ملخص:

ندرس المعادلة التفاضلية الناقصة من الشكل

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = g(|x|, u(x)) + f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

حيث Ω **وحدة الكرة محتواة في** R^n $(n \geq 2)$ و $f \in L^2(\Omega)$ و g دالة مستمرة وفردية وتحت خطية

باستعمال طريقة التغيرات نبين وجود حلول غير قطرية للمعادلة (I). نفرق بين حالتين .

<u>كلمات مفتاحيه:</u> المعادلة التناقصية، طريقة التغيرات، شرط بالي سمال ، نظرية **المرتفع** ، تقليل مع القيود ،الحلول الدورية.

Abstract :

We study the following elliptic problem :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} -\Delta u(x) = g(|x|, u(x)) + f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Were Ω is the unit ball in R^n $(n \geq 2)$, and $f \in L^2(\Omega)$ and g is a continuous, odd and sublinear function.

By the variational method we obtain the existence of infinity non radial solution to (I).we distinguish two cases.

<u>A key wards</u> : problem elliptics, minimization with contraints, the palais smale condition, mountain pass théorem , periodic solution.

Résumé :

Nous étudions le problème elliptique :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} -\Delta u(x) = g(|x|, u(x)) + f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Où Ω est la boule unité dans R^n $(n \geq 2)$ et $f \in L^2(\Omega)$ et g est une fonction continue impaire et sublinéaire.

Par la méthode variationnelle nous montrons l'existence et la multiplicité de solutions non radiales pour le problème (I). On distinguera deux cas.

<u>Les mots clés</u> : problème elliptique, minimisation avec contraintes, la condition de plais smale, théorème du col, solution périodique.

Table des matières :

INTRODUCTION

Introduction:

Le travail que nous présentons dans ce mémoire est l'existence et multiplicité de solutions non radiales pour un problème elliptique.

Nous commençons tout d'abord par citer certains résultats d'existence pour le problème

$$(P) \quad \begin{cases} -Lu = \varphi(x,u) & x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Où L est un opérateur elliptique, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$

Une attention particulière est portée au problème (P). Dans le cas où $L = -\Delta$ et $\varphi(x,u) = g(|x|,u)$ et Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$.

Il est fréquent de rencontrer des théorèmes de multiplicité. La plus part concernent des non linéarités, super linéaire à l'infini, dans ce cas l'existence de suite non bornée de solutions peut être prouvée. Les approches utilisées sont fonctionnelles des hypothèses émises sur les non linéarités.

Nous citons à titre d'exemples :

a) H. Aduen et A. Castro dans [AC] ont considéré le problème suivant :

$$(1.1) \begin{cases} \Delta u(x) + f(u) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, superlinéaire.

Les auteurs ont montré que le problème (1.1) possède une suite non bornée de solutions non radiales en considérant des hypothèses reliant à f et ($F(u) = \int_0^u f(v)\,dv$).

b) R. Molle dans [M] a étudie l'existence et la multiplicité des solutions pour le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} Au+|u|^{p-2}u=0, \quad u\neq 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{u=0} \qquad\qquad\qquad \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné dans R^N, A un opérateur elliptique du second ordre, $n>3$ et $p>\dfrac{2n}{n-2}$. Il a prouvé que le nombre de solutions est lié à certaines perturbations du domaine, qui modifient ses propriétés topologiques. Chaque perturbation dépend d'un paramètre ε l'épaisseur de la perturbation) quand $\varepsilon\to 0$.

Le nombre de solutions tend à l'infini et les solutions se concentrent près de la perturbation. (Des exemples montrent que les domaines perturbés peuvent même être contractiles) plus précisément il a été prouvé que pour tout $k\in \mathrm{N}$ il existe $\varepsilon_k>0$ tel que pour tout $\varepsilon\in \left]0,\varepsilon_k\right[$ le problème a au moins k paires de solutions. La méthode utilisée est complètement variationnelle, elle donne aussi des informations sur les propriétés qualitatives des solutions. En particulier, ces solutions (qui peuvent changer de signe) ne peuvent pas avoir plus que k régions nodales, au moins deux solutions (qui minimisent la fonctionnelle d'énergie) à signe constant.

Des résultats de multiplicité peuvent être obtenus, dans le cas de non linéarités à croissance sublinéaire en 0.

Ce type de non linéarité n'a pas été largement étudié dans le passé nous ne disposons dans la littérature que de peu de travaux sur ce sujet. Nous citons quelques exemples.

Dans le cas d'équation différentielle ordinaire, G.J Bulter [B] et B.L.Shekhter [Sh] et M.A.Krasnosel'skii, A.I. Perov, A.I. Povolotskii [K.P] et Z. Nehari [N] et les travaux de W.C. Van Groesen [V_2].

Dans ces travaux une hypothèse sur le comportement de g au voisinage de ∞ est toujours ajoutée au fait qu'elle a une croissance sublinéaire en 0.

Dans des travaux plus récents, Van Groesen s'est intéressé au problème (P) omettant le comportementde g au voisinage de ∞, dans le cas où N=1 avec g présentant une symétrie en 0. F.A Lessio et W.Dambrosio ont généralisé ce résultat au cas où $N\geq 2$.

La particularité des problèmes ou g est impaire, est leur symétrie par rotation.

$u_1 = u\left(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-1}\right)$ est solution de (P)

$\forall \varphi \quad R_\varphi u_1 = u\left(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-1} + \varphi\right)$ est aussi solution de (P)

u_1 et u_2 sont distinctes géométriquement si $R_\varphi u_1 \neq u_2$

Notre travail est consacré à l'étude des solutions non radiales pour le problème (P) avec perturbation c'est-à-dire :

$$(P')\begin{cases} -\Delta u\left(x\right) = g\left(\left|x\right|, u\left(x\right)\right) + f\left(x\right) & x \in \Omega \\ u\left(x\right) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

L'Hypothèse d'imparité n'est plus vérifiée.

Ce mémoire se présente comme suit :

Dans le premier chapitre : on rappelle les principaux résultats de l'analyse fonctionnelle utilisés dans la suite du travail.

Dans le deuxième chapitre : nous présentons les démonstrations détaillées d'un résultat de Rabinowitz pour un problème perturbé. La preuve de ces résultats se base sur une approche variationnelle avec application du lemme du col (mountain pass theorem).

Dans le troisième chapitre : on montre l'existence de solutions non radiales pour le problème elliptique perturbé par une méthode variationnelle.

Chapitre I

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons certains outils de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus, nécessaires à la suite de notre travail.

Nous commençons tout d'abord par introduire les espaces sur lesquels nous travaillons et certaines de leurs propriétés et nous terminons par des résultats d'existence de solutions pour des problèmes de Dirichlet associés au Laplacien.

Pour plus de détails nous référons le lecteur à [Br], [St$_2$], ou [K].

I.1. Espaces utilisés

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1

Soit $p \in [1, +\infty[$.

1. Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{mesurable et } \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\}$$

L^p est muni de la norme $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$. Cette norme le rend complet.

On pose

$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{mesurable il existe une constante C telle que } |f(x)| \le C \text{ p.p sur } \Omega \right\}$

on note $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\left\{ C, |f(x)| \le C \text{ p.p sur } \Omega \right\}$

Inégalité de Young

Soit $1 \le p \le \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p c'est-à-dire : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$a.b \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \forall a \ge 0, \forall b \ge 0$$

Inégalité de Hölder

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \le p \le \infty$ et q conjugué de p alors :

$$f \cdot g \in L^1 \text{ et } \int_\Omega |f \cdot g|\, dx \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

I.2 Espace de Sobolev

L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \text{ pour } i \in \{1, \ldots N\} \right\}$$

où les dérivées sont au sens des distributions.

$W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme : $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$, est un espace de Banach.

L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est noté $H^1(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Il est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|\nabla u\|_p$ grâce à l'inégalité de Poincaré.

Remarque :

Soit $1 < p < \infty$, l'espace de Sobolev $W_T^{1,p}$ est l'espace des fonctions T-périodiques $\in L^p$ ayant une dérivée faible $u' \in L^p([0,T], \mathbf{R})$.

$W_T^{1,p}$ muni de la norme $\|u\|_{W_T^{1,p}} = \left[\int_0^T |u(t)|^p\, dt + \int_0^T |u'(t)|^p\, dt \right]^{1/p}$.

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Soient $1 \le r \le \infty$ et $1 \le q \le p \le \infty$ .Alors il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^r(\Omega)}^{a} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \qquad \forall u \in W^{1,r}(\Omega)$$

où $1 \le a \le \infty$ est défini par : $a(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$

Inégalité de Poincaré

On suppose que Ω est un ouvert borné alors, il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

où $1 \le p < \infty$

Théorème 1

Soit $1 \le p \le \infty$ on a :

si $1 \le p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q}(\Omega)$ $\forall q \in [p, +\infty[$

si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$

avec injections continues.

Lemme 1 (lemme de Fatou)

Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 telle que

1. Pour chaque n, $f_n(x) \ge 0$ p.p sur Ω
2. $\sup_n \int_\Omega f_n \ge 0$ p.p sur Ω

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose : $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ alors :

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega f(x)\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx$$

I.2. Quelques définitions

Soient E un espace de Banach muni de la norme $\| \ \|$ et $(u_n)_n$ une suite dans E.

1. Convergence forte

On dit que la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u dans E si $\|u_n - u\|_E \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

2. Convergence faible

$(u_n)_n$ est dite convergente faiblement vers u si $< u_n, v > \rightharpoonup < u, v > \ \forall v \in E'$ dual de et elle est notée par $u_n \rightharpoonup u$

Théorème 2 (Eberlein–Šmulian)

Un espace de Banach E est réflexif si et si seulement si de toute suite bornée (x_n) de E, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans E.

Définition 3

On dit que E est faiblement fermé si pour toute suite $(u_n) \subset E$ telle que : $u_n \rightharpoonup u$ alors $u \in E$.

Définition 4

Une fonction $\varphi : E \to]-\infty, +\infty[$ est dite semi-continue inférieurement et on la note (s.c.i). Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x)$

Définition 5 : Une fonctionnelle Ide E dans E est dite coécrive si $\lim_{\substack{\|u\|\to+\infty \\ u\in E}} I(u) = +\infty$

Proposition 1

il existe c>0 tq: si $u \in W_T^{1,p}$ alors: $\|u\|_\infty \leq c\,\|u\|_{W_T^{1,p}}$ ou $\|u\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|$

Proposition 2

Une suite $(u_k)_k$ converge faiblement vers u dans $W_T^{1,p}$ **,**

alors $(u_k)_k$ converge uniformement vers u sur $[0,T]$

Théorème 3

Soit $M \subset E$ convexe. Alors M est faiblement fermé pour $\sigma\left(E,E'\right)$ si et seulement si il est fortement fermé.

