République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

———————————

**UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN**

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

**POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTORAT EN MATHEMATIQUES**

**Option : Analyse Mathématique**

Sous le thème

**Existence et Multiplicité des Solutions pour certains Problèmes Elliptiques non-linéaires**.

—————————

**Existence and multiplicity of solutions For some nonlinear elliptic problems.**

Présenté par : M. MESSIRDI BACHIR

Date de soutenance : Le 15/03/2012

Devant le jury composé de

Président : M.Mohammed Bouchekif Pr. Univ. Tlemcen

Examinateurs : M.Mohammed Benalili Pr. Univ. Tlemcen

M.Mouffak Benchohra Pr. Univ. Sidi-Bel-Abbès

M.Abdelkader Lakmeche Pr. Univ. Sidi-Bel-Abbès

M.Abdelghani Ouahab M.C.A. Univ. Sidi-Bel-Abbès

M.Azzedine Lansari M.C.A. Univ. Tlemcen

Directeur de Thèse : M. DERHAB MOHAMMED M.C.A. Univ. Tlemcen

Année Universitaire

2011-2012

# Table des Matières

# Partie I

# Introduction

L'étude des équations différentielles ordinaires se trouve à l'interface de nombreux problèmes scientifiques. En effet, la plupart des phénomènes de la physique ou des sciences de l'ingénieur sont non linéaires et une modélisation par des équations linéaires risque, dans certains cas, d'effacer des événements que les équations linéaires ne peuvent pas prendre en compte. Inversement, on peut dire que c'est l'existence de ces phénomènes nouveaux – apparition de chocs ou de singularités, comportement asymptotique profondément différent de celui des problèmes linéaires – qui rend la théorie difficile et qui conduit à faire appel à un arsenal mathématique très vaste. L'interaction avec le reste de la mathématique se fait aussi en sens inverse, car un certain nombre de problèmes abstraits se traitent à l'aide des équations différentielles ordinaires ou d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Les liens avec l'analyse numérique sont continuels, et s'effectuent dans les deux.

L'un des problèmes consiste à montrer l'existence et la multiplicité des solutions par rapport aux données initiales d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO).

D'une manière générale, nous ne disposons d'aucune méthode d'investigation assez puissante pour répondre à ces questions. Les méthodes existantes sont de plusieurs sortes, nous citerons à titre d'exemples les méthodes variationnelles [5], la méthode du degré topologique [47], la méthode du point fixe [25], et la méthode des sur et sous-solutions [24]. D'autre part on trouve des théorèmes importants qui donnes l'existence et la multiplicité des solutions, par exemple le théorème de KRASNOSEL'SKII [39] et le théorème de AVERY et PETERSON[4].

Cette thèse est consacrée à l'étude de certaines types de problèmes elliptiques non-linéaires contenant l'opérateur $p$-bilaplacien $(\varphi_p(y) = y \cdot |y|^{p-2}, p > 1)$ avec des secondes membres différents et des conditions aux limites plus générales.

Ce travail est constitué de quatre chapitres:

Dans le premier chapitre, en utilisant la méthode des sous et sur solutions et les méthodes itératives pour étudier l'existence des solutions minimales et maximales du problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'' = f\left(x, u, u''\right), \ 0 < x < 1, \\ u\left(0\right) - a_1 u'\left(0\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} a_{i_1} u\left(\xi_{i_1}\right), \\ u\left(1\right) + a_2 u'\left(1\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} a_{i_2} u\left(\xi_{i_2}\right), \\ \varphi_p\left(u''\left(0\right)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'\left(0\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_3} a_{i_3} u''\left(\xi_{i_3}\right), \\ \varphi_p\left(u''\left(1\right)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'\left(1\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_4} a_{i_4} u''\left(\xi_{i_4}\right), \end{cases}$$

avec $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y, \ p > 1, \ f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $a_{ij} \geq 0$ et $\xi_{i\ j} \in ]0,1[$ pour $i = 1, 2, ..., m_j$ et $j = 1, 2, 3, 4$ . $a_1$, $a_2$, $a_3$ et $a_4$ sont des réels positifs.

Le second chapitre est consacré l'étude d'existence des solutions extrémales du problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u'''\right)\right)' = f\left(x, u, u'', u'''\right), \ 0 < x < 1, \\ u\left(0\right) - a_1 u'\left(0\right) = g_0\left(u\right), \\ u\left(1\right) + a_2 u'\left(1\right) = g_1\left(u\right), \\ u''\left(0\right) - a_3 u'''\left(0\right) = g_2\left(u''\right), \\ u''\left(1\right) + a_4 u'''\left(1\right) = g_3\left(u''\right), \end{cases}$$

avec $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $p > 1$, $f : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $g_i : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ et $a_1$, $a_2$, $a_3$ et $a_4$ sont des réels positifs.

Le chapitre trois est consacré à l'existence des solutions positives du problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'' = \lambda \ q\left(t\right) \ f\left(u\right), \ t \in \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) - a \ u'\left(0\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i \ u\left(\zeta_i\right), \\ u\left(1\right) = 0, \\ \varphi_p\left(u''\left(0\right)\right) - b \ \varphi_p\left(u''\right)'\left(0\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} \beta_i \varphi_p\left(u''\left(\eta_i\right)\right) \ , \\ u''\left(1\right) = 0, \end{cases}$$

avec $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y, \ p > 1, \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et $q \in C\left(0,1\right)$ $a_i \geq 0$ et $\xi_i \in ]0,1[$ pour $i = 1, 2, ..., m_1$, $\beta_i \geq 0$ et $\eta_i \in ]0,1[$ pour $i = 1, 2, ..., m_2$ . $a$ et $b$ sont deux réels positifs.

Le dernier chapitre est consacré à étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'' - M\left(\int_0^1 \left|u'\right|^p dx\right)\varphi_p\left(u''\right) = q\left(x\right) f\ \left(x, u, u'\right),\ \forall\ 0 < x < 1, \\ u\left(0\right) - a_1 u'\left(0\right) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i u\left(\xi_i\right) \\ \ \ u\left(1\right) = 0 \\ \varphi_p\left(u''\left(0\right)\right) - a_2\left(\varphi_p u''\right)'\left(0\right) = \sum_{i=1}^{m_2} \beta_i\left(\varphi_p u''\left(\eta_i\right)\right) \\ u''\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $q : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues, $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y,\ p > 1, a_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \alpha_i \geq 0$ et $\xi_i\ \in (0,1)$ pour tout $i = 1, 2, ..., m_1$, $\beta_i \geq 0$ et $\eta_i\ \in (0,1)$ oour tout $i = 1, 2, ..., m_2$.

# Partie II

# Préliminaires

Cette thèse est consacrée à l'étude de certains types de problèmes aux limites non-linéaire en utilisant notamment quelques méthodes connues et des théorèmes importants. Citons à titre exemple:

**- La méthode de la sous et sur solution:** qui a été introduit par PICARD, en 1890 pour les équations aux dérivées partielles [52] et en 1893 pour les équations différentielles ordinaires [53], qui a utilisé des itérations monotones pour la sur solution. C'est le point de départ d'utilisation de la sur et sous solution par des méthodes itératives.

Indépendament, quelques idées de bases de cette méthode apparait dans l'étude du problème de CAUCHY du premier ordre en 1915 par PERRON [51] et l'extension pour les systèmes par MüLLER [49] en 1926. L'idée des auteurs est d'étudier l'existence des solutions par les localliser entre la sur et la sous solution. La grande percée s'explique par SCORZA DRAGONI en 1931, dans deux papiers [57] et [58], qui a introduit la sur et la sous solution pour le problème aux limites du type:

$$u'' = f\ \left(t, u, u'\right), u\left(a\right) = A, u\left(b\right) = B$$

avec$\alpha, \beta \in C^2\left(\left[a, b\right]\right)$ telle que $\alpha \leq B$ et

$$\begin{aligned} \alpha'' &\geq f\ \left(t, u, u'\right), u\left(a\right) \leq A, u\left(b\right) \leq B \\ \beta'' &\leq f\ \left(t, u, u'\right), u\left(a\right) \geq A, u\left(b\right) \geq B \end{aligned}$$

Alors, l'existence de la solution $u$ est localisée entre la sur et la sous solution:

$$\alpha \leq u \leq \beta.$$

## - Le théoreme de Krasnoselskii's:

Le théorème classique de BROUWER-SCHAUDER qui dite aussi le théorème du point fixe est un outil important dans l'étude de l'existence des solutions pour des différents problèmes mathématiques [59]. Dans les dernières années, un autre théorème du point fixe apparut c'est celui de Krasnoselskii [38], et sa version générale est outil pour obtenir un ordre de multiplicité pour les solutions positives pour des problèmes aux limites différents, notamment dans les équations différentielles ordinaires et leurs versions discrètes. Krasnoselskii lui-même dans [40] a appliquer son résultat pour l'étude des solutions périodiques pour un système périodique d'équations différentielles ordinaires.

Parmis les versions des théorèmes de KRASNOSELSKII'S on a le suivant:

**Théorème 0.1** *Soit $C$ un cône défini dans un espace de Banach $E$. Supposons que $\Omega_1, \Omega_2$ sont deux sous ensembles ouverts de $E$ avec $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Supposons que:*

$$S : C \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right) \rightarrow C$$

*est un opérateur complètement continu tel que:*

$$\begin{array}{l} i)\ \|Su\| \leq \|u\|, u \in C \cap \partial\Omega_1 \quad et \ \ \|Su\| \geq \|u\|, u \in C \cap \partial\Omega_2 \text{ , ou bien} \\ ii)\ \|Su\| \geq \|u\|, u \in C \cap \partial\Omega_1, et \ \ \|Su\| \leq \|u\|, u \in C \cap \partial\Omega_2. \end{array}$$

*Alors, $S$ admet un point fixe dans $C \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$.*

## - Le théoreme de Avery et Peterson:

C'est un théorème qui généralise le théorème Leggett et Williams [42] qui est un cas général de celui de Krasnoselskii's, donc il est autour de la notion du point fixe pour les opérateurs completement continues et en plus il donne l'ordre de multiplicité des solutions. Pour cela soient les fonctions: $\gamma, \alpha, \theta, \psi$ définies dans le cône $P$, et des nombres positifs $a, b, c, d$ tels que les ensembles suivants sont définis de cette manière:

$$\begin{array}{lcl} P(\gamma, d) & = & \{u \in P /\ \gamma(u) < d\}, \\ \overline{P(\gamma, d)} & = & \{u \in P /\ \gamma(u) \leq d\}, \\ P(\gamma, \alpha, b, d) & = & \{u \in P /\ b \leq \alpha(u) \text{ et } \gamma(u) \leq d\}, \\ P(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d) & = & \{u \in P /\ b \leq \alpha(u)\ , \theta(u) \leq c \text{ et } \gamma(u) \leq d\}, \end{array}$$

et

$$R(\gamma, \psi, a, d) = \{u \in P /\ a \leq \psi(u) \text{ et } \gamma(u) \leq d\},$$

Alors on a le théorème suivant:

**Théorème 0.2** ***( Avery-Peterson )****Soient $P$ le cône réel dans un espace de banach $E$ et $\gamma, \alpha, \theta, \psi$ sont des fonctions positives définies dans $P$. Supposons que $\gamma, \theta$ sont convexes et $\alpha$*

*est concave. Si de plus* $\psi$ *satisfait* $\psi(\lambda u) \leq \lambda \psi(u)$ *pour* $0 \leq \lambda \leq 1$ *et pour des nombres positifs* $M$ *et* $d$ *tels que:*

$$\alpha(u) \leq \psi(u) \ \text{ et } \ \|u\| \leq M\gamma(u), \forall u \in \overline{P(\gamma, d)}$$

*Soit* $T : \overline{P(\gamma, d)} \to \overline{P(\gamma, d)}$ *un opérateur complètement continu et supposons qu'ils existent des nombres positifs* $a, b$ *et* $c$ *avec* $a < b$*, tels que:*

(i) $\{u \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d) \,/\, \alpha(u) > b\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Tu) > b$ *pour* $u \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d)$,

(ii) $\alpha(Tu) > b$ *pour* $u \in P(\gamma, \alpha, b, d)$ *avec* $\theta(Tu) > c$,

(iii) $0 \notin R(\gamma, \psi, a, d)$ *et* $\psi(Tu) < a$ *pour* $u \in R(\gamma, \psi, a, d)$ *avec* $\psi(u) = a$.

*Alors* $T$ *admet au moins trois points fixes* $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\gamma, d)}$ *tels que:*

$$\begin{aligned} &\gamma(u_i) \leq d, \text{ pour } i = 1, 2, 3, \\ &b < \alpha(u_1), \\ &a < \psi(u_2), \text{ pour } \alpha(u_2) < b, \end{aligned}$$

*et*

$$\psi(u_3) < a.$$

# Chapitre 1

# Existence des solutions minimales et maximales pour une équation différentielle d'ordre quatre avec conditions aux limites contenant des points multiples

## 1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivants:

$$
\begin{cases}
\left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'' & = f\left(x,u,u''\right),\ 0<x<1, \\
u\left(0\right)-a_1u'\left(0\right) & = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1}u\left(\xi_{i_1}\right), \\
u\left(1\right)+a_2u'\left(1\right) & = \sum_{i=1}^{m_2} a_{i_2}u\left(\xi_{i_2}\right), \\
\varphi_p\left(u''\left(0\right)\right)-a_3\left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'\left(0\right) & = \sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}u''\left(\xi_{i_3}\right), \\
\varphi_p\left(u''\left(1\right)\right)+a_4\left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'\left(1\right) & = \sum_{i=1}^{m_4} a_{i_4}u''\left(\xi_{i_4}\right),
\end{cases} \tag{1.1}
$$

Où $\varphi_p\left(y\right)=\left|y\right|^{p-2}y$, $p>1$, $f:\left[0,1\right]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, $a_{ij}\geq 0$ et $\xi_{i\ j}\in\left]0,1\right[$ pour tout $i=1,2,...,m_j$ et $j=1,2,3,4$ , $a_1$, $a_2$ $a_3$ et $a_4$ sont des réels positifs.

L'étude des problèmes aux limites à points multiples a été initialisée par Il IN et Moissev [34]. Gupta[33] a étudié un problème aux limites de trois points pour une équation différentielle ordinaire nonlinéaire.

L'étude de l'existence des solutions pour une classe des problèmes aux limites nonlinéaires à points multiples ont été étudiés par plusieurs auteurs en utilisant des différentes méthodes citons par exemple: la méthode des sous et sur solutions, les méthodes variationelles, l'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder, la théorie du degré topologique et le théorème du point fixe dans les cônes. Pour cela nous citons les références suivantes:

( [7], [9], [18], [41], [32], [62] , [63]) qui donnent quelques résultats pour les problèmes aux limites à points multiples.

Les équations de la forme ci-dessus interviennent dans la théorie des poutres, voir [10] , comme un faisceau de petites déformations (également appelé linéarité geommétrique), un faisceau d'un matériau qui satisfait une contrainte non linéaire de type puissance et le droit de contrainte, un faisceau de liens avec les deux faces (par exemple les ressorts) qui satisfait une loi élasticité non-linéaire de type puissance.

Il est bien connu, qu'un outil puissant pour la démonstration des résultats d'existence des problèmes non linéaires est la méthode des sur et sous solutions. Dans plusieurs cas il est possible de trouver les solutions minimales et maximales entre la sous et la sur solution par une technique itérative ( voir [8], [9], [22], [26] and [56]).

Nous disposons alors à utiliser la méthode des sur et sous solutions, par une technique itérative pour le problème (1.1). Ce résultat est une généralisation des autres travaux qui se trouvent dans la litérature.

Ce chapitre est organiser comme suit: Dans le deuxième paragraphe, nous introduisons quelques lemmes qui sont utiles dans notre travail, dans le troisième nous présentons notre résultat, et finalement nous donnons un exemple d'application.

## 1.2 Lemmes préliminaires

On considère le problème:

$$\begin{cases} -u''(x) = g(x), \ 0 < x < 1, \\ u(0) - a_0 u'(0) = r_1, \\ u(1) + b_0 u'(1) = r_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $a_0$ , $b_0$ sont deux nombres réels positifs et $r_1$ , $r_2$ sont des nombres réels.

Alors on a le résultat suivant:

**Lemme 1.1** *le problème **(1.2)** admet une unique solution définie par:*

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, g(s)\, ds - \frac{t - b_0 - 1}{1 + a_0 + b_0} r_1 + \frac{t + a_0}{1 + a_0 + b_0} r_2,$$

*avec*

$$G(t,s) = \begin{cases} (t + a_0) \dfrac{s - b_0 - 1}{1 + a_0 + b_0}, & 0 \le t \le s \\ (s + a_0) \dfrac{t - b_0 - 1}{1 + a_0 + b_0}, & s \le t \le 1 \end{cases}$$

Maintenant on considère le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p(u'')\right)''(x) = g_2(x), \ 0 < x < 1, \\ u(0) - a_0 u'(0) = r_1, \\ u(1) + b_0 u'(1) = r_2, \\ \varphi_p(u''(0)) - c_0 \left(\varphi_p(u'')\right)'(0) = r_3, \\ \varphi_p(u''(1)) + d_0 \left(\varphi_p(u'')\right)'(1) = r_4, \end{cases} \tag{1.3}$$

où $g_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $c_0$ et $d_0$ sont deux nombres reéls positifs et $r_3$ et $r_4$ sont deux nombres reéls.

Alors on a le résultat suivant:

**Corollaire 1.1** *Le problème **(1.3)** admet une unique solution donnée par:*

$$u(t) = -\int_0^1 G(t,s)\,\varphi_p^{-1}(y(s))\,ds - \frac{t-b_0-1}{1+a_0+b_0} r_1 + \frac{t+a_0}{1+a_0+b_0} r_2,$$

*où*

$$y(t) = -\int_0^1 G(t,s)\,g_2(s)\,ds - \frac{t-d_0-1}{1+c_0+d_0} r_3 + \frac{t+c_0}{1+c_0+d_0} r_4.$$

**Preuve:** On pose par définition:

$$y = \varphi_p\left(u''\right)$$

$y$ est une solution du problème:

$$\begin{cases} y''(x) = g_2(x)\,,\ 0 < x < 1, \\ y(0) - c_0 y'(0) = r_3, \\ y(1) + d_0 y'(1) = r_4 \end{cases} \tag{1.4}$$

D'après le lemme 1.1, il est clair que le problème (1.4) admet une unique solution définie par:

$$y(t) = -\int_0^1 G(t,s)\,g_2(s)\,ds - \frac{t-d_0-1}{1+c_0+d_0} r_3 + \frac{t+c_0}{1+c_0+d_0} r_4$$

Maitenant puisque $u'' = \varphi_p^{-1}(y)$, alors $u$ est une solution du problème:

$$\begin{cases} u''(x) = \varphi_p^{-1}(y(x))\,,\ 0 < x < 1, \\ u(0) - a_0 u'(0) = r_1, \\ u(1) + b_0 u'(1) = r_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

D'après le lemme 1.1, le problème (1.5) admet une unique solution définie par:

$$u(t) = -\int_0^1 G(t,s)\,\varphi_p^{-1}(y(s))\,ds - \frac{t - b_0 - 1}{1 + a_0 + b_0} r_1 + \frac{t + a_0}{1 + a_0 + b_0} r_2$$

■

**Lemme 1.2** *Supposons que u satisfait:*

$$\begin{cases} -u''(x) \geq 0, \qquad 0 < x < 1, \\ u(0) - a_0 u'(0) \geq 0, \\ u(1) + b_0 u'(1) \geq 0, \end{cases}$$

*alors* $u(x) \geq 0$, *pour tout* $x \in [0,1]$.

**Preuve:** Prenons $g(x) \geq 0$ et $r_1, r_2 \leq 0$ dans (1.2). D'après le lemme 1.1**,** on obtient que $u(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$.

**Lemme 1.3** ***( Principe du comparaison faible )***

*Soient* $u_1$ *et* $u_2$ *deux fonctions tels que:* $u_i \in C^2([0,1]), \varphi_p(u_i'') \in C^2([0,1]), i = 1, 2$ *et*

$$\begin{cases} \left(\varphi_p(u_1'')\right)''(x) \leq \left(\varphi_p(u_2'')\right)''(x), \ 0 < x < 1, \\ u_1(0) - a_0 u_1'(0) \leq u_2(0) - a_0 u_2'(0), \\ u_1(1) + b_0 u_1'(1) \leq u_2(1) + b_0 u_2'(1), \\ \varphi_p(u_1''(0)) - c_0\left(\varphi_p(u'')\right)'(0) \geq \varphi_p(u_2''(0)) - c_0\left(\varphi_p(u'')\right)'(0), \\ \varphi_p(u_1''(1)) + d_0\left(\varphi_p(u'')\right)'(1) \geq \varphi_p(u_2''(1)) + d_0\left(\varphi_p(u'')\right)'(1), \end{cases} \tag{1.6}$$

*alors* $u_1(x) \leq u_2(x)$ *et* $u_1''(x) \geq u_2''(x)$, *pour tout* $x \in [0,1]$.

