

Inscrit Sous le N°:
Date: 02.FEV.2009
Code: 3576 1

THESE DE DOCTORAT

Présentée à

L'UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHEMATIQUES

Par

Fatiha MOKHTARI

Sujet de la thèse

**PREVISION PAR UNE METHODE DE PARZEN D'UN PROCESSUS
A TEMPS CONTINU ADMETTANT UNE REPRESENTATION
AUTOREGRESSIVE**

Soutenu le	18/01/ 2009D	devant le jury composé de	
DIB Hacem	Professeur	Président	Université ABB -Tlemcen
BOSQ Denis	Professeur	Examineur	Université Pierre Marie Curie -Pari
PUMO Besnik	Professeur	Examineur	Université d'Angers
MOHDEB Zaher	Professeur	Examineur	Université Mentouri - Constantine
LABBAS Ahmed	M.C.	Examineur	Université ABB - Tlemcen
MOURID Tahar	Professeur	Directeur de thèse	Université ABB - Tlemcen

Remerciements:

Je tiens à remercier en premier lieu Monsieur MOURID Tahar pour m'avoir accordé sa confiance en acceptant de travailler sous sa direction et de guider notre recherche avec patience et efficacité. Nous tenons à lui exprimer ici notre profonde reconnaissance.

Je remercie particulièrement Les Professeurs Denis BOSQ et Besnik PUMO pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de juger ce mémoire malgré leurs préoccupations.

J'exprime mes remerciements à Mr Le Professeur Hacem DIB pour la présidence du jury et pour sa participation à l'élaboration de cette thèse.

J'exprime mes remerciements au Professeur Zaher MOHDEB et Ahmed LABBAS pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Mes remerciements vont aussi tout particulièrement à mon mari ELKEURTI Abdelkrim pour son soutien qui m'a permis de mener à bien ce projet.

En fin je tiens à exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Résumé:

Nous considérons la prévision d'un processus à temps continu admettant une représentation autorégressive AR(1) dans l'espace des fonctions continues $C_{[0,\delta]}$ par une méthode due à Parzen utilisant les espaces à noyau reproduisant associés à la fonction de covariance du processus. Nous donnons des résultats de convergences des prédicteurs suivant plusieurs modes avec les normes associés aux espaces fonctionnels considérés. Nous traitons ensuite le cas d'un processus autorégressif à coefficients aléatoires par la même méthode de Parzen. Nous utilisons les résultats obtenus sur ce type de prédicteurs en illustrant leur performance sur des séries chronologiques réelles et sur des séries simulées et en les comparant avec d'autres méthodes de prédiction utilisées dans la littérature.

Title: Parzen Prediction of a Functional Autoregressive Processes**Abstract:**

First we consider a Parzen prediction of reproducing kernel space of a continuous time stochastic process admitting a functional autoregressive representation AR(1) in the space of the continuous functions $C_{[0,\delta]}$. We give convergence results of the predictors in different stochastic modes with norms of associated functional spaces. We consider also Parzen prediction of an autoregressive processes with random coefficients. We use the obtained results by illustrating their performance on real chronological series and simulated serie and compare with the other methods of prediction existing in the literature.

Mots clés: Processus autorégressif fonctionnel- Prédicteur de Parzen-Espace à noyau reproduisant- Processus autorégressif fonctionnel à coefficients aléatoires- Série d'El Nino.

Key words: Functional autoregressive process-Parzen Predictor- Reproducing kernel space - Functional autoregressive process with random coefficient- El Nino series.

Table des Matières

Introduction	1
1 PROCESSUS AUTOREGRESSIFS BANACHIQUES D'ORDRE UN	4
1.1 Définition et existence d'un processus autorégressif Banachique d'ordre un	4
1.2 Représentation ARB(1) de processus réels à temps continu	6
1.2.1 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck	6
1.2.2 Construction d'un modèle ARC(1) ($B = C_{[0,1]}$)	8
1.2.3 Une classe d'ARB(1) à valeurs dans $L^2_{[0,1]}$	10
1.2.4 Processus avec saisonnalité	10
1.3 Loi Forte des Grands Nombres LFGN pour les processus autorégressifs banachiques	11
1.4 Processus Autorégressifs Hilbertiens d'ordre un	11
1.4.1 Définition d'un ARH(1)	11
1.4.2 Estimation des opérateurs de covariance Γ et Δ	13
1.4.3 Estimation des éléments propres :	17
2 PROCESSUS AUTOREGRESSIFS ET ESPACES A NOYAUX RE-PRODUISENTS	22
2.1 Définition et propriétés des espaces à noyau reproduisant	23
2.2 Exemples d'espaces à noyau reproduisant.	25
2.3 Meilleur prédicteur linéaire sans biais à erreur quadratique minimale BLUP	26
2.4 Estimateur linéaire sans biais de la moyenne à variance minimale MVUL	32
2.5 Prévision d'un processus autorégressif AR (p) réel	37
2.5.1 Application	38
2.6 Prévision d'un processus autorégressif ARC(1)	39
2.6.1 Prédicteur BLUP discret	42
2.6.2 Prédicteur BLUP continu	46
2.6.3 Liens avec le prédicteur probabiliste.	54

2.6.4	Comparaison entre les prédicteurs \widehat{X}_{n+1}^{**} et \widetilde{X}_n	57
2.6.5	Estimation par interpolation linéaire	58
2.6.6	Estimateur MVUL de la moyenne d'un processus ARC	62
3	PREVISION D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF HILBERTIEN	
	A COEFFICIENTS ALEATOIRES	63
3.1	Introduction	63
3.2	Prédicteurs BLUP Cas particuliers	64
3.2.1	Estimation de $E(\rho_0)$ connaissant les vecteurs propres de l'opérateur Γ_{X_0}	67
3.3	Prédicteur BLUP discret	72
3.4	Prédicteur BLUP continu	74
3.4.1	A) 1 ^{er} cas. Estimation du prédicteur BLUP continu X_n^{**} dans le cas où les vecteurs propres de l'opérateur de covariance Γ_{X_0} sont connus	74
3.4.2	B) 2 ^{eme} cas. Estimation du prédicteur BLUP continu de $X_n^*(s)$ dans le cas où les vecteurs propres φ_j de Γ_{X_0} sont inconnus	80
4	SIMULATIONS	83
4.1	Simulation et prévision d'un processus ARC(1)	83
4.1.1	Définitions	83
4.1.2	Prédicteur BLUP cas discret	85
4.1.3	Prédicteur BLUP cas continu	85
4.2	Simulation dans le cas d'un Processus a coefficient aléatoire	95
	Bibliographie	101

Introduction

Les variables aléatoires à valeurs dans des espaces fonctionnels sont considérées naturellement dans plusieurs domaines des probabilités et statistiques. Aussi l'interprétation d'un processus stochastique à temps continu comme une variable aléatoire à valeurs dans un espace fonctionnel a trouvé un grand intérêt aussi bien dans les théorèmes limites pour des variables aléatoires à valeurs dans des espaces de Banach que dans l'inférence et la prévision des processus stochastiques. Nous étudions la prédiction d'un processus aléatoire à temps continu sur tout un intervalle par une modélisation autorégressive fonctionnelle. Précisément considérons un processus stochastique réel $Y = (Y(t), t \in R)$ observé sur un intervalle $[0, T]$ et nous nous intéressons à la prévision du processus Y sur l'intervalle $[T, T + \delta]$, $\delta > 0$. En posant $X_n(t) := Y(t + n\delta)$, $t \in [0, \delta]$ nous générons une suite de v.a. $X = (X_n, n \in Z)$ à temps discret à valeurs dans un espace fonctionnel approprié dont l'évolution temporelle est supposée vérifier une équation du type autorégressive. En particulier si le processus Y est à trajectoires continues l'espace fonctionnel naturellement associé sera l'espace $C_{[0, \delta]}$ des fonctions réelles continues sur $[0, \delta]$. Ainsi la prévision du processus Y sur $[T, T + \delta]$ est ramenée à la prédiction de la v.a. X_n comme élément de $C_{[0, \delta]}$.

Deux types d'espaces fonctionnels nous semblent intéressants dans les applications: l'espace de Hilbert $L^2_{[0, \delta]}$ et l'espace de Banach $C_{[0, \delta]}$.

Pour résoudre ce problème de prévision dans les espaces de Hilbert, D. Bosq et T. Mourid (1990) ont introduit les processus autorégressifs à valeurs dans un espace de Hilbert que nous notons ARH . Nous présentons la définition de ces processus à valeurs dans un espace de Banach séparable, que nous notons ARB . En particulier, nous nous intéressons aux processus autorégressifs d'ordre un, notés $ARH(1)$ et $ARB(1)$.

Le premier chapitre est consacré au processus autorégressif d'ordre un $ARB(1)$ et $ARH(1)$. Le processus $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie la relation

$$X_i = \rho X_{i-1} + \varepsilon_i$$

où ρ est un opérateur borné continu et $(\varepsilon_i, i \in \mathbb{Z})$ est un B-bruit blanc. Nous donnons ensuite une relation entre les opérateurs de covariance du processus (X_i) et l'opérateur ρ . La loi forte des grands nombres a été établie pour les processus $ARB(1)$ par D. Bosq [8]. Il donne également des exemples de processus admettant une représentation autorégressive $ARB(1)$. Nous reprenons l'exemple de construction d'un $ARB(1)$ donné par Pumo [25]. Nous citons les résultats dus à D. Bosq, concernant ces processus [8].

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons la théorie des espaces autoreproduisants [3]. Par ailleurs, nous donnons les liens entre les espaces autoreproduisants et la prévision des séries chronologiques [17]. Cette relation est utilisée pour construire le meilleur prédicteur linéaire sans biais à erreur quadratique minimale noté $BLUP$ de la valeur du processus en un point $t \in [0, T]$ et le meilleur prédicteur de variance minimale de la moyenne du processus en un point $t \in [0, T]$ noté $MVUL$.

Nous appliquons les résultats du deuxième chapitre aux processus autorégressifs Banachiques d'ordre un $ARB(1)$. Plus particulièrement aux processus autorégressifs à valeurs dans l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, noté $ARC(1)$.

A partir d'un nombre fini de discrétisation de l'observation continue, nous construisons un prédicteur qui converge en probabilité. Dans le cas général, nous considérons le sous espace des fonctions de Lipschitz. En supposant que le processus est α -mélangeant, nous montrons la convergence presque sûre dans l'espace $L^2_{[0,1]}$ du prédicteur utilisant les vecteurs propres de l'opérateur de covariance Γ et de l'opérateur de covariance empirique Γ_n .

En particulier lorsque ρ est un opérateur intégral, nous comparons le comportement asymptotique des prédicteurs précédents avec ceux étudiés dans Pumo [26]. Nous montrons aussi la convergence presque sûre de ces prédicteurs dans l'espace $C_{[0,1]}$.

Dans le troisième chapitre, nous considérons les processus autorégressif à coef-

ficient aléatoire et à valeurs dans un espace de Hilbert ARHA(1) [1] et nous rappelons quelques résultats sur l'estimation des éléments propres de son opérateur de covariance empirique C_n . Nous étudions ensuite quelques propriétés de l'opérateur intégral en comparant avec les résultats obtenus par Pumo ([25], chapitre 3) et notre prédicteur du processus. Enfin nous terminons par l'estimation et la prévision du processus ARHA (1) par la méthode *BLUP*.

Dans le chapitre quatre nous présentons les études de simulation. Nous reprenons l'exemple numérique du processus *ARC*(1) donnée par Julien Damon qui prend en considération le travail de Pumo(1993). On présente le modèle utilisé pour simuler $n+1$ observations d'un processus *ARC*(1) et on donne quelques détails sur le calcul du prédicteur *BLUP* dans le cas discret et continu.

Pour simuler le processus et les prédicteurs on utilise le logiciel R avec spécification d'un modèle particulier. Plus précisément, on simule un processus dont les trajectoires appartiennent à l'espace engendré par les fonctions propres

$\{e_j(t) = \sqrt{2} \sin [(j - 1/2) \pi t], j = 1, 2, \dots, h\}$ de l'opérateur de covariance du mouvement brownien.

Des applications variées dans plusieurs domaines se trouvent dans ([8] ch. 9 et les références citées). Parmi elles nous pouvons citer: la prévision du phénomène météorologique "El Nino", la prévision du trafic routier, la consommation de l'énergie électrique d'une région, l'électrocardiogramme, la prévision du nombre annuel de passagers dans les chemins de fer Français et récemment la prévision du niveau de pollution atmosphérique [4].

Nous appliquons cette méthode de prévision à la série chronologique climatologique décrivant le phénomène (ENSO) pendant une période de douze mois de l'année 1986 et puis de l'année 2006, en utilisant des observations mensuelles de la période 1950-1985 et 1950-2005 respectivement. De même, on s'intéresse à la prévision sur une année de la température de Nottingham sur la base de données mensuelle. L'ensemble des données sont les températures mensuelles moyennes de l'air au Château de Nottingham de Janvier 1920 à décembre 1939. La prévision porte sur l'année 1939. On fait aussi un travail similaire à la température maximale moyenne et minimale moyenne à Alger durant la période 1956-2004.