Théorème 4

Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de L^p et $f \in L^p$, tels que $\left\| f_n - f \right\|_{L^p} \to 0$ lorsque $u \to \infty$

Alors il existe une sous suite extraite $\left(f_{n_k}\right)_k$ telle que

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p sur Ω

b) $\left| f_{n_k} \right| \leq h(x)\ \forall k$ et p.p sur Ω avec $h \in L^p$.

I.3. Approche variationnelle

Nous référons le lecteur à [St₂] et [R].

Solution faible

u est dite solution faible de l'équation $\Delta u = f$ si

$$\int_\Omega \Delta u \varphi(x) dx = \int_\Omega f\left(x\right) \cdot \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty\left(\Omega\right)$$

Points critiques

1. Soit I une fonctionnelle de classe C^1 définie sur E à valeur dans R. On dit que $u \in E$ est un point critique de I si $I'(u) = 0$
2. La valeur c est dite valeur critique de I s'il existe un point critique u de I dans E tel que

$$I(u) = c.$$

Conditions de Palais-Smale

Soit $I \in C^1\left(E;\mathbb{R}\right)$. On dit que I vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) qu'on note $\left(PS\right)_c$, si de toute suite $\left(u_n\right)_n$ de E vérifiant : $I\left(u_n\right) \to c$ dans $\mathbb{R}$, et $I'\left(u_n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans E' on peut extraire une sous suite qui converge fortement dans E.

Conditions de Palais-Smale locale au niveau *c*

lorsque I vérifie $(PS)_c$ $\forall c \in \mathbb{R}$ on dit que I vérifie la condition de Palais-Smale globale (PS).

Théorème 5 (Théorème du col)

Soit $I \in C^1(E;\mathbb{R})$ vérifiant $(PS)_c$. On suppose que $I(0)=0$.

$I_1)$ Il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\rho > 0$ telles que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ où B_ρ est la boule centrée en 0 et de rayon ρ.

$I_2)$ Il existe $e \in E \setminus \partial B_\rho$ telle que $I(e) \leq 0$

Alors : I possède une valeur critique $c \geq \alpha$ de plus : $c = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{u\in C([0,1])} I(u)$ où

$\Gamma = \{g \in C([0,1],E), g(0)=0, g(1)=e\}$

Lemme de déformation

Soit $I \in C^1(E;\mathbb{R})$ vérifiant $(PS)_c$, considérant $K_c := \{u \in E / I(u)=c \text{ et } I'(u)=0\}$ compact, $A_s := \{u \in E / I(u) \leq s\}$.si $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$ et θ un voisinage de K_c alors :

$\exists \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon})$ et $\eta \in C([0,1]\times E, E)$ vérifiant :

$\eta(0,u)=u$ pour tout $u \in E$

$\eta(t,u)=u$ pour tout $t \in [0,1]$ et $I(u) \notin [c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]$

$\eta(t,u)$ est un homéomorphisme dans E pour tout $t \in [0,1]$

$\eta(t,u)-u \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$ et $u \in E$

$I(\eta(t,u)) \leq I(u)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $u \in E$

$\eta(1, A_{c-\varepsilon} \setminus \theta) \subset A_{c-\varepsilon}$

Si $K_c = \emptyset$, $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

Théorème 6 [R]

Soit E un espace de Banach et $I \in C^1(E;\mathbb{R})$ paire, vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $I(0)=0$ et que $E = V \oplus X$ où V est un sous espace de dimension finie et que :

$I_1')$ Il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\rho > 0$ telles que $I_{|\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$

$I_2')$ Pour tout sous-espace $\tilde{E} \subset E$, il existe $R = R(\tilde{E})$ tel que $I \leq 0$ sur $\tilde{E} \setminus B_{R(\tilde{E})}$

Alors I possède une suite non bornée de valeurs critiques.

Théorème 7 [St$_2$] (minimisation directe)

Supposons E un espace réflexif et soit $M \subset E$ un sous ensemble faiblement fermé dans E. Supposons $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, coércive et faiblement semi continue inférieurement sur M, alors I est borné inférieurement dans M et attient son minimum dans M.

Définition 6 (une suite minimisante)

Soit E un espace normé. Une suite minimisante pour une fonctionnelle $I : E \to \mathrm{R}$ est une suite $(w_k)_k$ telle que $I(w_k) \to \inf I$ quand $k \to \infty$.

Remarque 1 :

L'existence d'une suite minimisante est assurée en particulier quand I est coercive.

Principe de minimisation d'Ekeland :

En général, il n'est pas clair qu'une fonctionnelle I semi continue inférieurement et bornée, atteint son minimum (exemple $f(x) = \operatorname{arctg} x$ défini sur R).

Le principe d'Ekeland permet de construire une suite minimisante pour de telles fonctionnelles. Les éléments de cette suite minimisent une fonctionnelle I_m (pour une suite de fonctionnelle I_m convergeant localement et uniformément vers I).

Théorème 8

Soit *E* un espace métrique (sa métrique *d*)

$I : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

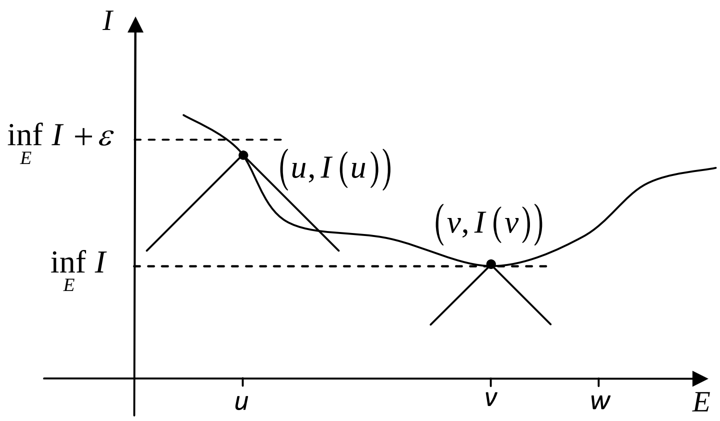
Est semi-continu inférieurement, bornée inférieurement. Alors $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \quad \forall u \in E$ avec $I(u) \leq \inf_E I + \varepsilon.$

Il existe un $v \in E$ minimum strict de la fonctionnelle

$$I_S(u) \equiv I(u) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(v,u),$$

De plus on a :

$$I(v) \leq I(u) \qquad d(u,v) \leq \varepsilon$$



Corollaire 1:

Soit *E* un espace de Banach, $I \in C^1(E)$, *I* est borné inférieurement. Alors il existe une suite minimisante (u_n) pour *I* dans *E* telle que :

$$I(u_n) \to \inf_E I \text{ et } I'(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ dans\ E'$$

Remarque

Nous travaillons dans l'espace $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$, qu'est un Hilbert, la métrique *d* considère est $d(u,v) = \int_\Omega |\nabla u - \nabla v| dx$.

Théorème 9[St2]

Soit E un espace de Banach, si $I : E \to \mathbb{R}$ est dérivable au sens de Gâteaux, semi continue inférieurement et bornée inférieurement. Alors le principe variationnel d'Ekeland assure l'existence d'une suite minimisante $(u_n)_n$ telleque, $I'(u_n) \to 0$ quand n $\to \infty$

Proposition 3

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et f vérifie les hypothèses :

$h_1)$ $f(x,\xi) \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}\right)$

$h_2)$ Il existe des constantes a_1 et a_2 positives telles que :

$\left| f(x,\xi) \right| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$ avec $0 \leq s < 2^* - 1$ et $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

Et $I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x,u)\, dx$ alors $I \in C^1\left(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}\right)$, et

$I'(u)\varphi = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla \varphi - f(x,u)\varphi \right) dx$ pour tout $\varphi \in E \equiv W_0^{1,2}(\Omega)$ de plus

$J(u) = \int_\Omega F(x,u)\, dx$ est faiblement continue et $J'(u)$ est compacte.

Chapitre II

Résultats de Rabinowitz avec symétrie

II.1. Quelques résultats connus :

II.1.1. Problème avec symétrie :

Considérons le problème semi linéaire suivant :

$$(P)\ \begin{cases} -\Delta u(x) = f\left(x, u(x)\right) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ et $f(x,u)$ est une fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèse suivantes :

$h_1)$ $f(x,\xi) \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}\right)$

$h_2)$ Il existe des constantes a_1 et a_2 positives telles que :

$\left|f(x,\xi)\right| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$ avec $0 \leq s < 2^* - 1$ et $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, $\forall \xi \in \mathrm{R}$

$h_3)$ Il existe $\mu > 2$ et $r \geq 0$ telles que pour $|\xi| \geq r$ $0 < \mu F(x,\xi) \leq \xi f(x,\xi)$

$h_4)$ $f(x,s)$ est une fonction impaire par rapport à *s*.

Résultat 1 :

Si *f* vérifie les hypothèses (h_1),(h_2),(h_3) et (h_4), alors le problème (P) possède une suite non bornée de solutions faibles.

La preuve de ce théorème se base sur l'approche variationnelle avec application du théorème du col.

II.1.2. Problème perturbé :

Considérons le problème perturbé suivant :

$$(P') \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x,u(x)) + k(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

k une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$ différente de zéro.

En général l'hypothèse (h_4) n'est pas vérifiée pour la fonction $f + k$. La fonctionnelle d'énergie associée à (P') étant définie par :

$$I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x,u) - k(x) \cdot u(x) \right] dx \text{ avec } F(x,u) = \int_0^u f(x,v)\,dv \qquad (1)$$

$\rho(u) \equiv \int_\Omega F(x,u(x))\,dx$, ρ est faiblement continue et $\rho'(u)$ est compacte.

(cf. (prop. 3)).

I n'est pas paire, mais on a le résultat suivant :

Résultat 2 : [R]

Pour f vérifiant les hypothèses (h_1),(h_2),(h_3), (h_4) et $k \in L^2(\Omega)$ le problème (P') possède une suite non bornée de solutions faibles si :

$$\beta := \frac{(n+2)-(n-2)s}{n(s-1)} > \frac{\mu}{\mu - 1} \text{ avec : } s < 2^* - 1 \text{ et } \mu > 2 \qquad (2)$$

où μ définie par (h_3) et s par (h_2)

Commentaire :

Rabinowitz se base sur une estimation de l'écart de symétrie de I c'est-à-dire : $|I(u) - I(-u)|$.