■

**Preuve:** On pose par définition

$$y = \varphi_p\left(u_1''\right) - \varphi_p\left(u_2''\right)$$

Alors $y \in C^{\,2}([0,1])$ et par (1.6), on a

$$\begin{cases} y''(x) \leq 0, \;\; 0 < x < 1, \\ y(0) - c_0 y'(0) \geq 0, \\ y(1) + d_0 y'(1) \geq 0 \end{cases}$$

D'après le lemme 1.2, on a

$$y(x) \geq 0 \;\; \text{pour tout } x \in [0,1],$$

Ce qui donne

$$\varphi_p\left(u_1''(x)\right) \geq \varphi_p\left(u_2''(x)\right), \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Comme $\varphi_p$ est croissante, alors

$$u_1''(x) \geq u_2''(x), \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Par suite si on pose par définition

$$z = u_1 - u_2$$

on obtient

$$\begin{cases} z''(x) \geq 0, \;\; 0 < x < 1. \\ z(0) - a_1 z'(0) \leq 0 \\ z(1) + b_1 z'(1) \leq 0 \end{cases}$$

D'après le lemme 1.2, il est clair que

$$z(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Ce qui entraîne que

$$u_1(x) \leq u_2(x), \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

■

## 1.3 Définitions et résultat principal

Dans ce paragraphe on cherche l'existence des solutions du problème (1.1).

**Définition 1.1** *On dit que $\alpha$ est une sur solution du problème (1.1) si :*

*i)*$\alpha \in C^2([0,1])$.

*ii)*$\varphi_p(\alpha'') \in C^2([0,1])$.

*iii)*

$$\begin{cases} \left(\varphi_p(\alpha'')\right)'' \geq f(x,\alpha,\alpha''),\ 0 < x < 1, \\ \alpha(0) - a_1\alpha'(0) \geq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1}\alpha\left(\xi_{i\ 1}\right), \\ \alpha(1) + a_2\alpha'(1) \geq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i_2}\alpha\left(\xi_{i\ 2}\right), \\ \varphi_p(\alpha''(0)) - a_3\left(\varphi_p(\alpha'')\right)'(0) \leq \sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\alpha''\left(\xi_{i_3}\right), \\ \varphi_p(\alpha''(1)) + a_4\left(\varphi_p(\alpha'')\right)'(1) \leq \sum_{i=1}^{m_4} a_{i_4}\alpha''\left(\xi_{i_4}\right) \end{cases}$$

**Définition 1** *On dit que $\beta$ est une sous solution du problème (1.1) si :*

*i)* $\beta \in C^2([0,1])$.

*ii)* $\varphi_p\left(\beta''\right) \in C^2([0,1])$.

*iii)*

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\beta''\right)\right)'' \leq f\ \left(x,\beta,\beta''\right),\ 0 < x < 1, \\ \beta(0) - a_1\beta'(0) \leq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1}\beta\left(\xi_{i_1}\right), \\ \beta(1) + a_2\beta'(1) \leq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i_2}\beta\left(\xi_{i_2}\right), \\ \varphi_p\left(\beta''(0)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(\beta''\right)\right)'(0) \geq \sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\beta''\left(\xi_{i_3}\right), \\ \varphi_p\left(\beta''(1)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\beta''\right)\right)'(1) \geq \sum_{i=1}^{m_4} a_{i_4}\beta''\left(\xi_{i_4}\right) \end{cases}$$

**Théorème 1.1** *Supposons que le problème (1.1).admet une sur solution $\alpha$ et une sous solution $\beta$ satisfaisant à:*

$$\beta(x) \leq \alpha(x)\ \ \textit{et}\ \beta''(x) \geq \alpha''(x),\ \textit{pour tout}\ x \in [0,1].$$

*Si de plus $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfait aux hypothèses suivantes:*

***(H**$_1$**)** $f(x, u_2, v) - f(x, u_1, v) \geq 0$ pour $\beta(x) \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq \alpha(x)$,*

*$\alpha''(x) \leq v(x) \leq \beta''(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et*

***(H**$_2$**)** $f(x, u, v_2) - f(x, u, v_1) \leq 0$ pour $\beta(x) \leq u(x) \leq \alpha(x)$,*

*$\alpha''(x) \leq v_1(x) \leq v_2(x) \leq \beta''(x)$ pour tout $x \in [0,1]$,*

*alors il existe deux suites monotones $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et croissante, respectivement, sachant que $\alpha_0 = \alpha$ et $\beta_0 = \beta$. qui convergent uniforméments vers les solutions extrémales du problème aux limites **(1.1)**.*

**Preuve:** On définies les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \left(\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}\right)\right)'' = f\left(x, \alpha_n, \alpha''_n\right), \ 0 < x < 1, \\ \alpha_{n+1}(0) - a_1\alpha'_{n+1}(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} a_{i_1}\alpha_n\left(\xi_{i_1}\right), \\ \alpha_{n+1}(1) + a_2\alpha'_{n+1}(1) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} a_{i_2}\alpha_n\left(\xi_{i_2}\right), \\ \varphi_p\left(\alpha''_{n+1}(0)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}\right)\right)'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\alpha''_n\left(\xi_{i_3}\right), \\ \varphi_p\left(\alpha''_{n+1}(1)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}\right)\right)'(1) = \sum\limits_{i=1}^{m_4} a_{i_4}\alpha''_n\left(\xi_{i_4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0 = \beta \\ \left(\varphi_p\left(\beta''_{n+1}\right)\right)'' = f\left(x, \beta_n, \beta''_n\right), \ 0 < x < 1, \\ \beta_{n+1}(0) - a_1\beta'_{n+1}(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} a_{i_1}\beta_n\left(\xi_{i_1}\right), \\ \beta_{n+1}(1) + a_2\beta'_{n+1}(1) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} a_{i_2}\beta_n\left(\xi_{i_2}\right), \\ \varphi_p\left(\beta''_{n+1}(0)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(\beta''_{n+1}\right)\right)'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\beta''_n\left(\xi_{i_3}\right), \\ \varphi_p\left(\beta''_{n+1}(1)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\beta''_{n+1}\right)\right)'(1) = \sum\limits_{i=1}^{m_4} a_{i_4}\beta''_n\left(\xi_{i_4}\right) \end{cases}$$

Notons que par **le Corollaire(1.1),** les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

Maintenant on va montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution maximale du problème (1.1).

La preuve est donnée en plusieurs étapes.

**1ère étape:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$(-1)^k \beta^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha^{(2k)}(x) \ , \quad 0 \leq k \leq 1 \ \text{ et } x \in [0,1]$$

**Preuve:** Pour $n = 0$, on a:

$$(-1)^k \beta^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_0^{(2k)}(x) = (-1)^k \alpha^{(2k)}(x) \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq 1 \ \text{ et } x \in [0,1]$$

Supposons que pour un $n > 1$ fixé, on a:

$$(-1)^k \beta^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha^{(2k)}(x) \quad \text{pout tout} \quad 0 \leq k \leq 1 \text{ et } x \in [0,1]$$

et montrons que:

$$(-1)^k \beta^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha^{(2k)}(x) \ \text{ pout tout } 0 \leq k \leq 1 \ \text{ et } \ x \in [0,1]$$

On a alors:.

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}''\right)\right)''(x) - \left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)''(x) \leq f\left(x, \alpha_n(x), \alpha_n''(x)\right) - f\left(x, \alpha(x), \alpha''(x)\right), \ 0 < x < 1, \\ \alpha_{n+1}(0) - \alpha(0) - a_1\left(\alpha_{n+1}'(0) - \alpha'(0)\right) \leq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1}\left(\alpha_n\left(\xi_{i_1}\right) - \alpha\left(\xi_{i_1}\right)\right), \\ \alpha_{n+1}(1) - \alpha(1) + a_2\left(\alpha_{n+1}'(1) - \alpha'(1)\right) \leq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i_2}\left(\alpha_n\left(\xi_{i_2}\right) - \alpha\left(\xi_{i_2}\right)\right), \\ \varphi_p\left(\alpha_{n+1}''(0)\right) - \varphi_p\left(\alpha''(0)\right) - a_3\left(\left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}''\right)\right)'(0) - \left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)'(0)\right) \geq \sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\left(\alpha_n''\left(\xi_{i_3}\right) - \alpha''\left(\xi_{i_3}\right)\right), \\ \varphi_p\left(\alpha_{n+1}''(1)\right) - \varphi_p\left(\alpha''(1)\right) + a_4\left(\left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}''\right)\right)'(1) - \left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)'(1)\right) \geq \sum_{i=1}^{m_4} a_{i_4}\left(\alpha_n''\left(\xi_{i_4}\right) - \alpha''\left(\xi_{i_4}\right)\right) \end{cases}$$

D'après les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$**,** on a:

$$f\left(x, \alpha_n, \alpha_n''\right) - f\left(x, \alpha, \alpha''\right) = \ f\left(x, \alpha_n, \alpha_n''\right) - f\ \left(x, \alpha, \alpha_n''\right) \ + \ f\left(x, \alpha, \alpha_n''\right) - f\left(x, \alpha, \alpha''\right) \leq 0$$

Comme:

$$\sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1}\left(\alpha_{n+1}\left(\xi_{i_1}\right)-\alpha\left(\xi_{i_1}\right)\right)\leq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m_2} a_{i_2}\left(\alpha_{n+1}\left(\xi_{i_2}\right)-\alpha\left(\xi_{i_2}\right)\right)\leq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\left(\alpha_n''\left(\xi_{i_3}\right)-\alpha''\left(\xi_{i_3}\right)\right)\geq 0,$$

et

$$\sum_{i=1}^{m_4} a_{i_4}\left(\alpha_n''\left(\xi_{i_4}\right)-\alpha''\left(\xi_{i_4}\right)\right)\geq 0$$

Ce qui donne:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}''\right)\right)''(x)\leq\left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)''(x)\,,\ 0<x<1, \\ \alpha_{n+1}(0)-a_1\alpha_{n+1}'(0)\leq\alpha(0)-a_1\alpha'(0)\,, \\ \alpha_{n+1}(1)+a_2\alpha_{n+1}'(1)\leq\alpha(1)-a_2\alpha'(1)\,, \\ \varphi_p\left(\alpha_{n+1}''(0)\right)-a_3\left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}''\right)\right)'(0)\geq\varphi_p\left(\alpha''(0)\right)-a_3\left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)'(0)\,, \\ \varphi_p\left(\alpha_{n+1}''(1)\right)+a_4\left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}''\right)\right)'(1)\geq\varphi_p\left(\alpha''(1)\right)-a_4\left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)'(1) \end{cases}$$

D'après le lemme 1.3, on obtient:

$$\alpha_{n+1}(x)\leq\alpha(x)\ \text{ et }\ \alpha_{n+1}''(x)\geq\alpha''(x)\,,\ \text{pour tout } x\in[0,1]$$

De la même manière, on montre que:

$$\alpha_{n+1}\geq\beta\ \text{ et }\ \alpha_{n+1}''\leq\beta''.$$

Par suite on a:

$$(-1)^k\beta^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\alpha_n^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\alpha^{(2k)}(x)\ \text{, pour tout } 0\leq k\leq 1\ \text{ et } x\in[0,1]$$

**2ème étape:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$(-1)^k \beta^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \beta_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha^{(2k)}(x), \text{ pour tout } 0 \leq k \leq 1 \text{ et } x \in [0,1]$$

■

**Preuve:** La preuve est similaire que celle de la 1ère étape .

**3ème étape:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$(-1)^k \alpha_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x), \text{ pour tout } 0 \leq k \leq 1 \text{ et } x \in [0,1]$$

Pour $n = 0$, on a:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\alpha_1''\right)\right)'' - \left(\varphi_p\left(\alpha_0''\right)\right)'' \leq f\left(x, \alpha, \alpha''\right) - f\left(x, \alpha, \alpha''\right) = 0, \\ \alpha_1(0) - \alpha_0(0) - a_1\left(\alpha_1'(0) - \alpha_1'(0)\right) \leq \sum_{i=1}^{m_1} a_{i\,1}\left(\alpha\left(\xi_{i_1}\right) - \alpha\left(\xi_{i_1}\right)\right) = 0, \\ \alpha_1(1) - \alpha_0(1) + a_2\left(\alpha_1'(1) - \alpha_0'(1)\right) \leq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i_2}\left(\alpha\left(\xi_{i_2}\right) - \alpha\left(\xi_{i_2}\right)\right) = 0, \\ \varphi_p\left(\alpha_1''(0)\right) - \varphi_p\left(\alpha_0''(0)\right) - a_3\left(\left(\varphi_p\left(\alpha_1''\right)\right)'(0) - \left(\varphi_p\left(\alpha_0''\right)\right)'(0)\right) \geq \sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\left(\alpha''\left(\xi_{i_3}\right) - \alpha''\left(\xi_{i_3}\right)\right) = 0, \\ \varphi_p\left(\alpha_1''(1)\right) - \varphi_p\left(\alpha_0''(1)\right) + a_4\left(\left(\varphi_p\left(\alpha_1''\right)\right)'(1) - \left(\varphi_p\left(\alpha_0''\right)\right)'(1)\right) \geq \sum_{i=1}^{m_4} a_{i_4}\left(\alpha''\left(\xi_{i_4}\right) - \alpha''\left(\xi_{i_4}\right)\right) = 0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\alpha_1''\right)\right)''(x) \leq \left(\varphi_p\left(\alpha_0''\right)\right)''(x), \ 0 < x < 1, \\ \alpha_1(0) - a_1\alpha_1'(0) \leq \alpha_0(0) - \alpha_1'(0), \\ \alpha_1(1) + a_2\alpha_1'(1) \leq \alpha_0(1) + a_2\alpha_0'(1), \\ \varphi_p\left(\alpha_1''(0)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(\alpha_1''\right)\right)'(0) \geq \varphi_p\left(\alpha_0''(0)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(\alpha_0''\right)\right)'(0), \\ \varphi_p\left(\alpha_1''(1)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\alpha_1''\right)\right)'(1) \geq \varphi_p\left(\alpha_0''(1)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\alpha_0''\right)\right)'(1) \end{cases} \tag{1.7}$$

D'après **(**1.7**)**,et le lemme 1.3, on obtient que:

$$\alpha_1(x) \leq \alpha_0(x) \text{ et } \alpha_1''(x) \geq \alpha_0''(x), \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Suppoosons que pour un $n > 1$ fixé, on a:

$$(-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_{n-1}^{(2k)}(x) \text{ for all } 0 \leq k \leq 1 \text{ and } x \in [0,1]$$

et montrons que:

$$(-1)^k \alpha_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \text{ for all } 0 \leq k \leq 1 \text{ and } x \in [0,1]$$

Par définition de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$**,** on a:

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}\right)\right)'' - \left(\varphi_p\left(\alpha''_n\right)\right)'' &= f\left(x, \alpha_n, \alpha''_n\right) - f\left(x, \alpha_{n-1}, \alpha''_{n-1}\right) \\
&= f\left(x, \alpha_n, \alpha''_n\right) - f\left(x, \alpha_{n-1}, \alpha''_n\right) + f\left(x, \alpha_{n-1}, \alpha''_n\right) - f\left(x, \alpha_{n-1}, \alpha''_{n-1}\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Par suite on a:

$$\left(\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}\right)\right)'' \leq \left(\varphi_p\left(\alpha''_n\right)\right)'' \tag{1.8}$$

De plus on a:

$$\left(\alpha_{n+1}(0) - a_1\alpha'_{n+1}(0)\right) - \left(\alpha_n(0) - a_1\alpha'_n(0)\right) = \sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1}\left(\alpha_n\left(\xi_{i_1}\right) - \alpha_{n-1}\left(\xi_{i_1}\right)\right) \leq 0$$

Alors:

$$\left(\alpha_{n+1}(0) - a_1\alpha'_{n+1}(0)\right) \leq \left(\alpha_n(0) - a_1\alpha'_n(0)\right) \tag{1.9}$$

De même, on montre que:

$$\left(\alpha_{n+1}(1) + a_2\alpha'_{n+1}(1)\right) \leq \left(\alpha_n(1) + a_2\alpha'_n(1)\right) \tag{1.10}$$

$$\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}(0)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}\right)\right)'(0) \geq \varphi_p\left(\alpha''_n(0)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\alpha''_n\right)\right)'(0) \tag{1.11}$$

$$\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}(1)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\alpha''_{n+1}\right)\right)'(1) \geq \varphi_p\left(\alpha''_n(1)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\alpha''_n\right)\right)'(1) \tag{1.12}$$

D'après $\mathbf{(}1.7),(1.8),(1.9),(1.10), (1.11\mathbf{)}$ (1.12) et le lemme 1.3, on obtient que:

$$\alpha_{n+1}(x) \leq \alpha(x) \text{ et } \alpha''_{n+1}(x) \geq \alpha''(x), \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

Ce qui entraîne que:

$$(-1)^k \alpha_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \text{ , pour tout } 0 \leq k \leq 1 \text{ et } x \in [0,1]$$

**4ème étape:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$(-1)^k \beta_{n+1}^{(2k)}(x) \geq (-1)^k \beta_n^{(2k)}(x), \text{ for all } 0 \leq k \leq 1 \text{ and } x \in [0,1].$$

**Preuve:** La preuve est similaire à celle de **l'étape 3**.

**étape:** Il existe une constante $C_1$, indépendante de $n \in \mathbb{N}$, telle que:

$$\left|(\varphi_p(\alpha''_n))'\right|_0 := \max_{x\in[0,1]} \left|(\varphi_p(\alpha''_n))'(x)\right| \leq C_1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Preuve:** On distingue deux cas. ■

**1er cas:** $a_3 \neq 0$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, alors on a:

$$\begin{aligned}
\left|(\varphi_p(\alpha''_{n+1}))'(x)\right| &= \left|(\varphi_p(\alpha''_{n+1}))'(0) + \int_0^x f(t, \alpha_n, \alpha''_n)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{a_3}\left(\sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\alpha''_n(\xi_{i_3}) - \varphi_p(\alpha''_{n+1}(0))\right) + \int_0^x f(t, \alpha_n, \alpha''_n)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{a_3}\left(\left|\sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\alpha''_n(\xi_{i_3})\right| + \left|\varphi_p(\alpha''_{n+1}(0))\right|\right) + \int_0^x \left|f(t, \alpha_n, \alpha''_n)\right|dt \\
&\leq \frac{1}{a_3}\left(\sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\left|\alpha''_n(\xi_{i_3})\right| + \left|\varphi_p(\alpha''_{n+1}(0))\right|\right) + \int_0^x \left|f(t, \alpha_n, \alpha''_n)\right|dt \\
&\leq \frac{1}{a_3}\left(\sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3}\max\left(\left|\alpha''\right|_0, \left|\beta''\right|_0\right) + \max\left(\left|\varphi_p(\alpha'')\right|_0, \left|\varphi_p(\beta'')\right|_0\right)\right) + M_1(f)
\end{aligned}$$

avec

$$M_1(f) := \max\left\{\left|f\left(t, \alpha_n, \alpha_n''\right)\right| : 0 \leq t \leq 1,\ \beta \leq \alpha_n \leq \alpha,\ \text{ et } \alpha'' \leq \alpha_n'' \leq \beta''\right\}$$

Donc si on pose par définition:

$$C_1 := \frac{1}{a_3}\left(\sum_{i=1}^{m_3} a_{i_3} \max\left(\left|\alpha''\right|_0, \left|\beta''\right|_0\right) + \max\left(\left|\varphi_p\left(\alpha''\right)\right|_0, \left|\varphi_p\left(\beta''\right)\right|_0\right)\right) + M_1(f)$$

on obtient:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ \left|\left(\varphi_p\left(\alpha_n^{''}\right)\right)'(x)\right| \leq C_1.$$

Ce qui donne:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\left(\varphi_p\left(\alpha_n^{''}\right)\right)'\right|_0 \leq C_1$$

**2ème cas:** $a_3 = 0$.

En utilisant le théorème de la moyenne, on a pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_n \in ]0,1[$ tel que:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\varphi_p\left(\alpha_n''\right)\right)'(\theta_n)\right| &= \left|\varphi_p\left(\alpha_n''(1)\right) - \varphi_p\left(\alpha_n''(0)\right)\right| \\
&\leq \left|\varphi_p\left(\alpha_n''(1)\right)\right| + \left|\varphi_p\left(\alpha_n''(0)\right)\right| \\
&\leq 2\max\left(\left|\alpha''\right|_0^{p-1}, \left|\beta''\right|_0^{p-1}\right)
\end{aligned}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\varphi_p\left(\alpha_n''\right)\right)'(x)\right| &= \left|\left(\varphi_p\left(\alpha_n''\right)\right)'(\theta_n) + \int_{\theta_n}^{x} f\left(t, \alpha_n, \alpha_n''\right) dt\right| \\
&\leq 2\max\left(\left|\alpha''\right|_0^{p-1}, \left|\beta''\right|_0^{p-1}\right) + M_1(f)
\end{aligned}$$

Si on pose par définition:

$$C_1 := 2\max\left(\left|\alpha''\right|_0^{p-1}, \left|\beta''\right|_0^{p-1}\right) + M_1(f).$$

on obtient:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]\,,\ \left|\left(\varphi_p\left(\alpha''_n\right)\right)'(x)\right| \leq C_1.$$

Ce qui entraîne que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|\left(\varphi_p\left(\alpha''_n\right)\right)'\right|_0 \leq C_1.$$

**6ème étape:** Il existe une constante positive $C_2$, indépendante de $n \in \mathbb{N}$, sachant que:

$$\left|\varphi_p\left(\beta''_n\right)'\right|_0 \leq C_2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

■

**Preuve:** La preuve est similaire que celle de **l'étape 5**.

**7ème étape:** Il existe une constante positive $C_3$, indépendante de $n \in \mathbb{N}$, telle que:

$$\left|\alpha'_n\right|_0 \leq C_3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

