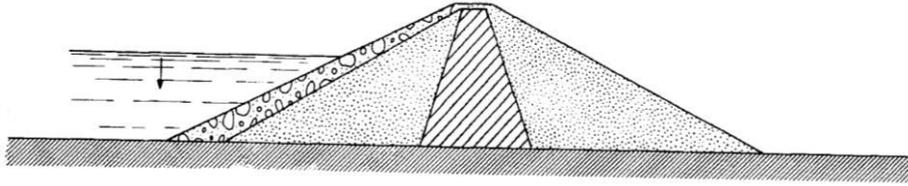


Figure 2.6 : Talus amont d'un barrage revêtu d'une couche en matériau très perméable.

✓ Interposition d'un tapis drainant entre le talus amont et le sol de fondation. Les équipotentiels sont alors sensiblement horizontales dans le talus amont et dans ces conditions les pressions interstitielles sont pratiquement nulles figure 2.7.

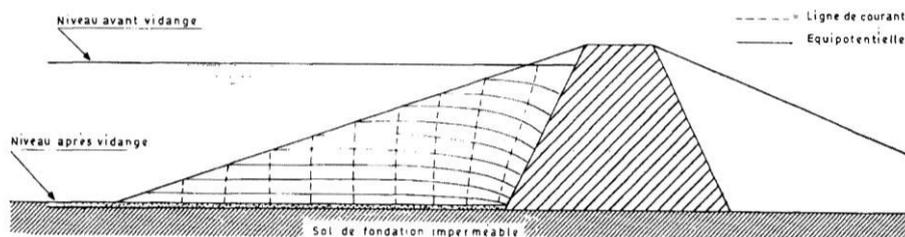


Figure 2.7 : Barrage à noyau équipé d'un tapis drainant amont. Réseau d'écoulement dans la recharge amont

7.1.2 Matériau déformable et peu perméable : (argile ou limon argileux)

L'écoulement consécutif à la vidange rapide ne s'établit dans l'ouvrage qu'au bout d'un temps appréciable. Les variations de pression interstitielles qui se produisent pendant l'abaissement de la surface de l'eau dans la retenue résultent uniquement des variations des contraintes totales liées à celui-ci.

Les contraintes principales totales en un point M du talus amont subissent respectivement les variations $\Delta\sigma_1$ et $\Delta\sigma_3$. La variation Δu de la pression interstitielle au point M peut alors s'exprimer en fonction des coefficients A et B de Skempton :

$$\Delta u = B[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)] \quad (2.20)$$

$$\text{Ou encore : } \Delta u = B \left[1 - (1 - A) \left(1 - \frac{\Delta \sigma_3}{\Delta \sigma_1} \right) \right] \Delta \sigma_1 = \bar{B} \Delta \sigma_1 \quad (2.21)$$

Le sol étant saturé, on a $B=1$. Par ailleurs le coefficient A est inférieur à l'unité pour les sols argileux compactés et la plus petite contrainte principale décroît davantage que la plus grande à la suite d'un vidange rapide (la vidange rapide entraîne une augmentation des contraintes de cisaillement dans le sol, donc de $\sigma_1 - \sigma_3$, $\Delta \sigma_1$ et $\Delta \sigma_3$ correspondent à une diminution des contraintes totales on a nécessairement $\Delta \sigma_3 > \Delta \sigma_1$).

Il s'ensuit que le coefficient \bar{B} est supérieur à l'unité que l'on se place du côté de la sécurité en prenant $\bar{B}=1$ pour calculer la valeur Δu de au point M.

✚ Avant la vidange la plus grande contrainte principale en M est approximativement :

$$\sigma_1 = \gamma_f h_f + \gamma_w h_w \quad (2.22)$$

Avec les notations de la figure 2.8.

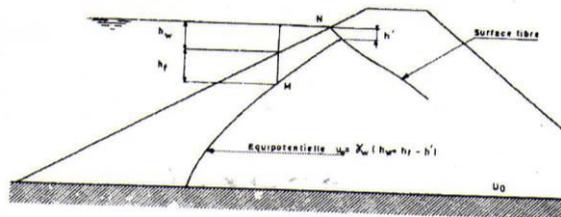


Figure 2.8 : Pression interstitielle dans le talus amont avant la vidange.

✚ Au cours de la vidange h_w devient nul, h_f demeurant inchangé, d'où :

$$\Delta \sigma_1 = -\gamma_w h_w \text{ et } \Delta u = \bar{B} \Delta \sigma_1 = \Delta \sigma_1 = -\gamma_w h_w \quad (2.23)$$

Les valeurs de la pression interstitielles pendant la vidange rapide peuvent donc être obtenues en ajoutant les quantités $\Delta u = -\gamma_w h_w$ aux valeurs de la pression interstitielles existant dans l'ouvrage en service normal (retenue pleine, écoulement permanent).

Avant la vidange la pression interstitielle en un point M du talus amont est :

$$u_0 = \gamma_w (h_w + h_f - h') \quad (2.24)$$

Elle devient immédiatement après la vidange :

$$u = u_0 + \Delta u = u_0 - \gamma_w h_w = \gamma_w (h_f - h') \quad (2.25)$$

Lorsque la retenue est pleine, la charge hydraulique varie peu dans le talus amont, au la valeur de h' est négligeable. On a dans ces conditions :

$$u = \gamma_w h_w \quad (2.26)$$

La distribution de la pression interstitielle dans le talus amont est alors la même que dans le cas d'un écoulement horizontal et l'on est ramené à un cas d'une digue en matériau peu déformable fondée sur une couche imperméable.

On notera toute fois que si le revêtement du talus amont par une couche en matériaux de forte perméabilité permet d'adopter une pente plus élevée, la solution tapis drainant amont est totalement inefficace dans le cas présent (il n'y a pas d'écoulement de l'eau vers le drain immédiatement après la vidange).

- La pression interstitielle dans les zones déformables et peu perméable du corps de digue situées à droite du point N (voir figure 2.8) ne subit pas de variation sensible pendant la vidange rapide. C'est pour cette raison que dans le cas des ouvrages à noyau central mince, on peut parfois admettre que les pressions interstitielles dans le noyau ne varient pas au cours de la vidange rapide.
- La vidange complète de la retenue ne crée pas nécessairement les conditions de stabilité les plus défavorable pour le talus amont. Aussi doit-on vérifier également que la talus amont est stable pour différents niveaux d'eau dans la retenue pendant la vidange rapide.
- Le coefficient de sécurité minimale : la rupture de l'ouvrage au cours de la vidange de la retenue ayant des conséquences moins graves qu'une rupture lorsque l'ouvrage est en service, on adopte fréquemment un coefficient de sécurité minimal inférieur à $F=1,5$.

7.2/ CALCUL D'UN BARRAGE HOMOGENE EN VIDANGE RAPIDE :

7.2.1/formulation du problème en régime permanent :

Cet exemple a été traité par le professeur Pierre Humbert en 1984 pour le cas des écoulements dans les milieux poreux saturés avec surface libre ;le cas d'un barrage représenté sur la figure2.9 dans le domaine Ω limité par les surfaces S_h, S_l, S_r, S_h, S_f , l'écoulement est régi par :

$$-div(\overrightarrow{k grad h}) = f \quad (2.27)$$

Où f correspond à un débit volumique en général nul.

Les conditions aux limites sont de deux types :

-celles qui s'appliquent sur des limites connues :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \bar{h}(P) \text{ sur } S_h \quad (\text{charge imposée}) \\ h = \bar{h}'(P) \text{ sur } S_{h'} \quad (\text{charge imposée}) \\ -k^{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} n_i = f_1(P) \text{ sur } S_f \text{ (flux imposé)} \end{array} \right. \quad (2.28)$$

-celles qui s'appliquent sur la surface libre S_l et la surface de suintement S_r qui ne sont des données du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = z(P) \text{ sur } S_l \text{ et } S_r \text{ (pression nulle)} \\ -k^{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} n_i = 0 \text{ sur } S_l \text{ (flux nul)} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Toute la difficulté consiste à résoudre l'équation (2.27) sur un domaine qui n'est pas connu au départ, tout en satisfaisant les conditions aux limites (2.28) et (2.29). On voit que sur la surface libre, on a à la fois une condition sur la charge et une condition sur le flux : S_l est simultanément une surface à pression nulle et une surface de courant.

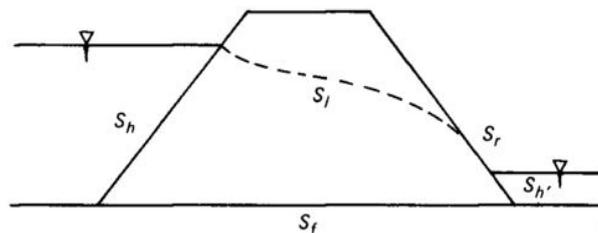


Figure 2.9 : Représentation du barrage dans le domaine Ω .

Méthode de résolution :

L'idée générale consiste à se fixer au départ de façon arbitraire la position de S_l , à lui imposer la condition de flux nul (cette condition est implicite sur un bord libre) et à ajuster sa position à chaque

itération en cherchant à satisfaire la condition sur la charge $h=z(P)$. Cela s'obtient en déplaçant les points de S_1 de manière à ce que leur cote soit égale à leur charge à l'itération précédente.

On notera que S_1 est la ligne de saturation qui s'obtient en appliquant l'équation de Kozeney :

$$X = X_E = \frac{1}{4x_0} (z^2) + x_0$$

Avec x_0 : la position de la ligne de saturation

Z : est la cote d'eau ou la charge hydraulique ainsi le tracé de cette ligne détermine la zone saturée de la zone non saturée du barrage avec une charge nulle au niveau de la ligne d'écoulement.

7.2.2/formulation du problème en régime transitoire :

Les techniques de déformation de maillage sont d'emploi délicat en régime transitoire, car il faut pouvoir traiter des mouvements importants de la surface libre, tant en descente qu'en remontée. Ces difficultés étant supposées résolues, on peut utiliser des formules de récurrences de type Galerkin, où l'on itère sur la géométrie à l'intérieur de chaque pas de temps ; de plus ; on doit à chaque pas de temps prendre en compte dans le chargement le flux qui a traversé la surface pendant ce pas de temps.

7.2.3/ Application :

L'exemple représenté sur les figures 2.10 à 2.13 représente un calcul de barrage homogène en vidange rapide.

La valeur des paramètres utilisés sont les suivantes :

$$\text{Perméabilité} \left\{ \begin{array}{l} k_x = k_y = 2.10^{-6} \text{ m/s} \\ \alpha = 2.10^7 \\ \beta = 4 \end{array} \right.$$

$$\text{Teneur en eau} \left\{ \begin{array}{l} \theta_s = 0,06 \\ \gamma = 3980 \\ \delta = 1,8 \end{array} \right.$$

Les charges sont initialisées par un calcul en régime permanent (figure 2.11). on ramène ensuite la hauteur d'eau amont de 5 à 1m en 8 pas de temps de 3 heures. Cette hauteur est maintenue constante jusqu'à $t=10$ jours. Les figures 2.12 et 2.13 représentent les résultats pour $t=30$ heures et $t=10$ jours.

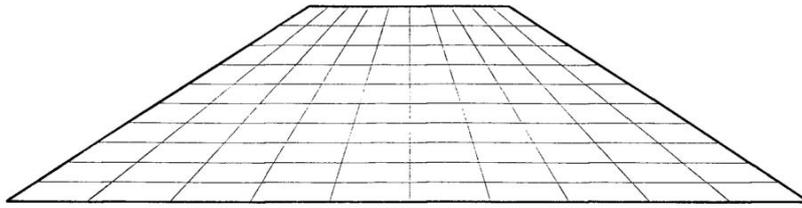


Figure 2.10 : Représentation du maillage du barrage homogène.

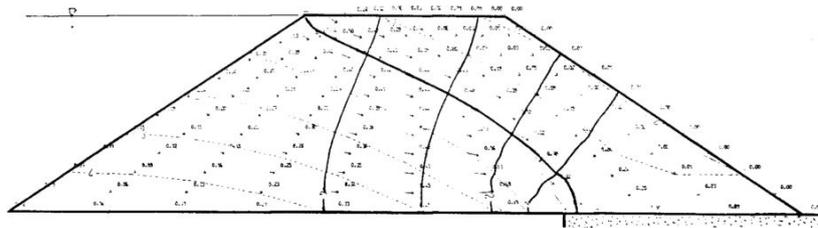


Figure 2.11 : Représentation du régime permanent.

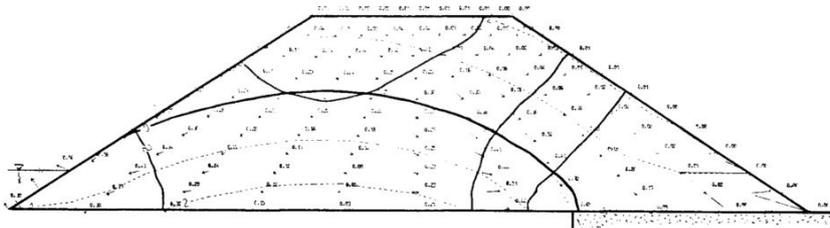


Figure 2.12 : Représentation de la vidange rapide (à $t=30h$).

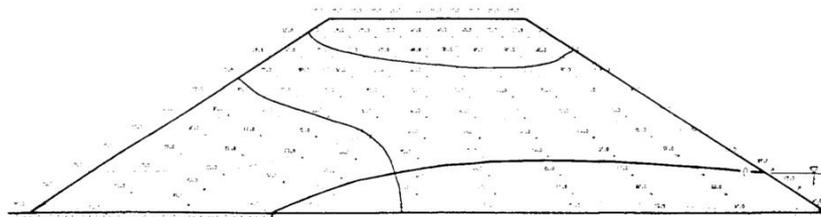


Figure 2.13 : Représentation de la vidange rapide (à $t=10j$).

CHAPITRE 3 : ANALOGIE ENTRE LES EQUATIONS D'ECOULEMENT ET LES EQUATIONS DE LA CHALEUR

1. INTRODUCTION :

En mécanique des fluides, il existe différents façons de décrire ou de classifier les écoulements :ils peuvent être permanents ou transitoires selon que les conditions varient ou pas dans le temps.

L'application du régime transitoire dans notre travail consiste à exposer plusieurs exemples et faire par la suite une application avec le code de calcul Ansys, seulement la théorie de base de ce code, utilise l'analyse thermique avec ces équations différentielles et les conditions initiales et aux limites qui sont similaires au champ d'écoulement cité déjà auparavant et ceci pour résoudre les problèmes d'infiltration.

Ce code utilise le transfert de chaleur, ainsi une partie de ce travail sera consacrée à l'étude des équations de la chaleur et les différentes propriétés nécessaires à l'étude de la partie thermique, l'étude de l'infiltration à travers un milieu poreux fera l'objet d'une analogie entre les équations d'écoulement et les équations de la chaleur et faire par la suite une application directe sur le code de calcul Ansys.

Ainsi, pour résoudre le problème d'écoulement dans les milieux poreux (tel que l'infiltration dans un barrage en terre par exemple), il faudrait passer par une analyse thermique, évoquer les différentes équations différentielles et faire par la suite une assimilation entre ces derniers et les équations d'écoulement (analyse d'infiltration).

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES (Dans la pratique construction mécanique) :

Dans cette partie, nous évoquerons les trois différentes équations partielles spécifiques pour chaque problème de construction :

- L'équation elliptique, $\Delta T = 0$: l'équation de Laplace (régime permanent en deux dimensions)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

- L'équation parabolique, $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$: équation de conduction de chaleur (unidimensionnelle variable dans le temps)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- L'équation hyperbolique, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$: équation de vague (bidimensionnelle variable dans le temps)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

2.1/ l'équation elliptique :

Cette équation est typiquement utilisée pour caractériser les régimes permanents comme celle de Laplace avec l'absence de dérivée du temps.

*un exemple très simple, est une plaque métallique chauffante exposée à différentes températures (voir fig3.1) ;

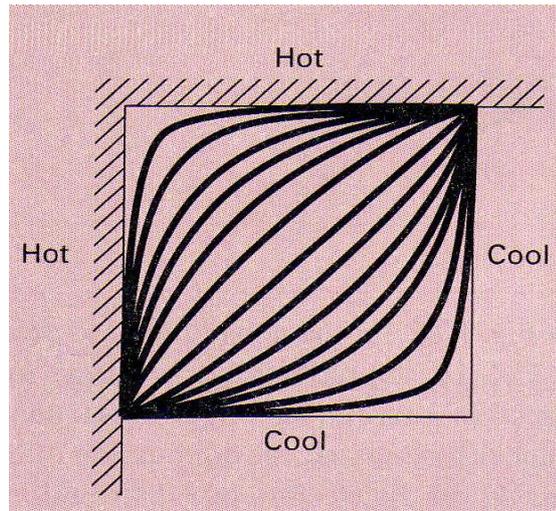


Fig 3.1 :distribution de la température à travers la plaque chauffante.

Etant donné que les écoulements de chaleur vont d'une haute à une basse température, à un temps donné la distribution de la chaleur est uniforme à travers toute la plaque et atteindra ainsi son équilibre (ou plutôt un régime permanent).

Ainsi la résolution de l'équation de Laplace dans ce cas conduit à la détermination des valeurs de température distribuées uniformément (Steven C. Chapra et Raymond P. Canale).

Avec le même type d'équation on peut par analogie résoudre des problèmes d'écoulement comme par exemple le suintement d'eau sous un barrage (voir fig3.2) où la distribution du champ électrique (voir fig3.3).

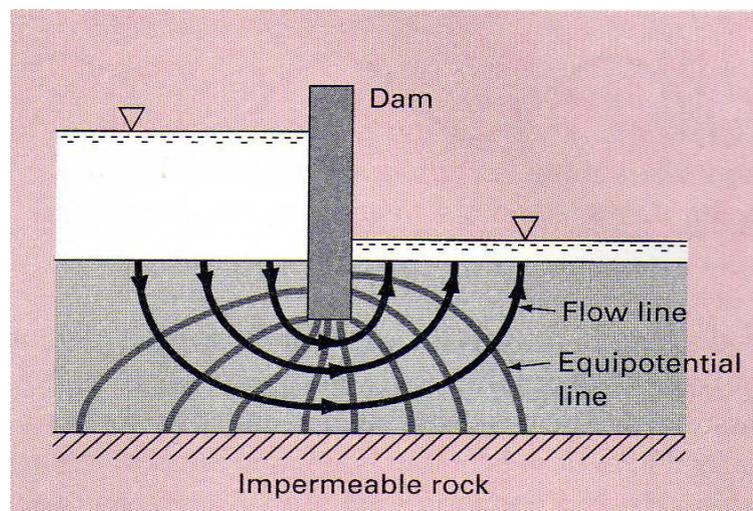


Fig 3.2 :l'infiltration sous un barrage.