Chapitre 1

PROCESSUS AUTOREGRESSIFS BANACHIQUES D'ORDRE UN

Un processus Banachique d'ordre un, noté ARB(1), est une généralisation naturelle d'un processus autorégressif à valeurs dans R^k . Dans ce chapitre nous donnons la définition et les résultats les plus importants concernant ces processus contenus dans [8].

Nous donnons d'abord la définition d'un ARB(1) puis une relation entre l'opérateur de la covariance Γ de X_0 , l'opérateur de la covariance croisée Δ^* de X_1, X_0 et l'opérateur d'autocorrelation ρ . Nous indiquons ensuite deux processus réels à temps continu qui peuvent se mettre sous la forme d'un ARB(1). Une loi forte des grands nombres est présentée ensuite.

1.1 Définition et existence d'un processus autorégressif Banachique d'ordre un

Soit (B, β_B) un espace de Banach séparable muni de la tribu borélienne et de la norme $\|\cdot\|$. Considérons une suite $(\varepsilon_n, n \in Z)$ de v.a à valeurs dans B , définies sur l'espace probabilisé (Ω, A, P) indépendantes et de même loi telles que $0 < \sigma^2 = E \|\varepsilon_n\|^2 < +\infty$ et $E(\varepsilon_n) = 0$ où l'espérance est prise au sens de Bochner. Nous dirons

qu'une telle suite est un B - bruit blanc.

Soit ρ un opérateur linéaire borné de B dans B et on note $\|\rho\|_L$ la norme d'opérateurs linéaires bornés et $m \in B$.

On dira qu'une suite de v.a. $(X_n, n \in Z)$ définie sur (Ω, A, P) et à valeurs dans (B, β_B) est un processus autorégressif d'ordre 1 noté ARB(1), si

$$X_n - m = \rho(X_{n-1} - m) + \varepsilon_n, \quad n \in Z \quad (1.1)$$

Lemme 1.1.1 [9]. Si il existe $j_0 \geq 1$ tel que $\|\rho^{j_0}\| < 1$ alors la série

$$\sum_{j \geq 1} \rho^j \varepsilon_{n-j}, \quad n \in Z \quad (1.2)$$

converge dans L_B^2 et presque sûrement.

Preuve. Posons

$$\begin{aligned} \Delta_{k,m} & : = E \left\| \sum_{j=k}^m \rho^j \varepsilon_{n-j} \right\|^2 \\ & \leq E \left(\sum_{j=k}^m \|\rho^j \varepsilon_{n-j}\| \right)^2 \\ & \leq E \left(\sum_{j=k}^m \|\rho^j\| \|\varepsilon_{n-j}\| \right)^2 \\ & \leq E \left(\sum_{j=k}^m \sum_{l=k}^m \|\rho^j\| \|\varepsilon_{n-j}\| \|\rho^l\| \|\varepsilon_{n-l}\| \right) \\ & \leq \sum_{j=k}^m \sum_{l=k}^m \|\rho^j\| \|\rho^l\| E(\|\varepsilon_{i-j}\| \|\varepsilon_{i-l}\|) \\ & \leq \sigma^2 \left(\sum_k^m \|\rho^j\| \right)^2 \rightarrow 0 \text{ Si } k, m \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Comme la convergence de la série $\sum_{j \geq 1} \|\rho^j\|$ est équivalente à la condition: il existe $j_0 \geq 1$ tel que $\|\rho^{j_0}\| < 1 \rightarrow$ ([9] p. 74) donc le dernier majorant $\sum_k^m \|\rho^j\|$

tend vers 0 si $k, m \rightarrow +\infty$. Par suite la série $\sum_{j \geq 1} \rho^j \varepsilon_{i-j}$ converge dans l'espace L_B^2 . La série converge presque sûre est un résultat de Geffroy (cf [13]). ■

Pour $m \in B$ on pose

$$X_n = m + \sum_{j \geq 0} \rho^j \varepsilon_{n-j}, \quad i \in Z$$

où (ε_i) est un B -bruit blanc et la série converge presque sûrement et dans L_B^2 . Alors ε_i est indépendant de $(X_j, j < i)$, la suite (X_n) est strictement stationnaire et on nous avons :

$$X_n - m = \rho(X_{n-1} - m) + \varepsilon_n, \quad n \in Z \quad (1.3)$$

Par suite (X_n) est un processus autorégressif Banachique d'ordre 1, ARB(1) à valeurs dans B .

1.2 Représentation ARB(1) de processus réels à temps continu

Nous indiquons une classe de processus réels à temps continu admettant une représentation ARB(1). Cette classe contient notamment le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Les résultats des deux sections qui suivent sont dûs à Bosq [8] Chap. 2.

1.2.1 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On considère le processus réel

$$\xi_t = \int_{-\infty}^t \exp(-c(t-u)) dW(u), \quad t \in R$$

où W est un processus de Wiener et c une constante strictement positive.

Pour construire un ARB(1) à partir de (ξ_t) on peut choisir $B = C_{[0,1]}$ et poser

$$X_n(t) = \xi_{n+t} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in Z$$

La version choisie de ξ_t étant supposée à trajectoires continues, on définit ainsi des v.a X_n à valeurs dans $C = C_{[0,1]}$.

D'une part,

$$\begin{aligned}
 E(\xi_{n+t}/\xi_s, s \leq n) &= E\left(\int_{\infty}^{n+t} e^{-c(t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\
 &= E\left(\int_{\infty}^n e^{-c(t-u)} dW(u) + \int_n^{n+t} e^{-c(t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\
 &= E\left(\int_{\infty}^n e^{-c(t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\
 &= \int_{\infty}^n e^{-c(t-u)} dW(u) \\
 &= e^{-ct} \xi_n \quad 0 \leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

Ce qui amène à poser:

$$\rho f(t) = e^{-ct} f(1)$$

et

$$\varepsilon_n(t) = \int_n^{n+t} e^{-c(n+t-u)} dW(u) = \int_0^t e^{-c(t+v)} dW(n+v)$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n(t) &= \int_{\infty}^{n+t} e^{-c(n+t-u)} dW(u) - e^{-ct} \int_{\infty}^n e^{-c(n-u)} dW(u) \\
 &= \xi_{n+t} - (\rho X_{n-1})(t) \quad 0 \leq t \leq 1, n \in Z
 \end{aligned}$$

D'autre part, comme $(W(u))$ est à accroissements indépendants, (ε_n) un bruit blanc et

$$\|\rho^n\| = \sup_{\|f\|=1} \|\rho^n f\| = e^{-c(n-1)}$$

alors $\sum_{n \geq 0} \|\rho^n\| < \infty$ et ainsi (X_n) est un ARB(1).

1.2.2 Construction d'un modèle ARC(1) ($B = C_{[0,1]}$)

Nous rappelons le théorème de Karhunen-Loève et une application de ce théorème pour construire un processus de Wiener.

Un processus stochastique du 2^{ème} ordre est une famille de variables aléatoires réelles ξ_t , $t \in T$ telle que $E(|\xi_t|^2) < \infty$ pour tout $t \in T$.

Soit $(\zeta_r, a \leq r \leq b)$ tel que a et b sont finis, un processus stochastique de 2^{ème} ordre de moyenne nulle et de fonction de covariance K continue. Soit $(\varphi_i, i = 1, 2, \dots)$ une base orthonormale de l'espace engendré par les fonctions propres correspondantes aux valeurs propres non nulles de l'opérateur intégral associé à K .

$$(Af)(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

Dans ces conditions le théorème de Karhunen-Loève donne:

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \xi_i \varphi_i(t), \quad t \in [a, b]$$

où $\xi_i = \int_a^b \zeta(t) \varphi_i(t) dt$, sont des variables aléatoires orthogonales de moyenne nulle et $E[|\xi_i|^2] = \lambda_i$. Cette série converge dans L^2 , et uniformément sur $[a, b]$.

Si le processus est Gaussien alors tout vecteur aléatoire (ξ_1, \dots, ξ_r) est gaussien dans R^r pour $r \geq 1$. Dans le cas d'un processus de Wiener ($W(t), t \geq 0$) sa fonction de covariance est

$$K(s, t) = \min(s, t)$$

Les vecteurs et les valeurs propres de l'opérateur de covariance du processus de Wiener (opérateur A) sont:

$$\varphi_i(t) = \sqrt{2} \sin \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi t \right], \quad i \geq 1$$

$$\mu_i = \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}, \quad i \geq 1$$

En prenant $\xi_i^* = \frac{\xi_i}{\sqrt{\mu_i}}$ où ξ_i sont donnés par le développement en série de Karhunen-Loève, on obtient:

$$W(t) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^* \frac{\sin \left(i - \frac{1}{2} \right) \pi t}{\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi}$$

Pour un processus de Wiener sur un intervalle $[0, n+1]$, nous considérons le développement suivant

$$\varphi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{t}{n+1} \right], \quad \mu_i = \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}$$

et

$$W(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^* \frac{\sin \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{t}{n+1} \right]}{\left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n+1}}, \quad t \in [0, n+1]$$

où les (ξ_i^*) sont des variables aléatoires i.i.d normales réduites.

Posons pour tout $w \in \Omega$ et $n \in N$:

$$\varepsilon_n : [0, 1] \times \Omega \mapsto R$$

$$(\nu, w) \mapsto W_{n+\nu}(w) - W_n(w)$$

Maintenant nous définissons l'opérateur ρ . Puisque nous resterons dans le sous espace engendré par les vecteurs φ_i , il suffit de définir $\rho(\varphi_i)$. Nous prenons

$$\rho[\varphi_i](s) = \beta_i \varphi_i(s)$$

où la suite (β_i) est une suite de réels donnés.

Posons

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{n-j}.$$

Ainsi (X_n) est un processus ARC (1).

1.2.3 Une classe d'ARB(1) à valeurs dans $L^2_{[0,1]}$

Soit $(Z_t, t \in R)$ un processus réel du second ordre, centré et à accroissements indépendants et strictement stationnaires. On suppose que nous avons une version de (Z_t) à trajectoires localement de carrés intégrables. Alors en posant:

$$\varepsilon_n(t) = Z_{n+t} - Z_n, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in Z$$

on définit un bruit blanc dans $L^2_{[0,1]} = H$.

Soit ρ un opérateur linéaire sur H , intégral de noyau K défini par

$$(\rho f)(t) = \int_0^1 K(s, t) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad f \in L^2_{[0,1]}$$

où

$$0 \leq \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) dt ds < 1$$

Alors $\|\rho\| < 1$ et on définit un ARH(1) en posant:

$$X_n(t) = \sum_{i \geq 0} \rho^i(\varepsilon_{n-i})(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Z_t) peut être un processus de Wiener ou un processus de Poisson centré.

1.2.4 Processus avec saisonnalité

Considérons un processus réel de la forme

$$\eta_t = m(t) + \xi_t, \quad t \in R$$

où (ξ_t) est un processus centré, à trajectoires continues et admettant une représentation ARB(1) où $B = C_{[0,1]}$.

On suppose que m est une fonction continue, non aléatoire, de période h et non constante. Dans ces conditions η_t admet une représentation ARB(1) avec

$$X_n(t) = \xi_{n+t} \quad 0 \leq t \leq h, \quad n \in Z$$

et

$$EX_n = m$$

X_n est donc stationnaire alors que (η_t) ne l'est pas.

Conclusion: De nombreux processus usuels admettent une représentation autorégressive dans un espace bien choisi.

1.3 Loi Forte des Grands Nombres LFGN pour les processus autorégressifs banachiques

Posons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$, $\bar{\varepsilon}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{n}$ et $R = \sum_{j \geq 0} \|\rho^j\| < \infty$, le résultat suivant établit la loi forte de grands nombres pour $(X_n) \sim ARB(1)$

Théorème 1.3.1 [9]. (L.F.G.N) Soit (X_i) un ARB de moyenne m , alors

$$\bar{X}_n \rightarrow m \text{ p.s.} \quad (1.4)$$

Pour la convergence en moyenne d'ordre $r \geq 1$ dans un espace de Banach on a le théorème suivant.

Théorème 1.3.2 [15]. Sous les conditions du Théorème 2.3 [15] chap. 2 nous avons pour tout $r > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \|\bar{X}_n - m\|^r = 0$$

1.4 Processus Autorégressifs Hilbertiens d'ordre un

1.4.1 Définition d'un ARH(1)

Nous donnerons ici la définition d'un ARH(1) tel qu'on utilisera dans cette section avec deux hypothèses supplémentaires par rapport à la définition d'un ARB(1). Considérons un espace de Hilbert réel et séparable muni de la norme $\|\cdot\|$. Un ARH(1) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans H telle que

$$X_i = \rho X_{i-1} + \varepsilon_i \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

où (ε_i) est un H - bruit blanc et ρ est un opérateur compact et symétrique sur H tel que $\|\rho^{j_0}\|_L < 1$ pour $j_0 \geq 1$.