■

**Preuve:** On distingue deux cas:

**1er cas:** $a_1 \neq 0$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a:

$$\alpha'_{n+1}(x) - \alpha'_{n+1}(0) = \alpha''_{n+1}(t)(x-0) \tag{1.13}$$

En utilisant (1.13) et l'inégalité triangulaire, on obtient:

$$\begin{aligned}
\left|\alpha'_{n+1}(x)\right| &= \left|\alpha'_{n+1}(0) + \alpha''_{n+1}(t)\,x\right| \\
&\leq \left|\alpha'_{n+1}(0)\right| + \left|\alpha''_{n+1}(t)\right| \\
&= \frac{1}{a_1}\left(\sum_{i=1}^{m_3} a_{i_1}\ \alpha_n\left(\xi_{i_1}\right) - \alpha_{n+1}(0)\right) + \left|\alpha''_{n+1}(t)\right|
\end{aligned}$$

D'après l'étape 1, on a:

$$\begin{aligned}\left|\alpha_{n+1}'(x)\right| &\leq \frac{1}{a_1}\left(\sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1}\max\left(|\alpha|_0, |\beta|_0\right) + \max\left(|\alpha|_0, |\beta|_0\right)\right) + \max\left(\left|\alpha''\right|_0, \left|\beta''\right|_0\right) \\ &= \frac{\max\left(|\alpha|_0, |\beta|_0\right)}{a_1}\left[\sum_{i=1}^{m_1} a_{i_1} + 1\right] + \max\left(\left|\alpha''\right|_0, \left|\beta''\right|_0\right)\end{aligned}$$

Si on pose par définition:

$$C_3 := \max\left(\left|\alpha_0'\right|_0, \frac{\max\left(|\alpha|_0, |\beta|_0\right)}{a_1}\left[\sum_{i=1}^{m_1} a_{i\ 1} + 1\right] + \max\left(\left|\alpha''\right|_0, \left|\beta''\right|_0\right)\right),$$

on obtient:

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ \ \left|\alpha_n'(x)\right| \leq C_3.$$

Ce qui entraîne que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|\alpha_n'\right|_0 \leq C_3.$$

**2ème cas:** $a_1 = 0$.

D'après le théorème de la moyenne, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_n \in ]0,1[$ telle que:

$$\begin{aligned}\left|\alpha_n'(\theta_n)\right| &= \left|\alpha_n(1) - \alpha_n(0)\right| \\ &\leq \left|\alpha_n(1)\right| + \left|\alpha_n(0)\right| \\ &\leq 2\max\left(|\alpha|_0, |\beta|_0\right)\end{aligned}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a:

$$\begin{aligned}\left|\alpha_n'(t)\right| &= \left|\alpha_n'(\theta_n) + \int_{\theta_n}^{t} \alpha_n''(x)\,dx\right| \\ &\leq 2\max\left(|\alpha|_0, |\beta|_0\right) + \max\left(\left|\alpha''\right|_0, \left|\beta''\right|_0\right)\end{aligned}$$

Donc si on pose par définition:

$$C_3 := 2\max\left(|\alpha|_0, |\beta|_0\right) + \max\left(\left|\alpha''\right|_0, \left|\beta''\right|_0\right),$$

on obtient:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]\,,\ \left|\alpha_n'\left(x\right)\right| \leq C_3.$$

Ce qui donne:

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|\alpha_n'\right|_0 \leq C_3.$$

**8ème étape:** Il existe une constante positive $C_4$, indépendante de $n \in \mathbb{N}$, sachant que:

$$\left|\beta_n'\right|_0 \leq C_4, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

■

**Preuve:** La preuve est similaire que celle de **l'étape 7**.

Maintenant on va montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\ \in\mathbb{N}}$ converge vers la solution maximale du problème (1.1).

D'après les étapes **1, 5** et **7** et puisque $f$ est continue, alors $(\alpha_n)_{n\ \in\mathbb{N}}$ et $\left(\varphi_p\left(\alpha_n''\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées dans $C^2\left([0,1]\right)$. Donc d'après le théorème d'Ascoli-Arzela il existe deux sous suites $\left(\alpha_{n_j}\right)$ de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^2\left([0,1]\right)$ et $\left(\varphi_p\left(\alpha_{n_j}\right)\right)$ qui converge dans $C^2\left([0,1]\right)$.

Posons:

$$\alpha^* := \lim_{n_j\ \to+\infty} \alpha_{n_j}$$

Or d'après les **étapes 1** et **3,** il est claire que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha_*$. Ce qui implique que: $\alpha_* = \alpha^*$ et par suite notre suite converge dans $C^2\left([0,1]\right)$ vers $\alpha_*$ et $\left(\varphi_p\left(\alpha_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^2\left([0,1]\right)$ vers $\varphi_p\left(\alpha_*\right).$

On a:

$$\left(\varphi_p\left(\alpha_n''\right)\right)'(x) = \left(\varphi_p\left(\alpha_n''\right)\right)'(0) + \int_0^x f\left(t, \alpha_n, \alpha_n''\right) dt$$

Par suite:

$$\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]\,,\ \left|f\left(t, \alpha_n, \alpha_n^{''}\right)\right| \leq K$$

Alors, le théorème de convergence dominé de lebesgue entraîne que:

$$\left(\varphi_p\left(\alpha_*^{''}\right)\right)^{'}(x) = \left(\varphi_p\left(\alpha_*^{''}\right)\right)^{'}(0) + \int_0^x f\left(t, \alpha_*, \alpha_*^{''}\right) dt.$$

Ce qui donne:

$$\left(\varphi_p\left(\alpha_*^{''}\right)\right)^{''}(x) = f\ \left(x, \alpha_*, \alpha_*^{''}\right) \text{ pour tout } x \in ]0,1[ \tag{1.14}$$

D'autre part, on a:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_{n+1}(0) - a_1\ \alpha_{n+1}^{'}(0)\right) = \alpha_*(0) - a_1\alpha_*^{'}(0) \tag{1.15}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_{n+1}(1) + a_2\alpha_{n+1}^{'}(1)\right) = \alpha_*(1) - a_2\alpha_*^{'}(1) \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to+\infty}\left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}^{''}(0)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}^{''}\right)\right)^{'}(0)\right) \\ = \quad & \varphi_p\left(\alpha_*^{''}(0)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(\alpha_*^{''}\right)\right)^{'}(0) \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to+\infty}\left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}^{''}(1)\right) - a_4\left(\varphi_p\left(\alpha_{n+1}^{''}\right)\right)^{'}(1)\right) \\ = \quad & \varphi_p\left(\alpha_*^{''}(1)\right) - a_4\left(\varphi_p\left(\alpha_*^{''}\right)\right)^{'}(1) \end{aligned} \tag{1.18}$$

D'après (1.14),(1.15),(1.16),(1.17) et (1.18), on obtient que $\alpha_*$ est une solution du problème(1.1).

Maintenant on montre que si $\widetilde{\alpha}$ est une autre solution de (1.1) sachant que $\beta \leq \widetilde{\alpha} \leq \alpha$ et $\alpha'' \leq \widetilde{\alpha}'' \leq \beta''$, alors , $\widetilde{\alpha} \leq \alpha_*$ et $\widetilde{\alpha}'' \leq \alpha_*^{''}$.

Puisque $\widetilde{\alpha}$ est une sur solution de (1.1), prenons $\gamma_0 = \widetilde{\alpha}$ et on définie une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ par:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\gamma''_{n+1}\right)\right)'' = f\left(x, \gamma_n, \gamma''_n\right), \ 0 < x < 1, \\ \gamma_{n+1}(0) - a_1 \gamma'_{n+1}(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} a_{i_1} \gamma_n\left(\xi_{i_1}\right), \\ \gamma_{n+1}(1) + a_2 \gamma'_{n+1}(1) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} a_{i_2} \gamma_n\left(\xi_{i_2}\right), \\ \varphi_p\left(\gamma''_{n+1}(0)\right) - a_3\left(\varphi_p\left(\gamma''_{n+1}\right)\right)'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_3} a_{i_3} \gamma''_n\left(\xi_{i_3}\right), \\ \varphi_p\left(\gamma''_{n+1}(1)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(\gamma''_{n+1}\right)\right)'(1) = \sum\limits_{i=1}^{m_4} a_{i_4} \gamma''_n\left(\xi_{i_4}\right) \end{cases}$$

Puisque $\gamma_0 = \widetilde{\alpha} \leq \alpha$, on peut montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_n \leq \alpha_n \text{ et } \gamma_n^{''} \geq \alpha_n^{''} \tag{1.19}$$

Par suite, puisque $\widetilde{\alpha}$ est une solution de (1.1), on a:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_n = \widetilde{\alpha} \tag{1.20}$$

D'après (1.19) et (1.20), on a:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \widetilde{\alpha} \leq \alpha_n \text{ et } \widetilde{\alpha}^{''} \geq \alpha_n^{''}$$

on fait tendre $n$ vers $+\infty$, on obtient:

$$\widetilde{\alpha} \leq \alpha_* \text{ et } \widetilde{\alpha}^{''} \geq \alpha_*^{''}$$

C'est à dire $\alpha_*$ est une solution maximale de (1.1).

Par le même argument, on montre que $(\beta_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution minimale de (1.1).

Ce qui achève la démonstration. ■

## 1.4 Exemple

De ce paragraphe on donne un exemple type qui vérifie les hypothèses de notre travail.

On considère le problème:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'' = g\left(x, u, u''\right), \ 0 < x < 1, \\ u\left(0\right) = 0, \\ u\left(1\right) + a_2 u'\left(1\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} a_{i_2} u\left(\xi_{i_2}\right), \\ u''\left(0\right) = 0, \\ \varphi_p\left(u''\left(1\right)\right) + a_4\left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'\left(1\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_4} a_{i_4} u''\left(\xi_{i_4}\right), \end{cases} \tag{1.21}$$

avec $1 < p \leq 2$, $\sum\limits_{i=1}^{m_2} a_{i_2} \leq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m_4} a_{i_4} \leq 1$ et le fonction $g$ est définie par:

$$g\left(x, u, u''\right) = (p-1)^2 |u|^{p-2} u + (p-1)(p-2)\left|u''\right|^{p-2} u'' + (p-1)^2 \left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|^{p-2} \sin\frac{\pi}{2}x$$

On pose par définition:

$$\alpha\left(x\right) = \sin\frac{\pi}{2}x, \ 0 \leq x \leq 1$$

Pour tout $0 < x < 1$, on a:

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)''(x) &= \left(-\left|\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x\right|^{p-2}\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x\right)'' \\
&= -\frac{\pi^{2(p-1)}}{4^{p-1}}\left(\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-1}\right)'' \\
&= -\frac{\pi^{2(p-1)}}{4^{p-1}}\left[-(p-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-1}+(p-1)(p-2)\frac{\pi^2}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)^2\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-3}\right] \\
&= \frac{\pi^{2p}}{4^p}\left[(p-1)^2\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-1}-(p-1)(p-2)\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-3}\right] \\
&= \frac{\pi^{2p}}{4^p}(p-1)^2\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-1}-\frac{\pi^{2p}}{4^p}(p-1)(p-2)\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-3} \\
&\geq 2(p-1)^2\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-1}-\frac{\pi^{2(p-1)}}{4^{(p-1)}}(p-1)(p-2)\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{p-1} \\
&= g\left(x,\alpha,\alpha''\right)
\end{aligned}
$$

Alors on a:

$$\forall\ x\in\left]0,1\right[,\ \ \left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)''(x)\geq g\left(x,\alpha,\alpha''\right) \tag{1.22}$$

D'autre part, on a:

$$\alpha(0)=0\geq 0 \tag{1.23}$$

$$\alpha(1)-a_2\alpha'(1)=1\geq\sum_{i=1}^{m_2}a_{i_2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_{i_2}\right) \tag{1.24}$$

$$\alpha''(0)=0\leq 0 \tag{1.25}$$

et

$$\varphi_p\left(\alpha''(1)\right)+a_4\left(\varphi_p\left(\alpha''\right)\right)'(1)=-1\leq-\sum_{i=1}^{m_4}a_{i_4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_{i_4}\right) \tag{1.26}$$

Alors d'après (1.22), (1.23), (1.24), (1.25) et (1.26), on obtient que $\alpha$ est une sur solution de (1.21).

D'autre part, la fonction identiquement nulle est une sous solution du problème (1.21). Alors tous les hypothèses du Théorème 1.1 sont vérifies. Ce qui entraîne l'existence des solutions extrémales $u_*$ et $u^*$ du problème (1.21) telles que: $0 \leq u_*(x) \leq u^*(x) \leq \sin \frac{\pi}{2}x$, pour tout $x \in [0,1]$.

# Chapitre 2

# Existence des solutions minimales et maximales pour une équation différentielle d'ordre quatre avec conditions aux limites nonlocales

## 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions minimales et maximales pour le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u'''\right)\right)' = f\left(x, u, u'', u'''\right), \ x \in (0,1), \\ u(0) - a_1 u'(0) = g_1(u), \\ u(1) + a_2 u'(1) = g_2(u), \\ u''(0) - a_3 u'''(0) = g_3(u''), \\ u''(1) + a_4 u'''(1) = g_4(u''), \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $p > 1$, $f : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_i : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, ..., 4$ et $a_i$ sont des constantes réelles positives $i = 1, ..., 4$.

L'étude des problèmes aux limites nonlocals est introduite par Bitsadze [13] , Samarskii [14] et IL'in and Moissev [34].

Gupta [33] à étudier un problème aux limites à trois points pour une équation différentielle ordinaire nonlinéaire.

Par suite, l'existence des solutions pour les problèmes aux limites nonlocals a était étudier par des auteurs en utilisant la méthode de la sur et sous solution, la méthode de la sur et sous solution avec une technique itérative monotone, la méthode variationnelle, alternatif de Leray-Schauder, coincidons avec la théorie du degré et le théorème du point fixe dans les cônes. ( [9], [15], [17], [18], [20], [21], [28], [29], [41], [32], [62] et [63]) pour quelques résultats pour des problèmes aux limites nonlocals nonlinéaire.

Une équation de la même forme de notre problème apparut dans la théorie des faiceaux pour $p = 2$, see [10], de sorte comme un faisceau de petites déformations (également appelé linéarité geommétrique), un faisceau d'un matériau qui satisfait une contrainte non linéaire de type puissance et le droit de contrainte, un faisceau de liens avec les deux faces (par exemple les ressorts) qui satisfait une loi élasticité non-linéaire de type puissance.

Il est bien connu, que l'outil le plus puissant pour la démonstration des résultats d'existence des problèmes non linéaires est la méthode des sur et sous solutions. Dans plusieurs cas il est possible de trouver deux solutions minimale et maximale entre deux sous et sur solution par une technique itérative (Voir [9], [22], [26], [28], [29] and [56]).

Dans [28], l'auteur à considérer le problème suivant:

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \widetilde{f}\left(x,u,u'\right), \ x \in (0,1), \\ u(0) - \widetilde{a_0} u'(0) = \int\limits_0^1 \widetilde{g}_1(x)\, u(x)\, dx, \\ u(1) + \widetilde{a_1} u'(1) = \int\limits_0^1 \widetilde{g}_2(x)\, u(x)\, dx, \end{cases} \tag{2.2}$$

avec $\widetilde{f} : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaite d'une condition de Lipshitz d'un seul côté et $\widetilde{g}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues $(i = 1, 2\ )$ , $\widetilde{a_0}$ et $\widetilde{a_1}$ sont deux nombres réelles positives.

Par l'utilisation de la méthode de la sur et sous solution et une thechnique itérative monotone, il a prouver l'existence des solutions minimal et maximal du problème (2.2).

L'idée est d'appliquer la même méthode pour le problème de type (2.1), ce qui permet de généraliser les résultats qui se trouvent dans la littérature.

Ce chapitre est organiser comme suit: dans le deuxième paragraphe, nous introduisons quelques lemmes qui sont utiles pour donner notre résultats, dans le troisième nous donnons notre résultat, et finallement nous donnons un exemple autour du résultat dans le quatrième paragraphe.

## 2.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, nous donnons quelques résultats préliminaires importantes dans la suite de notre travail.

Considérons alors le problème suivant:

$$\begin{cases} -u''(x) = g(x), \ 0 < x < 1, \\ u(0) - c_0 u'(0) = a, \\ u(1) + c_1 u'(1) = b, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $c_0$ et $c_1$ sont deux nombres réels positifs, $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

Alors on a le résultats suivants:

**Lemme 2.1** *Le problème (2.3) admet une unique solution définie par:*

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s)\, g(s)\, ds + \frac{1+c_1-x}{1+c_0+c_1} a + \frac{x+c_0}{1+c_0+c_1} b,$$

*avec*

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{(1+c_1-t)(s+c_0)}{1+c_0+c_1}, & 0 \le s \le t \\ \dfrac{(1+c_1-s)(t+c_0)}{1+c_0+c_1}, & t \le s \le 1. \end{cases}$$

**Corollaire 2.1** *Suposons que u satisfaite à:*

$$\begin{cases} -u''(x) \geq 0, \qquad 0 < x < 1, \\ u(0) - c_0 u'(0) \geq 0, \\ u(1) + c_1 u'(1) \geq 0, \end{cases}$$

*alors:* $u(x) \geq 0$, *pour tout* $x \in [0,1]$.

**Preuve:** Soient $g(x) \geq 0$ et $a, b \geq 0$ dans (2.3). Par le lemme 2.1, on obtient $u(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$. ■

Maintenant considérons le problème

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u'''\right)\right)' + Lu'' = F\left(x, u'''\right),\ x \in (0,1), \\ u(0) - c_0 u'(0) = a, \\ u(1) + c_1 u'(1) = b, \\ u''(0) - c_2 u'''(0) = c, \\ u''(1) + c_3 u'''(1) = d, \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $L$ est une constante réelle strictement négative, $c_i \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i = 0, ..., 3$ et $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réelles.

**Lemme 2.2** *Soient* $u_1$, $u_2$ *sachant que* $u_i \in C^3([0,1])$ *et* $\varphi_p(u''') \in C^1(0,1)$, $i = 1, 2$, *et*

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u_1'''\right)\right)' + Lu_1'' \leq \left(\varphi_p\left(u_2'''\right)\right)' + Lu_2'',\ x \in (0,1), \\ u_1(0) - c_0 u_1'(0) \leq u_2(0) - c_0 u_2'(0), \\ u_1(1) + c_1 u_1'(1) \leq u_2(1) + c_1 u_2'(1), \\ u_1''(0) - c_2 u_1'''(0) \geq u_2''(0) - c_2 u_2'''(0), \\ u_1''(1) + c_3 u_1'''(1) \geq u_1''(1) + c_3 u_1'''(1), \end{cases} \tag{2.5}$$

*alors* $u_1(x) \leq u_2(x)$ *et* $u_1''(x) \geq u_2''(x)$ *pour tout* $x \in [0,1]$.

**Preuve:** Au début, montrons que $u_1''(x) \geq u_2''(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ telle que

$$u_1''(x_0) - u_2''(x_0) = \min_{0 \le x_0 \le 1} \left( u_1''(x) - u_2''(x) \right) < 0.$$

Alors puisque $(u_1'' - u_2'') \in C^1([0,1])$, on a

$$u_1'''(x_0) - u_2'''(x_0) = 0.$$

Si $x_0 = 0$, on trouve une contradiction

$$0 > u_1''(0) - u_2''(0) \ge c_2 \left( u_1'''(0) - u_2'''(0) \right) = 0.$$

De même si on prend $x_0 = 1$.

Si $x_0 \in (0,1)$, on a

$$\varphi_p \left( u_1'''(x_0) \right) = \varphi_p \left( u_2'''(x_0) \right),$$

Puisque $\varphi_p$ est strictement croissante, on trouve

$$\left( \varphi_p \left( u_1''' \right) \right)'(x_0) - \left( \varphi_p \left( u_2''' \right) \right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi_p\left(u_1'''(x)\right) - \varphi_p\left(u_2'''(x)\right)}{x - x_0} \ge 0.$$

Mais par (2.5) dans ce point, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left( \varphi_p \left( u_1''' \right) \right)'(x_0) - \left( \varphi_p \left( u_2''' \right) \right)'(x_0) \\
\le \;& F\left(x_0, u_1'''(x_0)\right) - F\left(x_0, u_2'''(x_0)\right) + L\left(u_2''(x_0) - u_1''(x_0)\right) \\
= \;& L\left(u_2''(x_0) - u_1''(x_0)\right) < 0.
\end{aligned}$$

Ce qui ramène à une contradiction.

Donc, on a

$$u_1''(x) \ge u_2''(x), \text{ pour tout } x \in [0,1]. \tag{2.6}$$

Par suite, montrons que

$$u_1(x) \le u_2(x), \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Soit $x \in [0,1]$, alors par (2.5) et (2.6), on a

$$\begin{cases} u_2''(x) - u_1''(x) \leq 0, \ x \in (0,1), \\ u_1(0) - c_0 u_1'(0) \leq u_2(0) - c_0 u_2'(0), \\ u_1(1) + c_1 u_1'(1) \leq u_2(1) + c_1 u_2'(1), \end{cases}$$

Et par le corollaire 2.1, on trouve que

$$u_1(x) \leq u_2(x), \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

■

**Proposition 2** *Si F est une fonction continue bornée, alors le problème (2.4) admet une unique solution .*

**Preuve:** Posons par définition

$$y = u''.$$

$y$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \left(\varphi_p(y')\right)' + Ly = F(x,y'), \ x \in (0,1), \\ y(0) - c_2 y'(0) = c, \\ y(1) + c_3 y'(1) = d. \end{cases} \tag{2.7}$$

Si on pose par définition $y_1 = \max\left(\frac{\min_{x\in[0,1]} F(x,0)}{L}, c, d\right)$ et $y_2 = \min\left(\frac{\max_{x\in[0,1]} F(x,0)}{L}, c, d\right)$, alors on trouve que

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(y_1')\right)' \geq Ly_1 - F(x,y_1'), \ x \in (0,1), \\ y_1(0) - c_2 y_1'(0) \geq c, \\ y_1(1) + c_3 y_1'(1) \geq d, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(y_2')\right)' \leq Ly_2 - F(x,y_2'), \ x \in (0,1), \\ y_2(0) - c_2 y_2'(0) \leq c, \\ y_2(1) + c_3 y_2'(1) \leq d. \end{cases}$$

Ce qui permet de dire que $y_1$ est une sur solution de(2.7)et $y_2$ est une sous solution de (2.7).