Dans la démonstration, Rabinowitz a utilisé l'estimation suivante :

$$|J(u) - J(-u)| \leq \beta_1 \left(|J(u)|^{\frac{1}{\mu}} + 1 \right), \qquad (3)$$

où J est la fonctionnelle d'énergie associée au problème modifié et β_1 une constante dépendante de $\|k\|_{L^2(\Omega)}$. La fonctionnelle d'énergie I ne satisfait pas (3).

J possède une suite de valeurs critiques qui sont aussi les valeurs critiques de I.

Remarque 1 :

Une version moins générale de ce résultat est obtenue par Bahri et Berestyki [BB] et par Struve [St_2]. Les démonstrations sont différentes de celle présentée par Rabinowitz qui est une application du théorème du col dans la cas de fonctionnelle symétrique. La démonstration du résultat (2) se fait en deux étapes.

Preuve du résultat 2 :

Etape1 :

Estimation à priori pour les points critiques de *I* :

De (h_3) : $\exists \mu > 2$ et $r > 0$ telles que $: \forall |\xi| \geq r, 0 < \mu F(x, \xi) \leq \xi f(x, \xi)$

Et pour tout $\xi \in$ □ il existe deux constantes $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$ telles que :

$$F(x,\xi) \geq a_5 |\xi|^\mu - a_4 \tag{4}$$

En effet

de (h_3) on a :

$$\xi f(x,\xi) \geq \mu F(x,\xi) > 0 \Rightarrow \frac{f(x,\xi)}{F(x,\xi)} \geq \frac{\mu}{\xi}$$

$$\text{Si } \xi \geq r \Rightarrow \int_r^\xi \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \geq \int_r^\xi \frac{\mu}{s} ds$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{F(x,\xi)}{F(x,r)}\right| \geq \mu \ln\left|\frac{\xi}{r}\right|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{F(x,\xi)}{F(x,r)}\right| \geq \ln\left|\frac{\xi}{r}\right|^\mu$$

$$\Rightarrow \ln|F(x,\xi)| \geq \ln\left|\frac{\xi}{r}\right|^\mu + \ln|F(x,r)|$$

$$\Rightarrow |F(x,\xi)| \geq \frac{F(x,\xi)}{r^\mu} \xi^\mu$$

$$\text{Si } \xi \leq -r \Rightarrow \int_\xi^{-r} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \leq \int_\xi^{-r} \frac{\mu}{s} ds$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{F(x,-r)}{F(x,\xi)}\right| \le \ln\left|\frac{(-r)}{\xi}\right|^{\mu}$$

$$\Rightarrow F(x,\xi) \ge \left|\frac{F(x,-r)}{r^{\mu}}\right|\left|(-\xi)^{\mu}\right|$$

$$\forall|\xi| \ge r \Rightarrow F(x,\xi) \ge \min\left(\frac{F(x,-r)}{r^{\mu}},\frac{F(x,r)}{r^{\mu}}\right)|\xi|^{\mu}$$

Alors $F(x,\xi) \ge a_5|\xi|^{\mu} \quad \forall\xi/|\xi| \ge r$

F est continue et $\forall\xi/|\xi| \le r, \quad |F(x,\xi)| \le a_4$

Alors $F(x,\xi) \ge -a_4 + a_5 \, |\xi|^{\mu} \quad \forall\xi \in \mathbb{R}$

$F(x,\xi) \ge -a_4 + a_5|\xi|^{\mu}$

D'après (h_3) et (4) on a donc $\forall\xi \in \mathbb{R} \quad \exists a_3 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mu}\left(\xi f(x,\xi)+a_4\right) \ge F(x,\xi)+a_4 \ge a_5|\xi|^{\mu} \tag{5}$$

Proposition 1

Sous les hypothèses du résultat 2 il existe une constante A qui dépend de $\|k\|_{L^2(\Omega)}$ telle que si u est un point critique de I. Alors :

$$\int_{\Omega}\left(F(x,u)+a_4\right)dx \le A\left(|I(u)|^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

<u>Preuve de la proposition1</u>

Supposons que u est un point critique de I. Alors $I'(u)=0$

On peut écrire $I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u$

Or $I'(u)u = \int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2 - f(x,u)u(x) - u(x)k(x)\right)dx$

D'où

$$I(u) = \int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) - k(x)u(x) - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}uf(x,u) + \frac{1}{2}k(x)u(x)\right]dx$$

$$I(u)=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^{2}-F(x,u)-k(x)u(x)-\frac{1}{2}|\nabla u|^{2}+\frac{1}{2}uf(x,u)+\frac{1}{2}k(x)u(x)\right]dx$$

D'après (5) on a :

$$I(u)\geq\int_{\Omega}\frac{1}{2}uf(x,u)\,dx-\frac{1}{\mu}\int_{\Omega}\left(uf(x,u)+a_{3}\right)dx-\frac{1}{2}\|k\|_{L^{2}}\|u\|_{L^{2}} \tag{7}$$

$$I(u)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\Omega}\left(uf(x,u)+a_{3}\right)dx-\frac{1}{2}\|k\|_{L^{2}}\|u\|_{L^{2}}-a_{6}$$

$$I(u)\geq a_{7}\int_{\Omega}\left(F(x,u)+a_{4}\right)dx-a_{8}\|u\|_{L^{\mu}(\Omega)}-a_{6}$$

On pose : $\gamma=\int_{\Omega}\left(F(x,u)+a_{4}\right)dx$

$$I(u)\geq a_{7}\gamma-a_{8}\|u\|_{L^{\mu}(\Omega)}-a_{6}$$

D'après (5) $\|\xi\|_{L^{\mu}(\Omega)}^{\mu}\leq\frac{1}{a_{5}}\gamma$

$$I(u)\geq a_{7}\gamma-a_{8}\frac{1}{a_{5}^{\frac{1}{\mu}}}\gamma^{\frac{1}{\mu}}-a_{6}$$

D'après l'inégalité de Young on a :

$$\frac{1}{a_{5}^{\frac{1}{\mu}}}\gamma^{\frac{1}{\mu}}\leq\frac{1}{\mu}\gamma+\frac{\mu-1}{\mu}\left(\frac{1}{a_{5}^{\frac{1}{\mu}}}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$$

$$\frac{a_{7}}{a_{5}^{\frac{1}{\mu}}}\gamma^{\frac{1}{\mu}}\leq\frac{a_{7}}{\mu}\gamma+\frac{\mu-1}{\mu}\frac{a_{8}}{a_{5}^{\mu-1}}a_{7}$$

$$\frac{-a_{7}}{a_{5}^{\frac{1}{\mu}}}\gamma^{\frac{1}{\mu}}\geq\frac{-a_{7}}{\mu}\gamma+\frac{\mu-1}{\mu}\frac{a_{8}}{a_{5}^{\mu-1}}a_{7}$$

Donc $I(u)\geq a_{7}\gamma-\frac{a_{7}}{2}\gamma-c-a_{6}$

$$I(u)\geq\frac{a_{7}}{2}\gamma-c$$

On a : $\frac{a_7}{2}\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)dx \le I(u)+a_9$

$$\frac{a_7^2}{4}\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)^2 dx \le \left(I(u)+a_9\right)^2$$

$$\frac{a_7^2}{4}\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)^2 dx \le 2\left(I(u)^2+a_9^2\right)$$

$$\frac{a_7^2}{4}\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)^2 dx \le 2c\left(I(u)^2+1\right)$$

telle que $c=\max\left(a_9^2,1\right)$

Alors $\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)dx \le A\left(I(u)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$

où: $A=\frac{2c}{a_7^2}$

Etape2 : (modification du problème)

Pour introduire le problème modifié on a besoin de certaines fonctions auxiliaires :

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases}\chi(\xi)=1 & \text{pour } \xi<1\\ \chi(\xi)=0 & \text{pour } \xi\ge 2\end{cases}$

Et $\chi'(\xi)\in(-2,0)$ pour $\xi\in(1,2)$

Posons : $Q(u):=2A\left(I(u)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ avec A obtenue dans la proposition précédente.

$$\psi(u)=\chi\left(Q(u)^{-1}\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)dx\right)$$

D'après la proposition précédente : si u est un point critique de I on a :

$$Q(u)=2A\left(I(u)^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \ge 2\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)dx \Rightarrow \left(\frac{\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)dx}{2A\left(I(u)^2+1\right)}\right)\le \frac{1}{2}$$

$$\psi(u) = \chi\left(\frac{\int_\Omega \left(F(x,u) + a_4\right)dx}{2A\left(I(u)^2 + 1\right)}\right)$$

La variable de χ est dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et par suite $\psi(u) = 1$

Considérons *J* la nouvelle fonctionnelle d'énergie définie par :

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) - k(x)u(x)\psi(u)\right]dx \tag{8}$$

Proposition 2 sous les hypothèses du résultat 2 on a

1. $J \in C^1(E;\sqcup)$
2. Il existe une constante β_1 qui dépend de $\|k\|_{L^2(\Omega)}$

$$\left|J(u) - J(-u)\right| \le \beta_1\left(\left|J(u)\right|^{\frac{1}{\mu}} + 1\right) \text{ pour tout } u \in E \tag{9}$$

3. Il existe $M_0 > 0$ telle que si $J(u) \ge M_0$ et $J'(u) = 0$ alors : $J(u) = I(u)$ et $I'(u) = 0$
4. Il existe $M_1 \ge M_0$ telle que pour tout $c > M_1$ *J* satisfait (PS) locale en *c*.