Si φ est un vecteur propre de ρ associé à λ alors $(\langle X_i, \varphi \rangle, i \in Z)$ est un $AR(1)$.

Pour les variables aléatoires Hilbertiennes, les opérateurs de covariance et de covariance croisée comme des opérateurs linéaires sur H sont définis par:

$$\begin{aligned} C_{X_0}(x) &= E(\langle X_0, x \rangle X_0). \\ C_{X_0 X_1}(x) &= E(\langle X_0, x \rangle X_1). \end{aligned}$$

Pour un $ARH(1)$ on a $C_{X_0 X_1} = \rho C_{X_0}$

Proposition 1.4.1 [9]. Si (X_i) est un $ARH(1)$ associé à ρ et (ε_i) on a:

$$\begin{aligned} EX_0 &= 0 \\ C_{X_0} &= \rho C_{X_0} \rho + C_\varepsilon \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j C_\varepsilon \rho^j \\ C_{X_0, X_{-k}} &= C_{X_0} \rho^k, \quad k = 1, 2, \dots \\ C_{X_{-k}, X_0} &= \rho^k C_{X_0}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Dans la suite on note

$$\Gamma = C_{X_0}, \quad \Delta^* = C_{X_1 X_0}$$

Les deux dernières équations de la proposition s'écrivent donc

$$\Delta^* = \Gamma \rho \quad \text{et} \quad \Delta = \rho \Gamma$$

Comme cela a été signalé dans le livre de Bosq [9], l'estimation de ρ est un problème difficile même si l'existence de l'inverse de Γ entraîne $\rho = \Gamma^{-1} \Delta$. Cela est dû au fait que H étant de dimension infinie Γ^{-1} n'est pas un opérateur borné.

1.4.2 Estimation des opérateurs de covariance Γ et Δ

Rappelons d'abord (cf [12]) qu'un opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert séparable $(H, \|\cdot\|)$ est de Hilbert Schmidt si :

$$\|T\|_S^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle Te_i, e_j \rangle_H^2 < \infty,$$

où $(e_i, i \in N)$ est une base Hilbertienne dans H . l'espace S des opérateurs aléatoires de Hilbert Schmidt sur H est un espace de Hilbert pour le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ suivant: si $T_1, T_2 \in S$

$$\langle T_1, T_2 \rangle_S = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle T_1 e_i, e_j \rangle_H \langle T_2 e_i, e_j \rangle_H$$

Les opérateurs $\Gamma(x) = E(\langle X_0, x \rangle X_0)$ et $\Delta(x) = E(\langle X_0, x \rangle X_1)$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

En fait si X et Y sont des variables aléatoires Hilbertiennes du second ordre, alors C_{XY} est un opérateur de Hilbert Schmidt car

$$\begin{aligned} \sum_j \|C_{XY}(\varphi_j)\|^2 &= \sum_j \sum_l \langle C_{XY}(\varphi_j), \varphi_l \rangle^2 \\ &= \sum_j \sum_l (E\langle X, \varphi_j \rangle \langle Y, \varphi_l \rangle)^2 \\ &\leq \sum_j \sum_l E\langle X, \varphi_j \rangle^2 E\langle Y, \varphi_l \rangle^2 \\ &\leq E\|X\|^2 E\|Y\|^2 < \infty \end{aligned}$$

où (φ_j) est une base orthonormée de H . Leurs normes de Hilbert Schmidt sont respectivement:

$$\begin{aligned} \|\Gamma\|_S &= \left(\sum_{j,l} |E(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\Delta\|_S &= \left(\sum_{j,l} |E(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_1, \varphi_l \rangle)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Un estimateur naturel de Γ est l'opérateur de la covariance empirique, noté Γ_n

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, x \rangle X_i, \quad x \in H.$$

Cet opérateur est de rang fini et donc de Hilbert Schmidt. De façon analogue on définit un estimateur de Δ par:

$$\Delta_n(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, x \rangle X_{i+1}, \quad x \in H$$

On l'appelle opérateur de la covariance croisée empirique de X_0, X_1 . Il est de Hilbert Schmidt. On montre que Γ_n est un estimateur symétrique sans biais de Γ . La proposition suivante donne la convergence *p.s* de Γ_n vers Γ et une vitesse de convergence de l'ordre $\frac{1}{n}$.

Proposition 1.4.2 [9]. *Supposons que $E \|X_0\|^4 < \infty$. Alors*

$$E \|\Gamma_n - \Gamma\|_S^2 \leq \frac{A}{n} \quad (1.5)$$

$$\text{où } A = E \|X_0\|^4 \left[1 + 4 \|\rho\|^2 (1 - \|\rho\|^2)^{-1} \right]$$

De plus on a:

$$\|\Gamma_n - \Gamma\|_S \longrightarrow 0 \quad \text{p.s.}$$

Preuve. Considérons les v.a. à valeurs dans S

$$Z_i = \langle X_i, \cdot \rangle X_i - \Gamma \quad i = 1, 2, \dots$$

Puisque

$$\begin{aligned} E \|Z_n\|_S^2 &= E \sum_j \|Z_n \varphi_j\|^2 \\ &= E \sum_{j,l} \langle Z_n \varphi_j, \varphi_l \rangle^2 \\ &\leq \sum_{j,l} E \left(\langle X_n, \varphi_j \rangle \langle X_n, \varphi_l \rangle - \langle \Gamma \varphi_j, \varphi_l \rangle \right)^2 \\ &\leq \sum_{j,l} E \left(\langle X_n, \varphi_j \rangle^2 \langle X_n, \varphi_l \rangle^2 \right) \\ &\leq E \sum_j \langle X_n, \varphi_j \rangle^2 E \sum_l \langle X_n, \varphi_l \rangle^2 \\ &\leq E \|X_0\|^4 \end{aligned}$$

car $E\langle X_n, \varphi_j \rangle \langle X_n, \varphi_l \rangle = \langle C_{X_0} \varphi_j, \varphi_l \rangle$.

Donc

$$\begin{aligned} E \|Z_n + \dots + Z_{n+p-1}\|_S^2 &= \sum_{i=n}^{n+p-1} E \|Z_i\|_S^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{p-1} E \langle Z_i, Z_j \rangle_S \\ &\leq p E \|X_0\|^4 + 2 \sum_{h=1}^{p-1} (p-h) E \langle Z_0, Z_h \rangle_S \end{aligned}$$

Pour trouver une majoration de $E \langle Z_0, Z_h \rangle$ nous écrivons

$$\begin{aligned} E \langle Z_0, Z_h \rangle &= \sum_{j,l} E \langle Z_j \varphi_j, \varphi_l \rangle \langle Z_h \varphi_j, \varphi_l \rangle \\ &= \sum_{j,l} E (\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle \langle X_h, \varphi_j \rangle \langle X_h, \varphi_l \rangle) - \sum_{j,l} \langle \Gamma \varphi_j, \varphi_l \rangle^2 \end{aligned}$$

où (φ_j) est une base orthonormé de H . Utilisons

$$\begin{aligned} X_h &= \varepsilon_h + \rho \varepsilon_{h-1} + \dots + \rho^{h-1} \varepsilon_0 + \rho^h X_0 \\ E \langle Z_0, Z_h \rangle_S &= - \sum_{j,l} \langle \Gamma \varphi_j, \varphi_l \rangle^2 + \\ &\quad \sum_{j,l} E \left(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle \left\langle \sum_{k=0}^{h-1} \rho^k (\varepsilon_{h-k}) + \rho^h X_0, \varphi_j \right\rangle \left\langle \sum_{k=0}^{h-1} \rho^k (\varepsilon_{h-k}) + \rho^h X_0, \varepsilon_l \right\rangle \right) \end{aligned}$$

ε_{h-k} étant indépendant de $\varepsilon_{h-k'}$ pour $k \neq k'$ et X_0 de ε_{h-k} si $k \leq h-1$

$$\begin{aligned} E \langle Z_0, Z_h \rangle &= \sum_{j,l} E (\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle \langle \rho^h X_0, \varphi_j \rangle \langle \rho^h X_0, \varphi_l \rangle) \\ &\quad + \sum_{j,l} \left(\langle \Gamma \varphi_j, \varphi_l \rangle \left\langle \sum_{k=0}^{h-1} (\rho^k \Gamma_\varepsilon \rho^k) \varphi_j, \varphi_l \right\rangle \right) - \sum_{j,l} \langle \Gamma \varphi_j, \varphi_l \rangle^2 \end{aligned}$$

Enfin en utilisant $\Gamma = \sum_{k=0}^{h-1} \rho^k \Gamma_\varepsilon \rho^k + \rho^h \Gamma \rho^h$ on trouve

$$\begin{aligned} E \langle Z_0, Z_h \rangle_S &= \sum_{j,l} E (\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle \langle X_0, \rho^h \varphi_j \rangle \langle X_0, \rho^h \varphi_l \rangle) - \\ &\quad \sum_{j,l} \left(\langle \Gamma \varphi_j, \varphi_l \rangle \left\langle \sum_{k=0}^{h-1} (\rho^k \Gamma_\varepsilon \rho^k) \varphi_j, \varphi_l \right\rangle \right) \\ &= E \langle \langle X_0, \cdot \rangle X_0, \langle \rho^h X_0, \cdot \rangle \rho^h X_0 \rangle_S - \langle C_{X_0}, \rho^h C_{X_0} \rho^h \rangle_S \\ &\leq E \|X_0\|^2 E \|\rho^h X_0\|^2 + \|C_{X_0}\|_S \|\rho^h \Gamma \rho^h\|_S \\ &\leq 2 \|\rho\|^{2h} E \|X_0\|^4 \end{aligned}$$

puisque les opérateurs $T_1 = \langle X_0, \cdot \rangle X_0$, $T_2 = \langle \rho^h X_0, \cdot \rangle \rho^h X_0$ et $\rho^h C_{X_0} \rho^h$ sont de Hilbert-Schmidt (par exemple le troisième opérateur : $\rho^h C_{X_0}$ est de Hilbert-Schmidt car ρ est borné et C_{X_0} est Hilbert-Schmidt) et de norme

$$\|T_1\|_S^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|T_1 \varphi_i\|^2 = \sum_i \langle X_0, \varphi_i \rangle^2 \|X_0\|^2 = \|X_0\|^4$$

De même on obtient

$$\|T_2\|_S^2 = \|\rho^h X_0\|^2 \leq \|\rho\|_L^{2h} \|X_0\|^2$$

et

$$\|\rho^h C_{X_0} \rho^h\| \leq \|\rho\|_L^{2h} \|C_{X_0}\|_S$$

On a donc

$$E \|Z_n + \dots + Z_{n+p-1}\|_S^2 \leq p \left(E \|X_0\|^4 + \frac{4E \|X_0\|^4 \|\rho\|^2}{1 - \|\rho\|^2} \right)$$

Puisque

$$\begin{aligned} E \|\Gamma_n - \Gamma\|_S^2 &= E \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \cdot \rangle X_i - \Gamma \right\|_S^2 \\ &= \frac{1}{n^2} E \|Z_1 + \dots + Z_n\|_S^2 \\ &\leq \frac{E \|X_0\|^4}{n} \left(1 + \frac{4 \|\rho\|_L^2}{1 - \|\rho\|_L^2} \right) \end{aligned}$$

on aboutit donc à (1.5). En utilisant le lemme 1 [18] p. 78, on vérifie la L.F.G.N.

■
Proposition 1.4.3 [8]. Pour $n \geq 2$

$$E \|\Delta_n - \Delta\|_S^2 = E \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S^2 \leq \frac{B}{n-1} \quad (1.6)$$

où $B = 2E \|X_0\|^2 E \|\varepsilon_0\|^2 + 2A$ où A est défini dans la proposition 1.4.2.

De plus on a:

$$\|\Delta_n - \Delta\|_S = \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

1.4.3 Estimation des éléments propres :

Soient $\lambda_{1n} > \lambda_{2n} > \dots > \lambda_{nn} \geq 0$ les valeurs propres de Γ_n et $\varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \dots$ le système complet de vecteurs propres de Γ_n tels que

$$\Gamma_n \varphi_{jn} = \lambda_{jn} \varphi_{jn} \quad j = 1, 2, \dots$$

Alors des estimateurs naturels de λ_j et φ_j sont respectivement λ_{jn} et φ_{jn} .