Alors par le Théorème 2 dans [28], on arrive à montrer que (2.7) admet une solution unique $y$ telle que $y_2 \leq y \leq y_1$.

Par suite, considérons le problème

$$\begin{cases} u'' = y,\ x \in (0,1), \\ u(0) - c_0 u'(0) = a, \\ u(1) + c_1 u'(1) = b, \end{cases} \tag{2.8}$$

avec $y$ est une solution unique du problème (2.7).

Par le lemme 2.1, il est clair que le problème (2.8) admet une solution unique définie par

$$u(x) = -\int_0^1 G(x,s)\, y(s)\, ds + \frac{1 + c_1 - x}{1 + c_0 + c_1} a + \frac{x + c_0}{1 + c_0 + c_1} b,$$

■

Maintenant, considérons le problème

$$\begin{cases} \left(\varphi_p(u''')\right)' = f(x, u, u'', u'''),\ x \in (0,1), \\ u(0) - a_1 u'(0) = g_1(u), \\ u(1) + a_2 u'(1) = g_2(u), \\ u''(0) - a_3 u'''(0) = g_3(u''), \\ u''(1) + a_4 u'''(1) = g_4(u''), \end{cases} \tag{2.9}$$

avec $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y,\ p > 1,\ f : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g_i : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, ..., 4$ et $a_i$ sont des nombres positives pour $i = 1, ..., 4$.

**Définition 2.1** *On dit que u est une solution de (2.9) si*

*i)* $u \in C^3([0,1])$ *et* $\varphi_p(u''') \in C^1(0,1)$.

*ii) u satisfaite aux problème (2.9).*

**Définition 2.2** *On dit que* $\alpha$ *est une sous solution de (2.9) si*

*i)* $\alpha \in C^3([0,1])$ *et* $\varphi_p(\alpha''') \in C^1(0,1)$.

$$ii)\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\alpha'''\right)\right)' \leq f\left(x,\alpha,\alpha'',\alpha'''\right),\ x\in(0,1),\\ \alpha(0)-a_1\alpha'(0)\leq g_1(\alpha),\\ \alpha(1)+a_2\alpha'(1)\leq g_2(\alpha),\\ \alpha''(0)-a_3\alpha'''(0)\geq g_3(\alpha''),\\ \alpha''(1)+a_4\alpha'''(1)\geq g_4(\alpha''). \end{cases}$$

**Définition 2.3** *On dit que $\beta$ est une sur solution de (2.9) si*

*i)* $\beta\in C^3([0,1])$ *et* $\varphi_p\left(\beta'''\right)\in C^1(0,1)$.

$$ii)\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\beta'''\right)\right)' \geq f\left(x,\beta,\beta'',\beta'''\right),\ x\in(0,1),\\ \beta(0)-a_1\beta'(0)\geq g_1(\beta),\\ \beta(1)+a_2\beta'(1)\geq g_2(\beta),\\ \beta''(0)-a_3\beta'''(0)\leq g_3\left(\beta''\right),\\ \beta''(1)+a_4\beta'''(1)\leq g_4\left(\beta''\right). \end{cases}$$

Maintenant, on définit les conditions de Nagumo-Wintner.

**Définition 2.4** *On dit que $f:[0,1]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ satisfaite aux condition de Nagumo-Wintner relativement aux couple $\alpha$ et $\beta$, s"il existe un $C\geq 0$ et des fonctions $Q\in L^p([0,1])$ et $\Psi:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ continues, sachant que*

$$\left|f(x,u,v,w)\right|\leq\Psi\left(|w|\right)\left(Q(x)+C\,|w|^{\frac{1}{p-1}}\right), \tag{2.10}$$

*pour $(x,u,v,w)\in D$, avec*

$$D=\left\{(x,u,v,w)\in[0,1]\times\mathbb{R}^3:\alpha(x)\leq u(x)\leq\beta(x)\ \text{ et } \beta''(x)\leq u''(x)\leq\alpha''(x)\right\},$$

*et*

$$\int_0^{+\infty}\frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(|s|^{\frac{1}{p-1}}\right)}ds=+\infty. \tag{2.11}$$

On a le résultats suivant:

**Lemme 2.3** *Soit $f:[0,1]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ satisfaite aux condition de Nagumo-Wintner (2.10) et (2.11) dans $D$. Alors il existe une constante $K>0$, telle que chaque solution du problème*

*(2.9) vérifie* $\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x)$ *et* $\beta''(x) \leq u''(x) \leq \alpha''(x)$, *pour tout* $x \in [0,1]$, *satisfaite à* $\|u'''\|_0 \leq K$.

**Preuve:** Puisque $\beta''(x) \leq u''(x) \leq \alpha''(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\beta''(1) - \alpha''(0) \leq u''(1) - u''(0) \leq \alpha''(1) - \beta''(0).$$

Posons

$$\eta := \max\left\{\left|\beta''(1) - \alpha''(0)\right|, \left|\alpha''(1) - \beta''(0)\right|\right\}.$$

Par le théorème des valeurs intermédiare, il existe $x_0 \in (0,1)$ telle que

$$u''(1) - u''(0) = u'''(x_0),$$

implique que,

$$\left|u'''(x_0)\right| \leq \eta.$$

Posons par définition

$$\widetilde{L} := \left|u'''(x_0)\right| \text{ et } \widetilde{\delta} := 2\max\left(\left\|\alpha''\right\|_0, \left\|\beta''\right\|_0\right).$$

prenons $K > \left(\eta, \|\alpha'''\|_0, \left\|\beta'''\right\|_0\right)$ telle que

$$\int_{\varphi_p(\eta)}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(|s|^{\frac{1}{p-1}}\right)} ds > \|Q\|_p \widetilde{\delta}^{\frac{p-1}{p}} + C\widetilde{\delta}^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.12}$$

Nous alons montrer par la suite que $|u'''(x)| \leq K$, pour tout $x \in [0,1]$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_1 \in [0,1]$ telle que$|u'''(x_1)| > K$.

Alors par la continuité de $u'''$, on peut trouver une constante $x_2 \in [0,1]$ vérifie l'un des situations suivantes:

i) $u'''(x_0) = \widetilde{L}$, $u'''(x_2) = K$ et $\widetilde{L} \leq u'''(x) \leq K$, pour tout $x \in (x_0, x_2)$.

ii) $u'''(x_2) = K$, $u'''(x_0) = \widetilde{L}$ et $\widetilde{L} \leq u'''(x) \leq K$, pour tout $x \in (x_2, x_0)$.

iii) $u'''(x_0) = -\widetilde{L}$, $u'''(x_2) = -K$ et $-K \leq u'''(x) \leq -\widetilde{L}$, pour tout $x \in (x_0, x_2)$.

iv) $u'''(x_2) = -K$, $u'''(x_0) = -\widetilde{L}$ et $-K \leq u'''(x) \leq -\widetilde{L}$, pour tout $x \in (x_2, x_0)$.

Supposons que le premier cas i) à lieu. D'une façon similaire on montre pour les autres cas.

Puisque $u$ est une solution du problème (2.9) et par les conditions de Nagumo-Wintner (2.10), on trouve

$$\left(\varphi_p\left(u'''\right)\right)'(x) \leq \Psi\left(u'''(x)\right)\left(Q(x) + C.\left(u'''(x)\right)^{\frac{1}{p-1}}\right), \text{ pour tout } x \in (x_0, x_2). \tag{2.13}$$

Mais $\widetilde{L} \leq \eta$ et $\varphi_p$ est croissante, ce qui donne

$$\int\limits_{\varphi_p(\eta)}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(s^{\frac{1}{p-1}}\right)} ds \leq \int\limits_{\varphi_p(\widetilde{L})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(s^{\frac{1}{p-1}}\right)} ds. \tag{2.14}$$

Donc si on pose $s = \varphi_p(u'''(x))$, on obtient

$$\int\limits_{\varphi_p(\widetilde{L})}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(s^{\frac{1}{p-1}}\right)} ds = \int\limits_{x_0}^{x_2} \frac{\left(\varphi_p\left(u'''(x)\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(u'''(x)\right)} \left(\varphi_p\left(u'''(x)\right)\right)' dx.$$

Alors par (2.13) et (2.14), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_p(\eta)}^{\varphi_p(K)} \frac{s^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(s^{\frac{1}{p-1}}\right)} ds &\leq \int_{x_0}^{x_2} \frac{\left(\varphi_p\left(u'''(x)\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\Psi\left(u'''(x)\right)} \left(\varphi_p\left(u'''(x)\right)\right)' dx \\
&\leq \int_{x_0}^{x_2} \left(\varphi_p\left(u'''(x)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left[Q(x) + C.\left(u'''(x)\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] dx \\
&= \int_{x_0}^{x_2} \left(u'''(x)\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[Q(x) + C.\left(u'''(x)\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] dx \\
&= \int_{x_0}^{x_2} \left(u'''(x)\right)^{\frac{p-1}{p}} Q(x)\, dx + C \int_{x_0}^{x_2} \left(u'''(x)\right)^{\frac{1}{p}} dx \\
&\quad \leq \|Q\|_p \left(\int_{x_0}^{x_2} \left(\left(u'''(x)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} + \\
&\quad + C. \left(\left(\int_{x_0}^{x_2} \left(\left(u'''(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}}\right) . \left(\int_{x_0}^{x_2} 1^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \|Q\|_p \left(u''(x_2) - u''(x_0)\right)^{\frac{p-1}{p}} + C.\left(u''(x_2) - u''(x_0)\right)^{\frac{1}{p}} . \left(x_2 - x_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \|Q\|_p \widetilde{\delta}^{\frac{p-1}{p}} + C\widetilde{\delta}^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

donc contradiction avec (2.12). ■

**Remarques:**

(i) La preuve de ce lemme est similaire de celle du lemma 3 dans [28].

(ii) Les conditions de Nagumo-Wintner sont plus générales que les conditions de Nagumo ou Nagumo-Bernstein.

## 2.3 Résultat principal

Dans ce paragraphe, nous donnons notre résultat avec une preuve détaillé.

Considérons alors les hypothèses suivantes:

(**H1**) $f(x, u_1, v, w) - f(x, u_2, v, w) \leq 0$, pour $\alpha(x) \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq \beta(x)$,

$\beta''(x) \leq v(x) \leq \alpha''(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $w \in \mathbb{R}$.

(**H2**) Il existe $M < 0$ telle que $f(x,u,v_2,w) + Mv_2 - f(x,u,v_1,w) - Mv_1 \leq 0$, pour $\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x)$, $\beta''(x) \leq v_1(x) \leq v_2(x) \leq \alpha''(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et $w \in \mathbb{R}$.

(**H3**) Les fonctions $g_1$ and $g_2$ sont continues et croissante dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

(**H4**) Les fonctions $g_3$ and $g_4$ sont continues et décroissante dans l'intervalle $\left[\beta'', \alpha''\right]$.

Notre résultat est le suivant:

**Théorème 2.1** *Soient $\alpha$ et $\beta$ la sous et la sur solution respectivement du problème (2.9) sachant que $\alpha(x) \leq \beta(x)$ et $\alpha''(x) \geq \beta''(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Supposons qu'on a les conditions **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**, **(H4)** et les conditions de Nagumo-Wintner relativement à $\alpha$ et $\beta$ sont satisfaites. Alors ils existes deux suites monotones $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et décroissante respectivement, sachant que $\alpha_0 = \alpha$ et $\beta_0 = \beta$ qui convergent uniforméments vers les olutions maximales dans $[\alpha, \beta]$ pour le problème aux limites (2.9).*

**Preuve:** Soit $K$ la constante définie dans le lemme 2.3 et soit $N_0 > \max\left(K, \ \|\alpha'''\|_0, \ \left\|\beta'''\right\|_0\right)$.

considérons $h(z) = \max(-N_0, \ \min(z, N_0))$. Alors $h$ est continue et bornée. En plus, on a $h(z) = z$ pour tout $z$ sachant que $|z| \leq N_0$; et $|h(z)| \leq N_0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

On définies les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cette forme

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha, \\ \left(\varphi_p\left(\alpha'''_{n+1}\right)\right)' + M\alpha''_{n+1} = f\left(x, \alpha_n, \alpha''_n, h\left(\alpha'''_{n+1}\right)\right) + M\alpha''_n, \ x \in (0,1), \\ \alpha_{n+1}(0) - a_1\alpha'_{n+1}(0) = g_1(\alpha_n), \\ \alpha_{n+1}(1) + a_2\alpha'_{n+1}(1) = g_2(\alpha_n), \\ \alpha''_{n+1}(0) - a_3\alpha'''_{n+1}(0) = g_3(\alpha''_n), \\ \alpha''_{n+1}(1) + a_4\alpha'''_{n+1}(1) = g_4(\alpha''_n), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta_0 = \beta, \\ \left(\varphi_p\left(\beta'''_{n+1}\right)\right)' + M\beta''_{n+1} = f\left(x, \beta_n, \beta''_n, h\left(\beta'''_{n+1}\right)\right) + M\beta''_n, \ x \in (0,1), \\ \beta_{n+1}(0) - a_1\beta'_{n+1}(0) = g_1(\beta_n), \\ \beta_{n+1}(1) + a_2\beta'_{n+1}(1) = g_2(\beta_n), \\ \beta''_{n+1}(0) - a_3\beta'''_{n+1}(0) = g_3\left(\beta''_n\right), \\ \beta''_{n+1}(1) + a_4\beta'''_{n+1}(1) = g_4\left(\beta''_n\right). \end{cases}$$

Notons que par la proposition 2, les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Maintenant on va démontrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers les solutions maximales dans $[\alpha,\beta]$ du problème aux limites (2.9).

La preuve est donné en plusieurs étapes.

**1ère Etape:** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$(-1)^k\,\alpha^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\,\alpha_n^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\,\beta^{(2k)}(x)\,,\text{ pour tout }k\in\{0,1\}\text{ et }x\in[0,1]\,.$$

**Preuve:** Pour $n=0$, on a

$$(-1)^k\,\alpha^{(2k)}(x)=(-1)^k\,\alpha_0^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\,\beta^{(2k)}(x)\ \text{ pour tout }k\in\{0,1\}\text{ et }x\in[0,1]\,.$$

Supposons pour un $n>1$ fixé, on a

$$(-1)^k\,\alpha^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\,\alpha_n^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\,\beta^{(2k)}(x)\ \text{ pour tout }k\in\{0,1\}\text{ et }x\in[0,1]\,,$$

et montrons que

$$(-1)^k\,\alpha^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\,\alpha_{n+1}^{(2k)}(x)\leq(-1)^k\,\beta^{(2k)}(x)\ \text{ pour tout }k\in\{0,1\}\text{ et }\ x\in[0,1]\,.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_1\in[0,1]$ telle que

$$\alpha''(x_1)-\alpha''_{n+1}(x_1)=\min_{0\leq x\leq 1}\big(\alpha''(x)-\alpha''_{n+1}(x)\big)<0.$$

D'une manière analogue de la preuve du lemme 2.2, on arrive à une contradiction. Alors, on a

$$\alpha''_{n+1}(x)\leq\alpha''(x)\ \text{ pour tout }x\in[0,1]\,,$$

De même, on trouve

$$\beta''(x)\leq\alpha''_{n+1}(x)\ \text{ pour tout }x\in[0,1]\,.$$

Par suite, on vient de montrer que

$$\alpha\left(x\right)\leq\alpha_{n+1}\left(x\right)\ \text{ pour tout } x\in\left[0,1\right].$$

Soit $x\in\left(0,1\right)$, on a

$$\begin{cases}\alpha''_{n+1}\left(x\right)\leq\alpha''\left(x\right),\ x\in\left(0,1\right),\\ \alpha_{n+1}\left(0\right)-a_3\alpha'_{n+1}\left(0\right)-\alpha\left(0\right)+a_3\alpha'\left(0\right)\geq g_1\left(\alpha_n\right)-g_1\left(\alpha\right),\\ \alpha_{n+1}\left(1\right)+a_4\alpha'_{n+1}\left(1\right)-\alpha\left(1\right)-a_4\alpha'\left(1\right)\geq g_2\left(\alpha_n\right)-g_2\left(\alpha\right).\end{cases}$$

Puisque $\alpha\leq\alpha_{n+1}$ , $g_1$ et $g_2$ sont croissantes, on obtient

$$\begin{cases}\alpha''_{n+1}\left(x\right)\leq\alpha''\left(x\right),\ x\in\left(0,1\right),\\ \alpha_{n+1}\left(0\right)-a_3\alpha'_{n+1}\left(0\right)\geq\alpha\left(0\right)-a_3\alpha'\left(0\right),\\ \alpha_{n+1}\left(1\right)+a_4\alpha'_{n+1}\left(1\right)\geq\alpha\left(1\right)+a_4\alpha'\left(1\right).\end{cases}$$

Alors par le corollaire 2.1, il est claire que

$$\alpha\left(x\right)\leq\alpha_{n+1}\left(x\right)\ \text{ pour tout}x\in\left[0,1\right].$$

D'une manière similaire, on peut montrer que

$$\alpha_{n+1}\left(x\right)\leq\beta\left(x\right)\ \text{ pour tout } x\in\left[0,1\right].$$

Ce qui implique que

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ \left(-1\right)^k\alpha^{(2k)}\left(x\right)\leq\left(-1\right)^k\alpha_n^{(2k)}\left(x\right)\leq\left(-1\right)^k\beta^{(2k)}\left(x\right),\text{ pour tout } k\in\{0,1\}\ \text{ et } x\in\left[0,1\right].$$

**2ème Etape:** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\left(-1\right)^k\alpha^{(2k)}\left(x\right)\leq\left(-1\right)^k\beta_n^{(2k)}\left(x\right)\leq\left(-1\right)^k\beta^{(2k)}\left(x\right),\text{ pour tout } k\in\{0,1\}\ \text{ et } x\in\left[0,1\right].$$

**Preuve**. Elle est analogue que celle de **l'étape 1**.

**Etape:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_{n+1}^{(2k)}(x), \text{ pour tout } k \in \{0,1\} \text{ et } x \in [0,1].$$

**Preuve.** Pour $n = 0$, par la 2ème étape on a

$$(-1)^k \alpha_0^{(2k)}(x) = (-1)^k \alpha^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_{n+1}^{(2k)}(x), \text{ pour tout } k \in \{0,1\} \text{ et } x \in [0,1].$$

Supposons que pour un $n > 1$ fixé, on a

$$(-1)^k \alpha_{n-1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \text{ pour tout } k \in \{0,1\} \text{ et } x \in [0,1],$$

et montrons que

$$(-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_{n+1}^{(2k)}(x) \text{ pour tout } k \in \{0,1\} \text{ et } x \in [0,1].$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_2 \in [0,1]$ telle que

$$\alpha_n''(x_2) - \alpha_{n+1}''(x_2) = \min_{0 \leq x \leq 1} \left(\alpha_n''(x) - \alpha_{n+1}''(x)\right) < 0.$$

D'une manière analogue de la preuve du lemme 2.2, on arrive à une contradiction. Ce qui donne que

$$\alpha_{n+1}''(x) \leq \alpha_n''(x) \text{ pour tout } x \in [0,1],$$

Ensuite, on montre que

$$\alpha_n(x) \leq \alpha_{n+1}(x) \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Soit $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}''(x) - \alpha_n''(x) \leq 0, \ x \in (0,1), \\ \alpha_{n+1}(0) - a_3\alpha_{n+1}'(0) - \alpha_n(0) + a_3\alpha_n'(0) = g_1(\alpha_n) - g_1(\alpha_{n-1}), \\ \alpha_{n+1}(1) + a_4\alpha_{n+1}'(1) - \alpha_n(1) - a_4\alpha_n'(1) = g_2(\alpha_n) - g_2(\alpha_{n-1}). \end{cases}$$

Puisque $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n$ , $g_1$ et $g_2$ sont croissantes, on obtient

$$\begin{cases} \alpha''_{n+1}(x) - \alpha''_n(x) \leq 0, \; x \in (0,1), \\ \alpha_{n+1}(0) - a_3 \alpha'_{n+1}(0) \geq \alpha_n(0) - a_3 \alpha'_n(0), \\ \alpha_{n+1}(1) + a_4 \alpha'_{n+1}(1) \geq \alpha_n(1) + a_4 \alpha'_n(1). \end{cases}$$

Alors par le corollaire 2.1, on a

$$\alpha_n(x) \leq \alpha_{n+1}(x) \text{ pour tout} x \in [0,1].$$

Ce qui implique que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \; (-1)^k \alpha_n^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \alpha_{n+1}^{(2k)}(x), \text{ pour tout } k \in \{0,1\} \text{ et } x \in [0,1].$$

**4 ème Etape :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(-1)^k \beta_{n+1}^{(2k)}(x) \leq (-1)^k \beta_n^{(2k)}(x), \text{ pour tout } 0 \leq k \leq 1 \text{ et } x \in [0,1].$$

**Preuve.** C'est la même preuve que **l'étape 3**.

**5 ème Etape :** Il existe une constante positive $C_1$, indépendant de $n \in \mathbb{N}$, sachant que

$$\left\| \alpha'''_n \right\|_0 \leq C_1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Preuve**. Par le théorème des valeurs intermédiares, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_n \in ]0,1[$ telle que

$$\begin{aligned} \left|\alpha'''_n(\theta_n)\right| &= \left|\alpha''_n(1) - \alpha''_n(0)\right| \\ &\leq \left|\alpha''_n(1)\right| + \left|\alpha''_n(0)\right| \\ &\leq 2 \max\left(\left\|\alpha'''\right\|_0, \left\|\beta'''\right\|_0\right). \end{aligned}$$

Alors pour un $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\left(\varphi_p\left(\alpha_n'''\right)\right)(x)\right| &= \left|\left(\varphi_p\left(\alpha_n'''\right)\right)(\theta_n) + \int_{\theta_n}^{x}\left(f\left(t,\alpha_n,\alpha_n'',h\left(\alpha_n'''\right)\right)+M\right)\left(\alpha_{n-1}''(t)-\alpha_n''(t)\right)dt\right| \\
&\leq \left(2\max\left(\left\|\alpha'''\right\|_0,\left\|\beta'''\right\|_0\right)\right)^{p-1} + M_1(f) + 4|M|\max\left(\left\|\alpha'''\right\|_0,\left\|\beta'''\right\|_0\right),
\end{aligned}$$

avec

$$M_1(f) := \max\left\{\left|f(x,u,v,w) : 0 \leq x \leq 1,\ \beta \leq u \leq \alpha,\ \alpha'' \leq v \leq \beta'',\ \ |w| \leq N_0\right|\right\}.$$

Si on pose par définition

$$\widetilde{C} := 2\max\left(\left|\alpha''\right|_0^{p-1},\left|\beta''\right|_0^{p-1}\right) + M_1(f) - 4M\max\left(\left\|\alpha'''\right\|_0,\left\|\beta'''\right\|_0\right),$$

On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ \left|\left(\varphi_p\left(\alpha_n'''\right)\right)(x)\right| \leq .\widetilde{C}.$$

Ce qui implique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ \left|\alpha_n'''(x)\right| \leq .\widetilde{C}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Alors il suffit de poser $C_1 = \widetilde{C}^{\frac{1}{p-1}}$, pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|\alpha_n'''\right\|_0 \leq C_1.$$

**6 ème Etape:** Il existe une constante positive $C_2$, indépendant de $n \in \mathbb{N}$, sachant que

$$\left\|\beta_n'''\right\|_0 \leq C_2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.** Elle est analogue que celle de **l'étape 5**.