Preuve de la proposition 2

Les hypothèses sur *f* impliquent $I \in C^1(E;\sqcup) \Rightarrow J \in C^1(E;\sqcup)$ car χ est C^∞

Si $u \in \operatorname{supp} \psi$ on a :

$$\left|\int_\Omega k(x)u(x)\,dx\right| \le \alpha_1\left(\left|I(u)\right|^{\frac{1}{\mu}} + 1\right) \tag{10}$$

En effet :

D'après l'inégalité de Hölder

$$\left|\int_\Omega k(x)u(x)\,dx\right| \le \|k\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Pour $\mu > 2$ on a :

$$\left|\int_\Omega k(x)u(x)\,dx\right| \le \alpha_2 \|u\|_{L^\mu(\Omega)} \tag{11}$$

Avec $\|u\|_{L^\mu(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u|^\mu \, dx\right]^{\frac{1}{\mu}}$

D'après (5) : $\left[\int_\Omega |u|^\mu \, dx\right]^{\frac{1}{\mu}} \le \left(\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)dx\right)^{\frac{1}{\mu}}$

$$\left|\int_\Omega k(x)u(x)\,dx\right| \le \alpha_3 \left(\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)dx\right)^{\frac{1}{\mu}} \qquad (12)$$

$u \in \operatorname{supp}\psi$ et d'après (6) on a :

$$\int_\Omega F(x,u)+a_4 dx \le A\left(I(u)^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

Se basant sur le fait que la fonction $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ définie sur $[0,+\infty[$ vérifie $\varphi(0)=1,\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=1,\ \varphi$ continue alors $\sup_{R^+}\varphi(x) \le c$, en prenant $x = I(u)$, on obtient

$$A\left(I(u)^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \le \alpha_4\left(I(u)+1\right) \qquad (14)$$

$$\int_\Omega \left(F(x,u)+a_4\right)dx \le A\left(I(u)^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \le \alpha_4\left(I(u)+1\right) \qquad (15)$$

D'après (15), (13) et (9)

$\left|J(u)-J(-u)\right| \le \left|\psi(u)+\psi(-u)\right|\left|\int_\Omega kudx\right|$ d'après (h_3)

D'après (10) : $\psi(u)\left|\int_\Omega kudx\right| \le \alpha_1\psi(u)\left(\left|I(u)\right|^{\frac{1}{\mu}}+1\right)$

On a $\left|I(u)\right| \le \left|\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx\right| + \left|\int_\Omega F(x,u)\,dx - \psi(u)k(x)u(x)\,dx\right| + \left|\int_\Omega \left(\psi(u)-1\right)kudx\right|$

$$\left|I(u)\right| \le \left|J(u)\right| + \left|\int_\Omega k(x)u(x)\,dx\right| \qquad (16)$$

$$\psi(u)\left|\int_\Omega k(x)u(x)dx\right| \leq \alpha_5\psi(u)\left(\left|J(u)\right|^{\frac{1}{\mu}} + \left|\int_\Omega k(x)u(x)dx\right|^{\frac{1}{\mu}} + 1\right)$$

$$\psi(u)\left|\int_\Omega k(x)u(x)dx\right| \leq \alpha_6\left(\left|J(u)\right|^{\frac{1}{\mu}} + 1\right) \qquad (17)$$

Pour établir (3) il suffit de prouver que si M_0 est assez grand et *u* est un point critique de J avec $J(u) \geq M_0$ alors :

$$Q^{-1}(u)\int_\Omega \left(F(x,u) + a_4\right)dx < 1 \qquad (18)$$

La définition de ψ implique alors que $\psi(v) = 1$ pour tout *v* proche de *u* alors : $\psi'(u) = 0$ et donc : $J(u) = I(u)$, $J'(u) = I'(u)$ et (3) est vérifiée

En effet : par la définition de J on a :

$$J'(u)u = \int_\Omega \left[\left|\nabla u\right|^2 - uf(x,u) - \left(\psi(u) + \psi'(u)u(x)\right)k(x)u(x)\right]dx \qquad (19)$$

où

$$\psi'(u)u = \chi'\left(\theta(u)\right)Q(u)^{-2}\left[Q(u)\int uf(x,u)dx - (2A)^2\,\theta(u)I(u)I'(u)u\right] \qquad (20)$$

et $\theta(u) = Q^{-1}(u)\int_\Omega \left(F(x,u) + a_4\right)dx$

En portant (20) dans (19) on obtient :

$$J'(u)u = \left(1 + T_1(u)\right)\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx - \left(1 + T_2(u)\right)\int_\Omega uf(x,u)dx - \left(\psi(u) + T_1(u)\right)\int_\Omega k(x)u(x)dx \qquad (21)$$

où :

$$T_1(u) = \chi'\left(\theta(u)(2A)^2\right)Q(u)^{-2}\, I(u)\int_\Omega k(x)u(x)dx \qquad (22)$$

et $T_2(u) = \chi'\left(\theta(u)\right)Q^{-1}(u)\int k(x)u(x)dx + T_1(x)$ (23)

Considérons :

$$J(u)-\frac{1}{2\left(1+T_1(u)\right)}J'(u)u \qquad (24)$$

Remarque

Si $\psi(u)=1$ et $T_1(u)=0=T_2(u)$, (24) se réduit au terme de gauche de (7) c'est-à-dire $I(u)-\frac{1}{2}I'(u)u$. Alors on obtient (18).

Puisque $0<\psi(u)<1$ et si $T_1(u)$ et $T_2(u)$ sont suffisamment petits, le calcul fait dans (7) donne (6) où on remplace *A* par une constante supérieur à *A* mais plus petite que 1 alors (18) est vérifiée.

Donc il suffit de montrer que $T_1(u), T_2(u)\to 0$ qd $M_0\to\infty$

Si $u\notin \operatorname{supp}\psi$, $T_1(u)=0=T_2(u)$ donc on suppose que $u\in\operatorname{supp}\psi$ par (22) et (10) on a :

$$\left|T_1(u)\right|\le 4\alpha_1\left(\left|I(u)\right|^{\frac{1}{\mu}}+1\right)\left|I(u)\right|^{-1} \qquad (25)$$

On a besoin d'une estimation relative à $I(u)$ et $J(u)$ pour $u\in\operatorname{supp}\psi$

Par (8) : $I(u)\ge J(u)-\left|\int_\Omega k(x)u(x)\right|$

D'après (10) on a :

$$I(u)+\alpha_1\left|I(u)\right|^{\frac{1}{\mu}}\ge J(u)-\alpha_1\ge\frac{M_0}{2} \qquad (26)$$

Pour M_0 assez large si $I(u)\le 0$ (26) implique $\alpha_1\left|I(u)\right|^{\frac{1}{\mu}}\ge\frac{M_0}{2}+\left|I(u)\right|$

D'après l'inégalité de Young : où $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\mu}=1$

On a : $\alpha_1\left|I(u)\right|\le\frac{1}{\gamma}\alpha_1^{\gamma}+\frac{1}{\mu}\left|I(u)\right|^{\mu}$

$$\Rightarrow \alpha_1 \left| I(u) \right|^{\frac{1}{\mu}} \leq \frac{1}{\gamma}\alpha_1^{\gamma} + \frac{\left| I(u) \right|}{\mu}$$

$$\frac{\alpha_1^{\gamma}}{\gamma} + \frac{\left| I(u) \right|}{\mu} \geq \frac{M_0}{2} + \left| I(u) \right| \tag{27}$$

(27) n'est pas vérifiée si M_0 est suffisamment grand $M_0 \geq 2\alpha_1^{\gamma}\gamma^{-1}$ or ce cas est impossible.

Par conséquent $I(u) > 0$ alors (26) implique $I(u) \geq \frac{M_0}{4}$ tel que $\alpha_1 \left| I(u) \right|^{\frac{1}{\mu}} \geq \frac{M_0}{2} - \frac{M_0}{4} \geq \frac{M_0}{4}$

donc $I(u) \geq \left(\frac{M_0}{4\alpha_1} \right)^{\mu}$ c'est-à-dire $I(u) \to \infty$ quand $M_0 \to \infty$.

Puisque (25) est vérifiée alors : $T_1(u) \to 0$ quand $M_0 \to \infty$

Pour vérifier (4) on suivra un raisonnement analogue.

Il suffit de montrer que : $\exists M_1 > M_0$ tq : si $(u_m) \subset E, M_1 \leq J(u_m) \leq C$ et $J'(u_m) \to 0$ alors : (u_m) est bornée par M_1 assez grand et pour un certain $\rho > 0$

$$\rho \left\| u_m \right\| + C \geq J(u_m) - \rho J'(u_m) u_m$$

$$\rho \left\| u \right\| + C \geq \left(\frac{1}{2} - \rho\left(1 + T_1(u_m)\right) \left\| u_m \right\|^2 + \rho\left(1 + T_2(u_m)\right) \right) \int_{\Omega} u_m f(x, u_m)\, dx - \int_{\Omega} F(x, u_m)\, dx$$

$$+ \left[\rho\left(\psi(u_m)\right) + T_1(u_m) - \psi(u_m) \right] \int_{\Omega} k u_m dx \tag{28}$$

pour M_1 assez grand et T_1, T_2 petits, on peut choisir $\rho \in \left(\mu^{-}, \gamma^{-}\right)$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\frac{1}{2\left(1 + T_2(u_m)\right)} > \rho + \varepsilon > \rho - \varepsilon > \frac{1}{\mu\left(1 + T_2(u_m)\right)} \tag{29}$$

Alors par : (28) (29) et (h_3)

$$\rho \left\| u_m \right\| + C \geq \frac{\varepsilon}{2} \left\| u_m \right\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \mu a_5 \left\| u_m \right\|_{L(\Omega)}^{\mu} - \alpha_2 - \alpha_3 \left\| u_m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{30}$$

En utilisant les inégalités de Young et Hölder (30) implique (u_n) bornée (cf. th2 (chap. I)).

Pour montrer la condition (PS) c'est-à-dire montrer que pour $(x_n)_n \subset E$ si $I(x_n)$ est bornée et $I'(x_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ alors (x_n) est précompacte et pour ce, il suffit de montrer (x_n) est bornée.

Soit l'application de dualité

$$D : E \to E', \;\; u, \varphi \in E \, , \; \langle (Du), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx$$

D^{-1} est continue, pour montrer (PS) il suffit de montrer que ρ' admet une sous suite convergente. Vu que :

$$v_m = D^{-1} J'(u_m) + D^{-1} \rho'(u_m) \underset{m\to\infty}{\to} D^{-1} \rho'(u_m)$$

(cf prop 3 Chap I) On a:

$$\left.\begin{array}{l}(u_m)_m \text{ bornée dans } E \\ \rho' \text{ compacte}\end{array}\right\} \Rightarrow \rho'(u_m) \text{ admet une sous suite convergente ce qui entraine}$$

que (PS) est vérifiée.

$$D^{-1} J'(u_m) = \left(1 + T_1(u_m) u_m - \rho(u_m)\right)$$

$|T_1(u_m)| \leq \dfrac{1}{2}$ (pour M_1 grand).