Lemme 1.4.1 [8]. *Pour tout entier positif j nous avons.*

$$|\lambda_{jn} - \lambda_j| \leq \|\Gamma_n - \Gamma\| \quad (1.7)$$

et si $\lambda_1 > \lambda_2$

$$\|\varphi_{1n} - \varphi'_1\| \leq a_1 \|\Gamma_n - \Gamma\| \quad (1.8)$$

où $a_1 = 2\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$, et si pour un $j > 1$, $\lambda_{j-1} > \lambda_j > \lambda_{j+1}$ alors

$$\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\| \leq a_j \|\Gamma_n - \Gamma\|, \quad (1.9)$$

où $a_j = 2\sqrt{2}[\min(\lambda_{j-1} - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_{j+1})]^{-1}$. Ici $\varphi'_j = (sg\langle \varphi_{jn}, \varphi_j \rangle) \varphi_j$, $j \geq 1$,

$$\text{où } sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve. Γ et Γ_n étant des opérateurs compacts symétriques, l'inégalité (1.7) est une conséquence directe du corollaire (2.3) p 31 de Cohberg-Krein [10]

Pour la démonstration de (1.9) on part de la relation

$$\Gamma \varphi_{jn} - \lambda_j \varphi_{jn} = (\Gamma - \Gamma_n) \varphi_{jn} + (\lambda_{jn} - \lambda_j) \varphi_{jn}$$

De (1.7)

$$\|\Gamma \varphi_{jn} - \lambda_j \varphi_{jn}\| \leq 2 \|\Gamma_n - \Gamma\| \quad (1.10)$$

Si $j > 1$, puisque $\langle \Gamma \varphi_{jn}, \varphi_j \rangle - \langle \lambda_j \varphi_{jn}, \varphi_j \rangle = 0$

$$\begin{aligned}
\|\Gamma\varphi_{jn} - \lambda_j\varphi_{jn}\|^2 &= \sum_{l=1}^{+\infty} \langle \Gamma\varphi_{jn} - \lambda_j\varphi_{jn}, \varphi_l \rangle^2 \\
&= \sum_{l \neq j} (\langle \Gamma\varphi_{jn}, \varphi_l \rangle - \langle \lambda_j\varphi_{jn}, \varphi_l \rangle)^2 \\
&\geq \min((\lambda_{j-1} - \lambda_j)^2, (\lambda_j - \lambda_{j+1})^2) \sum_{l \neq j} \langle \varphi_{jn}, \varphi_j \rangle^2
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \langle \varphi_{jn} - \varphi'_j, \varphi_l \rangle^2 \\
&= (\langle \varphi_{jn}, \varphi_j \rangle - sg\langle \varphi_{jn}, \varphi_j \rangle)^2 + \sum_{l \neq j} \langle \varphi_{jn}, \varphi_l \rangle^2 \\
&\leq (1 - |\langle \varphi_{jn}, \varphi_j \rangle|)^2 + \sum_{l \neq j} \langle \varphi_{jn}, \varphi_l \rangle^2 \\
&\leq 2 \sum_{l \neq j} \langle \varphi_{jn}, \varphi_l \rangle^2 \tag{1.11}
\end{aligned}$$

En utilisant (1.10 et 1.11), on obtient (1.9)

La démonstration de (1.8) est similaire. ■

Proposition 1.4.4 [9]. Si $\|X_0\| \leq d$ p.s, (X_i) est géométriquement α -mélangeant et

$$\lambda_j = ar^j \quad ; \quad a > 0, \quad 0 < r < 1; \quad j = 1, 2, \dots$$

alors pour $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$ et $n > n_\gamma$

$$P(\|\Gamma_n - \Gamma\|_S > \varepsilon) \leq 2n^\gamma \exp\left(-\frac{\varepsilon n^\gamma}{10d^2 e\sqrt{2}}\right) + \frac{2ad^2r}{\varepsilon^2(1-\sqrt{r})^2} \exp\left(-\log\frac{1}{r}n^\gamma\right) \tag{1.12}$$

et

$$P(\|\Delta_n - \Delta\|_S > \varepsilon) \leq 2n^\gamma \exp\left(-\frac{\varepsilon(n-1)^\gamma}{10(d^2 + \|\Delta\|_S)e\sqrt{2}}\right) + \frac{2ad^2r}{\varepsilon^2(1-\sqrt{r})^2} \exp\left(-\log\frac{1}{r}(n-1)^\gamma\right) \tag{1.13}$$

Proposition 1.4.5 [8]. *Nous avons*

$$E \left(\sup_{j \geq 1} |\lambda_{jn} - \lambda_j|^2 \right) \leq \frac{A}{n} \quad (1.14)$$

$$\sup_{j \geq 1} |\lambda_{jn} - \lambda_j| \longrightarrow 0 \text{ p.s.}$$

et sous les hypothèses de la proposition (1.4.4) la vitesse de convergence est de l'ordre $O(\exp(-cn^\gamma))$, $0 < \gamma < \frac{1}{4}$

Preuve. De (1.5) et (1.7) on obtient (1.14). La convergence p.s. est directe, car

$$\|\Gamma_n - \Gamma\| \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$$

Si on utilise (1.12) la vitesse de convergence est de l'ordre $O(\exp(-cn^\gamma))$. ■

Proposition 1.4.6 [9]. *Pour tout j tel que $\lambda_{j-1} > \lambda_j > \lambda_{j+1}$ alors on a*

$$E \left\| \varphi_{jn} - \varphi'_j \right\| \leq a_j^2 \frac{A}{n}$$

où A est défini dans Prop (1.4.2) et $\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\| \longrightarrow 0$ p.s..

Si $\lambda_j = ar^j$ et $k_n = o(\log n)$ alors

$$E \left(\sup_{1 \leq j \leq k_n} \left\| \varphi_{jn} - \varphi'_j \right\|^2 \right) \longrightarrow 0 \text{ p.s.}$$

et la vitesse de convergence est $O(\exp(-cn^\gamma))$, où $0 < \gamma < \frac{1}{4}$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition (1.4.4), la proposition (1.4.2) et des inégalités (1.8) et (1.9). ■

Proposition 1.4.7 [8]. *Pour $n \geq 2$*

$$E \|\Delta_n - \Delta\|_S^2 = E \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S^2 \leq \frac{B}{n-1} \quad (1.15)$$

où $B = 2E \|X_0\|^2 E \|\varepsilon_0\|^2 + 2A$ et A est défini dans prop (1.4.2)

De plus on a

$$\|\Delta_n - \Delta\|_S = \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S \longrightarrow 0 \text{ p.s.}$$

Preuve. Posons

$$W_i = \langle X_i, \cdot \rangle X_{i+1} - \Delta, \quad i = 1, 2, \dots$$

D'après (1.1) et puisque $\Delta = \rho\Gamma$, nous avons

$$W_i = \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} + \rho [\langle X_i, \cdot \rangle X_i - \Gamma]$$

Ainsi

$$\bar{W}_n = \frac{W_1 + \dots + W_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} + \rho (\Gamma_{n-1} - \Gamma) \quad (1.16)$$

En choisissant une base orthonormée de H , de l'indépendance des v.a. ε_{n+h-1} et $(X_n, X_{n+h}, \varepsilon_{n+1})$ pour $h \geq 1$ et de $E\varepsilon_n = 0$ on a:

$$\begin{aligned} E \langle \langle X_n, \cdot \rangle \varepsilon_{n+1}, \langle X_{n+h}, \cdot \rangle \varepsilon_{n+h-1} \rangle_S &= \sum_{i,j} E \left(\langle X_n, \varphi_i \rangle \langle \varepsilon_{n+1}, \varphi_j \rangle \langle X_{n+h}, \varphi_j \rangle \langle \varepsilon_{n+h-1}, \varphi_i \rangle \right) \\ &= E \left(\langle X_n, \varphi_i \rangle \langle \varepsilon_{n+1}, \varphi_j \rangle \langle X_{n+h}, \varphi_j \rangle \right) E \left(\langle \varepsilon_{n+h-1}, \varphi_i \rangle \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où l'orthogonalité des v.a. $\langle X_n, \cdot \rangle \varepsilon_{n+1}$, $n \geq 1$, dans L_S^2 . Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$E \|\langle X_n, \cdot \rangle \varepsilon_{n+1}\|_S^2 = E \sum_i \|\langle X_n, \varphi_i \rangle \varepsilon_{n+1}\|^2 = E \|\varepsilon_{n+1}\|^2 \sum_i \langle X_n, \varphi_i \rangle^2 = E \|\varepsilon_0\|^2 E \|X_0\|^2$$

On en déduit que:

$$E \left\| \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} \right\|_S^2 = \frac{E \|X_0\|^2 E \|\varepsilon_0\|^2}{n-1}$$

D'autre part $\rho\Gamma_{n-1}$, $\rho\Gamma$ sont dans S car Γ_{n-1} et Γ_n appartenant à S et ρ est borné.

Donc

$$E \|\rho(\Gamma_{n-1} - \Gamma)\|_S^2 \leq \|\rho\|_L^2 E \|\Gamma_n - \Gamma\|_S^2$$

En utilisant les majorations précédentes on obtient:

$$\begin{aligned}
 E \|\Delta_n - \Delta\|_S^2 &= E \|\bar{W}_n\|_S^2 \\
 &= E \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} - \rho (\Gamma_{n-1} - \Gamma) \right\|_S^2 \\
 &\leq 2E \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} \right\|_S^2 + 2E \|\rho (\Gamma_{n-1} - \Gamma)\|_S^2 \\
 &\leq 2 \frac{\|X_0\|^2 E \|\varepsilon_0\|^2}{n-1} + 2 \|\rho\|_L^2 E \|\Gamma_n - \Gamma\|_S^2
 \end{aligned}$$

Maintenant on utilise la proposition 1.4.2 pour obtenir (1.15). En utilisant (1.15) on a

$$\|\bar{W}_n\|_S \leq \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} \right\|_S + \|\rho\|_L \|\Gamma_n - \Gamma\|_S$$

D'après la proposition (1.4.2) $\|\Gamma_n - \Gamma\| \rightarrow 0$ p.s et pour les v.a. $\langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1}$ étant orthogonal dans L^2 , elles vérifient donc

$$\begin{aligned}
 E \|\langle X_n, \cdot \rangle \varepsilon_{n+1} + \dots + \langle X_{n+p-1}, \cdot \rangle \varepsilon_{n+p-1}\|_S^2 &= E \sum_{i=1}^{n+p-1} \|\langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1}\|_S^2 \\
 &\leq pE \|X_0\|^2 E \|\varepsilon_0\|^2 \\
 &\leq pK
 \end{aligned}$$

où $K = E \|X_0\|^2 E \|\varepsilon_0\|^2$

Ainsi, on applique le lemme 1 [18] p 78 avec $G = S$ muni de la norme $\|\cdot\|_S$ et on obtient:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} \rightarrow 0 \text{ p.s}$$

D'où la convergence $W_n \rightarrow 0$ p.s. ■

Chapitre 2

PROCESSUS AUTOREGRESSIFS ET ESPACES A NOYAUX REPRODUISANTS

Dans ce chapitre nous rappelons la définition des espaces à noyau reproduisant. La théorie des espaces à noyau reproduisant s'est avéré un outil intéressant en théorie des probabilités, des processus stochastiques et l'analyse statistiques des séries chronologiques. Particulièrement pour la prédiction d'un processus

$(Y(t), t \in I)$ où $I \subset \mathbb{R}$ présenté sous la forme:

$$Y(t) = m(t) + X(t), \forall t \in I$$

Cette théorie a permis de donner des formules explicites pour le prédicteur de la valeur $Y(t)$, et de la fonction $m(t)$, $t \in I$. Nous utilisons cette théorie pour la prédiction de processus $(Y(t), t \in I)$ admettant des représentation AR du chapitre 1.

2.1 Définition et propriétés des espaces à noyau reproduisant

Dans cette partie nous rappelons les résultats essentiels de la théorie des espaces à noyau reproduisant et leurs liens avec la prédiction de processus.

Définition 2.1.1 [7]. *Un espace de Hilbert H est dit un espace à noyau reproduisant, dont le noyau reproduisant est K , si les éléments de H sont des fonctions sur T , où $T \subset \mathbb{R}$ et s'il existe un noyau K sur $T \times T$ ayant les deux propriétés suivantes:*

$$K(., t) \in H \text{ et } K(., t) \text{ au point } s \in T \text{ est égale à } K(s, t) \quad (2.1)$$

$$\langle g, K(., t) \rangle = g(t) \text{ pour toute fonction } g \text{ dans } H \quad (2.2)$$

Théorème 2.1.1 (Loève [15], p 466). *K est la fonction de covariance d'un processus aléatoire si et seulement si K est un noyau symétrique non négatif.*

Théorème 2.1.2 (Moore-Aronszajn [3]). *Tout noyau symétrique non négatif engendre un unique espace autoreproduisant qu'on note par $H(K)$, où K est le noyau reproduisant.*

Remarque 2.1.1. *On peut voir facilement que l'espace de Hilbert engendré par la famille $\{K(., t), t \in T\}$ muni du produit scalaire $\langle K(., t), K(., s) \rangle = K(s, t)$ est l'espace $H(K)$.*

Théorème 2.1.3 (Mercer). *Si $\{\varphi_n(t), n = 1, 2, \dots\}$ est la suite des vecteurs propres et $\{\lambda_n, n = 1, 2, \dots\}$ la suite des valeurs propres du noyau continu K satisfaisants les relations:*

$$\int_a^b K(s, t) \varphi_n(s) ds = \lambda_n \varphi_n(t), \quad a \leq t \leq b.$$

$$\int_a^b \varphi_m(s) \varphi_n(s) ds = \delta(m, n), \quad \text{où } \delta(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $K(s, t)$ peut se présenter par la série

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n(s). \quad (2.3)$$

Cette série converge absolument et uniformément pour sur $[a, b]^2$.