**7 ème Etape:** Il existe une constante positive $C_3$ indépendant de $n \in \mathbb{N}$, telle que

$$\left\|\alpha_n'\right\|_0 \leq C_3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.** Par le théorème des valeurs intermédiaires, on apour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\zeta_n \in ]0,1[$

telle que

$$\begin{aligned}
\left|\alpha_n'(\zeta_n)\right| &= |\alpha_n(1)-\alpha_n(0)| \\
&\leq |\alpha_n(1)|+|\alpha_n(0)| \\
&\leq 2\max\left(\|\alpha\|_0,\|\beta\|_0\right).
\end{aligned}$$

Alors pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\alpha_n'(t)\right| &= \left|\alpha_n'(\zeta_n)+\int_{\zeta_n}^{t}\alpha_n''(x)\,dx\right| \\
&\leq 2\max\left(\|\alpha\|_0,\|\beta\|_0\right)+\max\left(\left\|\alpha'\right\|_0,\left\|\beta'\right\|_0\right).
\end{aligned}$$

Donc si on pose par définition

$$C_3:=2\max\left(\|\alpha\|_0,\|\beta\|_0\right)+\max\left(\left\|\alpha'\right\|_0,\left\|\beta'\right\|_0\right),$$

on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\ \left|\alpha_n'(x)\right|\leq C_3.$$

Ce qui implique que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ \left\|\alpha_n'\right\|_0\leq C_3.$$

**8 ème Etape:** Il existe une constante positive $C_4$ indépendant de $n\in\mathbb{N}$, sachant que:

$$\left\|\beta_n'\right\|_0\leq C_4, \text{ for all } n\in\mathbb{N}.$$

**Preuve.** La preuve est similaire que celle de **l'étape7**.

Maintenant on vient de montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution minimale de (2.9).

Par les étapes 1, 5 et 7 et puisque $f$ est continue, il est claire que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $C^3([0,1])$ et $\left(\varphi_p\left(\alpha_n'''\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $C^1([0,1])$.

Alors d'après le théorème d'Ascoli-Arzela, il existe une sous suite $\left(\alpha_{n_j}\right)$ de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans$C^3([0,1])$ et $\left(\varphi_p\left(\alpha_{n_j}'''\right)\right)$ converge dans $C^1([0,1])$.

Posons

$$\alpha^* := \lim_{n_j \to +\infty} \alpha_{n_j}.$$

Mais par les étapes 1 et 3, on obtient que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha_*$. alors on a $\alpha_* = \alpha^*$ et de plus la suite est convergente dans $C^3([0,1])$ vers $\alpha_*$ et $\left(\varphi_p\left(\alpha_n'''\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^1([0,1])$ vers $\varphi_p\left(\alpha_*'''\right)$.

On a

$$\varphi_p\left(\alpha_{n+1}'''\right)(x) = \varphi_p\left(\alpha_{n+1}'''\right)(0) + \int_0^x \left(f\left(t,\alpha_n,\alpha_n'',h\left(\alpha_n'''\right)\right) + M\left(\alpha_{n-1}''(t) - \alpha_n''(t)\right)\right) dt,$$

et

$$\exists C_5 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \quad \left|f\left(t,\alpha_n,\alpha_n'',h\left(\alpha_n'''\right)\right) + M\left(\alpha_{n-1}''(t) - \alpha_n''(t)\right)\right| \le C_5.$$

Alors le théorème de convergene dominé de Lebesgue implique que

$$\varphi_p\left(\alpha_*'''\right)(x) = \varphi_p\left(\alpha_*'''\right)(0) + \int_0^x f\left(t,\alpha_*,\alpha_*'',h\left(\alpha_*'''\right)\right) dt.$$

Donc on obtient

$$\left(\varphi_p\left(\alpha_*'''\right)\right)'(x) = f\left(x,\alpha_*,\alpha_*'',h\left(\alpha_*'''\right)\right) \text{ pour tout } x \in (0,1). \tag{2.15}$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_{n+1}(0) - a_1\ \alpha_{n+1}'(0)\right) = \lim_{n\to+\infty} g_1(\alpha_n)$$

Alors

$$\alpha_*(0) - a_1\ \alpha_*'(0) = g_1(\alpha_*). \tag{2.16}$$

De même, on a

$$\alpha_*(1) + a_2\ \alpha_*'(0) = g_2(\alpha_*), \tag{2.17}$$

$$\alpha_*''(0) - a_3\ \alpha_*'''(0) = g_3\left(\alpha_*''\right), \tag{2.18}$$

et

$$\alpha_*''(1) + a_4\ \alpha_*'''(1) = g_4\left(\alpha_*''\right). \tag{2.19}$$

Donc par (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) et (2.19), on arrive que $\alpha_*$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\alpha_*'''\right)\right)'(x) = f\left(x, \alpha_*, \alpha_*'', h\left(\alpha_*'''\right)\right), \ x \in (0,1), \\ \alpha_*(0) - a_1\ \alpha_*'(0) = g_1(\alpha_*), \\ \alpha_*(1) + a_2\ \alpha_*'(0) = g_2(\alpha_*), \\ \alpha_*''(0) - a_3\ \alpha_*'''(0) = g_3(\alpha_*''), \\ \alpha_*''(1) + a_4\ \alpha_*'''(1) = g_4(\alpha_*''). \end{cases}$$

Maintenant on utilise une preuve similaire que celle du lemme 2.3, on montre que $\|\alpha'''\|_0 \leq K$. Par suite $h(\alpha_*''') = \alpha_*'''$ et par conséquent $\alpha_*$ est une solution du (2.9).

Autrement, montrons que $\widetilde{\alpha}$ est une autre solution de (2.9) sachant que $\alpha \leq \widetilde{\alpha} \leq \beta$ et $\beta'' \leq \widetilde{\alpha}'' \leq \alpha''$, alors $\alpha_* \leq \widetilde{\alpha}$ et$\alpha_*'' \leq \widetilde{\alpha}''$.

Puisque $\widetilde{\alpha}$ est une sous solution du (2.9), on prend $\gamma_0 = \widetilde{\alpha}$ et on dfinie une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ par

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(\gamma_{n+1}'''\right)\right)' = f\left(x, \gamma_n, \gamma_n'', h\left(\gamma_n'''\right)\right), \ 0 < x < 1, \\ \gamma_{n+1}(0) - a_1\gamma_{n+1}'(0) = g_1(\gamma_n), \\ \gamma_{n+1}(1) + a_2\gamma_{n+1}'(1) = g_2(\gamma_n), \\ \gamma_{n+1}''(0) - a_3\gamma_{n+1}'''(0) = g_3(\gamma_n''), \\ \gamma_{n+1}''(1) + a_4\gamma_{n+1}'''(1) = g_4(\gamma_n''). \end{cases}$$

Puisque $\gamma_0 = \widetilde{\alpha} \geq \alpha$, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \leq \gamma_n \text{ et } \gamma_n'' \leq \alpha_n''. \tag{2.20}$$

D'autre part, puisque $\widetilde{\alpha}$ est une solution du (2.9), on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_n = \widetilde{\alpha}. \tag{2.21}$$

Par (2.20) et (2.21), on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_n \leq \widetilde{\alpha} \text{ et } \widetilde{\alpha}'' \leq \alpha_n''.$$

quand $n \to +\infty$, on trouve que

$$\alpha_* \leq \widetilde{\alpha} \text{ et } \widetilde{\alpha}'' \leq \alpha_*''.$$

Ce qui implique que $\alpha_*$ est une solution minimale du (2.9).

D'une manière analogue on montre que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution maximale du (2.9).

Ce qui achève la preuve de notre résultat. ■

## 2.4 Exemples

Dans cette section on donne quelques exemples autour de notre résultat.

### 2.4.1 Exemple 1

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u'''\right)\right)' = h\left(x, u, u'', u'''\right),\ x \in (0,1), \\ u\left(0\right) = 0, \\ u\left(1\right) + a_2 u'\left(1\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} a_{i_1} u\left(\xi_{i_1}\right), \\ u''\left(0\right) - a_3 u'''\left(0\right) = 0, \\ u''\left(1\right) + a_4 u'''\left(1\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} a_{i_2} u\left(\xi_{i_2}\right), \end{cases} \tag{2.22}$$

avec $1 < p < 2$, $a_{i_j} \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m_2} a_{i_1} \leq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m_4} a_{i_2} \leq \dfrac{4}{\pi^2}$ et $\xi_{i_j} \in (0,1)$ pour tout $i = 1, 2, ..., m_j$ et pour tout $j = 1, 2$ et une fonction $h$ définie par

$$h\left(x, u, u'', u'''\right) = \left(\frac{p-1}{2}\right) u - 2\left(x+1\right) u''^2 - u\left|u'''\right|^{\frac{1}{p-1}} + \left(\frac{p-1}{2}\right) \sin(\frac{\pi}{2}x).$$

On pose par définition

$$\beta(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x), \ 0 \leq x \leq 1.$$

Pour tout $0 < x < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_p\left(\beta'''\right)\right)'(x) &= \left(-\left|\frac{\pi^3}{8}\cos(\frac{\pi}{2}x)\right|^{p-2}\frac{\pi^3}{8}\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)' \\
&= -\frac{\pi^{3(p-1)}}{8^{p-1}}\left(\left(\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)^{p-1}\right)' \\
&= \frac{\pi^{3(p-1)}}{8^{p-1}}\left[(p-1)\frac{\pi}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)^{p-2}\sin(\frac{\pi}{2}x)\right] \\
&> (p-1)\sin(\frac{\pi}{2}x) \\
&\geq h\left(x,\beta,\beta'',\beta'''\right).
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\forall\, x \in (0,1), \ \left(\varphi_p\left(\beta'''\right)\right)'(x) \geq h\left(x,\beta,\beta'',\beta'''\right). \tag{2.23}$$

D'autre part, on a

$$\beta(0) = 0 \geq 0, \tag{2.24}$$

$$\beta(1) + a_2\beta'(1) = 1 \geq \sum_{i=1}^{m_2} a_{i_1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_{i_2}\right), \tag{2.25}$$

$$\beta''(0) = 0 \leq 0, \tag{2.26}$$

et

$$\beta''(1) + a_4\beta'''(1) = -1 \leq -\frac{\pi^2}{4}\sum_{i=1}^{m_4} a_{i_2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_{i_4}\right). \tag{2.27}$$

Donc par (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) et (2.27), on remarque que $\beta$ est une sur solution du (2.22).

D'autre part, si on prend $\alpha \equiv 0$ qui est une sous solution du (2.22). Il est claire que tous les conditions du théorème 2.1 sont vérifiées. Alors il existe une solution minimale $u_*$ et une solution maximale $u^*$ du problème (2.22) telles que: $0 \leq u_* \leq u^* \leq \sin(\frac{\pi}{2}x)$, pour tout $x \in [0,1]$.

### 2.4.2 Exemple 2

On considère le problème

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u'''\right)\right)' = \widetilde{h}\left(x,u,u'',u'''\right),\ x\in(0,1), \\ u(0)=0, \\ u(1)+a_2u'(1)=\int\limits_0^1 h_1(x)\,u(x)\,dx, \\ u''(0)-a_3u'''(0)=0, \\ u''(1)+a_4u'''(1)=\int\limits_0^1 h_2(x)\,u''(x)\,dx, \end{cases} \tag{2.28}$$

avec $p>1$, $h_i:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues $i=1,2$ telle que $\int\limits_0^1 h_1(x)\,dx\leq 1$, $\int\limits_0^1 h_2(x)\,dx \geq 2^{p-1}\left(1+\dfrac{p}{p-1}a_4\right)$ et une fonction $\widetilde{h}$ définie par

$$\widetilde{h}\left(x,u,u'',u'''\right)=\frac{u^{\frac{p-1}{3p-2}}}{2}-2xu''^2-3xu^{\frac{p-1}{3p-2}}\left|u'''\right|^{\frac{1}{p-1}}+\frac{1}{2}.$$

on pose par définition

$$\beta(x)=\frac{(p-1)^3}{p(3p-2)(2p-1)}x^{\frac{3p-2}{p-1}},\ 0\leq x\leq 1.$$

Pour tout $0<x<1$, on a

$$\begin{aligned} \left(\varphi_p\left(\beta'''\right)\right)'(x) &= 1 \\ &\geq \beta(x)^{\frac{p-1}{3p-2}}-2x\left(\beta''(x)\right)^2-3x\beta(x)^{\frac{p-1}{3p-2}}\left|\beta'''(x)\right|^{\frac{1}{p-1}}+\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\forall\ x\in(0,1),\ \left(\varphi_p\left(\beta'''\right)\right)'(x)\geq \widetilde{h}\left(x,\beta,\beta'',\beta'''\right). \tag{2.29}$$

D'autre part, on a

$$\beta\left(0\right)=0\geq 0, \tag{2.30}$$

$$\beta\left(1\right)+a_{2}\beta'\left(1\right)=\frac{\left(p-1\right)^{3}}{p\left(3p-2\right)\left(2p-1\right)}\left[1+a_{2}\left(\frac{3p-2}{p-1}\right)\right]\geq\int\limits_{0}^{1}h_{1}\left(x\right)\beta\left(x\right)dx, \tag{2.31}$$

$$\beta''\left(0\right)=0\leq 0, \tag{2.32}$$

et

$$\beta''\left(1\right)+a_{2}\beta'''\left(1\right)=\frac{p-1}{p}+a_{4}\leq\int\limits_{0}^{1}h_{2}\left(x\right)\beta''\left(x\right)dx \tag{2.33}$$

Donc par (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) et (2.33), il est claire que $\beta$ est une sur solution du (2.28).

Par suite, si on prend $\alpha\equiv 0$ qui est une sous solution du (2.28). Donc les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifies. Alors il existe une solution minimale $u_{*}$ et une solution maximale $u^{*}$ du problème (2.28) telles que: $0\leq u_{*}\leq u^{*}\leq\frac{(p-1)^{3}}{p(3p-2)(2p-1)}x^{\frac{3p-2}{p-1}}$, pour tout $x\in[0,1]$.

# Chapitre 3

# Existence des solutions positives pour une équation différentielle quasilinéaire d'ordre quatre avec conditions aux limites contenant des points multiples

## 3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence des solutions positives avec leurs multiplicités par l'application du Théorème de Krasnoselskii's 0.1 pour le problèmes aux limites suivant:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'' = \lambda \ q\left(t\right) \ f\left(u\right), \ t \in \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) - a \ u'\left(0\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i \ u\left(\zeta_i\right), \\ u\left(1\right) = 0, \\ \varphi_p\left(u''\left(0\right)\right) - b \ \varphi_p\left(u''\right)'\left(0\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} \beta_i \varphi_p\left(u''\left(\eta_i\right)\right) \ , \\ u''\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y, p > 1, f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ q : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues, $\lambda > 0, a \geq 0, b \geq 0, \alpha_i \geq 0$ et $\zeta_i \in (0,1)$ pour tout $i = 1, ..., m_1$ et $\eta_i \in (0,1)$ pour tout $i = 1, ..., m_2$.

## 3.2 La fonction de Green

Dans ce paragraphe on va étudier quelques propriétés de la fonction de Green pour les problèmes:

$$\begin{cases} -u''(t) = h_1(t), \ 0 < t < 1, \\ u(0) - a\ u'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i u(\xi_i), \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} -u''(t) = h_2(t), \ 0 < t < 1, \\ u(0) - b\ u'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} \beta_i u(\eta_i), \\ u''(1) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues pour tout $i = 1, 2, a \geq 0, b \geq 0, \alpha_i \geq 0$ et $0 < \eta_i < 1$, pour tout $i = 1, ..., m_2$.

On impose les conditions suivantes .

**(H01)** $\sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i) < a + 1$.

**(H02)** $\sum\limits_{i=1}^{m_1} \beta_i (1 - \eta_i) < b + 1$.

**Lemme 3.1** *Supposons que la condition (**H01**) est satisfaite. Alors le problème (3.2) admet une unique solution u, qui est définie par*

$$u(t) = \frac{1}{1 + a - \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i)} \int_0^1 G_1(t,s)\ \ h_1(s)\, ds,$$

*avec*

$$G_1(t,s) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1-t) L_1(\xi_i, s) + \left(1 + a - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i)\right) L_1(t,s),$$

*et*

$$L_1(t,s)=\begin{cases}\frac{(t+a)(1-s)}{1+a} & si\ 0\le t\le s\le 1,\\ \frac{(s+a)(1-t)}{1+a} & si\ 0\le s\le t\le 1.\end{cases}$$

**Preuve:** Soit $t\in[0,1]$, on a

$$u(t)=\int_0^1 L_1(t,s)\ h_1(s)\,ds+\frac{1-t}{1+a}\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i u(\xi_i). \tag{3.4}$$

On pose par définition $A=\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i u(\xi_i)$, alors par (3.4), on obtient

$$A=\left(\frac{1+a}{1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)}\right)\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i\int_0^1 L_1(\xi_i,s)\ h_1(s)\,ds.$$

Ce qui implique que,

$$\begin{aligned}u(t)&=\int_0^1 L_1(\xi_i,s)\ h_1(s)\,ds+\left(\frac{1-t}{1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)}\right)\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i\int_0^1 L_1(\xi_i,s)\ h_1(s)\,ds\\&=\frac{1}{1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)}\int_0^1 G_1(t,s)\ h_1(s)\,ds.\end{aligned}$$

■

De même on a:

**Lemme 3.2** *Supposons que la condition (**H02**) est satisfaite. Alors le problème (3.3) admet une unique solution u, définie par*

$$u(t)=\frac{1}{1+b-\sum_{i=1}^{m_2}\beta_i(1-\eta_i)}\int_0^1 G_2(t,s)\ h_2(s)\,ds,$$

*avec*

$$G_2(t,s)=\sum_{i=1}^{m_2}\beta_i(1-t)\,L_2(\eta_i,s)+\left(1+b-\sum_{i=1}^{m_2}\beta_i(1-\eta_i)\right)L_2(t,s),$$

*et*

$$L_2(t,s) = \begin{cases} \frac{(t+b)(1-s)}{1+b} & si\ 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ \frac{(s+b)(1-t)}{1+b} & si\ 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**Lemme 3.3** *Soit $0 < \alpha < 1$, alors pour tout $\alpha \leq t \leq 1-\alpha$ et $0 \leq s \leq 1$, on a les propriétés suivantes*

*i)* $\alpha\ L_1(s,s) \leq L_1(t,s) \leq L_1(s,s)$,

*ii)* $\alpha\ L_2(s,s) \leq L_2(t,s) \leq L_2(s,s)$,

*iii)* $\alpha\ G_1(s,s) \leq G_1(t,s) \leq \frac{\alpha \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(1-\xi_i)\right)}{\left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(1-\xi_i)\right)} G_1(s,s)$,

*iv)* $\alpha\ G_2(s,s) \leq G_2(t,s) \leq \frac{\alpha \sum_{i=1}^{m_2} \beta_i + \left(1+b-\sum_{i=1}^{m_2} \beta_i(1-\eta_i)\right)}{\left(1+b-\sum_{i=1}^{m_2} \beta_i(1-\eta_i)\right)} G_2(s,s)$.