Soit $E_j = span\{v_1, \dots, v_j\}$ avec les v_j sont des fonctions propres, $E^\perp$ est le complément orthogonal de E_j dans *E*.

Le terme ψ dans *J* ne change pas la vérification (I_2') (cf. th 5, chap. I). pour *J*.

D'après (5) on a :

$$F(x,u) + a_4 \geq a_5 |u|^\mu \Rightarrow \int_\Omega \left(F(x,u) + a_4\right) dx \geq \int_\Omega a_5 |u|^\mu \, dx$$
$$\Rightarrow \int_\Omega F(x,u) \, dx \geq a_5 \int_\Omega |u|^\mu \, dx - a_4 |\Omega|, \quad \text{pour tout } u \in E$$

Pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, et notons $|\Omega|$ la mesure de Ω on a

$$\begin{aligned} J(tu) &\le \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - t^\mu a_5 \int_\Omega |u|^\mu\,dx + a_4|\Omega| - \int_\Omega ktu\psi(u) \\ &\le \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - t^\mu a_5 \int_\Omega |u|^\mu\,dx + a_4|\Omega| - \alpha t\|u\|_{L^2} \end{aligned}$$

Puisque $\mu > 2$ alors $J(tu) < 0$ quand $t \to \infty$

De plus il existe $R_j > 0$ tel que :

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) - k(x)u(x)\psi(u)\right)dx$$

$J(u) \le 0$ si $u \in E_j \setminus B_{R_j}$

Posons : $D_j = B_{R_j} \cap E_j$

Et : $G_j = \{h \in C(D_j, E) \setminus\ h$ est impaire et : $h = Id$ dans $\partial B_{R_j} \cap \mathrm{E}_j\}$

Définissons :

$$b_j = \inf_{h\in G_j}\max_{u\in D_j} J(h(u)) \quad j \in \mathrm{N} \tag{31}$$

Ces valeurs sont en général des valeurs critiques de *I*. Nous les utilisons dans la suite pour montrer que J a une suite non bornée de valeurs critiques.

La proposition suivante nous donne une minimisation de *I*.

Proposition 3

Il existe une constante $\beta_2 > 0$ et $\tilde{k} \in \sqcup$ telle que pour tout $k \ge \tilde{k}$

$$b_k \ge \beta_2 k^\beta \text{ avec } \beta \text{ citée dans le résultat 2} \tag{32}$$

Preuve

Soit $h \in G_k$ et $\rho < R_k$ il existe $w \in h(D_k) \cap \partial\beta_\rho \cap E_{k-1}^\perp$

Telle que :

$$\max_{u\in D_k} J(h(u)) \ge J(w) \ge \inf_{u\in\partial B_\rho \cap E_{k-1}^\perp} J(u) \tag{33}$$

Déterminons une borne inférieure du terme de droite de (33)

On a :

$$I(u)=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^{2}-F(x,u)\right]dx$$

D'après (h_2) on a : $f(x,u)\le a_6+a_4|\xi|^{s}$ tq $s<2^{*}-1$ donc : $F(x,u)\le a_6+\dfrac{a_4}{s+1}|\xi|^{s+1}$

En remplaçant $F(x,\xi)$ dans I on obtient :

$$I(u)\ge\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^{2}\right]dx-a_5\int_{\Omega}|\xi|^{s+1}\,dx-a_6$$

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg on a :

$$\|u\|_{L(s+1)}\le\alpha_s\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\,dx\right)^{\frac{a}{2}}\left(\int_{\Omega}u^{2}(x)\,dx\right)^{\frac{1-a}{2}}\text{ et }\int_{\Omega}u^{2}(x)dx\le\lambda_k^{-1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\,dx$$

Donc : $\|u\|_{L(s+1)}^{s+1}\le\alpha_s^{s+1}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\,dx\right)^{\frac{a}{2}(s+1)}\lambda_k^{-(1-a)(1+s)/2}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{2}\right)^{\frac{1-a}{2}(s+1)}dx$

$$\|u\|_{L(s+1)}^{s+1}\le a_7\lambda_k^{-(1-a)(s+2)/2}\rho^{s+1}$$

$$I(u)\ge\rho^{2}\left(\frac{1}{2}-a_7\lambda_{k+1}^{-(1-a)(s+1)/2}\rho^{s+1}\right)-a_8$$

D'après (16) on a : $|I(u)|\le J(u)+\left|\int_{\Omega}k(x)u(x)\,dx\right|$

Alors $J(u)\ge|I(u)|-\left|\int_{\Omega}k(x)u(x)\,dx\right|$

D'après l'inégalité de Hölder on a :

$$J(u)\ge\rho^{2}\left(\frac{1}{2}-a_7\lambda_{k+1}^{-(1-a)(s+1)/2}\rho^{s-1}\right)-a_8-a_9\|u\|_{L^{2}(\Omega)}$$

Tel que : $\|u\|=\rho$

Alors $J(u)\ge\rho^{2}\left(\frac{1}{2}-a_9\rho^{-1}-a_7\lambda_{k+1}^{-(1-a)(s+1)/2}\rho^{s-1}\right)-a_8$

Pour choisir : $\rho = \rho_k$ qui satisfait $\rho_k^{s-1} = cste\lambda_k^{-(1-a)(s+1)/2}$

Choisissons $\rho_k = \rho(k)$ telles que les coefficients de $\rho^2 = \dfrac{1}{4}$ de plus

$$J(u) \geq \frac{1}{4}\rho^2 - a_8 \tag{34}$$

Pour tout $u \in \partial B_{\rho_k} \cap E_{k-1}^{\perp}$ car $\lambda \geq a_6 k^{\frac{2}{n}}$ pour tout *k* assez grand (cf. [C.H])

Pour avoir des valeurs critiques de *J* à partir de la suite (b_k) un autre ensemble de valeurs minimisantes doit être défini :

$U_k = \left\{ u \equiv tv_{k+1} + w \setminus t \in [0, R_{k+1}], w \in B_{R_{k+1}} \cap E_k, \|u\| \leq R_{k+1} \right\}$ et

$A_k = \left\{ H \in C(U_k, E), H \setminus D_k \in \Gamma_k \text{ et } H = Id \text{ pour } u \in Q_k \equiv \left(\partial B_{R_{k+1}} \cap E_{k+1}\right) \cup \left(\left(B_{R_{k+1}} \setminus B_{R_k}\right) \cap E_k\right) \right\}$

Posons : $c_k = \inf\limits_{H \in A_k} \max\limits_{u \in U_k} J(H(u))$

En comparant la définition de c_k avec (25) on montre que $c_k \geq b_k$.

Proposition 4

Supposons les nombres c_k, b_k vérifient : $c_k > b_k \geq M_1$

On défini : $A_k(\delta) = \left\{ H \in A_k \setminus J(H(u)) \leq b_k + \delta \text{ pour } u \in D_k \right\}$ pour $\delta \in (0, c_k - b_k)$ et

$$c_k(\delta) = \inf_{H \in A_k(\delta)} \max_{u \in U_k} J(H(u)) \tag{35}$$

alors $c_k(\delta)$ est une valeur critique de *J*.

Preuve

La définition de $A_k(\delta)$ implique que cet ensemble n'est pas vide puisque $A_k(\delta) \subset A_k$, $c_k(\delta) \subset c_k$

Supposons que $c_k(\delta)$ n'est pas une valeur critique de *J*.

Posons $\bar{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}(c_k - b_k - \delta)$ alors : $\bar{\varepsilon} > 0$ choisissons *H* tel que : $H \in A_k(\delta)$

$$\max J(H(u)) \leq c_k(\delta) + \varepsilon \tag{36}$$

Considérons $\eta\left(1, H\left(\cdot\right)\right)$ il est clair que cette fonction appartienne à $C\left(U_k, E\right)$ de plus si $u \in Q_k$, $H\left(u\right) = u$ puisque $H \in A_k$ et de plus $J\left(H\left(u\right)\right) \leq 0$ d'après la définition de R_k et R_{k+1}.

Puisqu'on peut supposer $b_k \geq M_1 > 0$ et $c_k\left(\delta\right) \geq c_k > b_k$ le choix de $\overline{\varepsilon}$ implique $\eta\left(1, H\left(u\right)\right) = u$ sur Q_k et puisque $H \in A_k\left(\delta\right)$ si $u \in D_k$ alors on a :

$$J\left(H\left(u\right)\right) \leq b_k + \varepsilon \leq c_k - \overline{\varepsilon} \leq c_k\left(\delta\right) - \overline{\varepsilon}$$

D'après le choix de $\overline{\varepsilon}$ et (lemme de déformation) on a : $\eta\left(1, H\left(\cdot\right)\right) \in A_k\left(\delta\right)$

$$\max_{u \in u_k} J\left(\eta\left(1, H\left(u\right)\right)\right) \leq c_k\left(\delta\right) - \varepsilon \tag{37}$$

Contrairement à (35)

Proposition 5 :

Si $c_k = b_k$ pour tout $k \geq k^*$ il existe une constante $u > 0$ et $\tilde{k} \geq k^*$ telle que :

$$b_k \leq w^{\frac{\mu}{\mu-1}} \text{ pour tout } k \geq \tilde{k} \tag{38}$$

En comparant (38) et (32) et (2) on a contradiction.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$ et $k \geq k^*$ choisissons $H \in A_k$ tel que

$$\max_{u \in u_k} J\left(H\left(u\right)\right) \leq b_k + \varepsilon \tag{39}$$

puisque $D_{k+1} = U_k \cup \left(-U_k\right)$

H peut être prolongé par continuité dans B_{k+1} telle qu' elle soit unique de plus d'après (2)

$$b_{k+1} \leq \max_{u \in D_{k+1}} J\left(H\left(u\right)\right) = G\left(H\left(w\right)\right) \tag{40}$$

Pour un certain $w \in -U_k$ si $w \in U_k$ d'après (39) et (40)

$$J\left(H\left(w\right)\right) \leq b_k + \varepsilon \tag{41}$$

Supposons que $w \in -U_k$. Puisque $b_k \to \infty$ si $k \to \infty$ et d'après (32), (40) et (9) alors $J(-H(w)) > 0$ si k assez grand, $k \geq \tilde{k}$ par (9) et l'imparité de H et (39) on a :

$$J(H(w)) = -J(-H(-w)) \leq J(H(-w)) + B_1\left(J(H(-w))^{\frac{1}{\mu}} + 1 \right) \tag{42}$$

$$\leq b_k + \varepsilon + B_1\left((b_k + \varepsilon)^{\frac{1}{\mu}} + 1 \right)$$

En combinant (40) et (41) on trouve : $b_{k+1} \leq b_k + \varepsilon + B_1\left((b_k + \varepsilon)^{\frac{1}{\mu}} + 1 \right)$

$$b_{k+1} \leq b_k + B_1\left(b_k^{\frac{1}{\mu}} + 1 \right) \text{ pour tout } k \geq \tilde{k} \tag{43}$$

Il reste à montrer que (43) implique (38), c'est l'inégalité donnée dans la prop.4. Chap.II.