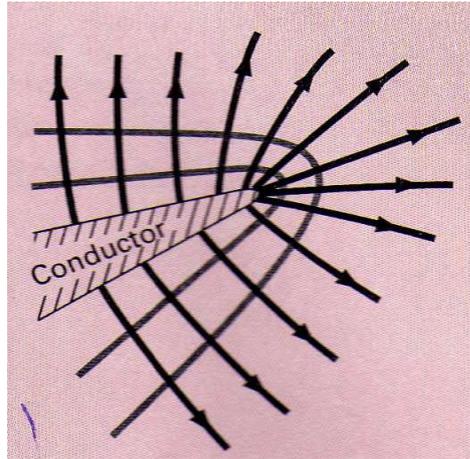


Fig 3.3 : distribution d'un champ électrique au niveau d'un conducteur.

2.2/l'équation parabolique :

Ce qui diffère du premier type est la variation dans le temps.

L'équation de conduction de chaleur est une application directe de ce système où la variation est spatiale et temporelle et la résolution de celle-ci est fonction du temps.

*un exemple très simple ; une longue barre mince isolée sur toutes ses extrémités sauf à sa fin , afin d'éviter les pertes de chaleur au cours de l'échauffement de la barre, ainsi elle est exposée à des températures s'élevant progressivement (voir fig3.4) .

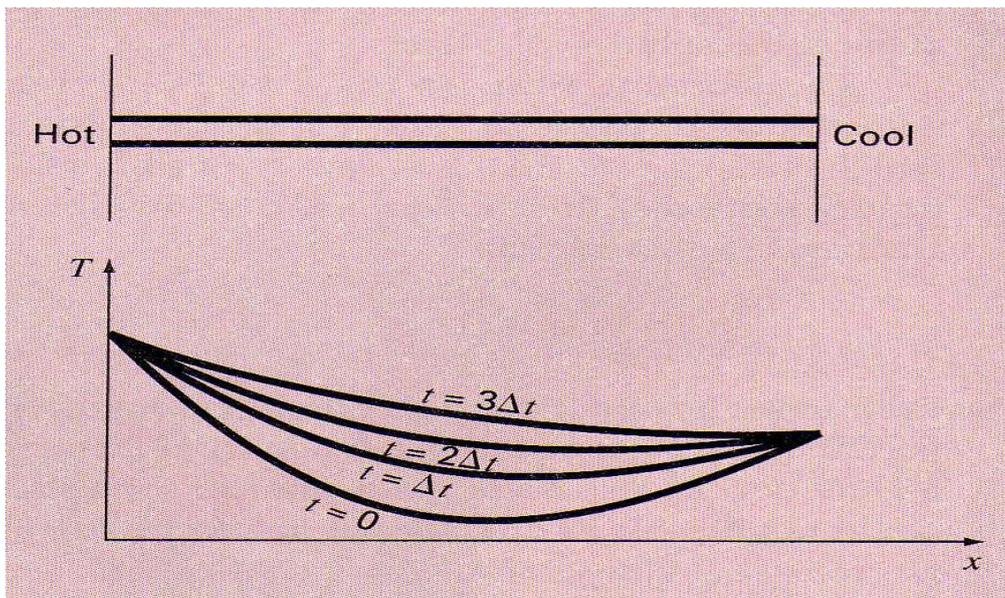


Fig 3.4 : distribution de la temepérature à travers la plaque chauffante fonction du temps.

Etant donné que la barre a une épaisseur infiniment petite, on suppose la distribution de la température latéralement, ainsi la résolution de la conduction de chaleur est faite sur l'axe longitudinal de la barre et fonction du temps (régime transitoire).

Conclusion, l'équation elliptique est utilisée dans les applications des écoulements en régime permanent contrairement à l'équation parabolique qui représente la solution à des écoulements en régime transitoire.

2.3/l'équation hyperbolique :

Même caractéristiques que la précédente, seulement la différence consiste à l'apparition d'une deuxième dérivée dans le temps.

La ficelle vibrante dans la Fig3.5 est un modèle physique simple qui peut être décrit avec l'équation de vague.

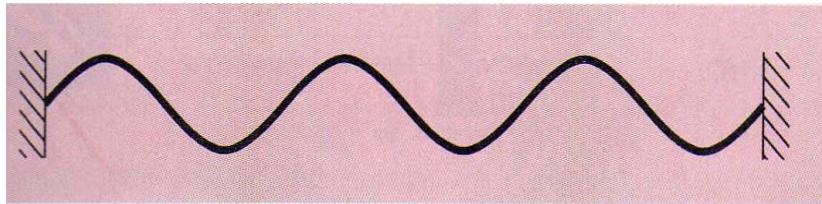


Fig 3.5 : les vibrations de la ficelle.

La solution se compose d'un certain nombre d'états caractéristiques avec lesquels la ficelle oscille.

Une variété de systèmes de construction mécanique tels que les vibrations de baguettes et rayons, mouvement de vagues liquides et transmission de signaux solides et électriques peut être caractérisée par ce modèle.

*Ce qui nous intéresse dans ce qui a été présenté, c'est comment étudier un régime transitoire avec l'équation différentielle appropriée (c'est-à-dire l'équation parabolique), et qui est caractérisé généralement par l'équation de conduction de chaleur.

3. L'EQUATION DIFFERENTIELLE GOUVERNANT LA CONDUCTION DE LA CHALEUR DANS UN MILIEU POREUX

- En état d'équilibre, les systèmes thermodynamiques homogènes sont caractérisés par des variables d'état uniformes et constantes soumis à certaines conditions.
- La Conduction de la Chaleur est le cas particulier où la non-uniformité de la température entraîne un transfert d'énergie d'un point à un autre du système sans transport macroscopique de matière.
- pour un système solide, seul ce processus de transfert est possible.
- Pour un système fluide il peut aussi se produire des transferts d'énergie par transport macroscopique de matière, ce dernier processus est appelé convection de la chaleur.
- Le milieu matériel, siège d'un phénomène de conduction de la chaleur, peut être homogène ou hétérogène, isotrope ou non isotrope, ses dimensions peuvent être finies ou infinies.
- La conduction thermique constitue un processus de propagation de chaleur, de proche en proche, par transfert d'énergie d'agitation lors de collisions moléculaires.
- Lorsque la température d'un corps n'est pas uniforme, c'est à dire en présence de gradients thermiques des transferts d'énergie d'agitation thermique se produisent entre les régions à température élevée et les régions à température plus faible. Ce processus de transfert ne prend fin que lorsqu'un état d'équilibre énergétique, donc thermique, s'établit. Il s'agit donc d'un processus de diffusion, analogue à la diffusion moléculaire intervenant dans les mélanges gazeux ou dans le cadre des transferts de solutés (André Musy et Marc Soutter 1991).
- Le flux de chaleur sensible transféré par conduction ou diffusion thermique \vec{q}_F est ainsi proportionnel à un gradient de température décroissant, soit selon la loi de Fourier.

$$\vec{q}_F = -K_F \overrightarrow{\text{grad}T} \quad (3.1)$$

3.1/L'équation de Fourier :

La quantité de chaleur élémentaire dQ qui traverse pendant le temps dt la surface S sous l'influence d'un gradient de température $\frac{dT}{dx}$ est telle que:

$$\frac{dQ}{dt} = -K_F S \frac{dT}{dx} \quad (3.2)$$

Cette formule est analogue à celle de la première loi de Fick. Le signe moins (-) indique que le flux de chaleur est dirigé en sens inverse des températures croissantes.

L'équation de Fourier combine cette équation avec le **principe de conservation de la chaleur**: Soit un volume élémentaire de surface S d'épaisseur dz , la quantité de chaleur entrant pendant le temps dt :

$$dQ_z = -K_F S \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_z dt \quad (3.3)$$

Sortant pendant le même temps dt :

$$dQ_{z+dz} = -K_F S \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z+dz} dt \quad (3.4)$$

Avec:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z+dz} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz \quad (3.5)$$

La quantité de chaleur qui reste dans l'élément est:

$$dQ = dQ_z - dQ_{z+dz} = -K_F S \left[\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_z - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z+dz} \right] dt \quad (3.6)$$

$$dQ = K_F S \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz dt \quad (3.7)$$

Cette quantité de chaleur élève de dT la température de l'élément (R. Gras; 1988).

$$dQ = (C_v S dz) \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (3.8)$$

Par identification:

$$K_F \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = C_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.9)$$

L'équation générale dans le cas homogène isotrope est la suivante:

$$K_F \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = C_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.10)$$

Soit :

$$\frac{K_F}{C_v} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) est dite: équation de Fourier où $\frac{K_F}{C_v}$ Représente **la diffusivité thermique D_F** .

Les dimensions de D_F ($L^2 \cdot T^{-1}$) sont les mêmes que celles de la viscosité cinématique et hydrodynamique.

3.2/Fonction d'emménagement d'énergie :

La base de la formulation générale de l'analyse thermique du gel et dégel d'un système de sol est de comprendre comment l'emménagement d'énergie dans le sol vari quand la température de celui-ci change (A.taher berabeh 2004).

Un exemple de cette relation est illustré dans la figure (3.6) (Temp/w; 1998). Le graphe représente l'énergie relative que le sol a besoin pour supporter une certaine température.

La part des pics de la fonction dans la région du front gel dégel représente la chaleur latente absorbée ou libérée par le sol lors du changement de phase de l'eau contenue dans ce dernier. Les deux pentes de la fonction à partir front gel dégel représentent les capacités thermiques volumiques des deux zones gel et dégel.

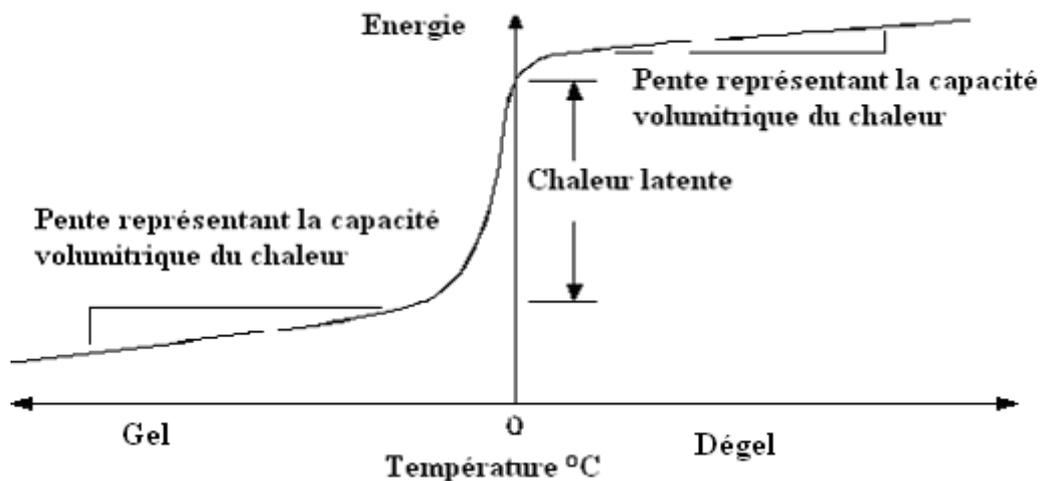


Fig 3.6: Exemple d'une fonction d'emménagement d'énergie (Temp/w ; 1998).

A l'exception d'eau pure, l'eau existant dans le sol change d'état d'un liquide vers un solide ou l'inverse au-dessus d'une certaine température, en d'autre terme, ce n'est pas tout l'eau existant dans le sol qui subit un changement de phase à une seule température.

Le pourcentage du volume d'eau dans le sol qui reste liquide à une certaine température est relié à la teneur en eau liquide.

La teneur en eau liquide est une caractéristique du sol qui peut être exprimée en fonction de la température. Un exemple d'une fonction de teneur en eau liquide est présenté dans la figure 3.7.

Il est recommandé de manière générale que la teneur en eau liquide est exprimée par une valeur variant entre zéro (0) et un (01), une teneur en eau liquide de un (01) signifie que 100% d'eau présente dans le sol est en état liquide. De même, une teneur en eau liquide de zéro (0) signifie que 0% d'eau présente dans le sol est en état liquide.

En générale, au-dessus du point de congélation (généralement autour de 0°C ou 32°F) toute l'eau existant dans le sol est liquide. Au-dessous du point de congélation la portion d'eau qui demeure liquide diminue graduellement lorsque la température diminue.

Finalement, au-dessous de quelques températures négatives (-10°C) toute l'eau dans le sol est congelée.

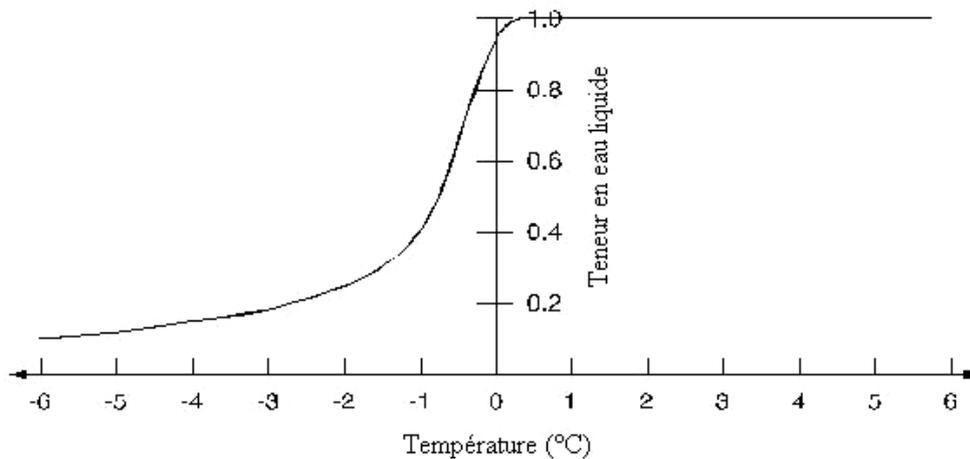


Fig3.7 : Exemple d'une fonction de teneur en eau liquide (Temp/w ; 1998).

Lorsque le sol est complètement congelé (teneur en eau liquide nulle), sa capacité de stockage d'énergie est représentée par la capacité thermique volumique du sol congelé. De même lorsque le sol est complètement dégelé (liquide; teneur en eau liquide égale à 1), sa capacité de stockage d'énergie est représentée par la capacité thermique volumique du sol dégelé par contre, lorsque le sol entre deux phases (teneur en eau liquide supérieur de 0 est inférieur de 1), la pente de la fonction de la teneur en eau liquide, la teneur en eau volumique du sol et la chaleur latente d'eau doivent être prises en compte pour définir la capacité de stockage d'énergie du sol.

3.3/La conductivité thermique – courbe caractéristique :

La fonction de la conductivité thermique caractérise l'aptitude des milieux de transmettre de la chaleur par conduction : pour le sol dégelé la conductivité thermique peut être supposée constante. Cependant pour le sol congelé, la conductivité thermique dépend largement de la teneur en eau liquide du sol qui est-elle même fonction de la température. Puisque la conductivité thermique de la glace est plus grande que celle de l'eau la conductivité thermique du sol augmente lorsque le sol est congelé et diminue lorsque le sol est dégelé.

La conductivité thermique peut être exprimée comme une fonction de la température, comme le montre la figure 3.8.

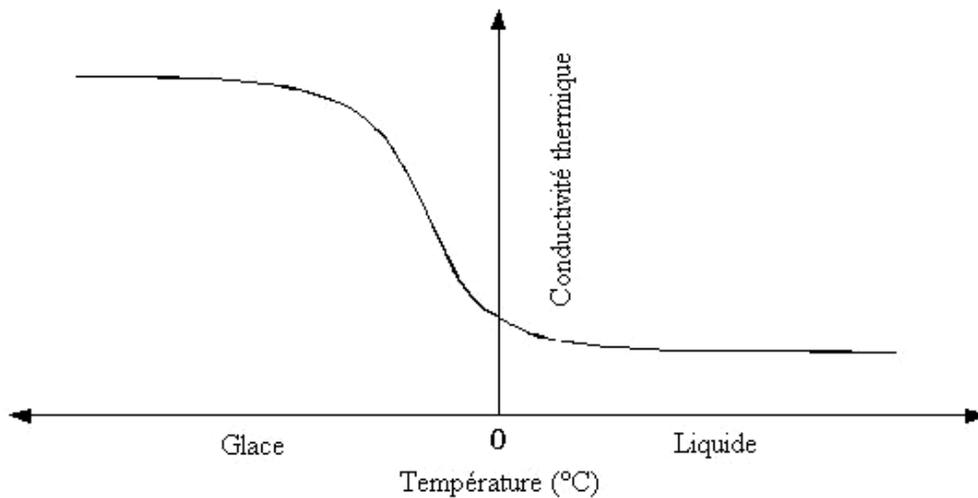


Fig3.8 : Exemple d'une fonction de conductivité thermique (Temp/W ; 1998).

3.4/L'équation d'équilibre énergétique :

Dans l'analyse de transfert de chaleur de n'importe quel système, l'équation d'équilibre énergétique suivante est satisfaite grâce à la conservation d'énergie (S. Rao ; 1982).

$$E_e + E_g = E_s + E_{ie} \tag{3.12}.$$

Où :

E_e : L'énergie entrante dans le système ;

E_g : L'énergie générée à l'intérieure du système ;

E_s : L'énergie sortante du système ;

E_{ie} : Changement interne d'énergie du système ;

3.4.1/L'énergie générée dans un corps :

L'énergie générée à l'intérieur d'un corps, même si elle est sous autres formes tel que : l'énergie chimique, nucléaire ou électrique, elle sera convertie en une énergie thermique.

Le flux de chaleur généré E_g est gouverné par l'équation suivante (S. Rao, 1982) :

$$E_g = \dot{q}V \tag{3.13}$$

E_g : Flux d'énergie généré à l'intérieur du corps ;

\dot{q} : Quantité d'énergie générée à l'intérieur du corps par unité du temps et de volume ;

V : Volume du corps ;

3.4.2/L'énergie réservée à l'intérieur d'un corps :

A chaque fois que la température d'un corps augmente, une quantité d'énergie sera stockée dedans. L'équation décrivant ce phénomène est donnée par :

$$E_{ie} = \rho \cdot C_P V \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.14)$$

E_{ie} : Le flux d'énergie stockée dans le corps.

ρ : La masse volumique du matériau constituant le corps.

C_P : Chaleur spécifique du corps par unité de masse.

T : Température du corps.

t : Le temps.

V : Volume du corps.

En se référant au paragraphe de la fonction d'emménagement dans le cas générale, l'énergie réservée à l'intérieur d'un corps ou l'énergie emmagasinée est donnée par :

$$E_{ie} = \beta V \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.15)$$

β : Pente de la fonction d'emménagement d'énergie au point considéré.