En théorie des probabilités et son lien avec la théorie des espaces de Hilbert dans l'étude des processus aléatoires, nous avons les théorèmes fondamentaux suivants:

Théorème 2.1.4 [23]. Soit H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et notons par $\langle u_1, u_2 \rangle_1, \langle v_1, v_2 \rangle_2$ les produits scalaires dans H_1 et H_2 respectivement. Soit T l'ensemble des indices. Soit $\{u(t), t \in T\}$ une base de H_1 et $\{v(t), t \in T\}$ une base de H_2 . Si pour tout s, t dans T on a $\langle u(s), u(t) \rangle_1 = \langle v(s), v(t) \rangle_2$ alors il existe une isométrie ψ entre H_1 et H_2 vérifiant:

$$\psi(u(t)) = v(t).$$

Théorème 2.1.5 ([23] p 966). Soit $\{Y(t), t \in T\}$ un processus aléatoire de noyau $K(s, t) = E[Y(s)Y(t)]$. Alors il existe une isométrie entre $L_2[Y(t), t \in T]$ (l'espace de Hilbert engendré par la famille $\{Y(t), t \in T\}$) et l'espace $H(K)$, qui associe $K(., t)$ à $Y(t)$, vérifiant pour toute variable aléatoire du second ordre Z et toute fonction g, h dans $H(K)$:

$$\begin{aligned} \langle K(., t), Y \rangle_K &= Y(t) \\ E[Z \langle h, Y \rangle_K] &= \langle \rho_Z, h \rangle_K \\ E[\langle h, Y \rangle_K \langle g, Y \rangle_K] &= \langle h, g \rangle_K \quad \forall h, g \in H(K) \end{aligned}$$

où $\langle h, Y \rangle_K$ est la variable aléatoire dans $L_2[Y(t), t \in T]$ correspondante à g sous l'isométrie précédente.

Théorème 2.1.6 ([22] p 91). Soit $K(s, t) = \text{cov}(Y(s), Y(t))$ le noyau de covariance du processus $\{Y(t), t \in T\}$, $E[Y(t)] = m(t)$ où m est un paramètre inconnu appartenant à une classe de fonctions M . Supposons que M est un sous-espace de $H(K)$. Alors il existe une isométrie entre $L_2[Y(t), t \in T]$ et $H(K)$ vérifiant les propriétés suivantes: pour tout $t \in T, g, h$ dans $H(K)$.

$$\begin{aligned} \langle K(., t), Y \rangle_K &= Y(t) \\ E_m[\langle h, Y \rangle_K] &= \langle h, m \rangle_K \quad \text{pour tout } m \text{ dans } M \\ \text{cov}[\langle h, Y \rangle_K, \langle g, Y \rangle_K] &= \langle h, g \rangle_K \end{aligned}$$

où $\langle h, Y \rangle_K$ est la variable aléatoire dans $L_2[Y(t), t \in T]$ correspondante à h dans $H(K)$ sous cette isométrie.

2.2 Exemples d'espaces à noyau reproduisant.

Pour illustrer la notion d'espaces à noyau reproduisant nous reprenons les exemples donnés dans [21] p. 475 et dans [23] p. 967.

Exemple 1 . Considérons un processus aléatoire $\{Y(t), a \leq t \leq b\}$ de noyau de covariance continu $K(s, t) = E(Y(s)Y(t))$ d'éléments propres $(\lambda_j, \varphi_j)_{j \geq 1}$. En utilisant la représentation de K sous la forme (2.3), on peut démontrer que l'espace $H(K)$ consiste à toutes les fonctions de carré intégrable $h(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$ telles que:

$$\int_a^b |h(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_a^b h(t) \varphi_n(t) dt \right|^2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \int_a^b h(t) \varphi_n(t) dt \right|^2 < +\infty.$$

Le produit scalaire dans cet espace est défini par:

$$\langle h, g \rangle_K = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b h(t) \varphi_n(t) dt \int_a^b g(t) \varphi_n(t) dt \quad (2.4)$$

La variable aléatoire $\langle h, Y \rangle_K$ dans $L_2[Y(t), t \in [a, b]]$ correspondant à $h(t)$ dans $H(K)$ est donnée par:

$$\langle h, Y \rangle_K = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b h(t) \varphi_n(t) dt \int_a^b Y(t) \varphi_n(t) dt \quad (2.5)$$

Exemple 2 . Soit $\{Y(t), t \in T\}$ un processus aléatoire stationnaire de fonction de covariance:

$$R(t-u) = \frac{1}{2\beta} \exp(-\beta |u-t|), \quad \beta > 0.$$

L'espace $H(K)$ correspondant à ce noyau est l'espace des fonctions différentiables, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_K = \int_a^b (f' + \beta f)(g' + \beta g) dt + 2\beta f(a)g(a)$$

D'une façon plus générale, si nous considérons les noyaux de covariance suivants

Exemple 3 . $R(t-u) = c \exp -\beta |u-t|$, alors le produit scalaire est défini par :

$$\langle h, g \rangle_K = \frac{1}{2\beta c} \left[\int_a^b (h'g' + \beta^2 hg) dt \right] + \frac{1}{2c} [h(a)g(a) + h(b)g(b)]$$

La variable aléatoire $\langle h, Y \rangle_K$ dans $L_2[Y(t), t \in [a, b]]$ correspondant à $h(t)$ dans $H(K)$ est donnée par:

$$\langle h, Y \rangle_K = \frac{1}{2\beta c} \left[\int_a^b (h'Y' + \beta^2 hY) dt \right] + \frac{1}{2c} [h(a)Y(a) + h(b)Y(b)]$$

Dans le cas où h est deux fois différentiable, en intégrant par parties, on a:

$$\int_a^b h'(t) dY(t) = h'(b)Y(b) - h'(a)Y(a) - \int_a^b Y(t) h^{(2)}(t) dt$$

Exemple 4 . Supposons que $T = \{1, 2, \dots, N\}$ où $N > 0$ et K un noyau de covariance symétrique défini par la matrice $(K_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ d'inverse $(K^{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$.

L'espace à noyau reproduisant $H(K)$ consiste à tous les vecteurs $f = (f(1), \dots, f(N))$ de produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle_K = \sum_{i, j=1}^N f(i) K^{ij} g(j)$$

et

$$\langle f, Y \rangle_K = \sum_{i, j=1}^N f(i) K^{ij} Y(j)$$

Le produit scalaire $\langle f, Y \rangle_K$ est aussi donnée par:

$$\langle f, Y \rangle_K = - \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1N} & f(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & \dots & K_{NN} & f(N) \\ Y(1) & \dots & Y(N) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & \dots & K_{NN} \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

2.3 Meilleur prédicteur linéaire sans biais à erreur quadratique minimale BLUP

Soit $\{Y(t), t \in T\}$ où $T \subset R$ un processus stochastique tel que $E[Y(t)]^2 < +\infty$, $\forall t \in T$. Pour Z variable aléatoire réelle du second ordre, on définit la fonction de covariance croisée $\rho_Z(t) = E(ZY(t))$, $\forall t \in T$.

Un problème classique de la statistique est de construire un prédicteur linéaire à erreur quadratique minimale de Z sur la base de l'observation de $\{Y(t), t \in T\}$. Plus généralement étant donnée une variable aléatoire Z , on cherche une variable aléatoire \hat{Z} linéaire en observations $\{Y(t), t \in T\}$, dont

la distance L^2 à Z soit minimale.

L'existence et l'unicité de \hat{Z} sont prouvées par le théorème de la projection dans les espaces de Hilbert.

Théorème 2.3.1 [13]. *Soit H un espace de Hilbert et F un sous espace fermé de H , soit v un vecteur dans H , v^* un vecteur dans F . Une condition nécessaire et suffisante pour que v^* soit l'unique vecteur dans F satisfaisant*

$$\|v^* - v\| = \min_{u \in F} \|u - v\| \quad (2.7)$$

est $\langle v^*, u \rangle = \langle v, u \rangle$ pour tout u dans F .

Le vecteur v^* satisfaisant (2.7) est dit projection de v sur F , on le note par $p_M(v)$ où $E^*[v/F]$.

Théorème 2.3.2 ([22] p 86). *Soit $\{Y(t), t \in T\}$ un processus aléatoire de noyau de covariance $K(s, t)$ et de moyenne m élément d'un ensemble M de fonctions connu. Le prédicteur linéaire à erreur quadratique minimale est donnée par:*

$$z^* = \langle \rho_Z, Y \rangle_K \quad (2.8)$$

et d'erreur de prédiction :

$$E|z^* - z|^2 = E|z|^2 - \langle \rho_z, \rho_z \rangle_K$$

Preuve. D'après le théorème (2.1.5) on a:

$$\begin{aligned} E[\langle h, Y \rangle_K \langle g, Y \rangle_K] &= \langle h, g \rangle_K \\ E[Z \langle h, Y \rangle_K] &= \langle \rho_z, Y \rangle_K \end{aligned}$$

Toute variable aléatoire dans $L_2[Y(t), t \in T]$ s'écrit $\langle h, Y \rangle_K$ pour un certain h dans $H(K)$. Par conséquent l'erreur quadratique moyenne entre toute fonctionnelle linéaire $\langle h, Y \rangle_K$ et Z est donnée par:

$$\begin{aligned} E [|\langle h, Y \rangle_K - Z|^2] &= E [\langle h, Y \rangle_K^2] + E [Z^2] - 2E [Z \langle h, Y \rangle] \\ &= E [Z^2] + \langle h, h \rangle_K - 2\langle \rho_Z, h \rangle_K \\ &= E [Z^2] - \langle \rho_Z, \rho_Z \rangle_K + \langle h - \rho_Z, h - \rho_Z \rangle_K \end{aligned} \quad (2.9)$$

De (2.9) on conclut directement que $\langle \rho_Z, Y \rangle_K$ est le prédicteur linéaire à erreur quadratique minimale. ■

Nous donnons quelques exemples d'expressions explicites des prédicteurs.

Exemple 5 . Supposons que $T = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$. D'après l'exemple 3 le prédicteur linéaire à erreur quadratique minimale $Y^*(t_0)$ de $Y(t_0)$ basé sur les observations $Y(t_1), \dots, Y(t_N)$ est donné par:

$$Y^*(t_0) = \langle K(\cdot, t_0), Y \rangle_K = - \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1N} & K_{t_0 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & \dots & K_{NN} & K_{t_0 N} \\ Y(t_1) & \dots & Y(t_N) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & \dots & K_{NN} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

où $K_{ij} = K(t_i, t_j) = E(Y(t_i)Y(t_j))$ et $K_{t_0 i} = K(t_0, t_i)$ pour $i, j = 1, \dots, N$.

$Y^*(t_0)$ peut s'écrire encore $Y^*(t_0) = K'_{t_0} K^{-1} Y$ où

$$K'_{t_0} = (K(t_0, t_1), \dots, K(t_0, t_N)), \quad K = (K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq N}$$

et $Y' = (Y(t_1), \dots, Y(t_N))$.

Exemple 6 . Considérons le processus aléatoire $\{Y(t), t \in I\}$, $I \subseteq R$, de noyau de covariance

$$\begin{aligned} K(s, t) &= C \exp(-\beta |s - t|) \\ &= R(s - t) \end{aligned}$$

Supposons observé $Y(t)$ pour $a \leq t \leq b$, on désire prédire $Y(b+c)$ pour $c > 0$.
 Pour $a \leq t \leq b$ on a

$$\rho(t) = E[Y(t)Y(b+c)] = C \exp(-\beta c) K(b, t)$$

Donc et d'après (2.8),

$$Y^*(b+c) = \langle \rho, Y \rangle_K = C \exp(-\beta c) Y(b)$$

Plus précisément pour le processus $(Y(t))$ défini précédemment on a :

Théorème 2.3.3 Doob [11]. Le prédicteur $Y^*(b+c)$ de $Y(b+c)$ est de la forme:

$Y^*(b+c) = A(c)Y(b)$ si et seulement si $R(u) = C \exp(-\beta |u|)$, C et β sont des constantes et $A(c)$ est une constante qui dépend seulement de c .