Supposons que (38) est vérifiée pour tout $k \in \left[\hat{k}, j\right] \cap \sqcup$ .On affirme qu'elle est vérifiée pour $j+1$ sans perte de généralité, on peut supposer $j \geq 2\hat{k}$ et $w \geq \max\limits_{0 \leq l \leq \hat{k}} \dfrac{b_{\hat{k}+1}}{\left(\hat{k}+l\right)^{\frac{\mu}{\mu+1}}}$ et

Par (43) on a :

$$b_{j+1} \leq b_j + \beta_1\left(\left(wj^{\frac{\mu}{\mu-1}} \right)^{\frac{1}{\mu}} + 1 \right) \tag{44}$$

$$\leq b_k + \beta_1 \sum_{l=\hat{k}}^{j} \left(w^{\frac{1}{\mu}} l^{\frac{1}{\mu-1}} + 1 \right)$$

$$\leq b_{\hat{k}} + \beta_1\left(j - \hat{k} + 1 \right) + \beta_1 w^{\frac{1}{\mu}} \sum_{l=\hat{k}}^{j} l^{\frac{1}{\mu-1}}$$

On doit prouver que le terme de droite de (44) ne dépasse pas $w(j+1)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$

$$\sum_{l=\hat{k}}^{j} l^{\frac{1}{\mu-1}} \leq \int_{\hat{k}}^{j} x^{\frac{1}{\mu-1}} dx \leq \frac{\mu-1}{\mu} j^{\frac{\mu}{\mu-1}} \tag{45}$$

En comparant (44) et (45) on obtient (38) pour $j+1$. Il suffit que w vérifie :

i. $b_{\hat{k}} \leq w(1-2\delta)(j+1)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$

ii. $\beta_1 \leq w\delta$

iii. $\beta_1 w^{\frac{1}{\mu}} \dfrac{\mu}{\mu-1} \leq w\delta$ (46)

Pour un certain $\delta \in (0,1)$ puisque $j > 2k$, (46) est vérifiée.

$$1 \leq (1-2\delta) 2^{\frac{\mu}{\mu-1}} \tag{47}$$

Qui est toujours satisfaite pour δ proche de 0 avec δ ainsi choisi (47) et (iii) est vérifiée si w est assez grand.

Alors on a : (38) pour tout $k \geq \hat{k}$ et la preuve est achevée.

Chapitre III

Résultats principaux

Dans ce chapitre nous nous proposons d'établir l'existence d'une suite de solutions faibles non radiales pour le problème (I).

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} -\Delta u(x) = g(|x|, u(x)) + f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, $f \in L^2(\Omega)$ et g vérifie les hypothèses suivantes :

H1) $g \in C^{0,\alpha}([0,1] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0])$ pour $\alpha \in (0,1)$ et $\varepsilon > 0$

et $g(|x|, u(x)) = -g(|x|, -u(x))$ pour $x \in \Omega$, et $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$

H2) $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{g(r,u)}{u} = +\infty$ uniformément par rapport à $r \in [0,1]$.

Nous commençons par introduire la définition de solution non radiale

Définition 1 [R]

Soit le problème de Sturm.Liouville de valeurs propres :

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = \mu\, a(x)\, v(x) & x \in \Omega \\ v(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Où *a* est une fonction continue en $x \in \Omega$.

Ce problème possède une suite des valeurs propres (μ_j) telles que

$0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \ldots \leq \mu_j \leq \ldots\ldots$ et $\mu_j \to \infty$ quand $j \to \infty$

Pour $a(x) = 1$, on obtient les valeurs propres de $-\Delta$.

Une valeur propre est dite radiale respectivement non radiale si sa fonction propre associée est radiale respectivement non radiale.

Dans le cas où $N=2$ les valeurs propres radiales sont simples et les fonctions propres sont explicitement donnée par : $\mu_s^0 = j_{0,s}^2$, $\psi_s^0(r) = J_0\left(j_{0,s}r\right)$ pour $s \in \mathrm{N}$.

Et les valeurs propres non radiales sont simples quand les fonctions propres sont supposées appartenir à $E_1 = \left\{u \in H_0^1(\Omega) / u(r,\cdot) \text{ impaire et } 2\pi \text{ périodique}\right\}$.

Pour $k \in \mathrm{N}$, $\mu_s^k = j_{k,s}^2$, $\psi_s^k(r,\theta) = J_k\left(j_{k,s}r\right)\sin k\theta \in E_k$, pour $s \in \mathrm{N}$ où $J_k, k \in \mathrm{N}$ sont des fonctions de Bessel de première espèce et $j_{k,s}$ est le s$^{\text{ème}}$ zéro positif de J_k.

Définition 2

On conviendra d'appeler solution non radiale de (I) toute solution de (I) qui ne dépend pas seulement de *r*, mais de θ_i aussi.

Remarque 1

Nous nous intéressons aux solutions non radiales, il convient d'utiliser la paramétrisation standard de Ω en coordonnées polaires $(r,\theta_i)(i=1\ldots N-1)$

$$\Omega = \left\{(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-1}) \setminus r \in [0,1], \theta_i \in [0,\pi], i=1,\ldots,N-2, \theta_{N-1} \in [-\pi,\pi]\right\}$$

Considérons la fonctionnelle d'énergie associée au problème (I)

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(x,u) - f(x)\cdot u(x)\right]dx$$

Pour déterminer les solutions non radiales pour le problème (I) nous adapterons une approche variationnelle, minimisation de fonctionnelle avec contraintes, nous chercherons les solutions dans les ensembles :

$$E_k := \left\{u \in H_0^1(\Omega) / u(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},.) \text{ impaire et } \frac{2\pi}{k} \text{ périodique}\right\}.$$

Pour $k \in \mathrm{N}$ l'ensemble E_k est une contrainte naturelle dans le sens où tout point critique *u* de φ dans E_k est un point critique de φ dans $H_0^1(\Omega)$ (la réciproque n'est pas vraie). L'idée d'introduire les ensembles $\{E_k\}$ est originaire de l'étude des solutions périodiques dans les systèmes Hamiltonian [V2], ceci n'est pas restreint au cas spécifique que nous abordons dans ce travail. En fait pour différents problèmes dans lesquels apparaît la symétrie, il est possible d'étudier de telles solutions (super harmonique).

Remarque2

$\varphi(u)=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^{2}-G(x,u)-f(x)\cdot u(x)\right]dx$ la fonctionnelle d'énergie associée au problème (I) (le terme perturbateur f fait perdre la parité à φ

La fonctionnelle $I(u)=\frac{1}{2}\left(\varphi(u)+\varphi(-u)\right)$ est paire, admet une suite des points critiques (Résultat obtenu par Rabinowitz th1, Van Groesen [V_2] et F.A Lessio et W. Dambresio [L.D]).

On a : $I(u)\leq \max\left(\varphi(u),\varphi(-u)\right)\ \forall u\in \mathrm{R}$

III.1. Résultat principal

Nous avons les résultat suivants :

Théorème 1

Sous les hypothèses (H_1) ,(H_2) et $f\in L^{2}(\Omega)$ le problème (I) admet une suite non bornée de solutions si

$$\beta=\frac{(n+2)-(n-2)s}{n(s-1)}>\frac{\mu}{\mu-1}\ \text{avec } s<2^{*}-1 \text{ et } \mu>2$$

oû μ définie par $\left(h_3\right)$ et s dans (h_2)

Preuve (de théorème 1)

Soit $\tilde{g}$ un prolongement par continuité de g vérifiant (h_2) et (h_3) du théorème

de Rabinowitz.

Soit par exemple : le prolongement par continuité et l'imparité suivant pour $0<\alpha<1$ et $R\geq 2$

$$\tilde{g}(r,\xi)=\begin{cases} g(r,\xi) & \xi\leq\varepsilon_0 \\ h(r)\xi^{\alpha} & \varepsilon_0\leq\xi\leq R \\ h(r)\dfrac{\xi^{\alpha+1}}{R} & \xi>R \end{cases}$$

$g(r,-\xi)=-g(r,\xi)$, $h(r)$ est déterminée en fonction de la continuité et l'imparité.

$\left(h(r)\varepsilon_0^{\alpha}=g(r,\varepsilon_0)\right)$.

Cette non linéarité est superlinéaire au voisinage de l'infini. L'hypothèse (h_3) se trouve vérifiée si l'on prend $2 \leq R < \mu \leq \alpha + 2$.

Le théorème de Rabinowitz assure l'existence et la multiplicité de solutions sans pour cela que l'un sache si elles sont radiales ou pas.

Théorème 2

Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) et $f \in L^2(\Omega)$ le problème (I) admet une suite de solutions faibles non radiales.

Preuve

Pour ce, nous commençons par modifier le problème initial (I) en (II)

$$(\mathrm{II})\begin{cases} -\Delta u(x) = \tilde{g}\left(|x|, u(x)\right) + f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $\tilde{g}$ est un prolongement par continuité impaire de g vérifiant :

(H_1') : $\lim\limits_{|u| \to \infty} \dfrac{\tilde{g}(r,u)}{u} = 0$ uniformément en $r \in [0,1]$.

Considérons le problème modifié (II), nous montrerons par la méthode directe du calcul variationnel, qu'il existe une suite $(u_k)_k$ de solutions non radiales telles que

$\lim\limits_{k \to \infty} \|u_k\|_\infty = 0$ (*).

De (*) nous déduirons que pour k assez grand les fonctions u_k sont des solutions du problème initial (I).

Remarque 2

On peut donner un exemple d'un tel prolongement.