Cette pente dite la capacité de stockage de chaleur est composée de deux parties; la première est la capacité thermique volumique du matériau (soit dégelé ou congelé) la seconde est la chaleur latente associée au changement de phase:

$$\beta = C_v + L \frac{\partial \Theta_u}{\partial T} \quad (3.16)$$

C_v : Capacité thermique volumique ;

L : Chaleur latente d'eau ;

Θ_u : La teneur en eau liquide volumique totale ;

T : Température.

Rappelons que La capacité thermique volumique C_v est la pente de la courbe d'énergie dans les deux zones gelé ou dégelé tel qu'il est illustré dans la figure 3.6.

Le terme $L \frac{\partial \Theta_u}{\partial T}$ représente le taux de changement de la chaleur latente (figure 3.6).

Lorsque la fonction de teneur en eau liquide est définie, la teneur en eau liquide volumique totale peut être obtenue par l'expression suivante :

$$\Theta_u = \Theta_r \Theta \quad (3.17)$$

Où :

Θ_r : La teneur en eau liquide $0 \leq \Theta_r \leq 1$;

Θ : La teneur en eau volumique du sol.

3.5/L'équation générale de transfert de chaleur par conduction :

Considérons un élément de volume tel qu'il est représenté dans la figure 3.9. Cet élément est un parallélépipède rectangle de dimensions: d_x , d_y et d_z

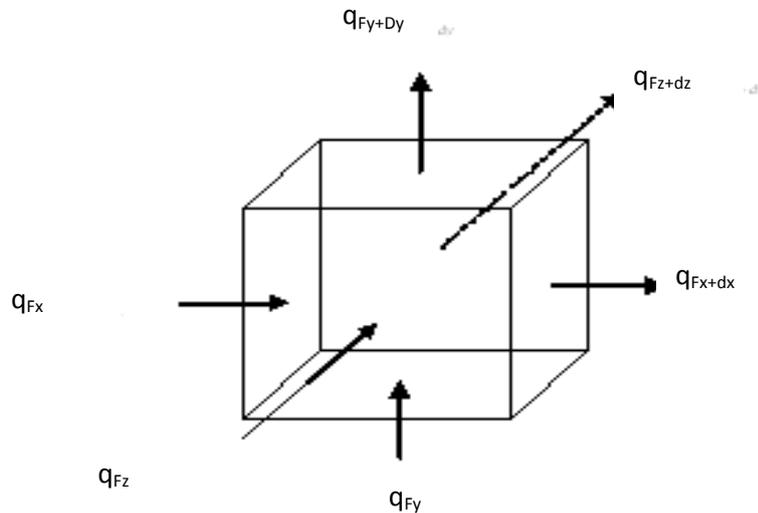


Figure 3.9 : Un élément de volume en coordonnées cartésiennes.

L'équation (3.12) peut être traduite dans le cas général par:

$$(q_{F_x} + q_{F_y} + q_{F_z})dt + \dot{q} dt = (q_{F_x} + q_{F_y} + q_{F_z})dt + \beta dT \tag{3.18}$$

q_{F_x} : La densité de flux de chaleur entrante à travers la face de position x.

$$q_{F_x} = -K_{F_x} \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.19}$$

Avec :

K_{F_x} : La conductivité thermique du matériau suivant x.

$q_{F_{x+dx}}$: La densité de flux de chaleur sortante par la face de position x+dx

$$q_{F_{x+dx}} = q_{F_x} + \frac{\partial q_{F_x}}{\partial x} dx \tag{3.20}$$

$$q_{F_{x+dx}} = -K_{F_x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (K_{F_x} \frac{\partial T}{\partial x}) dx \tag{3.21}$$

De même suivant y on obtient :

$$q_{F_y} = -K_{F_y} \frac{\partial T}{\partial y} \tag{3.22}$$

$$q_{F_{Y+dY}} = -K_{F_Y} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (K_{F_Y} \frac{\partial T}{\partial y}) dy \quad (3.23).$$

D'une façon similaire dans la direction z on peut écrire :

$$q_{F_Z} = -K_{F_Z} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.24).$$

$$q_{F_{Z+dZ}} = -K_{F_Z} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (K_{F_Z} \frac{\partial T}{\partial z}) dz \quad (3.25).$$

En remplaçant les équations (3.19), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), et (3.25) dans l'équation (3.18) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_{F_x} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_{F_y} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_{F_z} \frac{\partial T}{\partial z}) + \dot{q} = \beta \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.26).$$

L'équation (2.26) est l'équation différentielle gouvernant la conduction de la chaleur dans un élément de volume.

D'après l'équation (2.16), l'équation (2.26) peut prendre la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_{F_x} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_{F_y} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_{F_z} \frac{\partial T}{\partial z}) + \dot{q} = (C_V + L\Theta \frac{\partial \Theta_r}{\partial T}) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.27).$$

Si les conductivités thermiques suivant x,y et z sont supposées constantes :

$K_{F_x} = K_{F_y} = K_{F_z} = C^{ste}$, l'équation (2.26) se simplifie comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{K_F} = \frac{\beta}{K_F} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.28).$$

L'équation (3.28) est l'équation de conduction de chaleur qui gouverne la distribution de la température et de la conduction de flux de chaleur dans un corps isotrope en régime transitoire.

Si en plus β représente, la pente de la partie linéaire de la fonction d'emménagement d'énergie, l'équation (3.26) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{K_F} = \frac{1}{D_F} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.29)$$

Si en plus, les sources internes du corps sont absentes, l'équation (3.26) se réduit à l'équation de Fourier :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D_F} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.30).$$

Rappelons que D_F est la diffusivité thermique de l'élément de volume.

Si en plus, le transfert thermique est permanent (avec l'existence des sources internes) l'équation (3.26) se simplifie comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{K_F} = 0 \quad (3.31).$$

Maintenant, si le transfert thermique est permanent avec l'absence des sources internes, l'équation (3.29) se réduit à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.32).$$

4. ASSIMILATION ENTRE L'ANALYSE THERMIQUE ET L'ANALYSE D'INFILTRATION :

En particulier, les problèmes de répartition de la charge hydraulique dans les écoulements en milieux poreux qui, tout comme les problèmes de répartition de température ou de potentiel électrique, se ramènent à la résolution d'une équation de type $\Delta(u)=f$ peuvent être traités aisément par la méthode des éléments finies.

Après avoir posé l'équation de continuité d'un fluide (fonction du temps), on abordera dans ce qui suit la technique générale de résolution.

Les premières applications de de la méthode des éléments finies ont été orientés vers les résolutions des équations d'équilibre en élasticité ou en élastoplasticité, il est très vite apparu que ces méthodes pouvaient aussi être utilisées pour la résolution de nombreux problèmes physiques régis des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Après avoir étudié les équations d'écoulement en régime transitoire dans la géotechnique et les équations de transfert de chaleur en thermique où nous avons constaté qui ont la même forme ; dans la résolution numérique, la résolution thermique est plus facile que d'autres formes.

Pour résoudre le problème d'infiltration, on présente une analogie être thermique et hydraulique.

On présente d'abord les quantités dans les deux domaines.

4.1/définition des propriétés du milieu :

Les propriétés et variables physiques sont de cinq types :

- Les propriétés définissant la quantité de matière ou d'énergie : c'est le sujet central du phénomène physique étudié. Dans le cas de la thermique, il s'agit de la chaleur tandis que celui de l'écoulement c'est la masse fluide.

Mathématiquement la quantité de matière ou d'énergie est une variable scalaire, pour la thermique, la quantité de chaleur W est exprimée en Joules (J) (unité d'énergie ou de travail). En hydrologie, la quantité de fluide est généralement définie par masse M (Kg), ou par son volume V (m^3) (à densité constante).

- La propriété définissant le potentiel : le paramètre qui régit le transfert de matière ou d'énergie constitue le potentiel. Lorsque le potentiel est égal partout dans un domaine, il n'y a pas de transfert de masse ou d'énergie. Par contre, des différences de potentiel provoquent le transfert de masse ou d'énergie. Les changements du potentiel selon les différentes directions dans un domaine donné définissent le gradient de potentiel dans ce domaine.

Dans le cas de la thermique, c'est la température qui constitue le potentiel puisqu'elle contrôle le transfert de la chaleur, celle-ci étant transférée des secteurs chauds (à haute température) vers les secteurs froids (à basse température). Dans le cas de l'écoulement en milieu poreux, c'est la charge hydraulique qui constitue le potentiel puisque l'écoulement se fait des secteurs à haute charge hydraulique vers ceux à faible charge hydraulique.

Le potentiel U est une variable mathématique scalaire définie en tout point du domaine considéré. Le gradient de potentiel U est un vecteur. En mathématique, la température T est spécifiée en degrés Kelvin (K) et la valeur du gradient thermique dans une direction donnée en K/m (ou de façon équivalente en C°/m)

En hydrologie, la charge hydraulique h est exprimé en mètres d'eau (m), de sorte que le gradient hydraulique est sans dimensions (m/m).

- La propriété définissant le flux de masse ou d'énergie : Ce paramètre indique la quantité et la direction dans laquelle la masse ou l'énergie est transférée en fonction du temps à travers une surface unitaire dans les matériaux sous l'effet du gradient de potentiel. Dans le cas de la thermique, il s'agit du flux de chaleur généré par le gradient de température. Dans le cas de l'écoulement, nous nous intéressons au flux de masse (ou volumétrique) de fluide à travers les matériaux découlant du gradient hydraulique.

De façon mathématique, le flux est aussi un vecteur. En thermique, le flux de chaleur q_h est exprimé en quantité de chaleur par unité de temps et de surface ($J/s.m^2$ ou W/m^2). En hydrogéologie, le flux de fluide q est généralement exprimé en volume de fluide (à densité constante) par unité de temps et de surface (m^3/s ou m/s) ou, plus rarement, en masse de fluide par unité de surface ($Kg/s.m^2$).

- La propriété des matériaux définissant leur capacité de stockage ou d'emménagement : Cette propriété indique la quantité de matière ou d'énergie qui peut être contenue dans un volume unitaire de matériel. Dans le cas de la thermique, c'est l'enthalpie H (J) qui définit la quantité de chaleur contenue dans le matériaux. Dans le cas de l'écoulement saturé (nappes captives), c'est l'emménagement spécifique SS qui définit la capacité de stocker de l'eau.

Mathématiquement, cette propriété est scalaire et représente la quantité de masse ou d'énergie emmagasinée par unité de volume du domaine. En thermique, la capacité de stockage de l'énergie thermique est représenté par l'enthalpie volumique h_p (J/m^3) qui est le produit de la densité du matériel p (Kg/m^3) par sa capacité thermique c ($J/Kg.K$) et la température T ($^{\circ}C$) ($h_p = p.c.T$).

En hydrogéologie, la capacité d'emmagasinement est représenté par l'emmagasinement spécifique SS qui représente le volume d'eau produit par un milieu poreux par unité de volume de l'aquifère pour abaissement unitaire de la charge hydraulique ($m^3/m^3.m = m^{-1}$).

- La propriété de matériaux définissant leur capacité de transférer de la masse ou de l'énergie : Cette propriété indique la facilité avec laquelle la masse ou l'énergie peut être transférée à travers les matériaux sous l'influence d'un gradient de potentiel.

Ce paramètre constitue généralement la constante de proportionnalité dans les lois de comportement régissant les flux de masse ou d'énergie.

Dans le cas de la thermique la capacité des matériaux à transférer de la chaleur par conduction est caractériser par leur conductivité thermique, la conductivité hydraulique K indique quant à elle la capacité des milieux poreux à transférer un volume d'eau.

Cette propriété est représentée par un tenseur mathématique ; puisque ces propriétés sont habituellement définies comme la constante de proportionnalité reliant le flux au gradient de potentiel, leur unités dépendent des loi de comportement.

Nous évoquons ci-dessous le principe de base ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites, et faire par la suite l'analogie entre les deux analyse (thermique et hydraulique) :

4.2/le principe de la similitude :

Selon la théorie de base de l'infiltration connue dans les milieux poreux Darcy:

$$v = \frac{Q_s}{A} = -k_s \frac{dh}{dl} = k_s \cdot i \quad (3.33)$$

$$Q_s = -Ak_s \frac{dh}{L} \quad (3.34)$$

où :

Q_s :débit d'infiltration;

A:aire de la section;

h:hauteur piézométrique;

K_s : coefficient de perméabilité;

L: longueur d'écoulement;

v:vitesse moyenne;

i:gradient hydraulique.

$$q = \frac{Q_s}{A} = -k_r \frac{dT}{dn} \quad (3.35)$$

Quant à la faible conduction de chaleur (hypothèse de Fourier):

$$Q_r = Ak_r \frac{dT}{dn} \quad (3.36)$$

dont :

Q_r : chaleur(flux);

A:aire de la section;

dT/dn :gradient thermique;

K_r : coefficient de transfert thermique ou conductivité thermique;

q:intensité du flux thermique de conduction de la chaleur.

4.3/Equations différentielles similaires:

4.3.1/Equation différentielle en écoulement:

Pour les sols non saturés, non-homogène en régime permanent, l'équation prend la forme

suivante:
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.37)$$

Pour les sols non saturés, non-homogène en régime transitoire, l'équation prend la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z}) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.38)$$

où : k_{xx}, k_{yy}, k_{zz} , x,y,z direction de la perméabilité coefficient ;

S_s : capacité.

4.3.2/Equations différentielles en thermique:

Pour les sols non-saturés, non-homogènes, en régime permanent, l'équation différentielle pour la conduction de chaleur est de la forme suivant :

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}) = 0 \quad (3.39)$$

Pour les sols non-saturés, non-homogènes, en régime transitoire, l'équation différentielle pour la conduction de chaleur est de la forme suivant :

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}) = C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.40)$$

Dont :

k_{xx}, k_{yy}, k_{zz} : coefficient de conduction de la chaleur (conductivité thermique) x,y,z sens de conduction de la chaleur ;

C : chaleur ou diffusivité thermique.

Par comparaison des deux équations thermique et hydraulique, la forme est la même seulement les paramètres ont changé entres ces deux dernière ;

$$n \cdot \frac{\partial s_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial \Phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial \Phi}{\partial z})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}) = C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Par suite on a :

La conductivité hydraulique k (la perméabilité) **équivalent** à la conductivité thermique

La charge hydraulique h **équivalent** à la température T

***CHAPITRE 4: REGIME PERMANENT ET TRANSITOIRE
APPLIQUES A DES EXEMPLES EN GENIE CIVIL***

Exemple n°01 : Le Modèle Hélé-Shaw Pour La Détermination Des Ecoulements Dans des Petits Barrages En Terre.(Séminaire international sur les petits barrages dans le monde méditerranéen –Tunis 28 et 31 Mais 2001)

Dans cet exemple le modèle utilisé est celui de Hele-shaw pour étudier et visualiser l'évolution de la ligne de saturation pour les digues en terre avec tapis filtrant et suintement en régime permanent et non permanent, tout en comparant les résultats obtenus avec ceux des méthodes classiques : Kozeny et Boussinesq.

1) EQUATION GENERALE DE L'ECOULEMENT DE HELE-SHAW

L'écoulement de Hélé-Shaw est un écoulement visqueux en régime laminaire entre deux plaques verticales parallèles rapprochées. L'écoulement étant assez lent, le régime est laminaire et obéit aux équations de Navier-Stockes, avec les hypothèses suivantes :

- écoulement bidimensionnel, $v=0$;
- distance entre les deux plaques est faible.

L'équation générale de l'écoulement de Hélé-Shaw s'écrit :

$$\text{La vitesse moyenne : } \vec{V}_m = -\frac{d_0^2}{12\nu} \overrightarrow{\text{grad}}(h) \quad (1)$$

L'installation expérimental se compose de:

- deux plaques en plexiglas dont l'une est fixe et l'autre variable placée parallèlement l'une de l'autre à une distance $d_0 = 15 \text{ mm}$;
 - une cuve cylindrique de dimensions ($D = 16 \text{ cm}$, $h = 103,5 \text{ cm}$) partiellement remplie de l'huile en contact directe avec le réservoir principal (retenue);
 - un flotteur cylindrique de diamètre $d = 12 \text{ cm}$ et de hauteur $= 110 \text{ cm}$ relié à une manivelle par un fil qui plonge dans la cuve.
- une autre cuve cylindrique de diamètre $= 16 \text{ cm}$ et de hauteur $= 33 \text{ cm}$ placée à l'autre extrémité permettant la récupération de l'huile s'écoulant entre les deux plaques;
- différentes plaques en plexiglas de couleur blanche simulant le barrage en terre;
 - un support sur lequel repose le système;
 - une pompe reliant les deux réservoirs par l'intermédiaire d'un tuyau qui permet de garder un régime permanent;
 - des entretoises placées entre les deux plaques pour garder un intervalle constant ($d_0= 15\text{mm}$).

1.1/REGIME PERMANENT : POSITION DE LA SURFACE LIBRE ET LE DEBIT DE FUITE

En régime permanent, les positions de la surface libre ont été relevées directement sur papier calque collé sur la plaque du plexiglas du modèle. Les résultats expérimentaux obtenus pour différents niveaux de retenues sont représentés sur la figure 4.1.

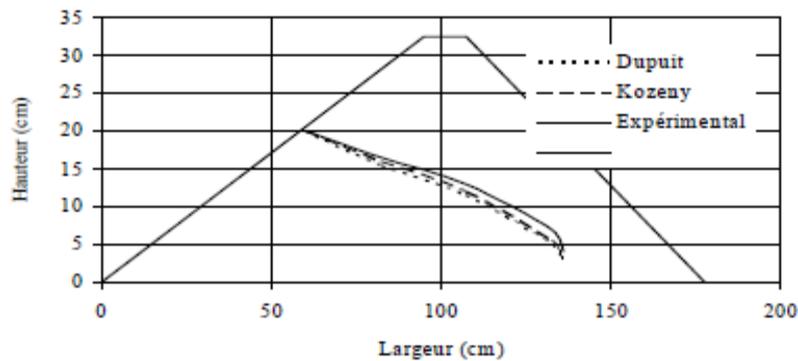


Fig 4.1 : position de la ligne de saturation dans une digue avec drain à l'aval (hauteur d'eau=20cm)

Il est intéressant de constater que la courbe expérimentale coïncide bien avec celle de KOZENY et DUPUIT notamment pour la hauteur de 20 cm. Au cours des expériences il a été procédé à une série de mesure du débit de fuite. Les résultats obtenus sont représentés avec ceux de KOZENY dans le tableau 1.