**Preuve:** Soit $0 < \alpha < 1$, tel que $\alpha \leq t \leq 1-\alpha$ et $0 \leq s \leq 1$

Si $t < s$, on a

$$\frac{L_1(t,s)}{L_1(s,s)} = \frac{t+a}{s+a} \geq \frac{\alpha+a}{1+a} \geq \alpha.$$

Ce qui donne

$$L_1(t,s) \geq \alpha\ L_1(s,s). \tag{3.5}$$

D'autre part si $s < t$, on a

$$\frac{L_1(t,s)}{L_1(s,s)} = \frac{1-t}{1-s} \geq \alpha.$$

Donc

$$\frac{L_1(t,s)}{L_1(s,s)} \geq \alpha. \tag{3.6}$$

Alors par (3.5) et (3.6), on a

$$L_1(t,s) \geq \alpha\ L_1(s,s). \tag{3.7}$$

De même on montre que

$$L_1(t,s) \leq L_1(s,s). \tag{3.8}$$

Donc par (3.7) et (3.8), on a:

$$\alpha\ L_1(s,s) \leq L_1(t,s) \leq L_1(s,s).$$

**ii)** La preuve de **ii)** est similaire à celle de **i)**.

**iii)** On a

$$\begin{aligned}
\frac{G_1(t,s)}{G_1(s,s)} &= \frac{(1-t)\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i L_1(\xi_i,s) + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)L_1(t,s)}{(1-s)\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i L_1(\xi_i,s) + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)L_1(s,s)} \\
&\geq \frac{\alpha\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i L_1(\xi_i,s) + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)\alpha\ L_1(s,s)}{\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i L_1(\xi_i,s) + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)L_1(s,s)} = \alpha.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$G_1(t,s) \geq \alpha\ G_1(s,s). \tag{3.9}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{G_1(t,s)}{G_1(s,s)} &= \frac{(1-t)\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i L_1(\xi_i,s) + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)L_1(t,s)}{(1-s)\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i L_1(\xi_i,s) + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)L_1(s,s)} \\
&\leq \frac{\alpha\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i L_1(\xi_i,s) + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)L_1(s,s)}{\left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)L_1(s,s)} \\
&\leq \frac{\alpha\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i + \left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)}{\left(1+a-\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)\right)}.
\end{aligned}$$

Si on pose par définition

$$\gamma_1 = \frac{\alpha \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i + \left(1 + a - \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i \left(1 - \xi_i\right)\right)}{\left(1 + a - \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i \left(1 - \xi_i\right)\right)},$$

on obtient

$$G_1(t,s) \leq \gamma_1 \; G_1(s,s). \tag{3.10}$$

Alors par (3.9) et (3.10), on a

$$\alpha \; G_1(s,s) \leq G_1(t,s) \leq \gamma_1 \; G_1(s,s).$$

**iv)** La preuve de est similaire à celle de **iii)**. ■

## 3.3 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques résultats qui seront utiles dans notre travail.

Considérons le problème:

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'' = \lambda \; q(t) \;\; f(u), \; t \in (0,1), \\ u(0) - a \; u'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i \; u(\zeta_i), \\ u(1) = 0, \\ \varphi_p\left(u''(0)\right) - b \; \varphi_p\left(u''\right)'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} \beta_i \varphi_p\left(u''(\eta_i)\right) \;, \\ u''(1) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

avec $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y, p > 1, f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \; q : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues, $\lambda > 0, a \geq 0, b \geq 0, \alpha_i \geq 0$ et $\zeta_i \in (0,1)$ pour tout $i = 1, ..., m_1$ et $\eta_i \in (0,1)$ pour tout $i = 1, ..., m_2$.

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.

**(H$_1$)** $\quad 0 < \int_0^1 G_1(s,s) \; q(s) \; ds < +\infty$.

**(H$_2$)** Il existe un entier $m \geq 3$ et $c \in \left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right)$ tels que $q(c) > 0$.

Soit $u$ une solution positive du problème (3.11). On définit

$$X = \{u/ \ u \in ([0,1])\} \text{ muni de la norme } \|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

Alors $(X, \|\|)$ est un espace de Banach.

**Définition 3.1** *Soit $E$ un espace de Banach réel. Un sous ensemble non vide $P \subset E$ est un cône si on a*

*(i) $\lambda u \in P$ pour tout $u \in P$ et tout $\lambda \geq 0$, et*

**Définition 3** *(ii) $u, -u \in P$ implique que $u = 0$.*

Soit l'ensemble:

$$K = \left\{ u \in X; u(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [0,1] \text{ et } \min_{t\in\left[\frac{1}{m},1-\frac{1}{m}\right]} u(t) \geq \frac{\alpha}{\gamma} \|u\| \right\}, \tag{3.12}$$

avec $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 3$ et $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2)$ où

$$\gamma_1 = \frac{\alpha \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i + \left(1 + a - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i)\right)}{\left(1 + a - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i)\right)},$$

et

$$\gamma_2 = \frac{\alpha \sum_{i=1}^{m_2} \beta_i + \left(1 + b - \sum_{i=1}^{m_2} \beta_i (1 - \eta_i)\right)}{\left(1 + b - \sum_{i=1}^{m_2} \beta_i (1 - \eta_i)\right)}.$$

On remarque que $K$ est un cône positif dans $X$.

On définit les opérateurs $T$ et $H$ par

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad X \to X \\ u \quad &\mapsto \quad (Tu)(s) = \int_0^1 \lambda \ \tilde{G}_1(x,s) \ q(x) \ f(u(x)) \ dx, \end{aligned} \tag{3.13}$$

avec

$$\tilde{G}_1(x,s) = \frac{1}{\left(1 + a - \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i)\right)} G_1(x,s)$$

et

$$\begin{aligned} H \quad &: \quad X \to X \\ u \quad &\mapsto \quad (Hu)(t) = \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s) \ \varphi_p^{-1}(u(s)) \ ds, \end{aligned} \tag{3.14}$$

avec

$$\tilde{G}_2(t,s) = \frac{1}{\left(1 + b - \sum\limits_{i=1}^{m_2} \beta_i (1 - \eta_i)\right)} \ G_2(t,s).$$

On a

$$\begin{aligned} HT \quad &: \quad X \to X \\ u \quad &\mapsto \quad (HTu)(t) = \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s) \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda \ \tilde{G}_1(x,s) \ q(x) \ f(u(x)) \ dx\right) \ ds. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Alors on a le résultat suivant.

**Lemme 3.4** *L'opérateur $HT$ est une application définie de $K$ dans $K$.*

**Preuve:** Soit $u \in K$, alors par (3.13) et (3.14), on a

$$\begin{aligned} (HTu)(t) &= \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s) \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda \ \tilde{G}_1(x,s) \ q(x) \ f(u(x)) \ dx\right) \ ds \\ &\leq \gamma_2 \int_0^1 \tilde{G}_2(s,s) \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda \ \tilde{G}_1(x,s) \ q(x) \ f(u(x)) \ dx\right) \ ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\|H(Tu)\| \leq \gamma \int_0^1 \tilde{G}_2(s,s) \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda \ \tilde{G}_1(x,s) \ q(x) \ f(u(x)) \ dx\right) \ ds.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
(H(Tu))(t) &= \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ f(u(x))\ dx\right) ds \\
&\geq \alpha \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ f(u(x))\ dx\right) ds \\
&\geq \frac{\alpha}{\gamma}\|H(Tu)\|.
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\min_{t\in\left[\frac{1}{m},1-\frac{1}{m}\right]} (H(Tu))(t) \geq \frac{\alpha}{\gamma}\|H(Tu)\|.$$

Alors, par la positivité de $G_1(t,s)$ et $G_2(t,s)$, il est clair que $u \in K$, et

$(H(Tu))(t) \geq 0$ pour $0 \leq t \leq 1$, donc $H(Tu) \in K$, ce qui implique que $HT : K \to K$. ■

**Remarque 3.1** *D'une façon similaire, on montre que $H$ est une application définie de $K$ dans $K$, ainsi que $T$ est définie de $K$ dans $K$.*

**Lemme 3.5** *Supposons que les conditions **($H_1$)** et**($H_2$)** sont satisfaites. Alors l'opérateur $HT : K \to K$ est complètement continu.*

**Preuve:** On montre en premier lieu que $T$ est complètement continu.

$n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on définis $q_n$ par

$$q_n(t) = \begin{cases} \inf\limits_{0\leq s\leq \frac{1}{n}} q(s) & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{n}, \\ q(t) & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1-\frac{1}{n}, \\ \inf\limits_{1-\frac{1}{n}\leq s\leq 1} q(s) & \text{si } 1-\frac{1}{n} < t \leq 1. \end{cases}$$

Soit l'opérateur $T_n : K \to K$ défini par

$$(T_n u)(t) = \int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1(x,t)\ q_n(x)\ f(u(x))\ dx.$$

Par l'application du théorème d'Ascoli-Arzela , l'opérateur $T_n : K \to K$ est complètement continu, pour tout $n \geq 2$.

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\tilde{G}_1(x,x)\ q(x)\ dx+\int_{1-\frac{1}{n}}^1\tilde{G}_1(x,x)\ q(x)\ dx\right]=0.$$

Alors pour tout $t\in[0,1]$, $R>0$ et $u\in\bar{K}_R$, avec $M=\max\limits_{0\leq x\leq R}f(x)$, on a

$$\begin{aligned}
|(T_nu)(t)-(Tu)(t)| &= \left|\int_0^1\lambda\left(q(x)-q_n(x)\right)\tilde{G}_1(x,s)\,f(u(x))\ dx\right| \\
&\leq \lambda.M\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\tilde{G}_1(x,x)\ q(x)\ dx+\int_{1-\frac{1}{n}}^1\tilde{G}_1(x,x)\ q(x)\ dx\right].
\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\tilde{G}_1(x,x)\ q(x)\ dx+\int_{1-\frac{1}{n}}^1\tilde{G}_1(x,x)\ q(x)\ dx\right]=0,$$

on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}|(T_nu)(t)-(Tu)(t)|=0.$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{t\in[0,1]}|(T_nu)(t)-(Tu)(t)|=0\ \text{ pour tout } u\in\bar{K}_R.$$

Ce qui ramène que l'opérateur complètement continu $T_n$ converge uniformément vers $T$ quand $n$ tend vers $+\infty$ pour chaque sous ensemble fermé de $K$, ce qui implique que l'opérateur $T$ est complètement continu.

Par suite, l'opérateur $HT:K\to K$ est complètement continu.

Le théorème suivant du point fixe est due à Krasnoselskii's [40] est utile dans la preuve de notre travail. ■

**Théorème 3.1** *Soit $C$ un cône défini dans un espace de Banach $E$. Supposons que $\Omega_1,\Omega_2$ sont deux sous ensembles ouverts de $E$ avec $0\in\Omega_1\subset\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$. Supposons que:*

$$S:C\cap\left(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1\right)\to C$$

*est un opérateur complètement continu tel que:*

$$i)\,\|Su\| \leq \|u\|, u \in C \cap \partial\Omega_1 \quad et \quad \|Su\| \geq \|u\|, u \in C \cap \partial\Omega_2\ , ou\ bien$$
$$ii)\,\|Su\| \geq \|u\|, u \in C \cap \partial\Omega_1, et \quad \|Su\| \leq \|u\|, u \in C \cap \partial\Omega_2.$$

*Alors, $S$ admet un point fixe dans $C \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$.*

## 3.4 Résultat principal

Dans ce qui suit, on utilise les notations suivantes:

$$f_0 = \lim_{u \to 0^+} \frac{f\ (u)}{u^{p-1}} \text{ et } f_\infty = \lim_{u \to +\infty} \frac{f\ (u)}{u^{p-1}},$$

et

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 \tilde{G}_2(s,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ dx\right) ds. \\ A_2 &= \int_0^1 \tilde{G}_2(s,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ dx\right) ds. \end{aligned}$$

**Théorème 3.2** *Supposons que les conditions (**H01**), (**H02**), (**H$_1$**) et (**H$_2$**) sont satisfaites. Si $0 < f_0 < +\infty$ et$0 < f_\infty < +\infty$, alors le problème (3.11) admet aux moins une solution positive pour tout $\lambda$ sachant que*

$$\frac{\varphi_p(m)}{\varphi_p(A_2)(f_\infty - \varepsilon)} < \lambda < \frac{1}{f_0\ \varphi_p(A_1\gamma_2)}.$$

**Preuve:** Soit $HT$ l'opérateur complètement continu donné par (3.15) défini sur le cône $K$ donné par (3.12).

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ avec

$$f\ (x) \leq (f_0 + \varepsilon)\ x^{p-1}, \text{ pour } 0 < x < r \tag{3.16}$$

Donc si $u \in \partial K_r$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
(H(Tu))(t) &= \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ f(u(x))\ dx\right) ds \\
&\leq \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ (f_0+\varepsilon)\ u^{p-1}(x)\ dx\right) ds \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}}\ r\ (f_0+\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ dx\right) ds \\
&\leq \lambda^{\frac{1}{p-1}}\ r\ (f_0+\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^1 \gamma_2 \tilde{G}_2(s,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ dx\right) ds \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}}\ r\ (f_0+\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}}\ A_1\gamma_2 \leq r \ \text{ si } \lambda \leq \frac{1}{(f_0+\varepsilon)\ \varphi_p(A_1\gamma_2)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\|H(Tu)\| \leq \|u\|.$$

Par suite, si on pose

$$\Omega_1 = \{u \in X : \|u\| < r\},$$

alors

$$\|H(Tu)\| \leq \|u\|, \text{ pour tout } u \in K \cap \partial\Omega_1. \tag{3.17}$$

D'autre part, si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{p-1}} = f_\infty$ et $0 < f_\infty < +\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que

$$f(x) \geq (f_\infty - \varepsilon)\ x^{p-1}, \text{ pour tout } x \geq R. \tag{3.18}$$

Soit $u \in K$ tel que $\|u\| = R_1 = \max(2r, \gamma m R)$, avec $m$ est donné par la formule $\mathbf{(H_2)}$. Alors pour tout $t \in \left[\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}\right]$, on a

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq \frac{1}{m\ \gamma}\|u\| \\
&\geq \frac{1}{m\ \gamma}\gamma m R \\
&= R.
\end{aligned}$$

Donc par (3.18), on a

$$f\ (u(t)) \geq (f_\infty - \varepsilon)\ u^{p-1}(t)\,, \text{ pour tout } t \in \left[\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right]. \tag{3.19}$$

Maintenant, soit $c \in \left[\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right]$ une constante donnée définie par la formule ($\mathrm{H}_2$).

Alors par (3.19), on a

$$\begin{aligned}
(H(Tu))(c) &= \int_0^1 \tilde{G}_2(c,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\, \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ f(u(x))\ dx\right) ds \\
&\geq \int_0^1 \tilde{G}_2(c,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \lambda\, \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ \ (f_\infty - \varepsilon)\ u^{p-1}(x)\ dx\right) ds \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}} (f_\infty - \varepsilon)^{\ \frac{1}{p-1}} \|u\| \int_0^1 \tilde{G}_2(c,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ dx\right) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \lambda^{\frac{1}{p-1}} (f_\infty - \varepsilon)^{\ \frac{1}{p-1}} R_1 \frac{1}{m} \int_0^1 \tilde{G}_2(s,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ dx\right) ds \\
&= \frac{R_1}{m} A_2 \lambda^{\frac{1}{p-1}} (f_\infty - \varepsilon)^{\ \frac{1}{p-1}} \\
&\geq R_1, \text{ si on a } \lambda \geq \frac{\varphi_p(m)}{\varphi_p(A_2)(f_\infty - \varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\|HTu\| \geq \|u\|\,.$$

Par suite si on pose,

$$\Omega_2 = \{u \in X : \|u\| < R_1\}\,,$$

alors

$$\|HTu\| \geq \|u\|\,, \text{ pour tout } u \in K \cap \partial\Omega_2. \tag{3.20}$$

Finalement de (3.17) et (3.20) d'après le théorème 0.1 , $HT$ admet un point fixe $u \in K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$ tel que $r \leq \|u\| \leq R_1$. Ce point fixe est une solution positive du problème (3.11). ■

**Corollaire 3.1** *Supposons que les conditions (**H01**), (**H02**), (**$H_1$**) et (**$H_2$**) sont satisfaites. Si $f_0 = 0$ et $f_\infty = +\infty$, alors le problème (3.11) admet au moins une solution positive pour* *tout* $\lambda > 0$.

**Théorème 3.3** *Supposons que les conditions (**H01**), (**H02**), (**H**$_1$) et (**H**$_2$) sont satisfaites. Si* $0 < f_0 < +\infty$ *et* $0 < f_\infty < +\infty$*, alors le problème (3.11) admet au moins une solution positive pour tout* $\lambda$ *tel que*

$$\frac{\varphi_p\,(m\gamma)}{f_0\ \varphi_p\,(A_2)} < \lambda < \frac{1}{f_\infty\ \varphi_p\,(A_1)}.$$

**Preuve:** Soit $HT$ l'opérateur complètement continu donné par (3.15) défini sur le cône $K$ donné par (3.12).

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $r > 0$ tel que

$$f\ \ (x) \geq (f_0 - \varepsilon)\ \ x^{p-1}, \text{ pour tout } 0 < x \leq r. \tag{3.21}$$

Soit $u \in K$ tel que $\|u\| = r$, alors $u\,(t) \geq \frac{\|u\|}{m\gamma}$ pour tout $t \in \left[\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right]$ et soit $c \in \left[\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right]$ la constante définie par la formule (H$_2$), alors par (3.21), on a

$$\begin{aligned}
(H\,(Tu))\,(c) &= \int_0^1 \tilde{G}_2\,(c,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1\,(x,s)\ \ q\,(x)\ \ f\,(u\,(x))\ \ dx\right)\ ds \\
&\geq \int_0^1 \tilde{G}_2\,(c,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \lambda\ \tilde{G}_1\,(x,s)\ \ q\,(x)\ \ (f_0-\varepsilon)\ \ u^{p-1}\,(x)\ \ dx\right)\ ds \\
&= \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}\,(f_0-\varepsilon)^{\ \frac{1}{p-1}}\,r}{m^2\gamma}\int_0^1 \tilde{G}_2\,(c,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \tilde{G}_1\,(x,s)\ \ q\,(x)\ \ dx\right)\ ds \\
&\geq \frac{r}{m^2\gamma}A_2\lambda^{\frac{1}{p-1}}\,(f_0-\varepsilon)^{\ \frac{1}{p-1}} \\
&\geq r, \text{ si on a } \lambda \geq \frac{\varphi_p\left(\frac{\gamma}{m}\right)}{\varphi_p\,(A_2)\,(f_0-\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|HTu\| \geq \|u\|\,.$$

Par suite, si on pose

$$\Omega_1 = \{u \in X : \|u\| < r\}\,,$$

alors

$$\|HTu\| \geq \|u\|\,, \text{ pour tout } u \in K \cap \partial\Omega_1. \tag{3.22}$$

D'autre part pour $\varepsilon > 0$, il existe $R_2 > 0$ telle que

$$f\ \ (x) \leq (f_\infty + \varepsilon)\ \ x^{p-1}, \text{ pour tout } x \geq R_2. \tag{3.23}$$

On considère deux cas.

**1er cas:** Si $f$ est bornée.

Alors il existe $M > 0$ telle que

$$f\ \ (x) \leq M, \text{ pour tout } x \in (0, +\infty). \tag{3.24}$$

Dans ce cas, on définit

$$R = \max\left\{2r, \varphi_p^{-1}(\lambda M)\, A_1\right\}.$$

Soit $u \in K$ tel que $\|u\| = R$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
(H(Tu))(t) &= \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\, \tilde{G}_1(x,s)\ \ q(x)\ \ f(u(x))\ \ dx\right)\ ds \\
&\leq \varphi_p^{-1}(\lambda M) \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(x,s)\ \ q(x)\ \ dx\right)\ ds \\
&\leq \varphi_p^{-1}(\lambda M)\, A_1 \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\|HTu\| \leq \|u\|, \text{ pour tout } u \in K \text{ tel que } \|u\| = R. \tag{3.25}$$

**2ème cas:** Si $f$ n'est pas bornée.

Soit $R > \max(2r, R_2)$ telle que

$$f\ \ (x) \leq f\ \ (R), \text{ pour tout } 0 < x \leq R. \tag{3.26}$$

Soit $u \in K$ telle que $\|u\| = R$. Alors par (3.26), on a

$$\begin{aligned}
(H(Tu))(t) &= \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\, \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ f(u(x))\ dx\right) ds \\
&\leq \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\, \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ f(R)\ dx\right) ds \\
&\leq \varphi_p^{-1}(\lambda f(R))\, A_1 \\
&\leq \varphi_p^{-1}(\lambda)\, \varphi_p^{-1}(f_\infty + \varepsilon) \cdot R \cdot A_1 \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

Par suite dans les autres cas, on pose

$$\Omega_2 = \{u \in X : \|u\| < R\},$$

on a

$$\|HTu\| \leq \|u\|, \text{ pour tout } u \in K \cap \partial\Omega_2. \tag{3.27}$$

Finalement par(3.25) et (3.27) d'après le théorème 0.1 , $HT$ admet un point fixe $u \in K \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ tel que $r \leq \|u\| \leq R$. Ce point fixe est une solution du problème (3.11). ■

**Corollaire 3.2** *Supposons que les conditions (**H01**), (**H02**), **(H$_1$)** and **(H$_2$)** sont satisfaites. Alors le problème (3.11) admet au moins une solution positive pour tout $\lambda > 0$.*

Maintenant, on impose les hypothèses suivantes:

**(H$_3$)** Il existe deux constantes $M > 0$ et $r > 0$ telles que $\min_{\frac{r}{m} \leq y \leq r} f(y) \geq M\ \varphi_p(r)$.