Soit le prolongement par continuité et imparité suivant : pour $0 < \alpha < 1$

$$\tilde{g}(r,\xi) = \begin{cases} g(r,\xi) & -\varepsilon_0 \leq \xi \leq \varepsilon_0 \\ a(r)\xi^\alpha + b(r) & |\xi| > \varepsilon_0 \end{cases}$$

$a(r)$ et $b(r)$ choisies de telle sorte que la continuité en $\pm\varepsilon_0$ est obtenue ainsi que l'imparité et $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \dfrac{\tilde{g}(r,\xi)}{\xi} = 0$.

Remarque 3 L'hypothèse (H_1') assure l'hypothèse (h_2) du (th2) (Chap II).

Supposons (H_1') est vérifiée :

D'après (H_1') : $\lim\limits_{|u|\to\infty} \dfrac{\tilde{g}(r,u)}{u} = 0$ uniformément en $r \in [0,1]$

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0, u > A_\varepsilon \Rightarrow \frac{\tilde{g}(r,u)}{u} \le \varepsilon$$
$$\Rightarrow \tilde{g}(r,u) \le \varepsilon u$$

puisque $\tilde{g}$ continue en u, $\exists B > 0$ tq $|\tilde{g}(r,u)| \le B \quad \forall |u| \le A_\varepsilon$

alors $|\tilde{g}(r,u)| \le B + \varepsilon |u| \quad \forall u \in \mathbf{R}$

Donc $\tilde{g}$ dans notre cas vérifie l'hypothèse (h_2) de Rabinowitz avec s=1.

Dans la suite, et par une approche variationnelle, nous montrons l'existence de solutions non radiales.

Soit $\tilde{\varphi}$ la fonctionnelle d'énergie associée au problème modifié.

$$\tilde{\varphi}(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \tilde{G}(x,u) - f(x) \cdot u(x) \right] dx$$

où : $\tilde{G}(|x|,u) = \int_0^u \tilde{g}(|x|,v)\, dv$

pour obtenir la multiplicité des solutions non radiales on cherchera des solutions périodiques en θ_{N-1} sur les ensembles E_k

où $E_k := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) / u(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\cdot) \text{ impaire et } \dfrac{2\pi}{k} \text{ périodique} \right\}$

Lemme 1

Supposons que (H_1') est vérifiée alors :

L'ensemble E_k est faiblement fermé dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout $k \in \mathrm{N}$.

Et la fonctionnelle $\tilde{\varphi}$ est semi continue inférieurement et coercive dans E_k .

Preuve

$$E_k := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) / u(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},.) \text{ impaire et } \frac{2\pi}{k} \text{ périodique} \right\}$$

E_k est faiblement fermé dans $H_0^1(\Omega)$:

E_k est convexe en effet, soit $u,v \in E_k$

$$\begin{aligned} &tu(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},-\theta_{N-1})+(1-t)v(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},-\theta_{N-1}) \\ &=-\left[tu(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1})+(1-t)v(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1})\right] \end{aligned}$$

Donc $tu+(1-t)v$ est impaire.

$$\begin{aligned} &tu\left(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}+\frac{2\pi}{k}\right)+(1-t)v\left(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}+\frac{2\pi}{k}\right) \\ &=tu(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1})+(1-t)v(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \end{aligned}$$

Donc $tu+(1-t)v$ est périodique. Alors $tu+(1-t)v \in E_k \quad \forall t \in [0,1]$.

Par conséquent E_k est convexe.

Montrons que E_k est fortement fermé :

Soit $(u_n)_n \subset E_k$ tel que $u_n \to u$, montrons que $u \in E_k$.

On a $u \in H_0^1(\Omega)$ car $H_0^1(\Omega)$ est complet

$$\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \|u_n-u\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\overset{(\text{cf th 4 Chap I})}{\Rightarrow} \quad u_{n_k}(x)-u(x) \to 0 \text{ p.p sur } \Omega \ .$$

on a $x \in \Omega,\ x=(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-1})$

$$\begin{aligned} u(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},-\theta_{N-1}) &= \lim_{n\to\infty} u_n(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},-\theta_{N-1}) \text{ p.p sur } \Omega \\ &= \lim_{n\to\infty} -u_n(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \\ &= -\lim_{n\to\infty} u_n(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \\ &= -u(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u\left(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}+\frac{2\pi}{k}\right) &= \lim_{n\to\infty} u_n\left(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}+\frac{2\pi}{k}\right) \\ &= u(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \end{aligned}$$

Donc $u \in E_k$.

D'après le th.3 (cf. chap. I) E_k est convexe et fortement fermé alors E_k est faiblement fermé.

$\tilde{\varphi}$ semi continue inférieurement : si $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \tilde{\varphi}(u) \le \liminf_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(u_n)$

Soit $(u_n)_n \subset E_k$, $u_n \rightharpoonup$ u.

$$\tilde{\varphi}(u_n) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - \tilde{G}(x, u_n(x)) - f(x)\cdot u_n(x) \right] dx$$

On a : $\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}$ donc : $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$

Puisque $\tilde{G}$ est continue en u le lemme de Fatou entraine :

$\int_\Omega \tilde{G}(x, u(x))\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \tilde{G}(x, u_n(x))\,dx$. Delà on a :

Delà on a :

$$\tilde{\varphi}(u_n) \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} - \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \tilde{G}(x, u_n(x))\,dx - \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(x) u_n(x)\,dx$$
$$\tilde{\varphi}(u_n) \le \liminf_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(u_n)$$

ce qui entraine : $\tilde{\varphi}$ semi continue inférieurement

Montrons maintenant que $\tilde{\varphi}$ est coercive dans E_k , c'est-à-dire $\lim_{|u|\to\infty} \tilde{\varphi}(u) = +\infty$ $(u \in E_k)$.

D'après (H_2') on a :

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{\tilde{g}(r,u)}{u} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0, |u| > A_\varepsilon \Rightarrow \frac{\tilde{g}(r,u)}{u} < \varepsilon$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\tilde{g}(r,u) < \varepsilon u$ si $|u| > A_\varepsilon$

ce qui entraine que $\tilde{G}(r,u) < \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ pour $|u| > A_\varepsilon$

Donc pour $|u|$ assez grand on a:

$$\tilde{\varphi}(u) \ge \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad (3)$$

Or $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (cf. corollaire 1 (chap. I)),

d'où $\exists c_1 > 0$ tq :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{4}$$

En remplaçant (4) dans (3) on trouve :

$$\tilde{\varphi}(u) \ge \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\varepsilon c_1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - c_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$
$$\tilde{\varphi}(u) \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon c_1}{2}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - c_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$
$$\tilde{\varphi}(u) \ge \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon c_1}{2}\right)\|u\|_{H_0^1(\Omega)} - c_2\right]\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$
$$\lim_{|u|\to\infty} \tilde{\varphi}(u) \ge \lim_{|u|\to\infty} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon c_1}{2}\right)\|u\|_{H_0^1(\Omega)} - c_2\right]$$
$$\lim_{|u|\to\infty} \tilde{\varphi}(u) = +\infty \text{ , } u \in E_k$$

$\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon c_1}{2}\right) > 0$ pour ε assez petit .

Alors $\tilde{\varphi}$ est coercive dans E_k .

Du lemme 1 on a E_k est faiblement fermé dans $H_0^1(\Omega)$ et $\tilde{\varphi}$ est semi continue inférieurement et coécrive dans E_k . Nous déduisons que $\tilde{\varphi}$ est bornée inférieurement.

Posons $m_k = \inf_{E_k} \varphi$.

Le lemme suivant, nous donne un ordre sur, $\{m_k,\ k \in \mathrm{N}\}$.

Lemme 2

Pour tout $k \in \mathrm{N}$ on a : $-\infty < m_1 \le m_k < 0$

Preuve

1. On a : $E_k := \left\{u \in H_0^1(\Omega) / u\,(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, .) \text{ impaire et } \frac{2\pi}{k} \text{périodique}\right\}$ et

   $m_K = \inf_{E_K} \varphi$ φ coercive c'est-à-dire $\lim_{|u|\to\infty} \varphi(u) = +\infty$.

   D'où $-\infty < m_k = \inf_{E_k} \varphi(u),\ \forall k \in \mathrm{R}$.

2. Et $u \in E_k \Leftrightarrow u\left(x+\dfrac{2\pi}{k}\right)=u(x) \Rightarrow u\left(x+\dfrac{2\pi n}{k}\right)=u(x)\, \forall n \in \mathbb{N}$ en particulier pour $n=k$
   $u \in E_k \Rightarrow 2\pi$ est une periode de u $\Rightarrow u \in E_1 \Rightarrow E_k \subset E_1$
   De plus on a : $\inf_{u\in E_1} \tilde{\varphi}(u) \le \inf_{u \in E_k} \tilde{\varphi}(u)$ alors : $m_1 \le m_k$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on considère l'ensemble suivant :

$$\Omega_k := \left\{(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \in \Omega \,/\, \theta_{N-1} \in \left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right\}$$

Soit λ_1^k la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega_k)$ et v_1^k la fonction propre associée à λ_1^k (déf. 1).

On considère. v_k le prolongement impaire et périodique de v_1^k dans Ω. Alors : $v_k \in E_k \cap L^\infty$ et on a :

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^2\, dx = 2k \int_{\Omega_k} |\nabla v_k|^2\, dx = 2k\lambda_1^k \int_{\Omega_k} |v_k|^2\, dx = \lambda_1^k \int_\Omega |v_k|^2\, dx \,.$$

On applique (H_2) on a : $g=\tilde{g}$ au voisinage de zéro. Alors :

$$\lim_{u\to 0}\frac{\tilde{g}(r,u)}{u}=+\infty \Leftrightarrow \text{ pour } \lambda_1^k>0, \exists \varepsilon_k \in (0,\varepsilon_0), |u|<\varepsilon_k \Rightarrow \frac{\tilde{g}(r,u)}{u} > 2\lambda_1^k$$
$$\Rightarrow \int_0^u \tilde{g}(r,s)\,ds > \int_0^u 2\lambda_1^k v\,dv \Rightarrow \tilde{G}(r,u) \ge \int_0^u 2\lambda_1^k v\,dv = \lambda_1^k u^2$$

Soit $\varepsilon_k \in (0,\varepsilon_0)$. De ($H_2$) on a : $\tilde{G}(r,u) \ge \lambda_1^k |u|^2$ pour $r\in[0,1]$ et $|u| \le \varepsilon_k$.