Tableau 1 : débits de fuite obtenus

Hauteur de la retenue (cm)	Débit expérimental (cm ³ /s)	Débit donné par KOZENY (cm ³ /s)
12,50	0,77	0,80
15,00	1,20	1,14
17,60	1,70	1,60
19,50	2,18	2,05

Il a été constaté que les valeurs du débit obtenues expérimentalement comparées aux valeurs théoriques sont bonnes.

1.2/ REGIME NON PERMANENT : VARIATION DE LA SURFACE LIBRE LORS D'UNE VIDANGE RAPIDE

Le problème consiste à déterminer à chaque instant la position de la ligne de saturation en mouvement pour cela, on utilise l'équation de BOUSSINESQ:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

La méthode analytique permet la résolution de cette équation. Les conditions initiales et aux limites sont définis comme suit :

Conditions initiales:

A $t = 0$, l'écoulement étant permanent, l'équation de la surface libre est donnée par:

$$h(x, 0) = H_0 \cdot \sqrt{(L-x)/L} \cdot (1-B) = g(x)$$

Conditions aux limites

$\forall t$, après la vidange rapide: $h(0, t) = 0$

$$h(L, t) = 0$$

La linéarisation de cette équation donne :

$$\frac{\varepsilon}{k \cdot H_0} \frac{\partial^2 H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (3)$$

En posant $C_0^2 = \frac{\varepsilon}{k \cdot H_0}$, l'équation (3) devient:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = C_0^2 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4)$$

1. EQUATION DIFFERENTIELLE DU SECOND ORDRE ANALOGUE A L'EQUATION DE LA CHALEUR.

La résolution de cette équation par la méthode de Fourier donne :

$$h(x, t) = H_0 \cdot \sqrt{(2/1 - B)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [(e^{-n^2 \pi^2 t / L^2 C^2}) / n \pi] \cdot \sin(n \pi x / L)$$

Comme il a été exposé précédemment la résolution de l'équation de BOUSSINESQ a permis de donner h en fonction de x et t. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 4.2.

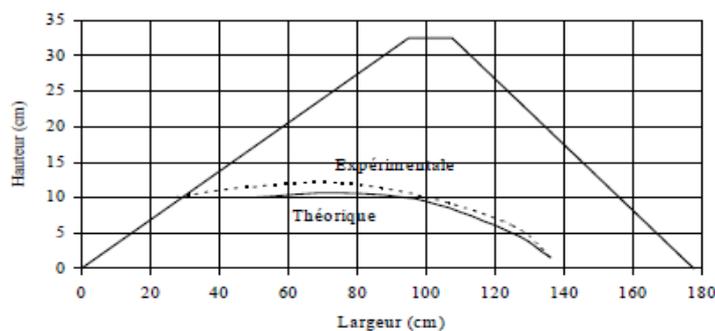


Fig 4.2 : variation dans le temps de la ligne de saturation d'une vidange rapide (t=2min)

Il est intéressant de constater que pour une hauteur initiale de la retenue égale à 15,3 cm, les résultats expérimentaux et théoriques coïncident bien.

Vu les bons résultats expérimentaux obtenus, le dispositif expérimental à écoulement de Hélé-Shaw s'est révélé être un moyen d'étude efficace et rapide à condition de prendre toutes les dispositions possibles tel que le refroidisseur (pour garder une température constante), les appareils de mesure de précision.

Exemple n°02:

Étude du régime transitoire de l'écoulement de l'eau pendant le drainage des nappes à surface libre

L'objectif de cette étude était d'examiner la validité de certaines des hypothèses et modèles utilisés pour décrire le drainage des aquifères libres. Une technique d'atténuation des rayons γ a été utilisée pour suivre l'évolution rapide teneur en eau dans le voile pendant le drainage. (La houille blanche 2010).

Le premier objectif des expériences de drainage a été d'évaluer l'effet du temps, la profondeur de la nappe phréatique et tiré sur la valeur du coefficient d'emmagasinement. Ce coefficient a souvent été supposé constant et égal au rendement spécifique lors de l'examen des problèmes d'écoulement à surface libre en hydrodynamique des eaux souterraines.

Tenant compte de l'écoulement de l'eau dans la zone non saturée, il pourrait être facile de montrer que le rendement spécifique ε doit être considéré que comme une limite asymptotique de la valeur du coefficient d'emmagasinement S . Au cours de l'évacuation d'un aquifère de la nappe phréatique initialement à une certaine profondeur H , il est important de noter que le volume maximum d'eau vidangeables V_{∞} sera donnée, par unité de surface du sol, par la zone délimitée par les branches de drainage de la pression capillaire courbes correspondant aux positions initiale et finale de la table de l'eau. De l'analyse de la façon dont le volume drainé de l'eau varie pour les valeurs de retrait différentes et une nappe phréatique d'abord à la surface du sol, il est possible de faire une étude comparative de la durée de drainage.

Considérant comme un critère que les expériences terminé pour l'instant t_{99} , pour laquelle 99% du volume total d'eau vidangeables avait coulé là, nous avons obtenu une relation empirique entre t_{99} , côte Z et K_0 perméabilité. Une tentative a été faite alors à adapter les modèles capillaires à des problèmes de drainage. Nous avons examiné trois séries de modèles:

- le modèle de gravité, en négligeant la zone non saturée;
- le "monocapillaire" modèle, déjà développée par EG Youngs et compte tenu de l'analogie entre une famille unique de tubes capillaires dont le diamètre est défini par la frange capillaire du sol, et le voile,
- le "multi-capillaire" modèle, compte tenu de l'analogie entre une série de différentes familles de tubes capillaires et le voile, la remontée capillaire dans chaque famille étant égale à la remontée capillaire pour les valeurs correspondantes des pores gamme.

En comparant les valeurs expérimentales du volume drainé de l'eau avec théoriques, obtenues par l'analyse des modèles capillaires, il est montré que le modèle unique capillaire est très satisfaisant au début d'une expérience de drainage.

Toutefois, lorsque la position de la teneur maximale en eau θ_0 tend vers la frange capillaire correspondant à la position d'équilibre de la nappe phréatique drainée, le modèle multi-capillaire donne une bonne approximation des valeurs du volume d'eau drainée.

Nous décrivons ensuite une méthode de détermination de la conductivité hydraulique k fonction (θ) à partir d'une analyse des flux de passage des profils teneur en eau.

La loi de Darcy généralisée utilisé pour décrire l'écoulement de l'eau dans les sols non saturés est jugée valide.

Pour différentes valeurs de la teneur en eau θ , k est donnée par le rapport entre le débit unitaire q et capillaire, gradient de potentiel.

Il est nécessaire de souligner l'importance de la zone non saturée entre la nappe phréatique et la surface de voile dans les problèmes de l'aquifère libre.

2. INTRODUCTION AU CODE DE CALCUL ANSYS

Ansys est une application très extensive de la commune maturité complète du logiciel d'analyse par éléments finis. Il a une grande variété de capacités d'analyse, de la simple analyse statique linéaire de complexes analyse dynamique non linéaire.

C'est en plus le langage de conceptions design conviviales paramétriques et l'optimisation des caractéristiques de conception de produits additionnels. Le logiciel ANSYS peut fournir des types d'analyse:

- ✓ l'analyse statique des structures;
- ✓ Dynamique analyse structurelle;
- ✓ non-linéaires d'analyse structurelle;
- ✓ analyse structurale flambage;
- ✓ électromagnétiques analyse des champs;
- ✓ analyse acoustique;
- ✓ analyse piézoélectrique,
- ✓ l'analyse dynamique des fluides,
- ✓ l'analyse thermodynamique.

L'analyse structurale :

Est utilisée pour déterminer les déformations, les contraintes et les forces de réaction.

*analyse statique : utilisée pour :

- des conditions de chargement statique.
- les comportements non linéaire comme les grands déplacements, la forte déflexion, les raideurs géométriques, le contact, la plasticité, l'hyper élasticité, et le fluage peuvent être simulé.

*analyse dynamique : elle inclut :

- les effets de masse et d'amortissement ;

- l'analyse modale calcule les fréquences propres et les modes propres ;
- l'analyse harmonique détermine la réponse d'une structure à des chargements sinusoïdaux d'amplitude et de fréquences connues.
- L'analyse transitoire dynamique détermine la réponse d'une structure à des chargements variables dans le temps et peut inclure un comportement non linéaire.

Autres fonctionnalités structurales :

- Analyse spectrale ;
- Vibrations aléatoires ;

L'analyse thermique :

Est utilisée pour déterminer la répartition de la température d'un corps, d'autres grandeurs sont intéressantes incluant la quantité de chaleur échangée, les gradients et les flux thermiques.

ANSYS, comprend aussi l'analyse thermique de conduction thermique, la convection et le transfert de chaleur de rayonnement de trois façons.

En outre, l'analyse peut toucher aussi la résistance de contact, et d'autres issues.

Mais l'inconvénient est de ne pas utilisé directement le module d'analyse d'infiltration, cependant, ce code propose d'utiliser le module thermique (conduction) pour analyser les problèmes d'infiltration.

L'analyse électromagnétique : est utilisée pour calculer le champ magnétique dans des appareils électromagnétiques.

L'analyse en champs couplés :

Elle étudie l'interaction mutuelle entre deux ou plusieurs champs, chaque champ étant dépendant d'un autre, la résolution séparée de chacun est impossible.

On a donc besoin d'un programme qui permet la résolution des deux problèmes physiques en les combinant.

Exemples :

- Analyse thermomécanique,
- Piézoélectrique (électrique et structural),
- Analyse thermoélectrique,
- Acoustique (fluide/structure),
- Chauffage par induction(magnétique et thermique),
- Analyse électrostatique-structurale.

Exemple1 :d’analyse thermique en transitoire par le code de calcul ANSYS:(ANSYS HELP)

Données :

Un solide semi-infini est initialement à la température T_0 .

Le solide est ensuite soudainement exposés à un environnement présentant une température T_e et un coefficient de convection surface h .

*Déterminer la répartition de la température dans le solide après 2000 secondes.

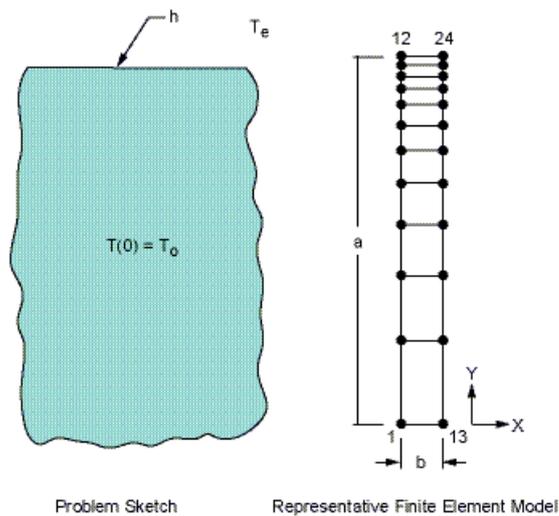


Fig 4.3 : problème d’une dalle infinie

Material Properties	Geometric Properties	Loading
$k = 54 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$a = 1 \text{ m}$	$T_0 = 0^\circ\text{C}$
$\rho = 7833 \text{ kg/m}^3$	$b = 0.1 \text{ m}$	$T_e = 1000^\circ\text{C}$
$c = 465 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$		$h = 50 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$

Les hypothèses d'analyse et de modélisation

- La largeur $b = 0,1 \text{ m}$ est choisi arbitrairement pour les éléments.
- La longueur $a = 1 \text{ m}$ est choisi pour le modèle la limite infinie telle qu'aucun changement de température significative se produit au niveau des points d'extrémité interne (noeuds 1, 13) pour la période d'intérêt.
- La position des noeuds sont sélectionnés avec une densité plus élevée près de la surface afin de mieux modéliser le comportement transitoire.
- Le temps de marche automatique procédure (AUTOTS, ON) est utilisé avec un pas de temps d'intégration initiale de 10 sec (2000 sec/200 max. Itérations = 10) au plus près le modèle de choc thermique à la surface.

Results Comparisons:

Temperature °C	Target	ANSYS	Ratio
@ Y = .9777 (Node 11)	140	141	1.01
@ Y = .9141 (Node9)	98.9	99.1	1.00
@ Y = .8134 (Node 7)	51.8	51.7	0.997
@ Y = .6538 (Node 5)	14.5	14.0	0.968

Exemple2 : d'analyse thermique en transitoire : (ANSYS HELP)

Données :

Une longue barre métallique de section rectangulaire est initialement à une température T_o et puis tout à coup est trempée dans un grand volume de liquide à la température T_f .

La conductivité du matériau est orthotrope, ayant différentes propriétés suivant les directions X et Y.

le coefficient de convection de surface est h . Déterminer la répartition de la température dans la dalle après 3 secondes dans les endroits suivants de la barre:

- 1/le Centre.
- 2/l'extrémité du coin.
- 3/les centres de face de la barre.

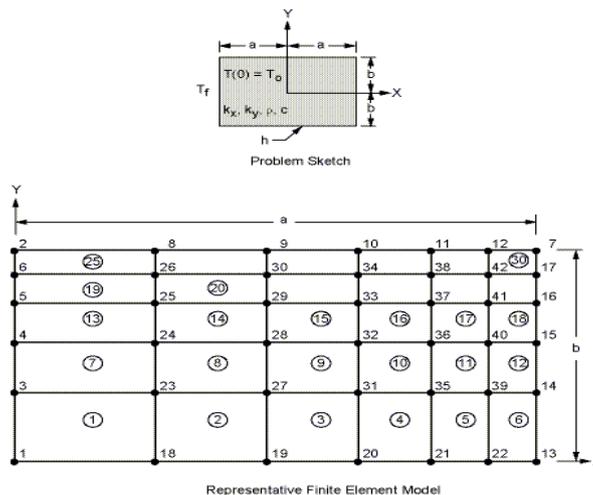


Fig 4.4 : maillage d'une barre rectangulaire .

Material Properties

$k_x = 20 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$

$k_y = 3.6036 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$

$\gamma = 400 \text{ lb/ft}^3$

$c = 0.009009 \text{ Btu/lb-}^\circ\text{F}$

$h = 240 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$

Geometric Properties

$a = 2 \text{ in} = (2/12) \text{ ft}$

$b = 1 \text{ in} = (1/12) \text{ ft}$

Loading

$T_o = 500^\circ\text{F}$

$T_f = 100^\circ\text{F}$

Les hypothèses d'analyse et de modélisation

Une grille non uniforme (basé sur une progression géométrique) est utilisé dans les deux directions X et Y pour le modèle d'un quart de la barre transversale.

Le temps de procédure automatique est utilisé pas à pas.

L'étape initiale d'intégration de temps = $(3 / 3600) (1 / 40)$ est supérieure à $(\delta^2/4\alpha)$, où δ est la longueur élément la plus courte (0,0089 m) et α est la diffusivité thermique ($k_y / \gamma c = 1,0 \text{ m}^2 / \text{h}$).

Résultats de comparaison

Time = 3 sec. (=0.0008333 hr.)	Target	ANSYS	Ratio
T, °F (Node 1)	459.	457.	1.00
T, °F (Node 7)	151.	158.	1.05
T, °F (Node 13)	279.	288.	1.03
T, °F (Node 2)	202.	204.	1.01

Exemple3: Conduction de la chaleur à travers une section de cheminée (ANSYS HELP)

Déterminer la répartition de la température et le taux de flux de chaleur q par pied de hauteur pour une grande cheminée dont la section est illustré à la figure4.5:

Supposons que la température du gaz à l'intérieur est T_g , le coefficient de convection à l'intérieur est h_i , la température ambiante est T_a , et le coefficient de convection à l'extérieur est h_o .

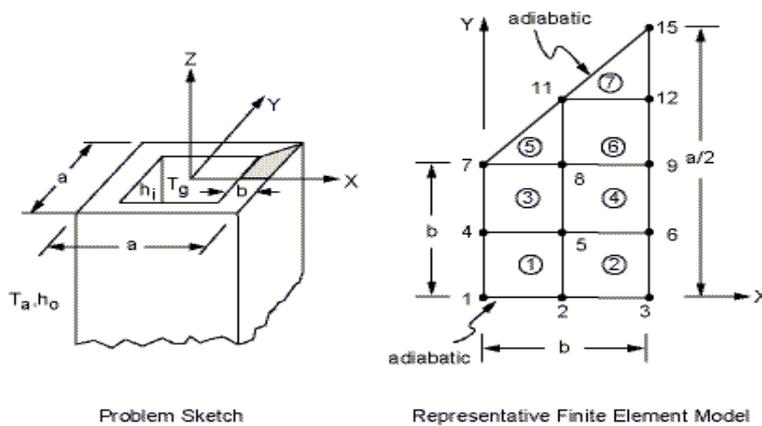


Fig 4.5 : modélisation et maillage d'une cheminée

Les hypothèses d'analyse et de modélisation :

En raison de symétrie, une section 1 / 8 est utilisé. Le modèle éléments finis est la même que modèle de relaxation de la référence pour une comparaison directe.

La solution est basée sur une ailette de la profondeur de l'unité (direction Z).

POST1 est utilisé pour obtenir des résultats de la phase de solution

Résultats de comparaison

	Target[1]	ANSYS	Ratio
T, °F (at Node 1)	93.7	93.6	1.00
T, °F (at Node 2)	56.3	56.8	1.01
T, °F (at Node 3)	22.2	22.1	0.99
T, °F (at Node 4)	93.2	93.2	1.00
T, °F (at Node 5)	54.6	54.9	1.01
T, °F (at Node 6)	21.4	21.1	0.98
T, °F (at Node 7)	87.6	87.8	1.00
T, °F (at Node 8)	47.5	47.7	1.01
T, °F (at Node 9)	18.3	17.3	0.95
T, °F (at Node 11)	29.6	27.6	0.93
T, °F (at Node 12)	11.7	12.5	1.07
T, °F (at Node 15)	4.7	5.0	1.07
q, Btu/hr	775.2	773.5[2]	1.00

1. Basé sur une méthode de relaxation numérique.
2. le taux de la chaleur aux éléments 1 et 3, est multiplié par 8.

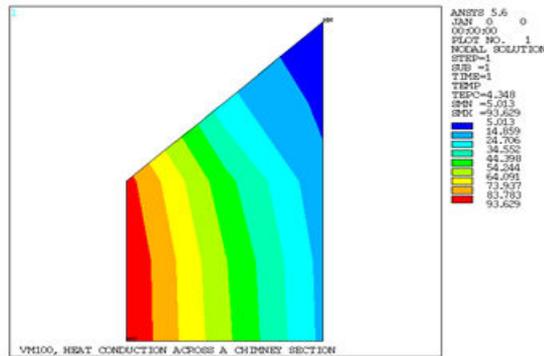


Fig 4.6 : conduction de la chaleur à travers une cheminée

2.2/ Application directe au code de calcul ANSYS

Première application :

ANALYSE DU TRANSFERT THERMIQUE AUTOUR D'UN PIPELINE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

L'intérêt de cet application est l'utilisation du code de calcul Ansys et voir comment appliquer les paramètres de transfert thermique tout en se servant des équations de la chaleur et voir par la suite la propagation de la chaleur par conduction.