Preuve On a d'après (2.8)

$$Y^*(b+c) = \langle \rho, Y \rangle_K$$

où

$$\begin{aligned} \rho(t) &= E[Y(b+c)Y(t)] \\ &= R(b+c-t) \\ &= C \exp(-\beta |b+c-t|) \\ &= C \exp(-\beta c) \exp(b-t) \\ &= A(c) R(b-t) \\ &= A(c) K(b, t) \end{aligned}$$

Alors $\langle \rho, Y \rangle_K = A(c)Y(b)$. Inversement, de (2.8)

$$\rho(t) = A(c)K(b, t) \Rightarrow \rho(t) = A(c)R(b-t)$$

Si on pose $b-t = d$ alors $R(c+d) = A(c)R(d)$. Donc pour $d = 0$, $R(c) = A(c)$, on a $R(d+c) = R(c)R(d)$ ce qui amène à représenter R sous la forme (cf Parzen [24] p263)

$$R(u) = c \exp(-\beta |u|) \quad \blacksquare$$

Exemple 7 . Soit $\{Y(t), t \in T\}$ un processus à trajectoires continues. La continuité des trajectoires est équivalente à la continuité de la fonction de covariance K . Si $(\lambda_n, \varphi_n)_{n \geq 1}$ sont les éléments propres de K alors $K(s, t)$ se présente sous la forme: (Théorème 2.1.3)

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(s) \varphi_n(t)$$

Pour une variable aléatoire Z , le meilleur prédicteur linéaire à erreur quadratique minimale Z^* est donnée d'après (2.5) par:

$$Z^* = \langle \rho_Z, Y \rangle_K = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \rho_Z(t) \varphi_n(t) dt \int_a^b Y(t) \varphi_n(t) dt \quad (2.11)$$

Théorème 2.3.4 ([22] p 103). Soit $K(s, t) = \text{cov}[Y(s), Y(t)]$ le noyau de covariance du processus $\{Y(t), t \in T\}$, $E[Y(t)] = m(t)$ où m est un paramètre inconnu appartenant à une classe M connue de fonctions définies sur I . Soit Z une variable aléatoire de variance $\text{var}[Z]$ connue et notons $\rho_Z(t) = \text{cov}(Z, Y(t))$. Supposons que $M \subset H(K)$ et que la moyenne de Z vérifie $E_m[Z] = \langle h, m \rangle$ pour tout m de M et où h est une fonction de $H(K)$.

Alors le prédicteur linéaire sans biais à erreur quadratique minimale noté BLUP \hat{Z} de Z est donné par:

$$\hat{Z} = \langle \rho_Z, Y \rangle + \langle P_M(h - \rho_Z), Y \rangle_K$$

L'erreur quadratique de prévision est:

$$E|\hat{Z} - Z|^2 = \text{var}Z - \|\rho_Z\|^2 + \|P_M(h - \rho_Z)\|_K^2$$

Remarque 2.3.1 . Le prédicteur linéaire $\langle g, Y \rangle_K$ de Z est dit sans biais, si pour tout m dans M on a:

$$E_m(\langle g, Y \rangle_K) = \langle g, m \rangle = \langle m, h \rangle = E_m[Z]$$

En effet l'erreur de prévision du prédicteur sans biais est donnée par

$$\begin{aligned} E|\langle g, Y \rangle_K - Z|^2 &= \text{var} |\langle g, Y \rangle_K - Z| \\ &= \text{var} [Z] + \text{var} [\langle g, Y \rangle_K] - 2\text{cov} [\langle g, Y \rangle_K, Z] \end{aligned}$$

En utilisant le théorème (2.1.6) on a:

$$\begin{aligned} E|\langle g, Y \rangle_K - Z|^2 &= \text{var} [Z] + \langle g, g \rangle_K - 2\langle \rho_Z, g \rangle \\ E|\langle g, Y \rangle_K - Z|^2 &= \text{var} [Z] - \|\rho_Z\|_K^2 + \|g - \rho_Z\|_K^2 \end{aligned}$$

Pour $g = \rho_Z + f$, on trouve que le prédicteur est donné par $\hat{Z} = \langle \rho_Z + f, Y \rangle_K$, où f est une fonction de norme minimale satisfaisant la contrainte $\langle f, m \rangle = \langle m, h - \rho_Z \rangle_K$ pour tout m dans M . C'est clair que l'on a $f = P_M(h - \rho_Z)$. ■

Remarque 2.3.2 . Dans le cas particulier où $Z = Y(t_0)$, nous avons $\rho_Z(t) = K(t_0, t)$ et

$$E_m[Z] = m(t_0) = \langle \rho_Z, m \rangle = \langle h, m \rangle$$

Donc

$$\langle \rho_Z - h, m \rangle = 0, \forall m \in M$$

Ce qui implique que $\rho_Z - h = 0$ et donc $f = 0$.

Dans ce cas le prédicteur BLUP $\hat{Y}(t_0)$ de $Y(t_0)$ est $\langle K(\cdot, t_0), Y \rangle_K$ et il est aussi donnée par (2.6)

Corollaire 2.3.1 . L'erreur quadratique $\delta^2 = E|\hat{Y}(t)\hat{Y}(t) - Y(t)|^2$ est donnée par:

$$\delta^2 = \frac{1}{\Gamma} \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) & K(t, t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & & K(t_n, t_n) & K(t, t_n) \\ K(t, t_1) & K(t, t_2) & & K(t, t_n) & K(t, t) \end{vmatrix}$$

où

$$\Gamma = \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) \dots K(t_1, t_n) \\ \dots \\ K(t_n, t_1) \dots K(t_n, t_n) \end{vmatrix}$$

Preuve. En gardant la notation de l'exemple (2.4.1), soit $\hat{c}' = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$ tel que $\hat{c} = K^{-1}K_t$ donc $\hat{Y}(t) = \sum_{j=1}^n \hat{c}_j Y(t_j)$ et

$$\begin{aligned}
 E \left| \hat{Y}(t) - Y(t) \right|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \hat{c}_i \hat{c}_j K(t_i, t_j) - 2 \sum_{j=1}^n \hat{c}_j K(t, t_j) + K(t, t) \\
 &= \hat{c}' K \hat{c} - 2 \hat{c}' K_t + K(t, t) \\
 &= K_t' (K^{-1})' K K^{-1} K_t - 2 K_t' (K^{-1})' K_t + K(t, t) \\
 &= K_t' (K^{-1})' K_t - 2 K_t' (K^{-1})' K_t + K(t, t) \\
 &= -K_t' (K^{-1})' K_t + K(t, t) \\
 &= -\hat{c}' K_t + K(t, t)
 \end{aligned}$$

D'où le résultat, en écrivant δ^2 sous forme quotient de déterminants. ■

2.4 Estimateur linéaire sans biais de la moyenne à variance minimale MVUL

Sous les conditions du théorème (2.3.4), considérons le cas particulier où lorsque M est le sous espace engendré par des fonctions données $w_1(t), \dots, w_q(t)$. Ainsi pour $m \in M$, la fonction moyenne s'écrit:

$$m(t) = \beta_1 w_1(t) + \dots + \beta_q w_q(t)$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ sont des paramètres inconnus à estimer.

Définition 2.4.1 . Une fonctionnelle $\Psi(m)$ est dite linéairement estimable s'il existe une fonction g tel que l'estimateur $\langle g, Y \rangle_K$ soit linéaire (élément de $L_2[Y(t), t \in T]$) et sans biais i.e d'après le théorème (2.1.6):

$$E_m [\langle g, Y \rangle_K] = \langle g, m \rangle = \Psi(m) \text{ pour toute } m \text{ dans } M \quad (2.12)$$

On conclut que $\Psi(m)$ est linéairement estimable si et seulement si il existe une fonction g dans $L_2[K(., t), t \in T]$ vérifiant (2.12).

En utilisant le théorème (2.1.6), la variance de cet estimateur est donnée par:

$$\begin{aligned} \text{var} [\langle g, Y \rangle_K] &= \text{cov} [\langle g, Y \rangle_K, \langle g, Y \rangle_K] \\ &= \langle g, g \rangle_K \\ &= \|g\|_K^2 \end{aligned}$$

Par conséquent trouver un estimateur linéaire sans biais de variance minimale $\Psi^* = \langle g^*, Y \rangle_K$ de $\Psi(m)$ est équivalent à trouver une fonction g^* dans $L_2[K(\cdot, t), t \in T]$ vérifiant la contrainte (2.12) et de norme minimale. Ainsi dans ce cas on choisit la projection de g sur M car $\forall m \in M$:

$$\begin{aligned} \langle g^*, m \rangle_K &= \langle P_M(g), m \rangle \\ &= \langle g, P_M(m) \rangle \\ &= \langle g, m \rangle \\ &= \Psi(m) \end{aligned}$$

Et d'après le théorème de la projection, $P_M(g) = g^*$ est de norme minimale dans l'ensemble des fonctions vérifiant la contrainte (2.12).

Théorème 2.4.1 ([21] p 484). *L'estimateur MVUL Ψ^* de la fonction linéairement estimable $\Psi(m)$ est donné par:*

$$\Psi^* = \langle P_M(g), Y \rangle_K$$

de variance:

$$\text{var}(\Psi^*) = \|P_M(g)\|_K^2$$

où g est une fonction vérifiant (2.12). En particulier l'estimateur MVUL m^* de m au point t est donné par:

$$m^*(t) = \langle P_M(K(\cdot, t)), Y \rangle_K$$

puisque

$$m(t) = \langle K(\cdot, t), m \rangle_K$$

Remarque 2.4.1 . Dans le cas particulier où M est un sous espace de Hilbert de dimension finie engendré par la famille de q fonctions w_1, \dots, w_q ; on a:

$$W m^*(t) = - \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K \dots \langle w_1, w_q \rangle_K & \langle w_1, Y \rangle_K \\ \dots & \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K \dots \langle w_q, w_q \rangle_K & \langle w_q, Y \rangle_K \\ w_1(t) \dots w_q(t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$W var [m^*(t)] = \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K \dots \langle w_1, w_q \rangle_K & w_1(t) \\ \dots & \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K \dots \langle w_q, w_q \rangle_K & w_q(t) \\ w_1(t) \dots w_q(t) & 0 \end{vmatrix}$$

où

$$W = \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K \dots \langle w_1, w_q \rangle_K \\ \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K \dots \langle w_q, w_q \rangle_K \end{vmatrix}$$

D'une façon générale une fonction linéaire $\Psi(\beta)$ de la forme:

$$\Psi(\beta) = \Psi_1 \beta_1 + \dots + \Psi_q \beta_q.$$

où Ψ_1, \dots, Ψ_q sont des connus, l'estimateur $MVUL$ de $\Psi(\cdot)$ est:

$$\Psi(\beta) = \Psi_1 \beta_1^* + \dots + \Psi_q \beta_q^*$$

où $\beta_1^*, \dots, \beta_q^*$ sont les solutions des équations normales:

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_1, w_q \rangle_K \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_q, w_q \rangle_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle w_1, Y \rangle_K \\ \dots \\ \langle w_q, Y \rangle_K \end{bmatrix}$$

En effet Si M admet la base w_1, \dots, w_q alors:

$$P_M(K(., t)) = \sum_{i=1}^q \alpha_i^* w_i$$

et $P_M(K(., t))$ est l'élément minimisant la norme: $\|K(., t) - w\|$ où $w = \sum_{i=1}^q \alpha_i w_i$

Or

$$\begin{aligned} \left\| K(., t) - \sum_{i=1}^q \alpha_i w_i \right\|_{H(K)}^2 &= \langle K(., t) - \sum_{i=1}^q \alpha_i w_i, K(., t) - \sum_{i=1}^q \alpha_i w_i \rangle \\ &= K(t, t) - 2 \sum_{i=1}^q \alpha_i w_i + \sum_{i,j=1}^q \alpha_i \alpha_j \langle w_i, w_j \rangle_K \\ &= C(\alpha) \end{aligned}$$

En utilisant la méthode des moindres carrés on a:

$$\frac{\partial C(\alpha)}{\partial \alpha_r} = -2w_r(t) + 2 \sum_{i=1}^q \alpha_i w_i(t) + 2 \sum_{i=1}^q \alpha_i \langle w_i, w_r \rangle_K = 0, \text{ pour } 1 \leq r \leq q$$

Donc $\alpha_1^*, \dots, \alpha_q^*$ sont les solutions des équations normales

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_1, w_q \rangle_K \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_q, w_q \rangle_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \dots \\ w_q(t) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Si w_1, \dots, w_q sont linéairement indépendantes alors le système (2.13) admet la solution $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_q^*)$:

$$\alpha_j^* = \frac{-1}{W} \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_1, w_{j-1} \rangle_K & w_1(t) & \langle w_1, w_{j+1} \rangle_K & \dots & \langle w_1, w_q \rangle_K \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_q, w_{j-1} \rangle_K & w_q(t) & \langle w_q, w_{j+1} \rangle_K & \dots & \langle w_q, w_q \rangle_K \end{vmatrix}$$

tels que

$$W = \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_1, w_q \rangle_K \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_q, w_q \rangle_K \end{vmatrix}$$

Aussi

$$\begin{aligned} m^*(t) &= \langle P_M(K(\cdot, t)), Y \rangle_K \\ &= \sum_{i=1}^q \alpha_i^* \langle w_i, Y \rangle_K \\ &= \frac{-1}{W} \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_1, w_q \rangle_K & \langle w_1, Y \rangle_K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_q, w_q \rangle_K & \langle w_q, Y \rangle_K \\ w_1(t) & \dots & w_q(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^q \beta_i^* w_i(t) \end{aligned}$$

où β_i^* , $i = 1, \dots, q$ sont les solutions des équations normales

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_1, w_q \rangle_K \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle w_q, w_1 \rangle_K & \dots & \langle w_q, w_q \rangle_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle w_1, Y \rangle_K \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle w_q, Y \rangle_K \end{bmatrix}$$

Donc

$$m^*(t) = \beta^* w(t) \text{ où}$$

$$\beta^* = \frac{\langle w, Y \rangle_K}{\langle w, w \rangle_K} \text{ et var } m^*(t) = \frac{w^2(t)}{\langle w, w \rangle_K} \quad \blacksquare$$

2.5 Prévision d'un processus autorégressif AR (p) réel

Soit $\{X(t), t \in Z\}$ un processus autorégressif réel stationnaire d'ordre p défini par:

$$X(t) = a_1 X(t-1) + \dots + a_p X(t-p) + \eta(t)$$

où $(\eta(t))_{t \in Z}$ sont des variables aléatoires i.i.d d'espérance nulle et de covariance σ^2 .