**(H$_4$)** Il existe deux constantes $N > 0$ et $R > 0$ telles que $\max_{0 \leq y \leq R} f(y) \leq N \varphi_p(R)$.

On a le résultat suivant.

**Théorème 3.4** *Supposons que les conditions (**H01**), (**H02**), **(H$_1$)**, **(H$_2$)**, **(H$_3$)** et**(H$_4$)** sont vérifiées et $f_0 = 0$. De plus on suppose que $N < M$ et $r < R$.*

*Alors pour tout $\lambda \in \left[\frac{\varphi_p\left(\frac{1}{A_2}\right)}{M}, \frac{\varphi_p\left(\frac{1}{A_1}\right)}{N}\right]$, le problème (3.11) admet au moins deux solutions positives.*

**Preuve:** Soit $HT$ l'opérateur complètement continu donné par (3.15) défini sur le cône $K$ donné par (3.12).

**1ère étape:** Puisque $f_0 = 0$, il existe $\tilde{r} \in (0, R)$ tel que

$$\frac{f\ \ (x)}{x^{p-1}} \leq \varepsilon, \text{ pour tout } 0 < x \leq \tilde{r},$$

avec $\varepsilon > 0$ satisfait $\varphi_p^{-1}(\lambda\varepsilon)\, A_1 \leq 1$.

si $u \in K$ et $\|u\| = \tilde{r}$ , alors on a

$$\begin{aligned}
(H\,(Tu))\,(t) &= \int_0^1 \tilde{G}_2\,(t,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1\,(x,s)\ \ q\,(x)\ \ f\,(u\,(x))\ \ dx\right)\ ds \\
&\leq \int_0^1 \tilde{G}_2\,(t,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1\,(x,s)\ \ q\,(x)\ \ \varepsilon\ u^{p-1}\,(x)\ \ dx\right)\ ds \\
&\leq \varphi_p^{-1}\,(\lambda\varepsilon)\ \ A_1\,\|u\| \\
&\leq \|u\|\,.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|HTu\| \leq \|u\|\,.$$

Par suite si on pose

$$\Omega_1 = \{u \in X : \|u\| < \tilde{r}\}\,,$$

alors

$$\|HTu\| \leq \|u\|\,, \text{ pour tout } u \in K \cap \partial\Omega_1. \tag{3.28}$$

**2ème étape:** Soit $u \in K$ tel que $\|u\| = r$. on a

$$f\ \ (u\,(t)) \geq M\ \ r^{p-1}, \text{ pour tout } t \in \left[\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right]. \tag{3.29}$$

Soit $c \in \left[\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right]$ une constante donnée par l'hypothèse ($\mathrm{H}_2$), alors par (3.29), on a

$$\begin{aligned}
(H\,(Tu))\,(c) &= \int_0^1 \tilde{G}_2\,(c,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1\,(x,s)\ \ q\,(x)\ \ f\,(u\,(x))\ \ dx\right)\ ds \\
&\geq \frac{\varphi_p^{-1}\,(\lambda M)\,r}{A_2} \\
&\geq r.
\end{aligned}$$

Ce qui donne,

$$\|HTu\| \geq \|u\|.$$

par suite si on pose

$$\Omega_2 = \{u \in X : \|u\| < r\}.$$

alors

$$\|HTu\| \geq \|u\|, \text{ pour tout } u \in K \cap \partial\Omega_2. \tag{3.30}$$

**3 ème étape:** Soit $u \in K$ tel que $\|u\| = R$. on a

$$f\ (u(t)) \leq N \cdot \varphi_p(R), \text{ pour tout } t \in [0,1],$$

alors on a

$$\begin{aligned} (H(Tu))(c) &= \int_0^1 \tilde{G}_2(c,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \lambda\ \tilde{G}_1(x,s)\ q(x)\ f(u(x))\ dx\right) ds \\ &\leq \varphi_p^{-1}(\lambda N)\ R\ A_1 \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Par suite

$$\|HTu\| \geq \|u\|.$$

si on pose

$$\Omega_3 = \{u \in X : \|u\| < R\},$$

alors

$$\|HTu\| \geq \|u\|, \text{ for } u \in K \cap \partial\Omega_3. \tag{3.31}$$

Par les étapes **étape 1, 2, 3** du Théorème 3.4, il est clair que le problème (3.11) admet au moins deux solutions positives $u_1 \in K \cap \left(\bar{\Omega}_3 \backslash \Omega_2\right)$ et $u_2 \in K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_3\right)$. ■

**Théorème 3.5** *Supposons que les conditions **(H01)**, **(H02)**, **(**$H_1$**)**, **(**$H_2$**)**, **(**$H_3$**)** et **(**$H_4$**)** sont vérifiées et* $f_\infty = +\infty$. *De plus supposons que* $N < M$ *et* $r < R$. *Alors pour tout*

$\lambda \in \left[ \frac{\varphi_p\left(\frac{1}{A_2}\right)}{M}, \frac{\varphi_p\left(\frac{1}{A_1}\right)}{N} \right]$, *le problème (3.11) admet au moins deux solutions positives.*

# Chapitre 4

# Existence des solutions positives pour une équation de poutre $p-$Kirchhoff avec conditions aux limites contenant des points multiples

## 4.1 Introduction

On considère l'équation $p-$Kirchhoff avec des conditions aux limites nonlocales

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u''\right)\right)'' - M\left(\int_0^1 \left|u'\right|^p dx\right)\varphi_p\left(u''\right) = q\left(x\right) f\ \left(x, u, u'\right),\ \forall\ 0 < x < 1, \\ u\left(0\right) - a_1 u'\left(0\right) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i u\left(\xi_i\right) \\ u\left(1\right) = 0 \\ \varphi_p\left(u''\left(0\right)\right) - a_2\left(\varphi_p u''\right)'\left(0\right) = \sum_{i=1}^{m_2} \beta_i\left(\varphi_p u''\left(\eta_i\right)\right) \\ u''\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $q : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $p > 1, a_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \alpha_i \geq 0$ et $\xi_i \in (0,1)$ pour tout $i = 1, 2, ..., m_1$, $\beta_i \geq 0$ et $\eta_i \in (0,1)$ pour tout $i = 1, 2, ..., m_2$.

L'opérateur $M\left(\int_0^1 |u'|^2 dx\right) \varphi_p(u'')$, avec $p = 2$, intervient dans l'équation classique hyperbolique de Kirchhoff suivante:

$$P\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{4.2}$$

qui a été proposé par Kirchhoff [36] pour une meilleur description du mouvement d'une corde tendue.

L'équation (4.2) étendre l'équation d'onde classique d'Alembert's en considérant les effets du change de la longueur des cordes pendant les vibrations. Les paramètres dans (4.2) ont les significations suivantes:

$L$ est la longueur de la corde, $h$ est l'aire de la section droite, $E$ est le module de Young du matériel, $P$ est la densité de la masse et $P_0$ est la tension initiale.

Les premières études classiques du problème de Kirchhoff se trouvent dans Bernstein [11] et Pohozaev [54] . Cependant, les problèmes de Kirchhoff ont reçu beaucoup d'attentions seulement après le travail de Lions [43], où une analyse fonctionnelle a été proposé de l'attaquer.

Dans [61], Woinowsky-Kreiger propose le model de faisceau de Kirchhoff suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E.I}{\tilde{A}}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left(H + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{4.3}$$

où $I$ est le moment d'inertie de la section droite, $\tilde{A}$ est l'aire de la section droite et $H$ est la tension en ropos.

L'équation (4.3) est un modèle de la diviation transversale $u(x,t)$ d'une poutre extensible de longueur naturelle $l$ dont les extrémités sont tenues une partie de distance fixée. Le terme nonlinéaire entre crochets représente le changement dans la tension de la poutre du à sa extensibilité.

Parmis les premières analyses mathématiques de l'équation poutre de KIRCHHOFF

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-M\left(\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}(s,t)\right|^2 ds\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

ont été données par BALL [6]. Après ce travail les problèmes de la poutre du type de KIRCHHOFF ont été étudiés en utilisant des différentes méthodes par plusieurs auteurs ([12], [31] et [45]).

L'étude des problèmes aux limites à points multiples a été initialisée par IL'IN et MOISSEV [34]. GUPTA[33] a étudié un problème aux limites de trois points pour une équation différentielle ordinaire nonlinéaire.

L'étude de l'existence des solutions pour une classe des problèmes aux limites nonlinéaires à points multiples ont été étudiés par plusieurs auteurs en utilisant des différentes méthodes, citons par exemple: la méthode des sous et sur solutions, les méthodes variationelles, l'alternative nonlinéaire de LERAY-SCHAUDER, la théorie du degré topologique et le théorème du point fixe dans les cônes. Pour cela nous citons les références suivantes:

( [9], [15], [17], [18], [20], [21], [28], [29], [41], [32], [62] et [63]) qui donnes quelques résultats pour les problèmes aux limites à points multiples.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence de trois solutions positives du problème (4.1) en utilisant le théorème du point fixe d' AVERY et PETERSON. Ce travail est une généralisation de celui de T.F.MA [45].

## 4.2 Préliminaires

On considère les problèmes suivants

$$\begin{cases} -u''=h_1(t),\ 0<t<1 \\ u(0)-a_1u'(0)=\sum\limits_{i=1}^{m_1}\alpha_i u(\xi_i), \\ u(1)=0, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} -u'' = h_2(t), \ 0 < t < 1 \\ u(0) - a_2 u'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m_2} \beta_i u(\eta_i), \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

où $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues pour tout $i = 1, 2, a_i \geq 0$, pour $i = 1, 2, \alpha_i \geq 0$ et $0 < \xi_i < 1$, pour tout $i = 1, ..., m_1$, $\beta_i \geq 0$ et $0 < \eta_i < 1$, pour tout $i = 1, ..., m_2$.

Dans le reste du travail on suppose les hypothèses suivantes:

**(H01)** $1 - \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i) > 0.$

**(H02)** $1 - \sum\limits_{i=1}^{m_2} \beta_i (1 - \eta_i) > 0.$

**Lemme 4.1** *Supposons que la condition* ***(H01)*** *est satisfaite. Alors le problème aux limlites (4.4) admet une unique solution positive , donnée par*

$$u(t) = \frac{1}{1 + a_1 - \sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i)} \int_0^1 G_1(t,s) \ \ h_1(s) ds,$$

*avec*

$$G_1(t,s) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1-t) \ \ L_1(\xi_i, s) + \left(1 + a_1 - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (1 - \xi_i)\right) L_1(t,s),$$

*et*

$$L_1(t,s) = \begin{cases} \frac{(t+a_1)(1-s)}{1+a_1} & si \ 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ \frac{(s+a_1)(1-t)}{1+a_1} & si \ 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**Preuve:** La preuve est similaire à celle du lemme 3.1 du **chapitre3**. ■

De même on a le résultat suivant.

**Lemme 4.2** *Supposons que la condition* ***(H02)*** *est satisfaite. Alors le problème aux limlites (4.5) admet une unique solution positive , donnée par*

$$u(t) = \frac{1}{1 + a_2 - \sum\limits_{i=1}^{m_2} \beta_i (1 - \eta_i)} \int_0^1 G_2(t,s) \ \ h_2(s) ds,$$

*avec*

$$G_2(t,s) = \sum_{i=1}^{m_2} \beta_i (1-t) \ \ L_2(\eta_i, s) + \left(1 + a_2 - \sum_{i=1}^{m_2} \beta_i (1 - \eta_i)\right) L_2(t,s),$$

*et*

$$L_2(t,s) = \begin{cases} \frac{(t+a_2)(1-s)}{1+a_2} & si\ 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ \frac{(s+a_2)(1-t)}{1+a_2} & si\ 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Maintenant, on définit l'équation

$$u(t) = \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)\left(-M\left(\int_0^1 |u'|^p\,dx\right)\ \varphi_p(u''(x)) + q(x)\,f(x,u,u')\right)dx\right)ds, \tag{4.6}$$

avec

$$\tilde{G}_1(t,s) = \frac{1}{1+a_1-\sum\limits_{i=1}^{m_1}\alpha_i(1-\xi_i)}G_1(t,s) \quad \text{pour tout } t\in[0,1] \text{ et } s\in[0,1],$$

et

$$\tilde{G}_2(t,s) = \frac{1}{1+a_2-\sum\limits_{i=1}^{m_2}\beta_i(1-\eta_i)}G_2(t,s) \quad \text{pour tout } t\in[0,1] \text{ et } s\in[0,1].$$

Il est claire que $u \in C^2([0,1])$ est une solution de (4.1) si et seulement si $u \in C^2([0,1])$ est une solution de (4.6).

## 4.3 Propriétés et définitions

Dans cette section, on présente les définitions nécéssaires de la théorie des cônes dans les espaces de Banach, et on donne le théorème des trois points fixes de Avery et Peterson 0.2 pour des opérateurs définis dans des cônes des espaces de Banach.

**Définition 4.1** *Soit $E$ un espace de Banach réel. Un sous ensemble non vide $P \subset E$ est un cône si on a*

*(i) $\lambda u \in P$ pour tout $u \in P$ et tout $\lambda \geq 0$, et*

**Définition 4** *(ii) $u, -u \in P$ implique que $u = 0$.*

**Définition 4.2** *On dit qu'une application $\alpha$ est positive, continue et concave sur un cône $P$ dans un espace de Banach $E$ si $\alpha : P \to \mathbb{R}_+$ est continue et*

$$\alpha(tx + (1-t)y) \geq t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y),\ pour\ tout\ x, y \in P\ et\ t \in [0,1].$$

*D'une façon similaire, une application $\beta$ est positive, continue et concave sur un cône $P$ dans un espace de Banach $E$ si $\beta : P \to \mathbb{R}_+$ est continue et*

$$\beta\left(tx+(1-t)\,y\right) \leq t\beta\left(x\right)+(1-t)\,\beta\left(y\right), \text{ pour tout } x,y \in P \text{ et } t \in [0,1]\,.$$

*Soient $\gamma$ et $\theta$ des fonctions continues connexes définies dans $P$, $\alpha$ une fonction concave dans $P$, et $\psi$ est une fonction positive continue dans $P$. Alors pour les nombres $a,b,c$ et $d$, on définit les ensembles convexes suivants:*

$$\begin{aligned}
&P\left(\gamma,d\right)=\left\{u\in P/\ \gamma\left(u\right)<d\right\},\\
&\overline{P\left(\gamma,d\right)}=\left\{u\in P/\ \gamma\left(u\right)\leq d\right\},\\
&P\left(\gamma,\alpha,b,d\right)=\left\{u\in P/\ b\leq\alpha\left(u\right)\ \text{ et } \gamma\left(u\right)\leq d\right\},\\
&P\left(\gamma,\theta,\alpha,b,c,d\right)=\left\{u\in P/\ b\leq\alpha\left(u\right)\ ,\theta\left(u\right)\leq c \text{ et } \gamma\left(u\right)\leq d\right\},
\end{aligned}$$

*et l'ensemble convexe fermé*

$$R\left(\gamma,\psi,a,d\right)=\left\{u\in P/\ a\leq\psi\left(u\right)\ \text{ et } \gamma\left(u\right)\leq d\right\}.$$

*Le théorème du point fixe suivant est due d'Avery et Peterson, qui est utile dans notre travail.*

**Théorème 4.1** ***( Avery-Peterson )****Soit $P$ le cône réel dans un espace de banach $E$ et $\gamma,\alpha,\theta,\psi$ sont des fonctions positives définies dans $P$. Supposons que $\gamma,\theta$ sont convexes et $\alpha$ est concave. Si de plus $\psi$ satisfait $\psi\left(\lambda u\right)\leq\lambda\psi\left(u\right)$ pour $0\leq\lambda\leq1$ et pour des nombres positifs $M$ et $d$ tels que:*

$$\alpha\left(u\right)\leq\psi\left(u\right)\ \text{ et }\ \|u\|\leq M\gamma\left(u\right),\forall u\in\overline{P\left(\gamma,d\right)}$$

*Soit $T:\overline{P\left(\gamma,d\right)}\to\overline{P\left(\gamma,d\right)}$ un opérateur complètement continu et supposons qu'ils existent des nombres positifs $a,b$ et $c$ avec $a<b$ tels que:*

*(i)* $\left\{u\in P\left(\gamma,\theta,\alpha,b,c,d\right)/\ \alpha\left(u\right)>b\right\}\neq\emptyset$ *et* $\alpha\left(Tu\right)>b$ *pour* $u\in P\left(\gamma,\theta,\alpha,b,c,d\right)$,

*(ii)* $\alpha\left(Tu\right)>b$ *pour* $u\in P\left(\gamma,\alpha,b,d\right)$ *avec* $\theta\left(Tu\right)>c$,

*(iii)* $0\notin R\left(\gamma,\psi,a,d\right)$ *et* $\psi\left(Tu\right)<a$ *pour* $u\in R\left(\gamma,\psi,a,d\right)$ *avec* $\psi\left(u\right)=a$.

*Alors $T$ admet au moins trois points fixes $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\gamma, d)}$ tels que:*

$$\begin{aligned}
&\gamma(u_i) \leq d, \text{ pour } i = 1,2,3, \\
&b < \alpha(u_1), \\
&a < \psi(u_2), \text{ pour } \alpha(u_2) < b,
\end{aligned}$$

*et*

$$\psi(u_3) < a.$$

## 4.4 Existence de trois solutions positives du problème (4.1)

Dans ce paragraphe, on donne quelques lemmes et résultats qui sont utiles dans la preuve de nos résulats.

Soit $u$ une solution du problème (4.1) définie par

$$u(t) = \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)\left(-M\left(\int_0^1 \left|u'\right|^p dx\right)\ \varphi_p\left(u''(x)\right) + q(x) f\left(x,u,u'\right)\right) dx\right) ds,$$

On pose

$$X = \left\{u \ / \ u \in C^2([0,1])\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\| = \max\left(\max_{t\in[0,1]}|u(t)|, \max_{t\in[0,1]}\left|u'(t)\right|, \max_{t\in[0,1]}\left|u''(t)\right|\right).$$

Alors $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach.

On définit l'ensemble $P$ par

$$P = \{u \in X \ / \ u \geq 0 \text{ et } u \text{ est concave dans } [0,1]\},$$

alors il est claire que $P$ est un cône positif dans $X$.

Soit l'opérateur $T : P \to X$ défini par

$$(Tu)(t) = \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)\left(-M\left(\int_0^1 \left|u'\right|^p dx\right)\ \varphi_p\left(u''(x)\right) + q(x) f\left(x,u,u'\right)\right) dx\right) ds.$$

Dans la preuve de notre travail, on utilise les lemmes suivants.

**Lemme 4.3** *Soit $u \in P$ et $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, alors on a*

$$u(t) \geq \varepsilon \max_{t \in [0,1]} |u(t)|, \text{ pour tout } t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon].$$

**Preuve:** Soit $u \in P$ et $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, alors on a

$$u(t_0) = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

On distingue deux cas.