2.2.1/Présentation de l'exemple

Le présent exemple simule le phénomène en conditions bidimensionnelles ,il s'agit d'un problème classique, mais d'un grand intérêt pour le domaine de génie pétrolier, notamment dans les pays à climat tempéré, et humide.

Il s'agit d'une ouverture (pipeline) simulant le cas d'une cavité souterraine.

La température extérieure de pipeline est de -2°C encastrée dans le sol ayant une température initiale de l'ordre de $+3^{\circ}\text{C}$.

Une condition aux limites (surface du sol) est imposée (voir figure 4.7), il s'agit d'une température constante qui vaut aussi $+3^{\circ}\text{C}$.Aussi,il faut notée ici que cette température est égale à celle de l'état initial du sol.

Les courbes de la teneur en eau liquide ainsi que de la conductivité thermique du sol (deux caractéristiques thermiques du milieu indispensable pour la résolution numérique) sont représentées respectivement dans les deux figures suivantes (figure 4.8 et figure 4.9).

Il est important de signaler à ce niveau que ces deux courbes ne peuvent être déterminées que expérimentalement. Elles constituent une difficulté (surtout numérique) puisqu'elle présente une hystérésis non négligeable.

Dans ce projet cette notion d'hystérésis est négligeable.

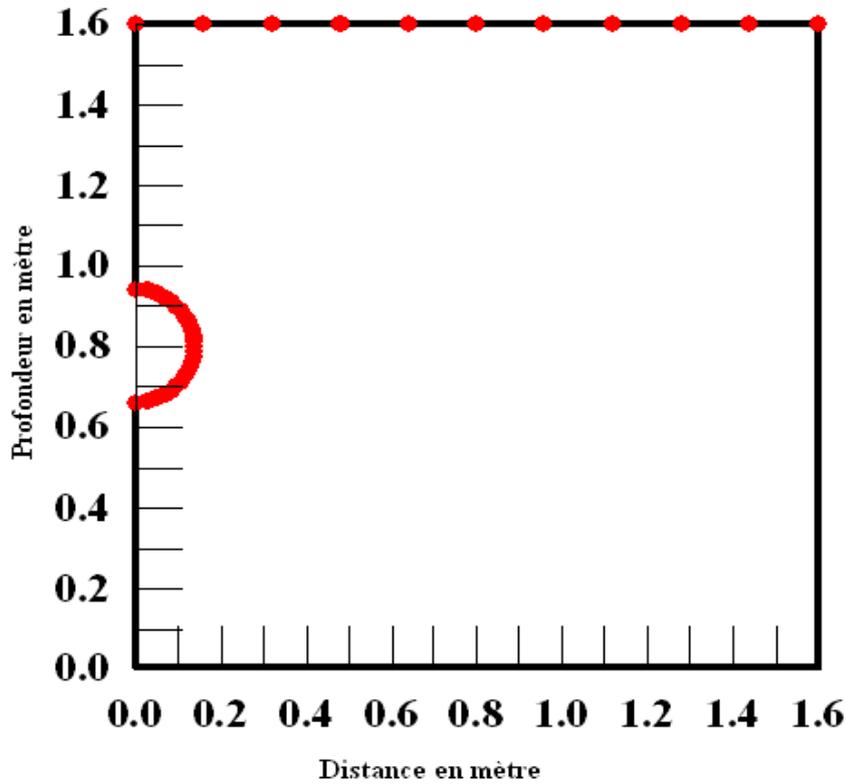


Figure 4.7 : Géométrie du problème et conditions aux limites (Jason.S et al, 1997).

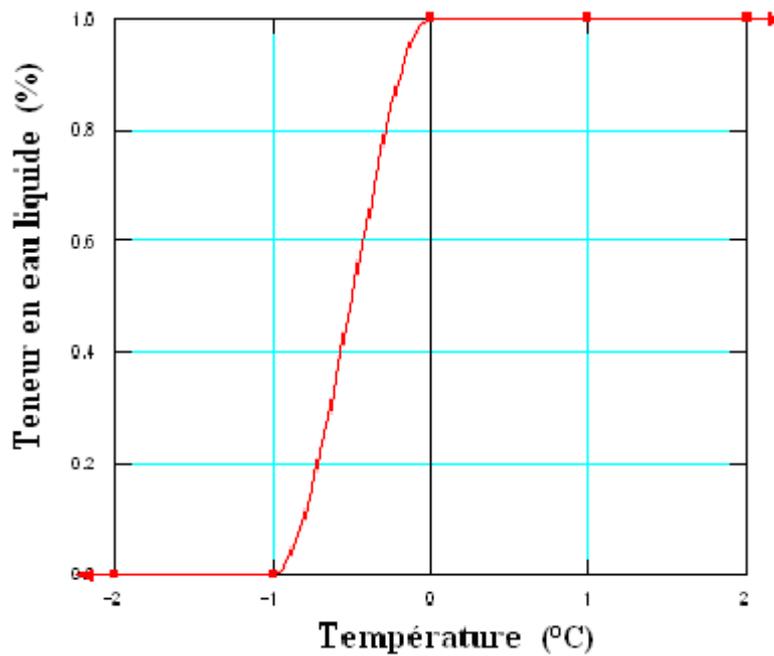


Figure 4.8 : Fonction de la teneur en eau liquide (Jason.S et al, 1997).

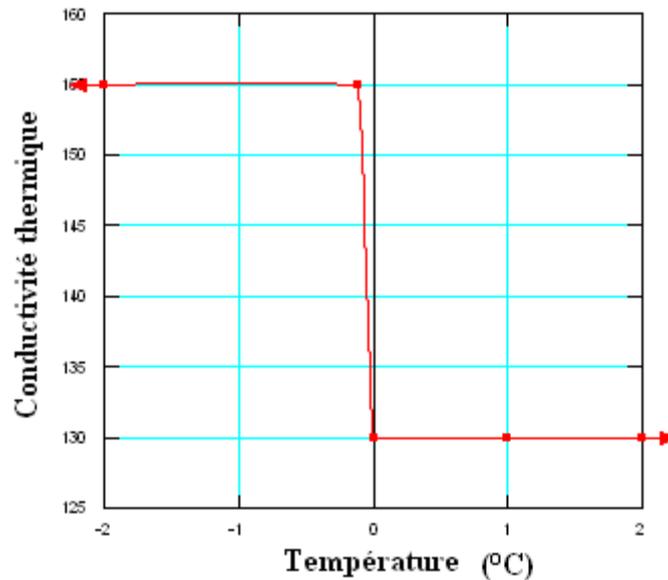


Figure 4.9 : Fonction de la conductivité thermique (Jason.S et al, 1997).

2.2.2/Introduction des paramètres :

Lors de l'introduction des paramètres, le code de calcul Ansys utilise la commande appeler Preprocessor ainsi des sous commandes reliées à cette commande pour inclure les différentes données du problème à résoudre.

Dans ce qui suit les valeurs des données servant à modéliser la géométrie et les paramètres correspondants à la structure du Pipeline et une partie du sol.

- ✓ La teneur en eau volumique du sol vaut $\Theta = 0,377$
- ✓ La capacité thermique volumique (chaleur spécifique) est $C_v = 0,157 \text{ [MJ/(m}^3 \cdot \text{°C)]}$.
- ✓ La conductivité thermique est fonction température représentée par un graphe (voir fig 4.9).

On représente ainsi la figure suivante illustrant la modélisation du pipeline et le sol.

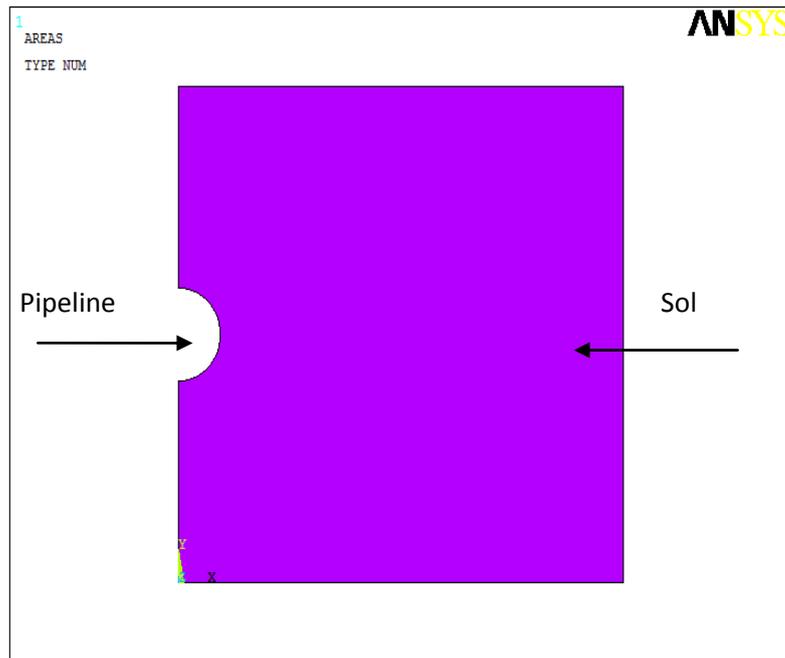


Figure 4.10 : modélisation du pipeline et une partie du sol.

2.2.3/Le Maillage

L'élément choisi pour le maillage est le PLANE 77.

Présentation de l'élément :

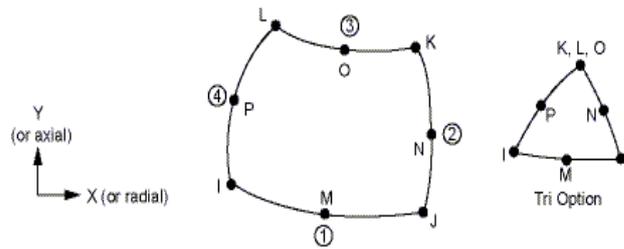
PLANE77 est une version d'ordre supérieur de la 2-D, 4-nœud de l'élément thermique (PLANE55). L'élément a un degré de liberté, de la température, à chaque nœud. Les éléments à 8 nœuds ont des formes compatibles et les températures sont bien adaptés pour modéliser les limites incurvées.

L'élément 8-nœud thermique est applicable à un 2-D, l'état d'équilibre ou de passage de l'analyse thermique.

Si le modèle contenant cet élément est également à analyser la structure, l'élément doit être remplacé par un élément équivalent structurels (tels que PLANE82). Un élément de révolution similaires thermique qui accepte le chargement est non axisymétrique PLANE78 .

La géométrie, la position des nœuds, et le système de coordonnées de cet élément sont indiqués dans la figure suivante:

"PLANE77 géométrie".



L'élément est défini par huit nœuds et les propriétés des matériaux orthotropes. Un élément de forme triangulaire peut être formé en définissant le nombre même nœud pour les nœuds de K, L et O.

La figure suivante illustre le maillage de la structure à étudier.

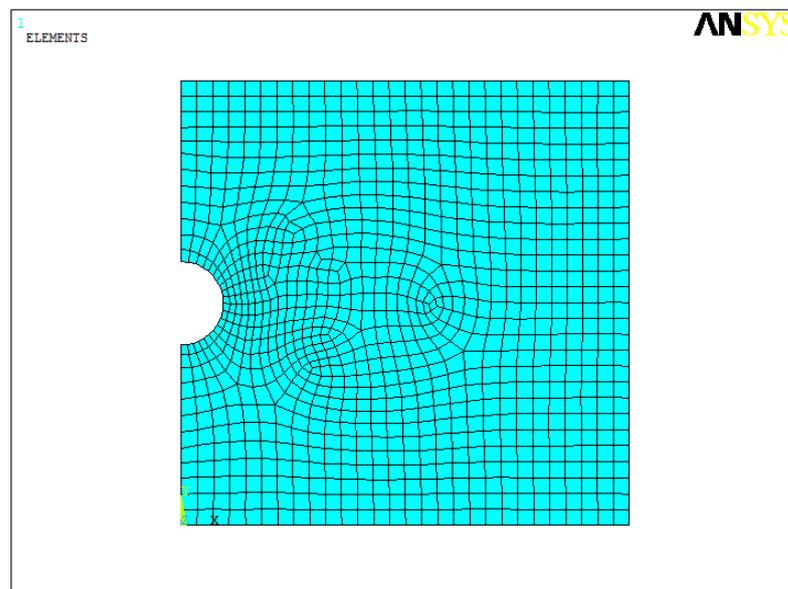


Figure 4.11 : maillage de la structure avec l'élément Plane 77.

2.2.4/Analyse des résultats

Cette section consiste à appliquer d'abord le régime permanent, d'introduire les différents paramètres de la structure à étudier et d'utiliser les conditions initiales et aux limites pour faire ressortir les résultats et les insérer par la suite dans l'étude transitoire ; mais l'intérêt principal de l'étude de cet exemple est de voir l'évolution des différents paramètres dans le temps.

Etapas d'analyse

1/analyse en régime permanent

2/analyse en régime transitoire

2.2.5/PRESENTATION DES RESULTATS :

Les résultats de la modélisation du code de calcul Le Temp / W et les résultats de code de calcul Ansys sont de plus en plus approximatives lorsque le pas de temps est petit ainsi les résultats sont plus au moins correctes.

La modélisation des flux de chaleur impliquant un changement de phase a montré que la capacité d'utiliser une variété de fonctions pour décrire les propriétés des matériaux peut être avantageuse par rapport à une solution traditionnelle élément finis.

Ansys permet la définition de la conductivité thermique et volumétrique et la capacité thermique spécifique du contenu en eau du sol, la teneur en glace, ou la teneur en air.

Ansys et le Temp / W permettent seulement la définition des propriétés en fonction de la température, ce qui entraîne l'exclusion de l'effet de la saturation partielle sur les propriétés thermiques dans les analyses.

C'est pour cette raison même qu'une étude sur l'analogie entre les écoulements et les équations thermiques est faite au chapitre précédent afin d'interpréter les résultats en fonction des paramètres d'écoulement.

2.2.5.1/analyse en régime permanent :

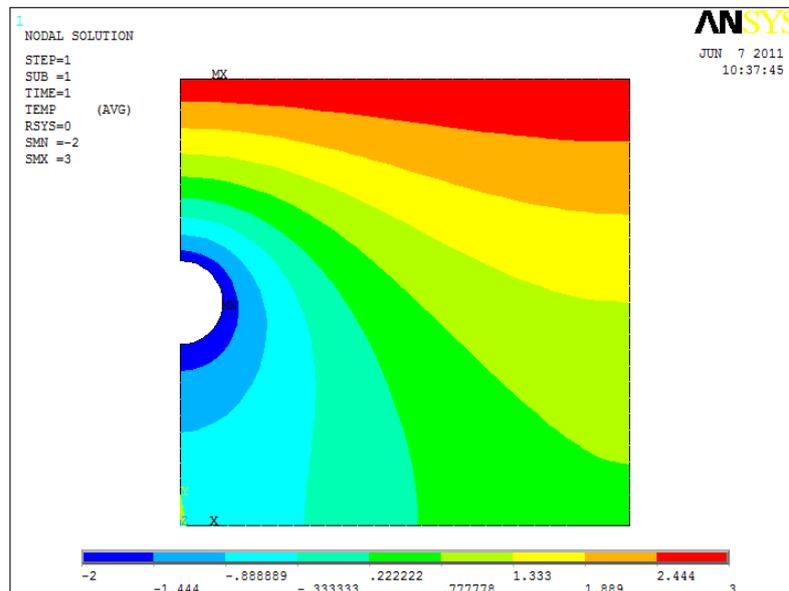


Figure 4.12 : Contours de la température en régime permanent.

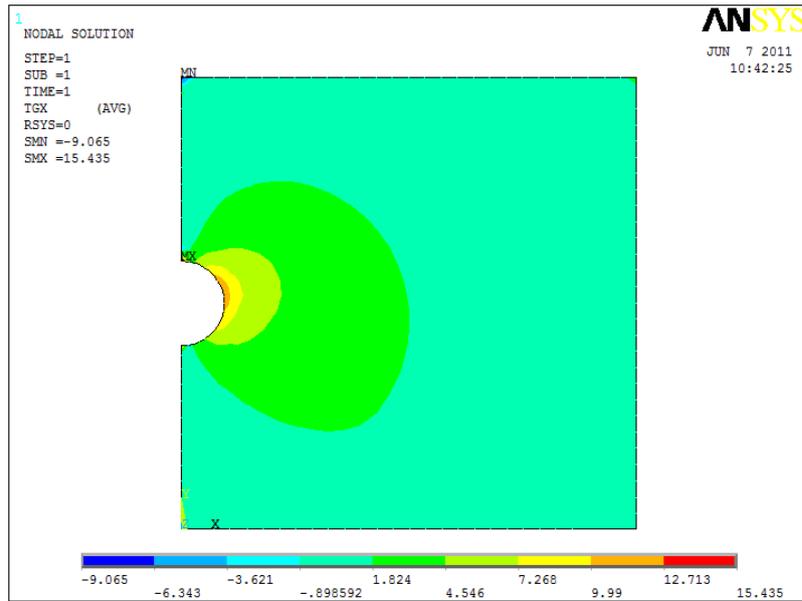


Figure4.13 : variation du gradient thermique suivant l'axe x en régime permanent.

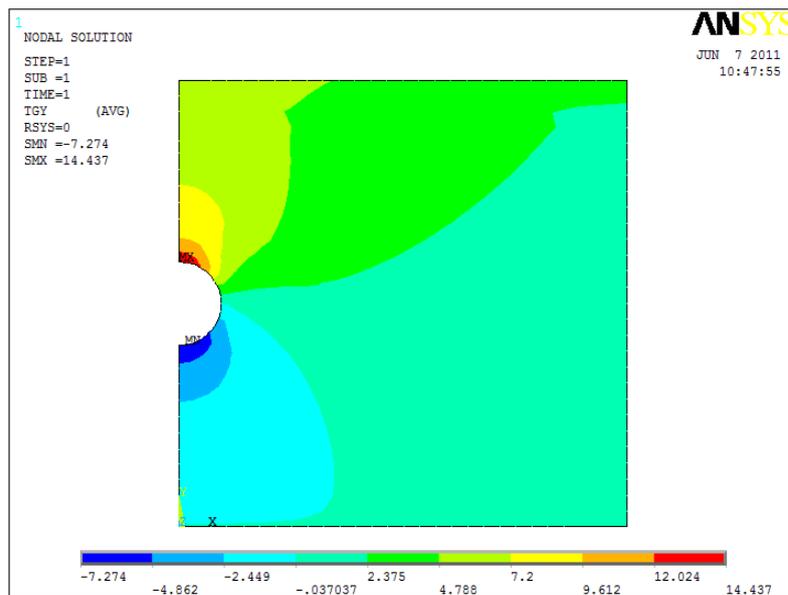


Figure4.14 : variation du gradient thermique suivant l'axe y en régime permanent.