On pose

$$X_N^{**}(t) = \hat{a}_{1N} X(t-1) + \dots + \hat{a}_{pN} X(t-p)$$

où $\hat{a}_{1N}, \dots, \hat{a}_{pN}$ sont les estimateurs des moindres carrés de a_1, \dots, a_p , qui sont solutions des équations de Yule - Walker

$$\begin{bmatrix} \hat{R}(1,1) & \dots & \hat{R}(1,p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{R}(p,1) & \dots & \hat{R}(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1N} \\ \dots \\ a_{pN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}(0,1) \\ \dots \\ \hat{R}(0,p) \end{bmatrix}$$

et

$$\hat{R}(i,j) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X(t-i) X(t-j) \quad , \quad i, j \in Z$$

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.5.1 . Si $\check{X}^*(t)$ est le prédicteur BLUP de $X(t)$ basé sur les observations $\{X(t-1), \dots, X(t-p)\}$, alors $\check{X}^*(t)$ coïncide avec le meilleur prédicteur probabiliste $\check{X}(t) = a_1 X(t-1) + \dots + a_p X(t-p)$, $t \in Z$.

Preuve. $\check{X}^*(t)$ est donné par: (cf exemple 2.4.1)

$$\begin{aligned}
\check{X}^*(t) &= \frac{-1}{\Gamma} \begin{bmatrix} R(1,1) \dots R(1,p) & R(0,1) \\ \dots & \dots \\ R(p,1) \dots R(p,p) & R(0,p) \\ X(t-1) \dots X(t-p) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^p a_i X(t-i) \\
&= \check{X}(t)
\end{aligned}$$

$$\text{où } \Gamma = \begin{vmatrix} R(1,1) \dots R(1,p) \\ \dots \\ R(p,1) \dots R(p,p) \end{vmatrix}$$

D'autre part, $\check{X}(t)$ est le meilleur prédicteur pour l'erreur quadratique. C'est un élément de $L[X(t-i), i=1, \dots, p]$. Mais comme $\check{X}^*(t)$ est le meilleur pour l'erreur quadratique dans cet espace alors les deux prédicteurs coïncident. De plus on a d'après ([18] p. 184)

$$(\hat{a}_{1N}, \dots, \hat{a}_{pN}) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{p} (a_1, \dots, a_p). \blacksquare$$

2.5.1 Application

Si $(X_n, n \in Z)$ est un processus autorégressif d'ordre p à valeurs dans un espace de Hilbert $(H, \|\cdot\|)$ vérifiant la relation

$$X_n = \rho_1 X_{n-1} + \dots + \rho_p X_{n-p} + \varepsilon_n \quad (2.14)$$

où $(\varepsilon_n)_{n \in Z}$ sont centrées i.i.d. gaussiennes et ρ_1, \dots, ρ_p des opérateurs linéaires bornés (cf. [18] chap. 1 pour les conditions d'existence d'un processus AR(p) (X_n) strictement stationnaire). On suppose pour simplifier, que les opérateurs $\rho_1^*, \dots, \rho_p^*$ admettent un vecteur propre commun h_1 . Alors:

$$\begin{aligned}
X_{1n} &= \langle X_n, h_1 \rangle = \langle \rho_1 X_{n-1}, h_1 \rangle + \langle \rho_2 X_{n-2}, h_1 \rangle + \dots + \langle \rho_p X_{n-p}, h_1 \rangle + \langle \varepsilon_n, h_1 \rangle \\
&= \lambda_1 \langle X_{n-1}, h_1 \rangle + \lambda_2 \langle X_{n-2}, h_1 \rangle + \dots + \lambda_p \langle X_{n-p}, h_1 \rangle + \langle \varepsilon_n, h_1 \rangle
\end{aligned}$$

et $(X_{1n}, n \in Z)$ est un processus autorégressif réel d'ordre p . Posons $\sigma_\varepsilon^2 = E < \varepsilon, \varepsilon > >^2$.

Corollaire 2.5.1 . Si X_{1n}^* est le prédicteur BLUP de $X_{1n} = < X_n, h_1 >$ basé sur $\{X_{n-1,1}, \dots, X_{n-p,1}\}$ alors:

$$E |X_{1n}^* - X_{1n}|^2 \leq E \left(L(\lambda, \hat{\lambda}) \right) + \sigma_\varepsilon^2.$$

où $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p$ sont les estimateurs des moindres carrés de $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et

$$L(\lambda, \hat{\lambda}) = (\hat{\lambda} - \lambda)' R (\hat{\lambda} - \lambda), \quad R = (R_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$$

$$R_{i,j} = E (< X_i, h_1 > < X_j, h_1 >)$$

Preuve. C'est une application directe de la proposition (2.5.1) est d'un résultat du chapitre VI ([18] p. 144). ■

2.6 Prédiction d'un processus autorégressif ARC(1)

Dans ce paragraphe nous considérons les deux normes suivantes: la norme de $L^2_{[0,1]}$ notée $\|\cdot\|_2$ et la norme sup notée $\|\cdot\|_\infty$. On aura besoin aussi de la norme sup d'une fonction g définie sur $[0, 1]^2$, qu'on notera $\|g\|_\infty$.

Considérons un processus $(Y(t), t \in R)$ à temps continu admettant une représentation autorégressive banachique dans l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, ARC. (voir le Chap I paragraphe 1.2). En posant $X_{n+1}(t) = Y(n+t), t \in [0, 1]$. Nous donnons le prédicteur BLUP $X_{n+1}^*(t)$ de $X_{n+1}(t)$ pour $t \in [0, 1]$, ($X_{n+1}(t), t \in [0, 1]$) représente la trajectoire du processus Y sur l'intervalle $[n, n+1]$). Nous construisons ensuite une approximation des prédicteurs X_{n+1}^* suivant les deux cas suivants:

- 1) les observations discrètes du processus : $\{X_j(t_i), j = 1, \dots, n, i = 0, \dots, r, t_i \in [0, 1]\}$ sont disponibles
- 2) les observations complètes des trajectoires : $\{X_j(t), j = 1, \dots, n-1, t \in [0, 1]\}$ sont disponibles.

Les deux cas sont appelés dans la suite prédicteur discret et prédicteur continu respectivement.

On plonge l'espace $C([0, 1])$ dans l'espace $L^2([0, 1])$ comme dans Pumo [25] et Mourid [18]. Les opérateurs Γ_{X_0} et Γ_n du processus $ARC(1)$ sont définis comme des opérateurs de L^2 . Ainsi nous utilisons leurs éléments propres pour construire les estimateurs de $X_n^*(s)$.

Soit (X_n) un processus autorégressif $ARC(1)$ défini par (1.2) (chapitre I). Nous disposons des observations X_1, \dots, X_n et nous définissons $c, c_n, d, d_n, d^*, d_n^*$ par:

$$\begin{aligned} c(s, t) &= E(X_0(s)X_0(t)), \quad c_n(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(s)X_i(t) \\ d^*(s, t) &= E(X_1(s)X_0(t)), \quad d_n^*(s, t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1}(s)X_i(t) \\ d(s, t) &= E(X_0(s)X_1(t)), \quad d_n(s, t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i(s)X_{i+1}(t) \end{aligned}$$

où $s, t \in [0, 1]$. Toutes ces quantités existent puisque $E\|X_i\|^2 < +\infty$. Soient $\Gamma, \Gamma_n, \Delta, \Delta_n, \Delta^*, \Delta_n^*$ les opérateurs intégraux de noyaux respectifs $c, c_n, d, d_n, d^*, d_n^*$. Nous avons par exemple

$$\Delta^*(f)(\cdot) = \int_0^1 d^*(y, \cdot) f(y) dy, \quad f \in C_{[0,1]}$$

et rappelons les opérateurs de covariance et de covariance croisée des variables aléatoires X_0 et X_0, X_1 respectivement:

$$\Gamma_{X_0}(f) = E(\langle X_0, f \rangle X_0) \text{ et } \Delta(f) = E(\langle X_0, f \rangle X_1).$$

Considérons le système orthonormal des vecteurs propres (φ_i) de Γ . Soient (λ_i) les valeurs propres correspondantes. Le système $(\varphi_i \otimes \varphi_j, i, j \in N^*)$ est aussi orthonormal dans $L^2_{[0,1]^2}$. Nous utilisons les hypothèses suivantes ([25]) :

- Les trajectoires $(X_i, i \in Z)$ dans $C_{[0,1]}$ sont Lipstchitziennes d'ordre α :

$|X_i(x) - X_i(y)| \leq L(w) |x - y|^\alpha, \alpha > 0, i \in Z$ et L une variable aléatoire positive

Sous cette condition nous avons,

$$|X_i(x)| \leq |X_i(x) - X_i(0)| + |X_i(0)| \leq L(w) + |X_i(0)|$$

- Un processus stationnaire $(X_i, i \in Z)$ est dit α -mélangeant où fortement mélangeant si :

$$\alpha(m) = \sup_{A \in F_{-\infty}^0, B \in F_m^{+\infty}} |P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

et β -mélangeant où absolument régulier si

$$\beta(m) = E \sup_{A \in F_{-\infty}^0, B \in F_m^{+\infty}} |P(A/B) - P(B)| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

où F_m^n désigne la tribu des évènements engendrée par les variables aléatoires $(X_i, m \leq i \leq n)$

Pour la propriété du mélange fort d'un processus ARC (1) nous avons le théorème suivant:

Théorème 2.6.1 (Voir [2]). *Si le processus $(X_i, i \in Z)$ est un processus ARB (1) et vérifiant les hypothèses suivantes:*

$$G_1: \|\rho\| < 1$$

G_2 : La loi de probabilité P_{ε_1} est absolument continue par rapport à la mesure λ , une mesure σ -fini sur (B, \mathfrak{B}) est de densité f et l'ensemble de positivité $E = \{f > 0\}$ est un ouvert contenant l'origine 0.

G_3 : La mesure λ est telle que pour tout $A \in B$ de $\lambda(A) > 0$ il existe un ouvert $U \in A$ tel que $\lambda(U) > 0$.

Alors le processus (X_i) est géométriquement absolument régulier et par suite géométriquement fortement mélangeant i.e $\exists \xi, 0 < \xi < 1$ tel que $\alpha(n) = O(\xi^n)$.