On a :

$$I(u)=\frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(u)+\tilde{\varphi}(-u)\right)$$
$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \tilde{G}(x,u(x))\,dx$$

Soit $s \in \left(-\dfrac{\varepsilon_k}{\|v_k\|_{L^\infty}}, \dfrac{\varepsilon_k}{\|v_k\|_{L^\infty}}\right)$, alors $sv_k \in E_k$. (par définition de E_k)

et : $I(sv_k)=s^2\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v_k|^2\,dx - \lambda_1^k \int_\Omega |v_k|^2\,dx\right) < 0 \quad \forall s \in \left(-\dfrac{\varepsilon_k}{\|v_k\|_{L^\infty}}, \dfrac{\varepsilon_k}{\|v_k\|_{L^\infty}}\right)$

et par suite $\tilde{\varphi}(sv_k) < 0$ ou $\tilde{\varphi}(-sv_k) < 0,$ ce qui entraine $\inf_{E_k} \tilde{\varphi}(u) < 0$.

Delà nous concluons que $m_k < 0$.

Lemme 3

Pour tout $k \in \mathrm{N}$, il existe $u_k \in E_k \setminus \{0\}$ solutions faibles de (II) telles que : $\tilde{\varphi}(u_k) = m_k$ de plus il existe $M > 0$ telle que : $\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M,\ \forall k \in \mathrm{N}$ .De plus ces solutions sont classique et elles vérifiant $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_\infty = 0$

Où $\|u_k\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u_k(x)|$.

Preuve

$\tilde{\varphi}$ s.c.i, $\tilde{\varphi}$ coécrive, E_k faiblement fermé convexe par application du th 7 ChapI on conclut que $\tilde{\varphi}$ est bornée inférieurement est attient son minimum sur E_k c'est-à-dire il existe $u_k \in E_k$ tel que $m_k = \inf_{E_k} \varphi = \varphi(u_k)$.

Puisque $\tilde{\varphi}(0) = 0$ et $m_k < 0$ alors $u_k \neq 0$ donc $\tilde{\varphi}$ atteint son minimum en $u_k \in E_k \setminus \{0\}$.

$\begin{cases} u_k \in E_k \\ u_k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow u_k$ est impaire et $\dfrac{2\pi}{k}$ périodique en θ_{N-1} donc u_k est non radiale.

Par définition de m_k et application du lemme 2 on a :

$m_1 \leq \tilde{\varphi}(u_k) < 0$ pour tout $k \in \mathrm{N}$ en utilisant le fait que $\tilde{\varphi}$ est coercive, on conclut qu'il existe $M > 0$ telle que : $\|u_k\| \leq M \quad \forall k \in \mathrm{N}$

La suite $(u_k)_k$ des solutions non radiales du problème(II) est bornée. De plus ces solutions sont classique voir remarque 4.

D'après le théorème Ascoli-Arzela $\exists \left(u_{k_{nj}}\right)_{nj} \subset (u_k)_k$ telle que $u_{k_{nj}}$ converge vers u dans H_0^1.

$u \in E_k$ car E_k est faiblement fermé.

Montrons que $u \equiv 0$

Supposons qu'au contraire $u \not\equiv 0$

Et posons: $u_j := u_{k_{nj}}$. Rappelons que pour tout $d \in [0,1]\times[0,\pi]^{N-2}$ la fonction $u_j(d,\cdot)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{j}$ car $u_j \in E_k$, donc $u_j(d,.) \in W_T^{1,2}([-\pi,\pi])$ avec $T = \frac{2\pi}{j}$

Supposons qu'il existe $d_0 \in [0,1]\times[0,\pi]^{N-2}$ et $\theta_0 \in [-\pi,\pi]$ telle que : $\alpha := u(d_0,\theta_0) \neq 0$ et supposons que $\alpha > 0$ (pour fixer les idées).

(Remarque $\theta_0 \in [-\pi,\pi]$ et u est $\frac{2\pi}{j}$ périodique $(u \in E_k)$ donc il existe $\theta_0^* \in \left[0,\frac{2\pi}{k}\right]$ tel que $u(d_0,\theta_0) = u(d_0,\theta_0^*)$)

Notons $v_j(\theta) = u_j(d_0,\theta)$

$v(\theta) = u(d_0,\theta)$

Alors (Prop 1 ChapI), entraîne que les v_j et v sont continues. Et par continuité de v il existe $I_0 \subset [-\pi,\pi]$ avec $|I_0| > 0$ telle que $v(\theta) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $\theta \in I_0$.

D'après la convergence uniforme de $v_j \to v$ il existe $j_0 \in \mathrm{N}$ telle que $v(\theta) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout $\theta \in I_0$ et pour $j \geq j_0$. Mais si $j|I_0| > 2\pi$, I_0 doit contenir au moins un zéro de v d'où la contradiction.

Preuve du théorème 1

Pour $\varepsilon > 0$ et $k_0 \in \mathrm{N}$ telles que $\|u_k\|_\infty < \varepsilon_0$ pour tout $k \geq k_0$
$g(|x|,u_k(x)) = \tilde{g}(|x|,u_k(x)) \quad \forall x \in \Omega$.

D'après la définition du prolongement :

$\tilde{g} = g$ pour $u \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

D'après le lemme 3, pour $\varepsilon_0 > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\|u_k\|_\infty < \varepsilon_0 \quad \forall k \geq k_0$. Or sur $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ g et $\tilde{g}$ coïncident donc u_k est solution faible non radiale du problème initial et la preuve du théorème se trouve achevée.

Remarque 4

On a $h(x,u) = g(r,u) + f(x) \,/\, h \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ espace de Hölder

On montre que toute solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ est en fait solution classique.

En utilisant la technique "Bootstarping procedure"

Pour h vérifiant : $h(x,u) \leq a_1 + a_2 |u|^p \qquad 0 < p < 2^* - 1 = \dfrac{N+2}{N-2}$

$u \in H_0^1(\Omega)$, l'injection de Sobolev donne $u \in L^{2^*}(\Omega)$

L'opérateur de Nemitski $u \to h(x,u)$ étant continue de $L^{2^*}(\Omega)$ vers $L^{\beta}(\Omega)$ avec $\beta = \dfrac{2^*}{p} = \tau \dfrac{2N}{N+2}$ on a $h(\cdot, u(\cdot)) \in L^{\beta}(\Omega)$.

Puisque $-\Delta u = g(x, u(x)) + f(x)$ on obtient $u \in W_0^{2,\beta}(\Omega)$

Si $2\beta \leq N$ on répète les étapes précédentes : $u \in W_0^{2,\beta}(\Omega)$.

L'injection de Sobolev donne $u \in L^{\beta*}(\Omega)$ où $\beta* = \dfrac{N\beta}{N - 2\beta} > \tau \dfrac{2N}{N-2}$.

La continuité de l'opérateur Nemitski donne $h(\cdot, u(\cdot)) \in L^{\gamma}(\Omega)$ avec $\gamma = \dfrac{\beta*}{p} > \tau\beta$.

On déduit $u \in W_0^{2,\gamma}(\Omega)$.

Il suffit de répéter les étapes précédentes autant de fois que cela sera nécessaire pour obtenir $2\gamma > N$.

L'injection continue de Sobolev: $W_0^{2,\gamma}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$.

Si $h \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ en posant $h\left(x\right) = g\left(x, u\left(x\right)\right) + f\left(x\right)$ on a $h\left(\cdot\right) \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ l'estimation de Schauder donne $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Maintenant nous utilisons l'injection compacte de $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$dans $C^{2}\left(\overline{\Omega}\right)$ pour conclure que u est une solution classique du problème (I).

Conclusion

Nous faisons la remarque importante que la condition imposée par Rabinwitz à l'écart $J\left(u\right) - J\left(-u\right)$ se trouve vérifiée $\forall \mu \neq 1$ dans notre cas le $s = 1$.

Et dans ce cas. On peut écrire $\left\| u_{n_k} \right\|_{\infty} < \varepsilon, k > k_0$ les solutions faibles de vient des solutions classique du problème initial.

Références :

[A.C] Hugo Aduen and Alfonso Castro, Infinitely many non radial solutions to a superlinear Dirichlet problem journal 131(2002), 835-843.

[B] G.J. Bulter, Rapid oscillation, non extendability on the existence of periodic solution to second order nonlinear ordianry differential equations.J. Differential Eq. 22(1976), 467-477.

[B.B] A. Bahri and H. Berestycki, A perturbation method in critical point theory and applications. Trans. Amer. Math. Sco. 267(1981) 1-32.

[Br] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson 1983, (Paris)

[B.G] F. Bernis, J. Garcia-Azorero. I. Peral, Existence and multiplicity of nontrivial solutions of semilinear critical problems of fourth order. Advances differential equations. Volume 1, number 2, March (1996). 219-240.

[C.D] A. Capietto, W. Dambrosio and F. Zanolin, infintely many radial solutions to a boundary value problem in a ball. Quad. Dip. Mat, Univ. Torino, 20 (1998), 1-29.

[C.H] R. Courant andHilbert, Methods of mathematical physics, volume 1, interscience. New York. 1953.

[K] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer- Verlag, 1983.

[K.P] M. K Krasnosel'skii, A.I. Perov, A.I. Povolotskii and P.P. Zabreiko, Plane vecotr elds, Academic Press, New York, 1966.

[L.D] F.A Lessio et W. Dambresio, Multiple solutions to a Dirichlet problem on bounded symmetric domains, via carlo Alberto, 235 (1999), 217-226.

[M] R. Molle, Multiple solutions of supercritical elliptic problems in perturbed, linking . elsevier, 23 (2006), 399-405.

[N] Z. Nehari, Existence of positive non radial solutions for non linear elliptic equations in annualr domains, J. Differential equations. 86 (1992), 367-391.

[R] P.H Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS.Reg Conf ser. Math. 65MS, Providence, R.I, 1986.

[Sh] B.L. Shekhter, On existence and zeros of solutions of nonlinear two points.

[St1] M. Struve, Infinitely many solutions of super linear boundary value problems with rational symmetry. Arch.Math 36 (1981), 360-369.

[St2] M. Struve, Variationnel methods applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, Springer Verlag, 1999.

[V1] E.W. Van Groesen, Applications of naturel constraints in critical point theory to periodic solutions of natural hamiltonian systems, MRC Report 2593, November 1983.

[V2] E.W.C. Van Groesen, Applications of natural constraints in critical point theory to boundary value problems on domains with rotation symetry, Arch. Math; 44 (1985), 171-179.