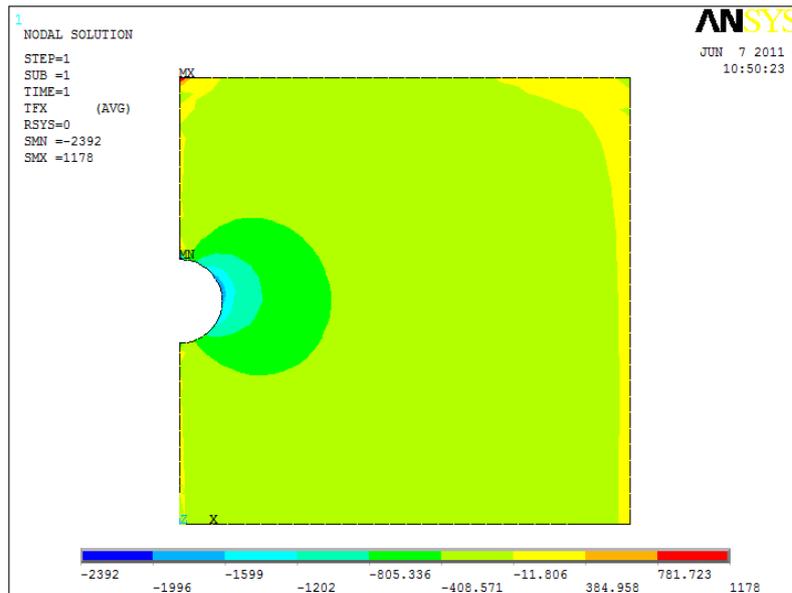


Figure 4.15 : variation du flux thermique suivant l'axe x en régime permanent.

2.2.5.2/analyse en régime transitoire :

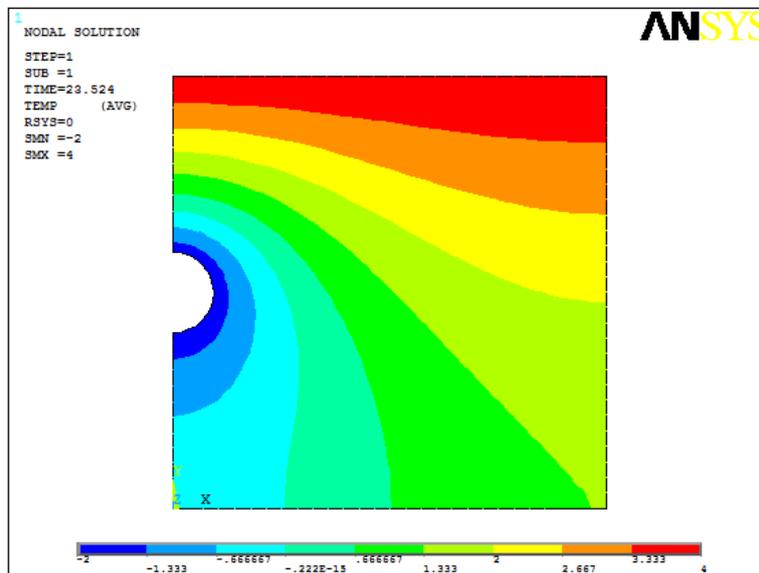


Figure 4.16 : Contours de la température pour un temps de 24 Jours

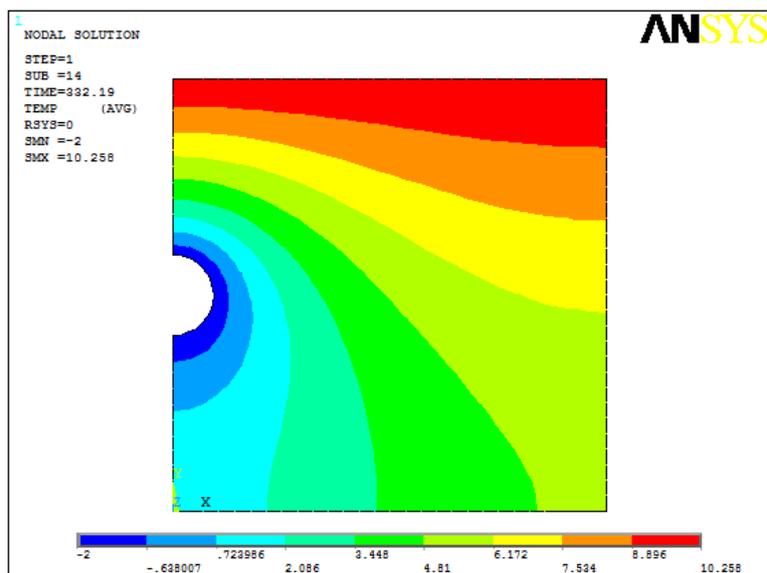


Figure 4.17 : Contours de la température pour un temps de 332 Jours

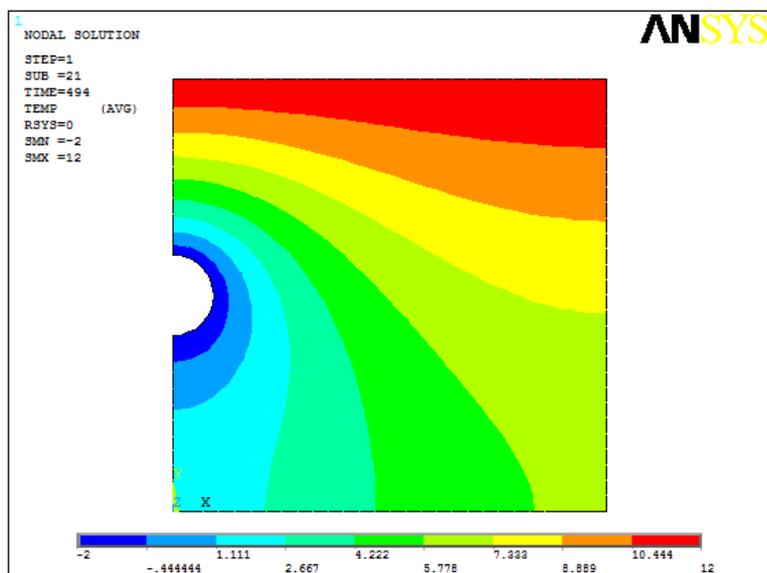


Figure 4.18:Contours de la température pour un temps de 494 Jours

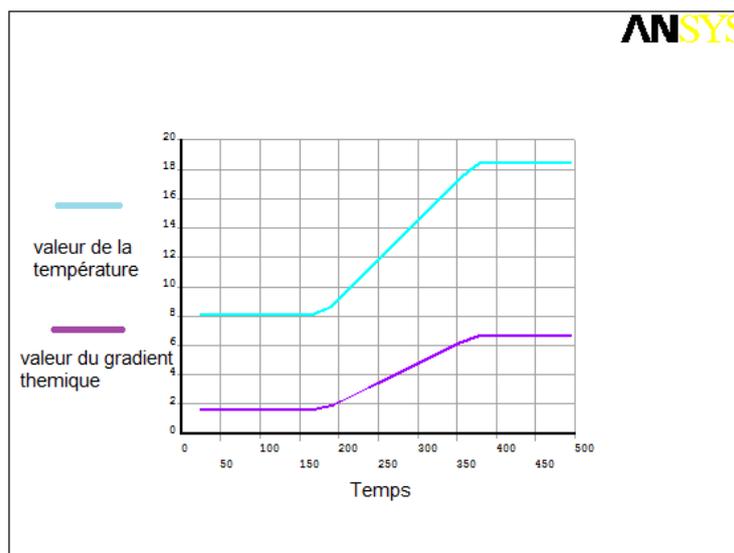


Figure 4.19 : Variation de la température et du gradient suivant Y au niveau du nœud 245 en fonction du temps

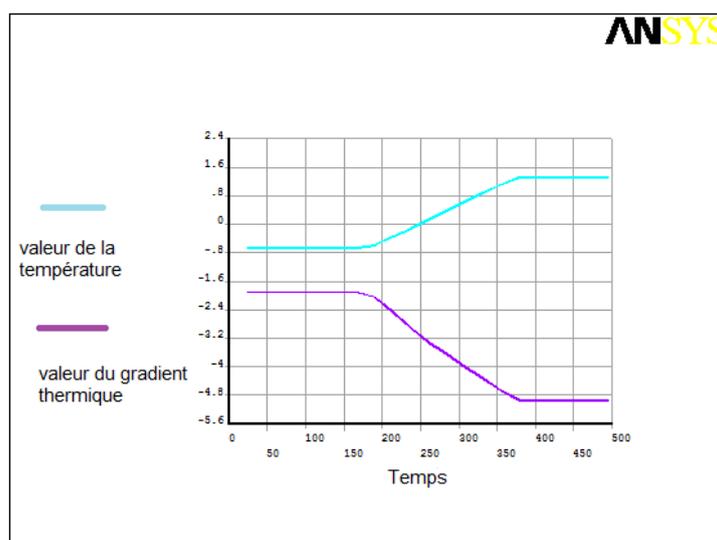


Figure 4.20 : Variation de la température et du gradient suivant Y au niveau du nœud 222 en fonction du temps

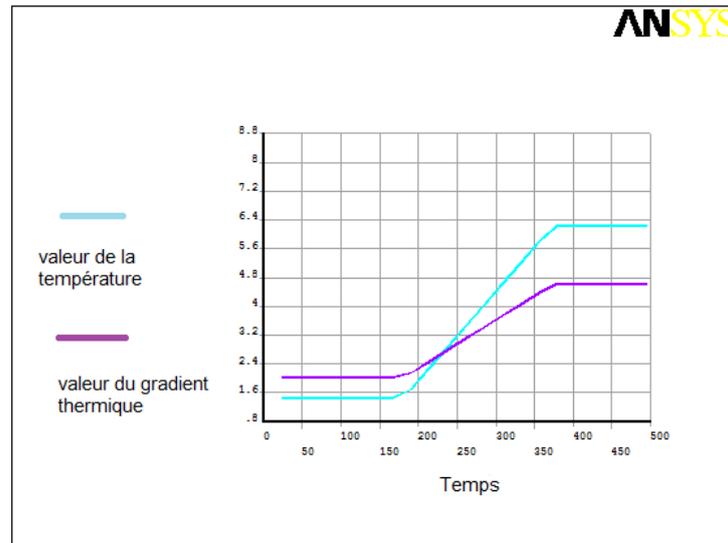


Figure 4.21 : Variation de la température et du gradient suivant Y au niveau du nœud 2508 en fonction du temps

2.2.6/INTERPRETATION DES RESULTATS

2.2.6.1/Régime permanent

a/distribution de la température

Le calcul du régime permanent permet déterminer la distribution de la température dans le terrain (sol) et au voisinage du pipeline.

Figure 4.12 illustre cette distribution qui est plus au moins logique du moment que les contours de température évoluent de -2°C au voisinage du pipeline et augmentent suivant un axe horizontale jusqu'à atteindre $+3^{\circ}\text{C}$ à l'extrémité de la partie du sol étudié.

b/variation du gradient thermique :

Le calcul en régime permanent permet également la distribution des gradients de température à long terme autour pipeline ;cette distribution est représentée sur la figure 4.13 ,qui met en évidence une forte concentration au proche voisinage du pipeline où les gradients sont plus élevés notamment dans la partie supérieur de du pipeline.

Cette concentration du gradient semble de loin un facteur moteur des ruptures en radier.

Noter que dans le cas d'un écoulement ce résultat est en cohérence avec les observations in situ sur différents chantiers (Crist chifield et MC Donald 1990, Colomb et al.1988, Laporte 1988, cité par Azouz et Ouadah en 2003).

Cette comparaison montre la sensibilité bien établit des conditions d'écoulement autour de l'ouverture aux limites du modèle.

2.2.6.2/Régime transitoire

Le calcul du régime transitoire permet l'étude de l'évolution dans le temps des caractéristiques thermiques autour du pipeline.

Il est clair si non évident que le transfert thermique autour du pipeline est en général caractérisé par une évolution du régime thermique dans le temps.

Le calcul transitoire présenté dans cette partie, considère toujours le cas d'un pipeline dans un massif ayant une configuration similaire que précédemment traité au régime permanent.

Dans cette partie d'étude, le code de calcul Ansys utilise un commande appelée « Array Parameters » où on fait rentrer les données (Température =f(Temps)), ensuite on lance la résolution du système avec un pas de temps de 24 jours.

a/Variation de la température :

Les figures 4.16,4.17, 4.18 ; montrent l'évolution de la distribution de température (isothermes) dans le terrain au voisinage du pipeline.

La figure 4.16 illustre l'évolution de la température à 24 jours c'est-à-dire au début de la réalisation (creusement).

La figure 4.17 montre la variation de la température à 332 Jours ,qui est une évolution progressive tendant vers la stabilité de la structure.

La figure 4.18 illustre cette évolution pour une stabilisation définitive ou bien lorsque le régime permanent est atteint.

Le temps de stabilisation est de 494 Jours.

b/Variation du gradient thermique :

L'étude de la variation du gradient thermique est faite sur trois points différents :

La figure 4.19 illustre la variation de la température et du gradient suivant l'axe y au niveau du nœud 245, où on remarque une relation de proportionnalité entre les deux paramètres

ce qui est plus au moins logique du moment que le nœuds se situe à la partie supérieure de la structure là où les valeurs sont positives.

La figure 4.20 illustre la variation de la température et du gradient suivant l'axe y au niveau du nœud 222, où on remarque que les deux graphes sont inversement proportionnels entre les deux paramètres du moment que parce que le nœuds se situe à la partie inférieurs de la structure alors que celle du sol sont positives.

La figure 4.21 illustre la variation de la température et du gradient suivant l'axe y au niveau du nœud 2508, où on remarque aussi une relation de proportionnalité entre les deux paramètres ce qui est plus au moins logique du moment que le nœuds se situe au milieu de la partie du sol où les valeurs sont positives et négative au même temps.

Deuxième Application :

Un autre exemple est présenté dans ce travail de recherches sur les équations thermiques et les équations de l'écoulement :

2.3/Description de l'étude :

Une barre de cuivre de 30 kg de masse à une température de 70°C et une barre de fer de 20 kg de masse de fer à une température de 80°C sont immergées dans un bac de volume 300L parfaitement isolé contenant de l'eau à 20°C .

*Après une heure (3600 secondes), quelles sont les températures maximales et minimales des blocs de cuivre et de fer?

La modélisation de cette structure avec le code de calcul Ansys est un modèle de transfert thermique 2D tout en supposant l'épaisseur par mètre linéaire.

Les sections sont données comme suit :

Le réservoir d'eau de section est de $0,60 \times 0,50 \text{ m}$

Le bloc de cuivre de section est de $0,045 \text{ m} \times 0,075$

Le bloc de fer de section est de $0,044 \text{ m} \times 0,058$

dans cet exemple la circulation de l'eau est ignorée.

2.3.1/Modélisation Et Maillage :

La structure est modélisée en deux (02) dimensions ; avec des rectangles et en attribuant à chaque surface son matériau (attributs).

La figure suivante montre la modélisation de la structure à étudier dans cet exemple :

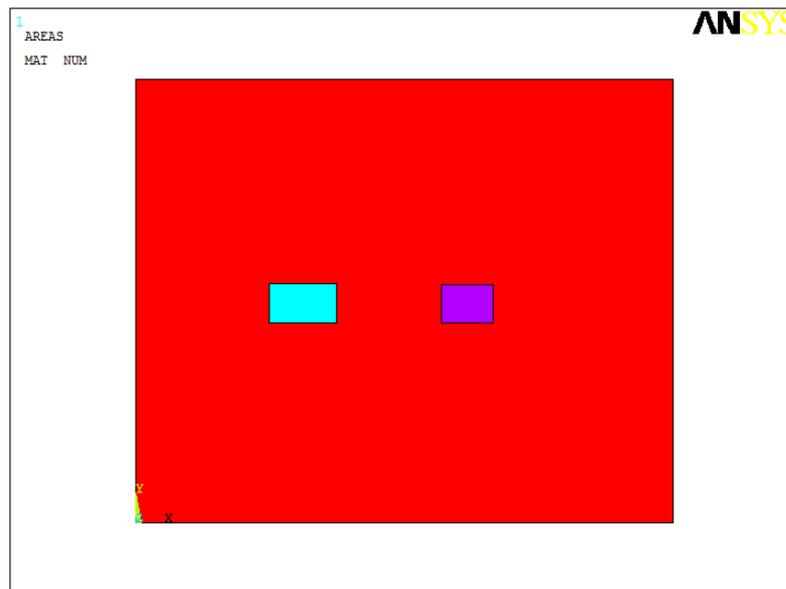


Figure4.22 : Modélisation de la structure

2.3.2/Le maillage :

Les petites zones (le cuivre en bleu et le fer en mauve) sont maillées avec tous les éléments quadrilatère.

on utilise une taille de l'élément global de 0,02 m, tout en changeant les matériaux (attributs) avant chaque zone de maillage.

Les environs (l'eau en rouge) avec un mélange d'éléments triangulaires quadrilatère et après avoir défini la taille de l'élément global à 0,08 m.

L'élément choisi pour le maillage est le PLANE 77 déjà choisi dans l'exemple précédent et décrit.

La figure suivante montre la modélisation de la structure à étudier dans cet exemple :

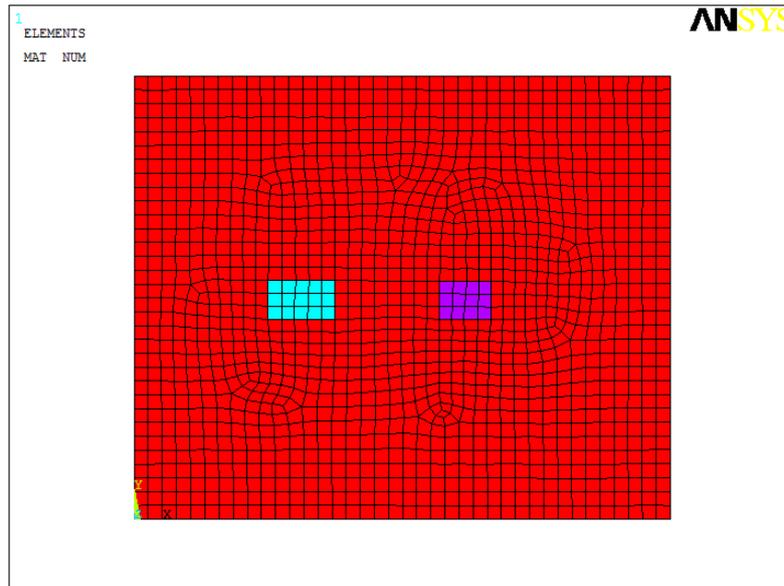


Figure4.23 : Maillage de la structure.