**1er cas:** $t_0 \in [0, \varepsilon]$.

Puisque $u$ est concave, alors pour tout $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ tel que $t \neq t_0$, on a

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \geq \frac{u(1) - u(t_0)}{1 - t_0}$$

Ce qui implique que,

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq u(t_0) + \left(\frac{u(1) - u(t_0)}{1 - t_0}\right)(t - t_0) \\
&\geq u(t_0) - \frac{u(t_0)}{1 - t_0}(t - t_0) \\
&= \left(\frac{1 - t}{1 - t_0}\right) u(t_0) \\
&> (1 - t)\, u(t_0) \\
&\geq \varepsilon\, u(t_0) \\
&= \varepsilon \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.
\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\forall t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon], u(t) \geq \varepsilon \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

**2ème cas:** $t_0 \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

**a)** $t \in [\varepsilon, t_0[$.

Par suite, on a

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} \leq \frac{u(0)-u(t_0)}{-t_0}.$$

Ce qui implique que,

$$\begin{aligned} u(t) &\geq u(t_0) + \left(\frac{u(t_0)-u(0)}{t_0}\right)(t-t_0) \\ &\geq \frac{t}{t_0}\, u(t_0) \\ &\geq \varepsilon\, u(t_0). \end{aligned}$$

D'où

$$\forall t \in [\varepsilon, t_0[\,, u(t) \geq \varepsilon \max_{t\in[0,1]} |u(t)|. \tag{4.7}$$

**b)** $t \in ]t_0, 1-\varepsilon]$

De même, on a

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} \geq \frac{u(1)-u(t_0)}{1-t_0}.$$

D'où

$$\begin{aligned} u(t) &\geq u(t_0) + \left(\frac{u(1)-u(t_0)}{1-t_0}\right)(t-t_0) \\ &\geq u(t_0) + u(t_0)\left(\frac{t_0+\varepsilon-1}{1-t_0}\right) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{1-t_0}\, u(t_0) \\ &\geq \varepsilon\, u(t_0). \end{aligned}$$

Donc

$$\forall t \in ]t_0, 1-\varepsilon]\,, u(t) \geq \varepsilon \max_{t\in[0,1]} |u(t)|. \tag{4.8}$$

Par (4.7) et (4.8), on trouve que

$$\forall t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]\,, u(t) \geq \varepsilon \max_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

**3ème cas:** $t_0 \in ]1-\varepsilon, 1]$.

Soit $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, on a

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \geq \frac{u(0) - u(t_0)}{-t_0}.$$

Ce qui implique que,

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq u(t_0) + \left( \frac{u(t_0) - u(0)}{t_0} \right)(t - t_0) \\
&\geq \frac{t}{t_0}\, u(t_0) \\
&\geq t\, u(t_0) \\
&\geq \varepsilon\, u(t_0).
\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\forall t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon], u(t) \geq \varepsilon \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

Ce qui achève la preuve du lemme. ■

**Lemme 4.4** *Soit* $u \in P$ *tel que* $u(1) = 0$*, alors on a*

$$\max_{t \in [0,1]} |u(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} \left| u'(t) \right|.$$

**Preuve:** Soit $u \in P$ tel que $u(1) = 0$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$u(t) = -\int_t^1 u'(s)\, ds.$$

Ce qui implique que,

$$\max_{t \in [0,1]} |u(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} \left| u'(t) \right|.$$

■

**Lemme 4.5** *Soit* $u \in P$ *tel que* $u(1) = 0$*, alors on a*

$$\max_{t \in [0,1]} \left| u'(t) \right| \leq \max_{t \in [0,1]} \left| u''(t) \right|.$$

**Preuve:** Soit $u \in P$ tel que $u(1) = 0$, alors pour tout $t \in [0,1]$ ,on a

$$\begin{aligned} u'(t) &= u'(1) + \int_1^t u''(s)\,ds \\ &\leq \int_t^1 u''(s)\,ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\max_{t\in[0,1]} \left|u'(t)\right| \leq \max_{t\in[0,1]} \left|u''(t)\right|.$$

■

Dans la suite, on introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned} A &= \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)(1+q(x))\,dx\right) ds, \\ B &= \max_{0\leq s\leq 1} \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)(1+q(x))\,dx\right) ds, \end{aligned}$$

et

$$C = \min(C_1, C_2),$$

avec

$$C_1 = \int_0^1 \tilde{G}_2(\varepsilon,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)(q(x))\,dx\right) ds,$$

et

$$C_2 = \int_0^1 \tilde{G}_2(1-\varepsilon,s)\ \ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)(q(x))\,dx\right) ds.$$

Le résultat de notre travail est le suivant.

**Théorème 4.2** *On suppose que **(H01),(H02)** sont satisfaites et ils existent quatres nombres positifs $a, b, d$ et $m$, tels que $0 < a < b < d$. On suppose de plus que les fonctions $f$ et $M$*

*vérifient les conditions suivantes:*

***(H1)*** $M(t) \leq \min\left(\frac{1}{B^{p-1}}, \frac{a^{p-1}}{A^{p-1}d^{p-1}}\right)$ *si* $t \in [0, d^p]$ ;

***(H2)*** $f(t,u,v) < \frac{a^{p-1}}{A^{p-1}}$ *si* $(t,u,v) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \times \left[b, \frac{b}{2\varepsilon^2}\right][-d,d]$ ;

***(H3)*** $f(t,u,v) > \frac{b^{p-1}}{C^{p-1}}$ *si* $(t,u,v) \in [0,1] \times [0,a][-d,d]$ ;

***(H4)*** $f(t,u,v) < \frac{d^{p-1}}{B^{p-1}}$ *si* $(t,u,v) \in [0,1] \times [0,d][-d,d]$ .

*Alors le problème (4.1) admet au moins trois solutions positives* $u_1, u_2, u_3$ *telles que*

$$\|u_i\| \leq d, \text{ pour } i = 1,2,3, b < \min_{\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon} u_1(t), a < \max_{0 \leq t \leq 1} |u_2(t)|,$$

*avec*

$$\min_{\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon} u_2(t) < b \text{ et } \max_{0 \leq t \leq 1} |u_3(t)| < a.$$

**Preuve:** On montre que l'opérateur $T$ satisfait aux conditions du théorème 4.1 d'Avery et Peterson ce qui affirme l'existence des trois points fixes de $T$.

Soit $u \in P$, on a

$$(Tu)(t) = \int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)\left(-M\left(\int_0^1 \left|u'\right|^p dx\right)\ \varphi_p\left(u''(x)\right) + q(x) f\left(x,u,u'\right)\right)dx\right)ds.$$

Puisque $u$ est concave, $M \geq 0, f \geq 0$ et $q \geq 0$, il est claire que $(Tu)(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0,1]$, et

$$\begin{aligned}(Tu)''(t) &= -\varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(t,x)\left(-M\left(\int_0^1 \left|u'\right|^p dx\right)\ \varphi_p\left(u''(x)\right) + q(x) f\left(x,u,u'\right)\right)dx\right)\\ &\leq 0, \text{ pour tout } t \in [0,1].\end{aligned}$$

Alors, on a $TP \subset P$.

utilisant la même preuve lemme 3.5 du chapitre 3, on montre que $T : P \to P$ est completement continu.

On pose:

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= \|u\|, \\
\psi(u) &= \theta(u) = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|, \\
\alpha(u) &= \min_{t\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} |u(t)|.
\end{aligned}$$

Soit $u \in \overline{P(\gamma, d)}$ , alors on a $0 \leq u(t) \leq d$ et $|u'(t)| \leq d$, pour tout $t \in [0,1]$ et $\|u\| \leq d$. Les hypothèses **(H1)** et **(H4)** donnent

$$\begin{aligned}
\gamma(Tu) &= \max_{0\leq t\leq 1} \left\|(Tu)''(t)\right\| \\
&= \max_{0\leq t\leq 1} -(Tu)''(t) \\
&= \max_{0\leq t\leq 1} \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(t,x)\left(-M\left(\int_0^1 |u'|^p\,dx\right)\ \varphi_p(u''(x)) + q(x)\, f(x,u,u')\right)\right) dx \\
&\leq \tfrac{d}{B} \max_{0\leq t\leq 1} \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(t,x)\,(\ 1+q(x))\,dx\right) \\
&= d.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $T : \overline{P(\gamma, d)} \to \overline{P(\gamma, d)}$ est complètement continu.

Pour vérifier la condition **(i)** du théorème 4.1, on pose

$$u(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(b + \frac{b}{\varepsilon}\right)(1-t)\,,\text{ pour tout } t \in [0,1]$$

On a

$$\begin{aligned}
\alpha(u(t)) &= \min_{\varepsilon\leq\ t\ \leq 1-\varepsilon} u(t) = \left(b + \frac{b}{\varepsilon}\right) > b, \\
\gamma(u(t)) &= \max_{0\leq t\leq 1} \left|u''(t)\right| = 0 < d, \\
\theta(u(t)) &= \max_{0\leq t\leq 1} u(t) = \frac{b}{\varepsilon} + \frac{b}{\varepsilon^2} < \frac{b}{2\varepsilon^2},
\end{aligned}$$

alors

$$u(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(b + \frac{b}{\varepsilon}\right)(1-t) \in P\left(\gamma, \theta, \alpha, \frac{b}{2\varepsilon^2}, d\right),$$

et

$$\alpha(u(t)) > b.$$

Par suite

$$\left\{u \in P\left(\gamma, \theta, \alpha, \frac{b}{2\varepsilon^2}, d\right) : \alpha\left(u\right) > b\right\} \neq \varnothing.$$

Soit $u \in P\left(\gamma, \theta, \alpha, \frac{b}{2\varepsilon^2}, d\right)$, alors on a

$$\alpha\left(u\right) \geq b, \theta\left(u\right) \leq \frac{b}{2\varepsilon^2} et \gamma\left(u\right) \leq d.$$

mais

$$\begin{aligned}\alpha\left(Tu\right) &= \min_{\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon} \left|\left(Tu\right)\left(t\right)\right| \\ &= \min_{\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon} \left(Tu\right)\left(t\right) \\ &= \min_{\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon} \left(\left(Tu\right)\left(\varepsilon\right), \left(Tu\right)\left(1-\varepsilon\right)\right)\end{aligned}$$

Par **(H3)**, on trouve que

$$\begin{aligned}\left(Tu\right)\left(\varepsilon\right) = \int_0^1 \tilde{G}_2\left(\varepsilon, s\right) \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1\left(s, x\right)\left(-M\left(\int_0^1 \left|u'\right|^p dx\right)\ \varphi_p\left(u''\left(x\right)\right) + q\left(x\right) f\left(x, u, u'\right)\right) dx\right) ds. \\ \geq \frac{b}{C} \cdot C \\ = b.\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\left(Tu\right)\left(\varepsilon\right) \geq b. \tag{4.9}$$

De même, on montre que

$$\left(Tu\right)\left(1-\varepsilon\right) \geq b. \tag{4.10}$$

Par (4.9) et (4.10), on a

$$\alpha\left(Tu\right) \geq b.$$

Ce qui affirme que la condition (i) du théorème 4.1 est satisfaite.

Maintenant, on va vérifer la condition (ii) du théorème 4.1 .

Soit $u \in P\left(\gamma, \alpha, b, d\right)$ tel que $\theta\left(Tu\right) > \frac{b}{2\varepsilon^2}$.

Par le lemme 4.3, on a

$$\begin{aligned}\alpha(Tu) &\geq \varepsilon\,\theta(Tu)\\ &> \frac{b}{2\varepsilon}\\ &> b.\end{aligned}$$

Ce qui implique que la condition (ii) du théorème 4.1 est vérifiée.

Finalement on vérifie condition (iii) du théorème 4.1 est vérifie.

Pour cela, soit $u \in R(\gamma, \psi, a, d)$. Puisque $\psi(0) = 0 < a$, il est claire que

$$0 \notin R(\gamma, \psi, a, d).$$

Soit $u \in R(\gamma, \psi, a, d)$, alors par les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, on a

$$\begin{aligned}\psi(Tu) &= \max_{0\leq t\leq 1}|(Tu)(t)|\\ &= \max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)\left(-M\left(\int_0^1 |u'|^p\,dx\right)\ \varphi_p(u''(x)) + q(x)\,f(x,u,u')\right)dx\right)ds,\\ &< \frac{a}{A}\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 \tilde{G}_2(t,s)\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 \tilde{G}_1(s,x)(1+q(x))\,dx\right)ds,\\ &= a.\end{aligned}$$

Donc, la condition (iii) du théorème 4.1 est satisfaite.

Par suite, ils existent trois solutions positives $u_1, u_2, u_3$ du problème (4.1) telles que

$$\|u_i\| \leq d,\ \text{pour } i = 1,2,3, b < \min_{\varepsilon\leq t\leq 1-\varepsilon} u_1(t), a < \max_{0\leq t\leq 1}|u_2(t)|,$$

avec

$$\min_{\varepsilon\leq t\leq 1-\varepsilon} u_2(t) < b \text{ and } \max_{0\leq t\leq 1}|u_3(t)| < a.$$

Ce qui achève la preuve. ■

# Bibliographie


[1] R. P. Agarwal, *On fourth order boundary value problems arising in beam analysis*, Differential Integral Equations, **2 (1989),** pp. **91-110.**

[2] R. P. Agarwal, H. S. Lü & D. O'regan, *Positive solutions for the boundary value problem* $\left(|u''|^{p-2}u''\right)'' - \lambda q(t) f(u(t)) = 0$, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, Vol. **28 (2003),** pp. **33-44.**

[3] C. O. Alves, F.J.S.A. Corrêa and T.F.Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Appl. **49** (**2005**), **85-93.**

[4] R.I.Avery and A.C.Peterson, *Three positive fixed points of nonlinear operators in ordered Banach spaces,* Comput. Math. Appl., **42 (2001), 313-322**.

[5] A.Bahri-H.Berestycki, *Existence of Forced oscillations for some nonlinear differential equations,* Comm.Pure Appl. Math. **37 (1984), 403-442**.

[6] J.M. Ball, , Journal of Mathematical Analysis and Applications. **42 (1973), 61-90**.

[7] Z. B. Bai, *Existence and multiplicity of positive solutions for a fourth-order* $p-$*Laplace equations*, Applied Mathematics and Mechanics ( English Edition) Vol. **22,** N$^0$**22,** December **2001.**

[8] Z. B. Bai, W. Ge & Y. Wang, *The method of lower and upper solutions for some fourth-order equations*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. **5,** Issue **1,** Article **13, 2004.**

[9] Z. Bai, B. Huang & W. Ge,*The iterative solutions for some fourth order* $p-$Laplace equation boundary value problems, Applied Mathematics Letters, **19 (2006),** pp. **8-14.**

[10] F. Bernis, *Compactness of the support in convex and nonconvex fourth order elasticity problems*, Nonlinear Anal. **6 (1982),** pp. **1221-1243.**

[11] S. Bernstein, *Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles*, Izv. Akad.Nauk SSSR, Ser. Math4.**(1940),** 17-**26.**

[12] A. Biler, *Remark on the decay for danped dtring and beam equation* , Nonlinear Analysis T.M.A. **10(1986), 839-842.**

[13] A. V. Bitsadze, *On the theory of nonlocal boundary value problems*, Soviet Math. Dock. **1964, 30,** pp**. 8-10.**

[14] A. V. Bitsadze & A. A. Samarskii, *Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **1969, 185,** pp**. 739-740.**

[15] A. Boucherif, *Differential equations with nonlocal boundary conditions*, Nonlinear Analysis T. M. A. **47 (2001),** pp. **2419-2430.**

[16] A. Boucherif, *Second Order Boundary value Problems with Integral Boundary Conditions*, Nonlinear Analysis T. M. A. vol. **70, n°.1, (2009), pp. 364-371.**

[17] A. Boucherif & S. M. Bouguima*, Solvability of non local multipoint boundary value problems*, Nonlinear Studies Vol. **8** N° **4 (2001),** pp. **395-406.**

[18] A Boucherif. and Bouguima S.M, *Nonlinear second order ordinary differential equations with nonlocal boundary conditions*, Comm. in Applied Nonl. Anal. **5 (1998),** pp. **73-85.**

[19] A. Boucherif & J. Henderson, *Positive solutions of second order boundary value problems with changing signs Carathéodory nonlinearities*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations **N° 2 (2006),** pp. **1-14.**

[20] A. Cabada & F. Minhós, *Fully nonlinear fourth-order equations with functional boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. **340 (2008), pp. 239-251.**

[21] A. Cabada, R. L. Pouso & F. Minhós, *Extremal solutions to fourth-order functional boundary value problems including multipoint conditions*, Journal of Nonlinear Analysis: Real World Applications **10 (2009), 25 pages.**

[22] Sita Charkit & A. Kananthai, *Existence of solutions for some higher order boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. **329 (2007),** pp. **830-850.**

[23] F.J.S.A. Corrêa and R.G. Nascimento, *On the existence of solutions of a nonlocal elliptic equation with a* $p-$Kirchhooff type term, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.**(2008),** pp. **830-850.**

[24] C.De Coster and P.Habets, *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary values problems: classical and recent results,* Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, F.Zanolin, ed., CISM Courses and Lectures, Vol **371**, Springer-Verlag, New York **(1996) 1-79**.

[25] J.Cronin, *Fixed Points and Topological Degree in nonlinear Analysis,* Mathematical Surveys, no. **11,** American Mathematical Society, Providence, RI, USA **(1964)**.

[26] J. M. Davis & J. Henderson, *Monotone methods applied to some higher order boundary value problems*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. **2,** Issue **1,** Article **2, 2001.**

[27] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis**, 1985.**

[28] M. Derhab, *Existence of minimal and maximal solutions for quasilinear elliptic equation with integral boundary conditions*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations **N° 6 (2011),** pp. **1-18.**

[29] M. Derhab & B. Messirdi, *Existence of minimal and maximal solutions for a fourth-order differential equation with multipoint boundary conditions*, Comm. in Applied Nonl. Anal. Vol. **16** $N^0$ **02 (2009), pp. 65-81.**

[30] M. Derhab & B. Messirdi, *Existence of minimal and maximal solutions for a fourth-order differential equation with nonlocal boundary conditions*,Comm. in Applied Nonl. Anal. Vol. **18** $N^0$ **02 Avril (2011), pp. 01-19.**

[31] M. Dreher, *The Kirchhoff equation for the $p-$Laplacian* , Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino- Vol. **64**, 2(**2006**).

[32] H. Feng, M. Feng, M. Jian & W. Ge, *Multiple positive solutions for fourth order three-point $p-$Laplacian boundary value problems*, Electronic Journal of Diff. Eqns.Vol. **2007**(**2007**) **N°23, pp. 1-10.**

[33] C.P. Gupta, *Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation* , J.Math.Anal.Appl. **168(1992) 540-551.**

[34] V. Il′in V. & E. Moiseev, *Nonlocal boundary value problems of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects*, Differential Equations **23 (1987),** pp. **803-810.**

[35] T. Jankowski, *Positive solutions for fourth-order differential equations with deviating arguments and integral boundary conditions*, Nonlinear Analysis T.M.A. **73 (2010), 1289-1299.**

[36] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik,* Teubner, Leipzig, Germany**, (1883**).

[37] G.L.Krakostas and P.Ch.Tsamatos, *Existence of multiple positive solutions for a non-local boundary value problem*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Shauder Center, Volume **19, 2002,pp. 109-121**.

[38] M.A.Krasnosel'skii, *"Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators,",* Soviet Mathematics, Doklady, vol. **1**, pp. **1285-1288, (1960)**.

[39] M.A.Krasnosel'skii, *"Positive Solutions of operator Equations",* Noordhoff, Groningen, **(1964)**.

[40] M.A.Krasnosel'skii, *The Operator of translation Along the Trajectories of Differential Equations,* American Mathematical Society, Providence, RI, USA, **(1968)**.

[41] B. A. Lawrence, *A variety of differentiability results for a multi-point boundary value problem*, J. Comput. Appl. Math. **141 (2002),** pp**. 237-248.**

[42] LEGGETT,R.W.,WILLIAMS,L.R., *Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces,* Indiana Univ. Math. J. **7 (2000), 133-154**.

[43] J.L. LIONS, *On some questions in boundary value problems of mathematicals physics, in contemporary Developments in continum mechanics and Partial Differential Equations* ( Proc. Internat. Syympos, vol. **30** of North-Holland Mathematics Studies, **pp. 284-346**, North Holland, Amsterdam, The Netherland, **1978.**

[44] YAN LUO and ZHIGUO LUO, *Symmetric positive solutions for nonlinear boundary value problems with $\phi-$Laplacian operator*, Applied Mathematics letters **23 (2010),** pp**. 657-664.**

[45] T.F.MA, *Positive solutions for a nonlocal fourth order equation of Kirchhoff type,* Directed and Continuous Dynamical Systems Supplement **2007, 694-703**.

[46] T.F.MA, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type,* Nonlinear Analysis T.M.A. **63** (**2005**) **1967-1977**.

[47] J.MAWHIN-M.WILLEM, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems,* Springer Verlag, New York (**1989**).

[48] M. MOSHINSKY, *Sobre los problemas de condiciones a la frontiera en una dimension de caracteristicas discontinuas*, .Soc.Mat.Mexicane **7 (1950), 1 C 25**.

[49] M. MüLLER, *Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differential-gleichungen* , Math. Z. **26 (1926), 619-649**.

[50] C. V. PAO, *On fourth-order elliptic boundary value problems*, Proceeding of the American Mathematical Society Vol. **128,** $N^0$**4 (1999),** pp. **1023-1030.**

[51] O. PERRON, *Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$,* Math. Ann. **76 (1915), 471-484**.

[52] E. PICARD, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, J. Math. **6 (1890), 145-210**.

[53] E. Picard, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*, J. Math. **9 (1893), 217-27.**

[54] S.I. Pohozaev, *On a class of quasilinear hyperboliic equations*, Math USSR Sbornik **25 (1975), 93-104.**

[55] K. R. Prasad and A. Kameswara Rao, *Multiple positive solutions for nonlinear third order general two-point boundary value problems*, Electronic Journal of Qualitative theory of Differential Equations, **2009, N**°9, **pp.1-17.**

[56] M. Ruyun, Z. Jihui & F. Shengmao, *The method of lower and upper solutions for fourth-order two point boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. Vol. **215,** (**1997),** pp. **415-422.**

[57] G.Scorza Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine,* Giornale Mat. (Battaglini) **69 (1931)**, **77-112**. .

[58] G.Scorza Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine,* Math. Ann. **105 (1931), 133-143**.

[59] S.Tara, *" Brouwer's fixed point theorem: methods of proof and applications,"* M.S. thesis, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada, **2003**.

[60] H. Su, B. Wang and Z.Wei, *Positive solutions of four -point boundary value problems for four-order* $p$-Laplacian dynamic equations on time scales, Electronic Journal of Differential Equations, **78 (2006), 1-13**.

[61] S. Woinowsky-Kreiger., *The effect of axial force on the vibration of hinged bars.*Journal of applied Mathematics **17 (1950)**, **35-36**.

[62] X. Zhang & L. Liu, *Positive solutions of fourth-order four-point boundary value problems with $p-$Laplacian operator*, J. Math. Anal. Appl. Vol. **336,** N$^0$**02,** (**2006),** pp. **1414-1423.**

[63] X. Zhang & L. Liu, *A necessary and sufficient condition for positive solutions for fourth-order multi-point boundary value problems with $p-$Laplacian*, Journal of Nonlinear Analysis T. M. A. **68 (2008),** pp**. 3127-3137.1**.

[64] J. ZHANG & G. SHI, *Positive solutions for fourth-order singular p−Laplacian boundary value problems, Applicable Analysis*, Vol. **85,** N$^0$**11,** November **2006,** pp. **1373-1382.**

.