2.3.3/Procédure :

1. On Effectue une analyse de l'état d'équilibre pour initialiser la température de chaque matériau.
 - a. On Sélectionne tous les nœuds dans l'eau, et on règle la température à 20 ° C
 - b. On Sélectionne tous les nœuds dans le cuivre, et on règle la température à 70 ° C
 - c. On Sélectionnez tous les nœuds dans le fer, et on règle la température à 80 ° C

2. En ce qui concerne l'analyse transitoire le temps est effectué sur 3600 secondes.

On supprime toutes les spécifications de température pour amorcer le passage.

3. On règle la sortie des contrôles afin d'inclure tous les sous-étapes sur le fichier de résultats.

4. On estime la taille minimum du pas de temps:

Cuivre: DENS = 8889	Kxx = 383	C = 390	Avg.DENS = 5907
Fer : DENS = 7837	Kxx = 70	C = 448	Avg.DENS = 151
Eau: DENS = 996	Kxx = 0,61	C = 4185	vg.DENS = 1676

2.3.4/Interprétation des résultats :

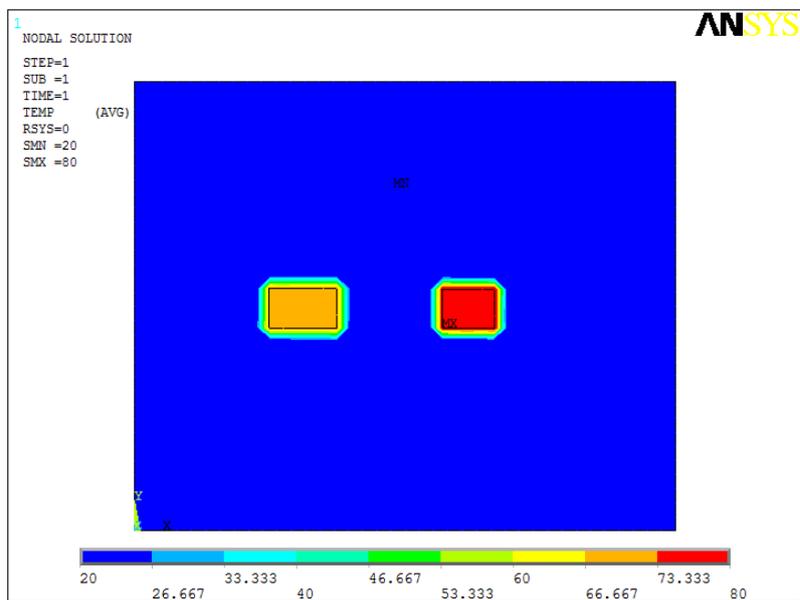


Figure 4.24 : distribution de la température en régime permanent.

Troisième application :

ETUDE DES RESEAUX D'ÉCOULEMENT DANS LE CAS UNIDIMENSIONNEL

Dans cet exemple on va étudier un réseau d'écoulement dans le cas unidimensionnel tout en calculant le débit de sortie dans le cas d'un écoulement horizontal et vertical pour un sol homogène monocouche et multicouches.

On procédera au calcul manuel avec les formules établis au calcul du débit, et on les compare avec les résultats retrouvés dans la solution du logiciel.

2.4.1 /Etude du débit pour un sol à une seule couche homogène isotrope :

Soit un sol homogène sous une nappe phréatique de 10m de hauteur et de 30m de largeur de perméabilité $k=0,002\text{m/s}$.

A/Modélisation de l'écoulement horizontal:

La modélisation du sol avec le code de calcul Ansys se fait en introduisant les paramètres en mode thermique, c'est-à-dire en prenant en considérations les équations de la conduction de la chaleur et ainsi on a :

La perméabilité K est équivalente à la conductivité thermique

La charge hydraulique H est équivalente à la température

Le débit de fuite Q est équivalent au flux thermique

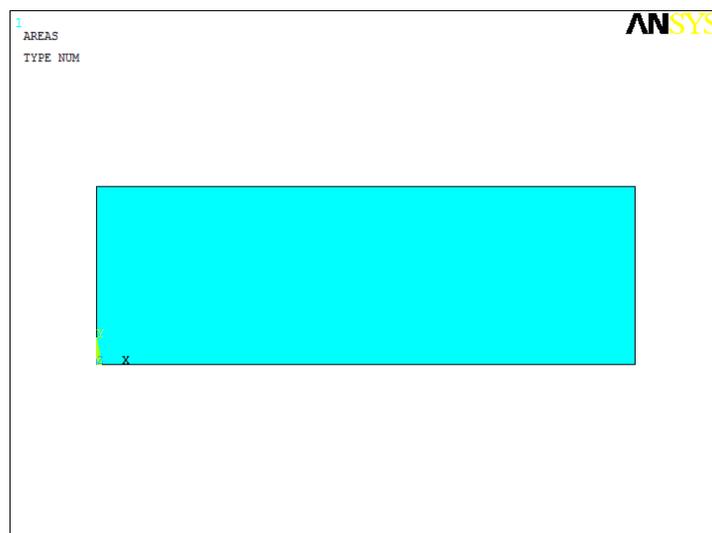


Figure 4.25 : modélisation d'un sol homogène pour une seule couche.

Le Maillage

L'élément choisi pour le maillage est le PLANE 77.

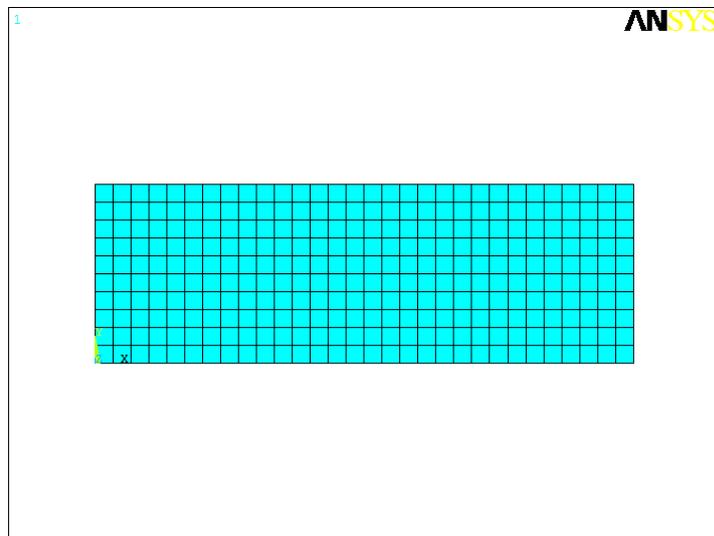


Figure 4.26 :maillage de la structure avec l'élément Plane 77.

Analyse et interprétation des résultats :



Figure 4.27 : variation du flux thermique suivant l'axe x en régime permanent.

Calcul manuel du débit de fuite : on a d'après la formule du débit :

$$Q = v.s$$

$$v = k.i$$

$$\text{et } s = h.l$$

alors :

$$Q = k.i.h.l$$

A.N :

$$Q = 0.002 \times 0.33 \times 10.1$$

$$Q = 0.0066 = 6.6 \times 10^{-3}$$

En comparant les deux solutions analytique et celle du logiciel, nous retrouvons les mêmes résultats ce qui veut dire que l'application de ce model en écoulement horizontal est valide.

B/Modélisation de l'écoulement vertical:

La modélisation de l'écoulement vertical pour un sol homogène monocouche se fait de la même manière que l'écoulement horizontal sauf que le chargement se fait verticalement, et on observe la variation du flux thermique qui est l'équivalent du débit en écoulement.

Les paramètres introduits sont les mêmes ainsi que la formule de calcul de débit.

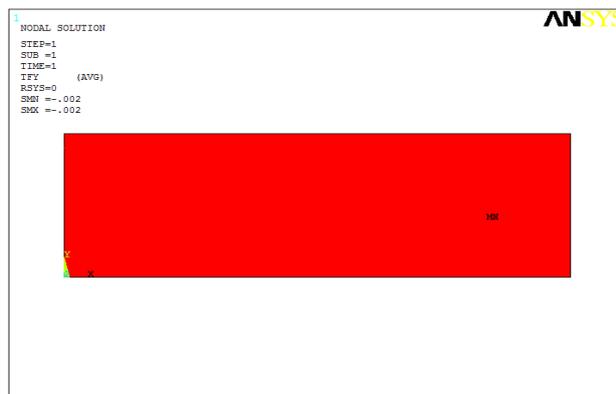


Figure 4.28 : variation du flux thermique suivant l'axe y en régime permanent.

Calcul manuel du débit de fuite : on a d'après la formule du débit :

$$Q = v.s$$

$$v = k.i$$

$$\text{et } s = h.l$$

alors :

$$Q = k.i.h.l$$

A.N :
$$Q = 0.002 \times \frac{10-0}{10} \times 1 \times 1$$

$$Q = 0.002$$

2.4.2/Modélisation de l'écoulement vertical multicouche:

Le cas général sera souvent celui du multicouche ; On distingue les écoulements horizontaux des écoulements verticaux.

A/Ecoulement vertical :

On a un écoulement vertical à travers un multicouche. On détermine le coefficient de perméabilité vertical équivalent k_v pour une couche de sol égale à la somme de toutes les couches (Figure 4.29).

On écrit la continuité de l'écoulement. Le débit est constant à travers chaque interface, donc les vitesses sont égales dans chacune des couches. D'autre part la perte de charge totale est égale à la somme des pertes de charge dans chaque couche.

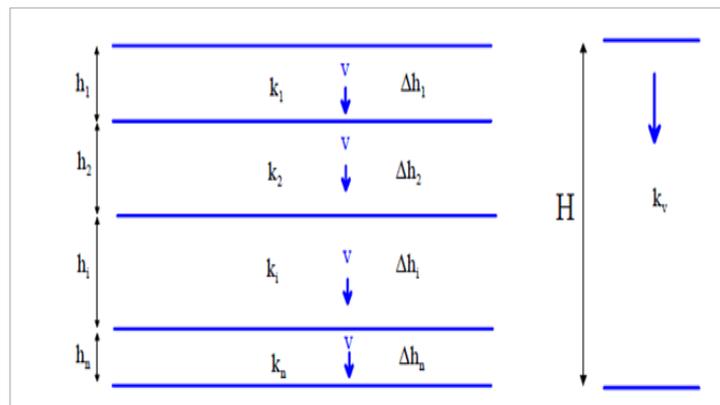


Figure 4.29 : écoulement vertical à travers un multicouche horizontal.

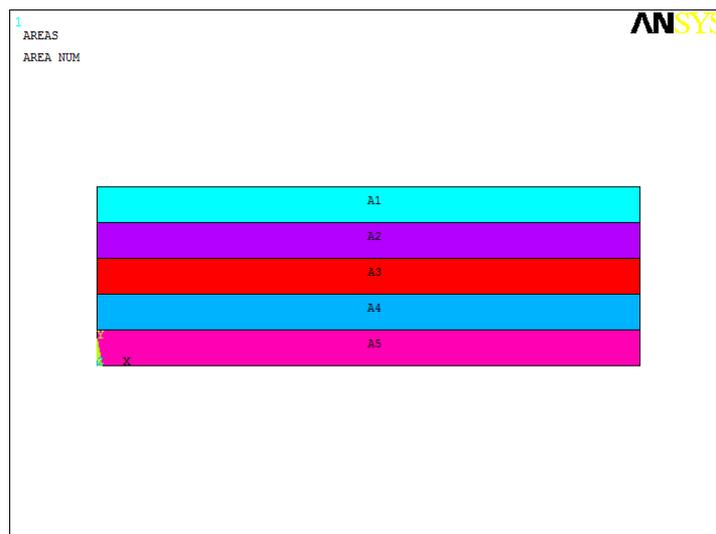


Figure 4.30 : modélisation d'un multicouche horizontal.

On peut donc écrire, en appliquant la loi de Darcy :

$$v = k_1 \frac{\Delta h_1}{h_1} = k_i \frac{\Delta h_i}{h_i}$$

$$\Delta h = v \sum \frac{h_i}{k_i} = v \frac{H}{K_v}$$

$$K_v = \frac{H}{\sum \frac{h_i}{k_i}}$$

L'écoulement vertical à travers le multicouche est équivalent à un écoulement vertical dans un massif homogène de coefficient équivalent k_v .

AN :

$$K_v = \frac{H}{\sum \frac{h_i}{k_i}}$$

$$\frac{h_i}{k_i} = \frac{1}{0,002} + \frac{1}{0,0002} + \frac{1}{0,00002} + \frac{1}{0,000002} + \frac{1}{0,0000002}$$

$$\frac{h_i}{k_i} = 555.550$$

$$K_v = \frac{10}{555.550} = 1,8 \times 10^{-7}$$

$$Q = k_i \cdot h \cdot l = 1,8 \times 10^{-7} \times \frac{10-0}{10} \times 10 \times 1$$

$$Q = 1,8 \times 10^{-6}$$

B/écoulement horizontal:

On a un écoulement horizontal à travers un multicouche. On détermine le coefficient de perméabilité horizontal équivalent k_h pour une couche de sol égale à la somme de toutes les couches (figure 31).

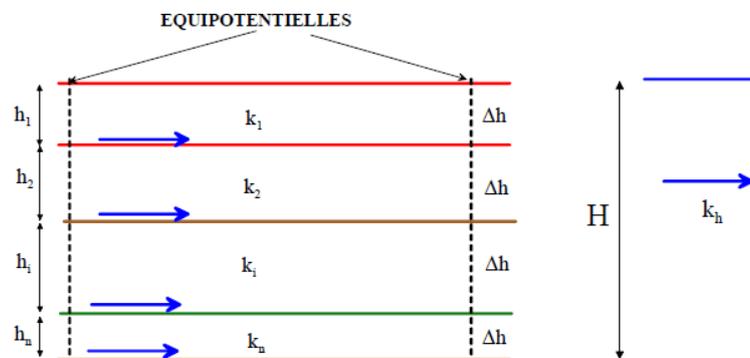


Figure 4.31 : écoulement horizontal à travers un multicouche horizontal.

Les lignes de courant sont horizontales. Entre deux équipotentiels la perte de charge est constante donc le gradient hydraulique est le même pour toutes les couches. On écrit que le débit total est la somme des débits dans chaque couche et on applique la loi de Darcy.

$$Q = \sum q_i = \sum v_i \cdot h_i \cdot l_i = \sum k_i \cdot i \cdot h_i \cdot l = K_h \cdot i \cdot H \cdot l$$

$$K_h = \frac{\sum k_i \cdot h_i}{H}$$

L'écoulement horizontal à travers le multicouche est équivalent à un écoulement horizontal dans un massif homogène de coefficient équivalent k_h .

On a toujours k_h supérieur à k_v .

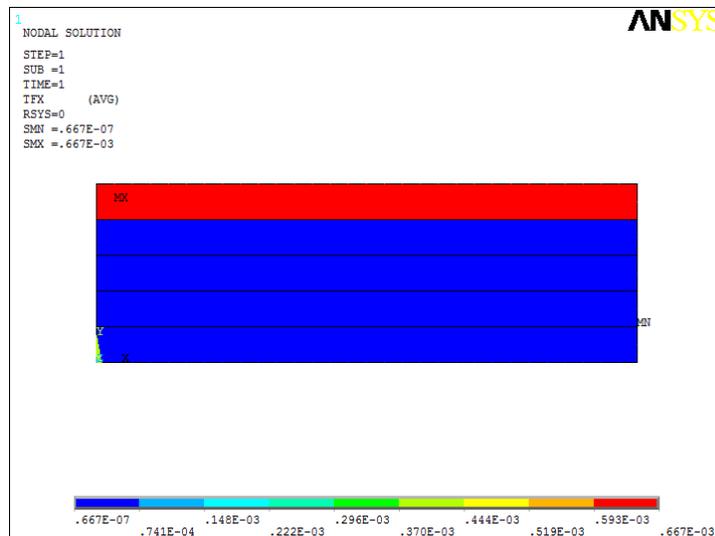


Figure 4.32 : variation du flux thermique suivant l'axe x en régime permanent.

$$Q = \sum q_i = \sum v_i \cdot h_i \cdot l_i = \sum k_i \cdot i \cdot h_i \cdot l = K_h \cdot i \cdot H \cdot l$$

$$K_h = \frac{\sum k_i \cdot h_i}{H} = 0,00022242$$

$$Q = 0,667 \times 10^{-7}$$

En comparant les deux solutions analytique et celle du logiciel, nous retrouvons les mêmes résultats ce qui veut dire que l'application de ce modèle en écoulement horizontal et vertical en multicouche ce qui valide notre théorie en analogie entre les équations thermiques et hydrauliques.

Quatrième application :

Modélisation numérique d'un écoulement non stationnaire à surface libre des Barrages en remblai

L'une des principales causes de ruptures de barrages en remblai est l'effet déstabilisateur des forces de percolation de l'infiltration d'eau lors des crues. Un modèle mathématique décrivant le processus de surface libre d'un écoulement en régime non stationnaire de l'eau à travers un barrage en remblai et sa fondation a été proposé et vérifié par le laboratoire des expériences de l'université de technologie de Brno, CZ par M^{rs} Jiří Kratochvíl et Tibor Bachorec.

L'existence de l'analogie entre l'infiltration et la diffusion de chaleur a permis d'analyser le problème hydraulique avec ANSYS / THERMIQUE.

L'application d'ANSYS / thermique avec une certaine recommandation et les exemples de résultats numériques sont présentés et décrits en détail.

2.5/Introduction

Les changements brusques du niveau d'eau dans la rivière au cours d'une inondation produit un écoulement non stationnaire s'infiltrant dans le corps du barrage en remblai et de ses fondations.

L'inondation influe localement et globalement sur la stabilité du barrage et produit l'existence du risque potentiel de sa destruction totale due à l'érosion interne et la perte de la résistance au cisaillement du matériau de sol. Pour minimiser le risque de la destruction possible de la digue, il est nécessaire d'analyser en détail la vitesse, pression, niveau piézométrique et ses champs de gradient dans le corps du barrage au cours de la période de crue.

2.5.1/Présentation de l'exemple

Le présent exemple simule l'écoulement à travers un barrage en remblai en régime non stationnaire lors de la production d'une crue.

Pour la comparaison des résultats, un modèle physique a été conçu au niveau du laboratoire hydraulique du ministère des structures en eau , Faculté de Génie civil, Université de Technologie de Brno.

Les dimensions prises pour la conception du modèle sont comme suit :

La hauteur $h=0.8\text{m}$; la largeur $l=1,8$ à partir du repère choisi ; la pente en amont et en aval est de $1/2$; la valeur du coefficient de perméabilité $k=2.10^{-4}\text{ ms}^{-1}$ et le coefficient d'emmagasinement $S=0,35\text{m}^{-1}$.

2.5.2/Modélisation :

La figure 4.33 illustre la modélisation du barrage par le code de calcul ANSYS.

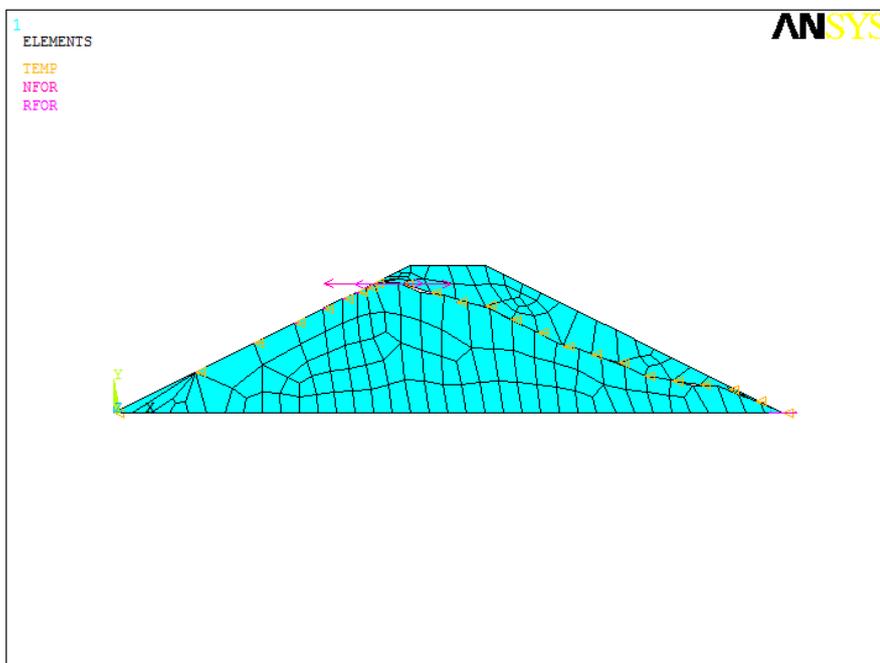


Figure 4.33 : Modélisation du barrage en remblai.

Avant de faire le maillage du barrage, on a tracé la ligne de saturation de l'écoulement avec l'utilisation de l'équation de KOZENY (déjà évoquée au chapitre 2) qui est pratiquement confondue avec la ligne le long de laquelle la pression hydrostatique de l'eau au sein du massif est nulle et qui délimite ainsi la partie sèche ou humide de la partie saturée de la digue du barrage.

On applique ainsi une charge hydraulique (qui est la température dans ANSYS) sur le talus amont ,et une condition aux limites de flux nul à la base de la digue.

L'élément choisi pour le maillage du barrage est le PLANE 55 utilisé généralement pour le calcul thermique qui présenté dans la figure 4.34.

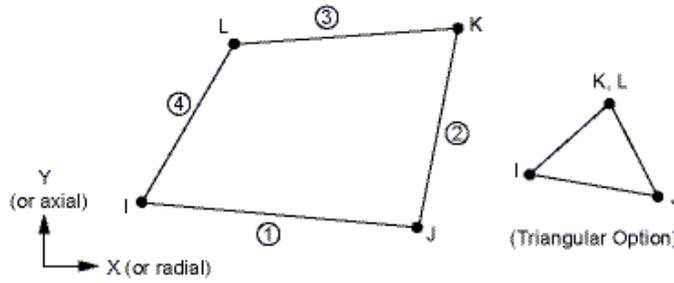


Figure 4.34 : Représentation de l'élément PLANE 55.

2.5.3/Présentation des résultats :

On a procédé en premier lieu à une étude en régime permanent ; ainsi on a comparé les résultats numériques par celle obtenus par le modèle physique.(Figure 4.35 et 4.36).

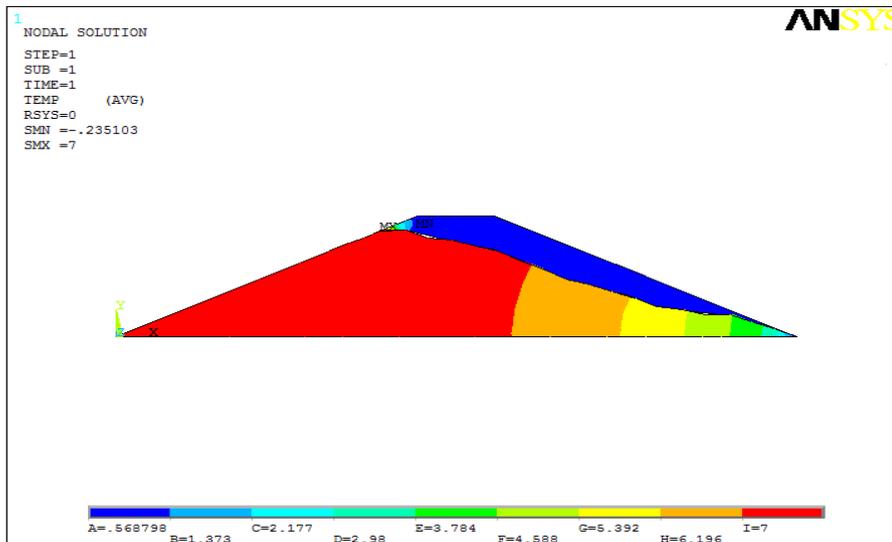


Figure 4.35 : Représentation des résultats du modèle numérique en régime permanent.

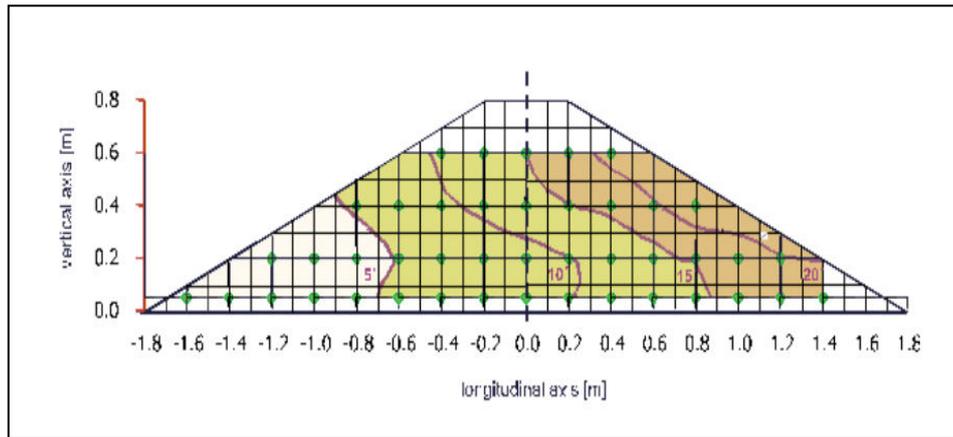


Figure 4.36 : Représentation des résultats du modèle physique en régime permanent.

(M^{rs} Jiří Kratochvíl et Tibor Bachorec)

La différence qui existe entre les valeurs mesurées et celles calculées est dû essentiellement à l'indépendance qui existe entre la conductivité et le degré de saturation.

La perméabilité du matériau du barrage pour le cas anisotrope est supérieur à celle du cas isotrope ce qui explique la différence des résultats.

Dans le calcul en régime transitoire ,il faudrait que l'équation de la ligne de saturation soit calculée et étudiée pour chaque pas de temps et tout au long de la période de crue.

Dans le calcul numérique le remplissage du canal est modélisé par des fonctions linéaires en introduisant les conditions aux limites suivantes : pour $t \leq 306S$: $H(t) = 0.1307t$ et pour $t \in (306S, 690s)$: $H(t) = 0.114t + 40$.

Les résultats trouvés par les chercheurs (M^{rs} Jiří Kratochvíl et Tibor Bachorec)de cette expérience en régime transitoire sont illustrés par les figures suivantes :

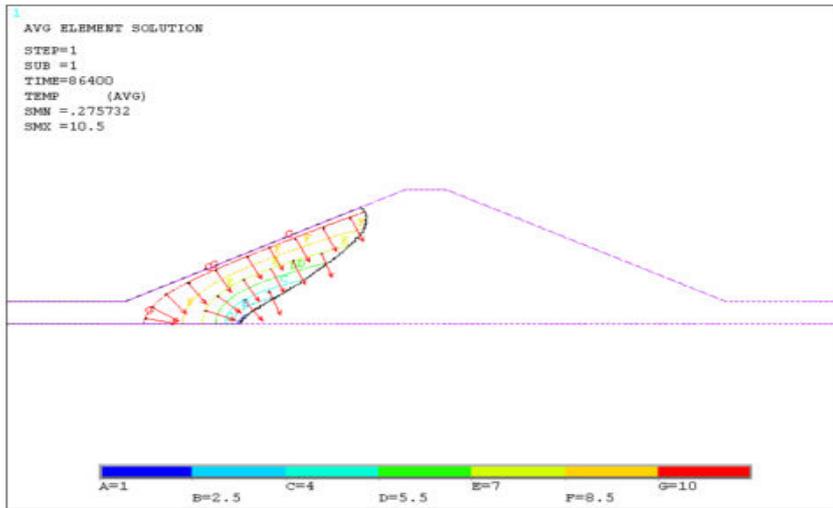


Figure 4.37 : Représentation des lignes équipotentielle à 24 heures.(M^{rs} Jiří Kratochvíl et Tibor Bachorec)

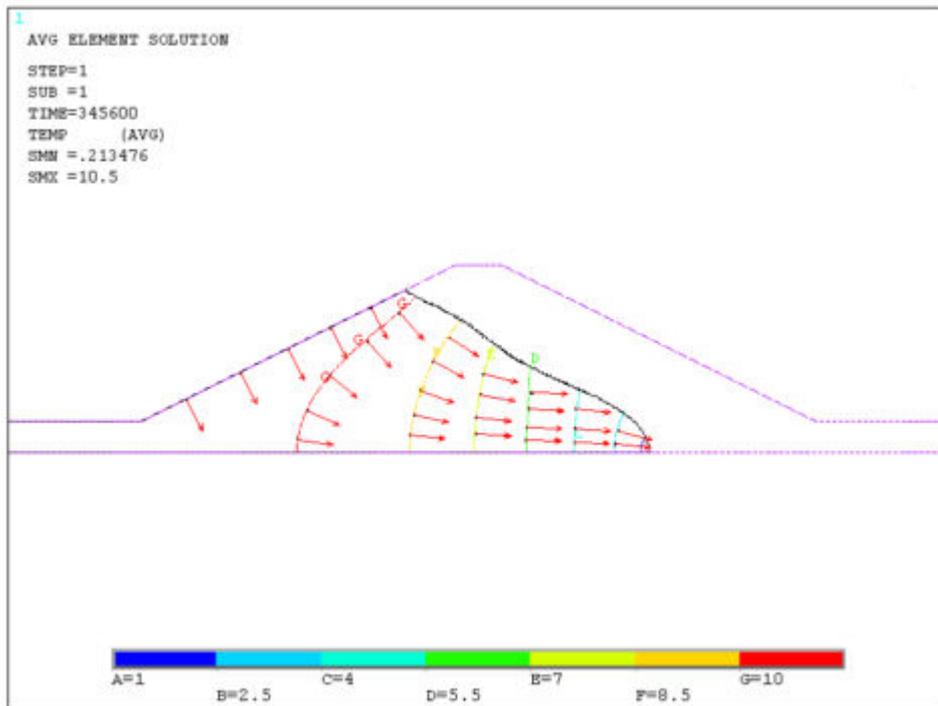


Figure 4.38 : Représentation des lignes équipotentielle à 96 heures.(M^{rs} Jiří Kratochvíl et Tibor Bachorec)

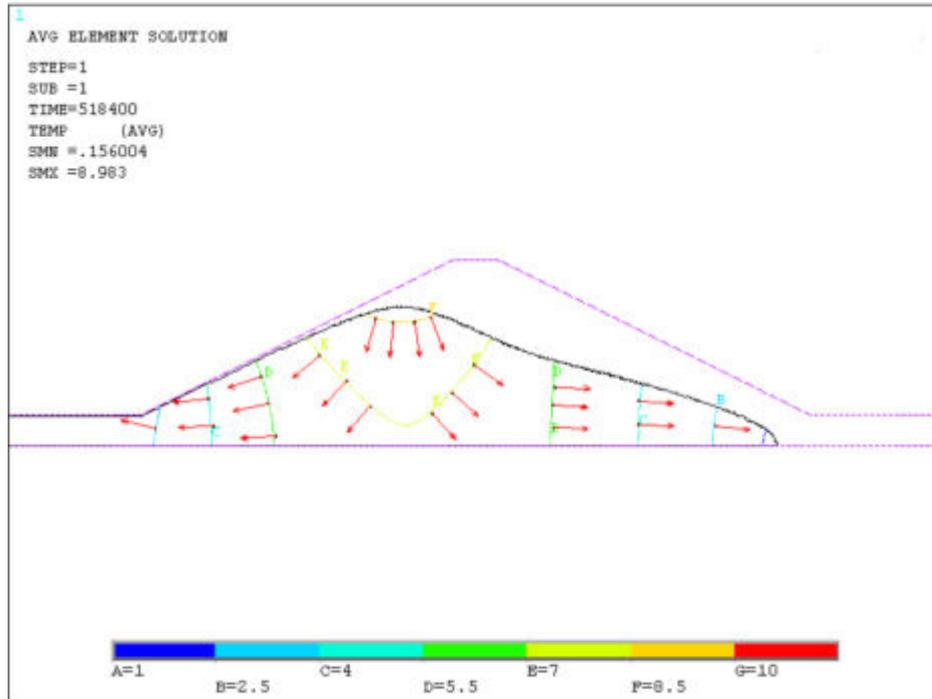


Figure 4.39 : Représentation des lignes équipotentielle à 144 heures.(M^{TS} Jiří Kratochvíl et Tibor Bachorec)

2.5.4/Conclusion :

Les résultats numériques sont avérés satisfaisants par le Code de calcul ANSYS/THERMAL .Ainsi le calcul transitoire par ce code est un instrument très efficace pour la détermination des écoulements dans les barrages en remblai durant les périodes des crues.

CONCLUSION GENERALE

Ce présent travail a pour objet d'étudier et de traiter la théorie des écoulements dans les milieux poreux pour analyser les différentes équations différentielles régissant les régimes permanent et transitoire.

Une étude bibliographique a été effectuée pour mettre en évidence les différentes applications traitées dans le domaine de la géotechnique. Cette dernière démontre que les études hydrauliques analysées par analogie thermiques étaient probantes.

La deuxième étape montre que l'existence de l'analogie entre les équations d'écoulement et les équations de la diffusion de la chaleur, permet d'analyser avec efficacité les problèmes d'écoulement.

Les applications d'écoulement traitées dans ce manuel par analogie thermique montrent que les résultats obtenus sont en parfait accord avec la théorie.

ANSYS demeure un bon outil de simulation numérique pour déterminer les débits de fuite, le gradient hydraulique et, prédire les problèmes de risque de stabilité des talus lors de la conception des barrages en terre et murs de soutènement en période de grandes crues.

REFERENCES & BIBLIOGRAPHIE

1. **J.A.M. Teunisse** « Numerical modelling of non linearities in grounds water -1986.
2. **B.A.Schrefter ,L,Simon,C.E.Majorana** « A general model for the mecanical saturated – unsaturated paroies materials -1989.
3. **Z.Schen,G.hofstetter and H.A.Mang** « Boundasy Element Analysis of the lowered ground water level for tunnels driven under compressed Air -1991.
4. **Kamalak.Sing ,Shambhu P.Dasgupta**« Finite element analysis of Axisymetric flow into partially penetrating wells -1993.
5. **Shlomo P.Newman** « Saturated-Unsaturated Seepage by finite Element -1973.
6. **Bekkouche.A,Aissa Mamoune.S** « Les coefficients de pression inertielles et leurs application en Mécanique des sols -2006-
7. **M .Ghefir** –mémoire magister –Etude de comportement d’un barrage a moyen central en tenant compte de l’effet de contrat-Barrage EL IZDIHAR -2008-
8. **A.TAHAR BERRABEH** –PFE « Construction a L’étude du Transfert thermique dans un milieux poreux -2004-
9. **Rêne Lefebvre** « Ecoulement multi phase en milieux poreux -2006-
- 10.**Maxime Nicolas**-Groupe Ecoulement de Particules –IVSTI « Ecoulement dans les milieux poreux -2003-
- 11.**C.Plumelle**-Cnam-Paris-Géotechnique –chapitre 13.
- 12.**René lefebvre**-Ecoulement multiphase en milieux poreux ,chapitre cinq :transport de chaleur dans les milieux poreux.
- 13.**V. Merrien-Soukatchoff** 2011GEOTECHNIQUE –école des mine Nancy.
- 14.**Jason S. Pentland**, Graduate Student-Use of a General Partial Differential Equation Solver for Solutionof Mass and Heat Transfer Problems in Geotechnical Engineering.
- 15.**Khaled MEFTAH**-Cours Mecanique des sol-2008.

16. **Jean-Louis** –Simulation -Systèmes de production Réseaux de petri Siman – Arena
17. **Belharizi.M**,2009 « cour poste graduation »département Génie Civil université Tlemcen.
18. **Quintard.M,Todorovic**.1992 « Heat and Mass transfer in porous média ».
19. **Saeed Moaveni**,1999 “finite Element Analysis Theory and Application with Ansys”.
- 20.**René lefevre**-Ecoulement dans les milieux poreux ,chapitre deux :Automne 2006.
21. **Berga Abdelmadjid** :Element de mécanique des sols 2004.
22. **Rocsience** :Groundwater ;2008.
23. **Margaret and gabriel Chapra,Helen and checter Canale** “Numerical Methods for Engineers”
24. **Jiri Kratochvil et Tibor Bachorec** : “Numerical modeling of nonstationary free surface flow in embankment dams” ;2004.
25. **H.Jausseume** : « Digue en terre »
26. **P.Humbert** : « Application à la méthode des éléments finis aux écoulements en milieu poreux »1984.
27. **Danielle Lautrin** : « Vieillissement et réhabilitation des petits barrages en terre » :Edition Quae.
28. **B.Remini,A.Moharab,D.Abderrahim** : « Le Modèle Hélé-Shaw Pour La Détermination Des Ecoulements Dans des Petits Barrages En Terre » ;2001.