Nous rappelons un résultat de [25]. Nous faisons l'hypothèse suivante:

$$H : \begin{cases} 0 < m(0) \leq E(X_0^2(0)) \leq M(0), m(0) \text{ et } M(0) \text{ sont des constantes} \\ E|X_0^k(0)| \leq M^{k-2}(0) k! E(X_0^2(0)), k \geq 3 \\ \forall x, y \in [0, 1] 0 < m(x, y) \leq E(X_0^2(x) X_0^2(y)) \leq M(x, y) < +\infty, \\ m(x, y) \text{ et } M(x, y) \text{ sont des constantes dépendants de } x \text{ et } y \\ \forall x, y \in [0, 1] E|X_0^2(x) X_0^2(y)|^k \leq M^{k-2}(x, y) k! E(X_0^2(x) X_0^2(y)), k \geq 3 \end{cases}$$

Théorème 2.6.2 ([25]). *Si les trajectoires de $(X_n) \sim \text{ARC}(1)$ sont Lipschitziennes d'ordre α , si le processus $(X_i, i \in Z)$ est géométriquement α - mélangeant et si la condition H est vérifiée, alors pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et pour tout $n > 0$ et $0 < \beta < \frac{1}{4}$ on a:*

$$P(\|c_n - c\|_\infty > \varepsilon) \leq (2\sqrt{n} + \eta_1) \exp(-\eta_2 \varepsilon^2 \sqrt{n}) + \exp(-\eta_2 \varepsilon^2 16^{-2} n^{\frac{1}{2}-2\beta}) \\ + \eta_3 \frac{1}{\varepsilon} (1 + n^\beta) n \exp\left(-\log\left(\frac{1}{q} \sqrt{n}\right)\right) + \eta_3 \exp(-n^\beta)$$

où $\eta_3 = E(\exp L(w)) < \infty$. Un résultat similaire est aussi vrai pour $\|d_n^* - d^*\|_\infty$.

Si on suppose que $E(L(w)) < +\infty$.

Alors pour n assez grand et $\beta < \frac{1}{6}$ on a

$$P(\|c_n - c\|_\infty > \varepsilon) \leq a_1 \exp(-a_2 \varepsilon^2 n^{\frac{1}{6}-\eta}) + b_1 \frac{1}{\varepsilon} \exp(-b_2 n^{\frac{1}{3}}) + c_1 \exp(-n^{\frac{1}{6}})$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 sont des constantes positives et η est une constante qui peut être choisie suffisamment petite.

2.6.1 Prédicteur BLUP discret

Supposons que l'on dispose des observations $X_j(t_i), i = 1, \dots, r, t_i \in [0, 1], j = 1, \dots, n$. Le prédicteur *BLUP* discret $X_{n+1}^*(s)$ de $X_{n+1}(s)$ est: (cf chap II exemple 5).

$$X_{n+1}^*(s) = - \begin{vmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) & d^*(s, t_1) \\ \dots & \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) & d^*(t_r, s) \\ X_n(t_1) \dots X_n(t_r) & 0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) \\ \dots & \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

Dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck nous avons le résultat suivant:

Proposition 2.6.1 *Si $\{Y(t), t \in R\}$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, alors le meilleur prédicteur probabiliste ρX_n de X_{n+1} coïncide avec le prédicteur BLUP X_{n+1}^* construit à base de l'observation $X_n(1)$ sur $[0, 1]$.*

Preuve. L'opérateur ρ est défini par $\rho f(t) = \exp(-ct) f(1)$ pour $f \in C_{[0,1]}$ (cf Chap. 1 page 6).

Pour construire le prédicteur BLUP $X_{n+1}^*(t), t \in [0, 1]$, nous utilisons seulement l'observation $X_{n-1}(1)$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} X_{n+1}^*(t) &= - \left| \begin{array}{cc} c(1,1) & d^*(t,1) \\ X_n(1) & 0 \end{array} \right| \div c(1,1) \\ &= \frac{d^*(t,1) X_n(1)}{c(1,1)}, \end{aligned}$$

or $c(s,t) = \frac{1}{2c} \exp(-c|s-t|)$ et $d^*(s,t) = \frac{1}{2c} \exp(-c|s-t-1|)$

$$\begin{aligned} X_{n+1}^*(t) &= \frac{\frac{1}{2c} \exp(-cs)}{\frac{1}{2c}} X_n(1) \\ &= \rho X_n(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarquons que si l'opérateur ρ de la représentation autorégressive AR(1) est de la forme:

$$\rho f = \sum_{i=1}^r \alpha_i f(t_i)$$

où $r \in N, r \geq 1$ et les $\alpha_i (i = 1, \dots, r)$ sont des éléments de $C_{[0,1]}$, alors le prédicteur BLUP $X_{n+1}^*(s)$ de $X_{n+1}(s)$ basé sur les observations $X_n(t_i), i = 1, \dots, r$ $X_{n+1}^*(s)$ coïncide avec $\rho X_n(s)$ le meilleur prédicteur probabiliste dans le sens suivant:

$$\forall x^* \in C^*, E[x^*(X_{n+1} - \rho X_n)]^2 \leq E[x^*(X_{n+1} - T(X_n))]^2$$

où C^* est l'ensemble des mesures à signe bornées et pour tout opérateur T sur $C_{[0,1]}$.

En effet nous prenons x^* tel que $x^*(f) = f(t_0)$, $f \in C_{[0,1]}$ et $t_0 \in [0, 1]$, alors $\check{X}_{n+1}(s) = \rho X_n(s)$ est meilleur en erreur quadratique point par point, $\check{X}_{n+1}(s)$ est aussi le meilleur en erreur quadratique dans l'espace $L_2[X_n(t_i), i = 1, \dots, r]$ et comme $\check{X}_{n+1}(s)$ est un élément de cet espace, d'où le résultat.

Considérons le prédicteur $\hat{X}_{n+1}^*(s)$ de $X_{n+1}^*(s)$, $s \in [0, 1]$:

$$\hat{X}_{n+1}^*(s) = - \begin{vmatrix} c_n(t_1, t_1) \dots c_n(t_1, t_r) & d_n^*(s, t_1) \\ \dots & \dots \\ c_n(t_r, t_1) \dots c_n(t_r, t_r) & d_n^*(t_r, s) \\ X_n(t_1) & \dots X_n(t_r) & 0 \end{vmatrix} \div \Gamma_n \tag{2.16}$$

et

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} c_n(t_1, t_1) \dots c_n(t_1, t_r) \\ \dots \\ c_n(t_r, t_1) \dots c_n(t_r, t_r) \end{vmatrix}$$

où c_n et d_n sont définies à la page 40.

La proposition suivante compare les deux prédicteurs.

Proposition 2.6.2 . *Si le processus autorégressif ARC (1) vérifie les hypothèses du théorème (2.6.1) et si les observations sont Lipschitziennes d'ordre α , alors on a:*

$$\|X_{n+1}^* - \hat{X}_{n+1}^*\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$$

Preuve. D'une part, sous les conditions du théorème précédent $c_n(t_i, t_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} c(t_i, t_j)$, $d_n^*(t_i, t_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} d^*(t_i, t_j)$. D'autre part, X_{n+1}^* et X_{n+1}^{**} au point $s \in [0, 1]$ sont aussi donnés par:

$$X_{n+1}^*(s) = X_n^t C^{-1} D, \hat{X}_{n+1}^*(s) = X_n^t C_n^{-1} D_n$$

où

$$C = \begin{bmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) \\ \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} c_n(t_1, t_1) \dots c_n(t_1, t_r) \\ \dots \\ c_n(t_r, t_1) \dots c_n(t_r, t_r) \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d^*(s, t_1) \\ \vdots \\ d^*(s, t_r) \end{bmatrix},$$

$$D_n = \begin{bmatrix} d_n^*(s, t_1) \\ \vdots \\ d_n^*(s, t_r) \end{bmatrix}, \quad X_n = \begin{bmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_r) \end{bmatrix}$$

On a

$$\|X_{n+1}^* - \widehat{X}_{n+1}^*\|_\infty \leq r^2 \|X_n\| (\|C^{-1}\| \|d - d_n\|_\infty + \|d_n\|_\infty \|C_n^{-1} - C^{-1}\|)$$

où les matrices C_n^{-1} et C^{-1} existent.

Pour la transposé de X_n : on a $\|X_n^t\| < M_n^*$ où M_n^* est une constant dans R^+ et $\|\cdot\|$ est une norme dans R^r . Posons $\varepsilon = 2\eta(\|d\|_\infty + 1)r^2$, $\eta > 0$ et $\|C^{-1}\| = M^{-1}$ (ici on désigne par $\|\cdot\|$ une norme dans l'espace des matrices carrées d'ordre r).

$$P\left(\|X_{n+1}^* - \widehat{X}_{n+1}^*\|_\infty > \varepsilon\right) \leq P\left(\|d_n\|_\infty \|C_n^{-1} - C^{-1}\| > \frac{\eta(\|d\|_\infty + 1)r}{M_n^*}\right) +$$

$$P\left(\|d - d_n\|_\infty > \frac{\eta(\|d\|_\infty + 1)}{M_n^*}\right) \quad (2.17)$$

Soit $H = \{\|C_n - C\| \leq M\}$. Sur H , on a $1 - \|C^{-1}\| \|C_n - C\| > 0$. Nous avons l'inégalité suivante: (Dunfort-Schwartz cf ([12] p 585)) nous avons

$$\|C_n^{-1} - C^{-1}\| \leq \frac{\|C^{-1}\|^2 \|C_n - C\|}{1 - \|C^{-1}\| \|C_n - C\|} \quad p.s \quad (2.18)$$

En utilisant le fait que $\|C_n - C\| \leq r \|c_n - c\|_\infty$

$$P(\|C_n - C\| > M) \leq (P \|c_n - c\|_\infty > \frac{M}{r}) \leq a_1 \exp(-a_2 r^2 M^{-2} n^{\frac{1}{6} - \eta}) + b_1 r M^{-1} \exp(-b_2 n^{\frac{1}{6}}) \quad (2.19)$$

En utilisant (2.18), pour $\eta > 0$, l'évènement

$$E_n = \left\{ \|C_n^{-1} - C^{-1}\| > \frac{\eta}{M_n^*}, \|C_n - C\| < M \right\}$$

implique

$$\frac{M^{-2} \|C_n - C\|}{1 - M^{-1} \|C_n - C\|} \geq \frac{\eta}{M_n^*}$$

Ce qui entraîne

$$\|C_n - C\| \geq M^2 \frac{\eta}{M_n^*} \left(1 + M \frac{\eta}{M_n^*}\right)^{-1}$$

et donc

$$P(E_n) \leq P(\|C_n - C\| \geq) \leq a_1 \exp\left(-a_2 (\hat{\eta})^2 n^{\frac{1}{6}-\eta}\right) + b_1 \frac{1}{\hat{\eta}} \exp\left(-b_2 n^{\frac{1}{3}}\right) + c_1 \exp\left(-n^{\frac{1}{6}}\right) \quad (2.20)$$

$$\text{où } \hat{\eta} = \frac{M^2 \eta}{M_n^*} \left(1 + \frac{M \eta}{M_n^*}\right)^{-1}$$

Or

$$P\left(\|C_n^{-1} - C^{-1}\| > \frac{\eta}{M_n^*}\right) \leq P(E_n) + P(H^c)$$

D'autre part, on a

$$P(\|d_n^*\| > \|d^*\| + 1) \leq P(\|d_n^* - d^*\| > 1) \quad (2.21)$$

En utilisant (2.19), (2.20), (2.21) on obtient une majoration pour (2.17) et donc le résultat. ■

2.6.2 Prédicteur BLUP continu

Dans ce paragraphe nous utilisons l'observation complète de la trajectoire X_n . Le processus étant à valeurs dans $C_{[0,1]}$, nous avons alors la continuité de la fonction de covariance

$$K^{i,j}(s,t) = E(X_i(s) X_j(t)), \quad \forall i, j \geq 1, \quad \forall s, t \in [0, 1]$$

et en particulier la continuité de $c(s,t) = E(X_0(s) X_0(t))$.

Le prédicteur *BLUP* continu $X_{n+1}^*(s)$ basé sur la trajectoire X_n est donné par : (cf chap II exemple 7)

$$X_{n+1}^{**}(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(s,t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \quad (2.22)$$

où $(\lambda_j, \varphi_j)_{j \geq 1}$ sont les éléments propres de l'opérateur Γ_{X_0} et donc du noyau $c(s, t)$.

Nous étudions une approximation de $X_{n+1}^{**}(s)$, $s \in [0, 1]$ suivant deux cas.

A) 1^{er} cas. Estimation du prédicteur BLUP continu X_n^{} quand les vecteurs propres de l'opérateur de covariance Γ_{X_0} sont connus.**

Soit $(\lambda_j, \varphi_j)_{j \geq 1}$ les éléments propres de Γ_{X_0} et $(\lambda_{jn})_{j \geq 1}$ les valeurs propres de Γ_n . On suppose que les φ_j sont connus et les λ_j sont estimées à partir des λ_{jn} .

On définit:

$$\widehat{X}_{n+1}^{**}(s) = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \quad (2.23)$$

et

$$R_n = \left\| \widehat{X}_{n+1}^{**}(\cdot) - \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_2$$

Nous avons le résultat suivant:

Proposition 2.6.3 . Soit $N_i = \|X_i\|_2$. Sous les conditions H_1 et H_2 suivantes:

$$H_1 : \quad \lambda_j > 0 \text{ pour tout } j$$

$$H_2 : \quad P(\lambda_{1n} > \dots > \lambda_{nn} > 0) = 1$$

on a

$$\forall \varepsilon > 0, P(R_n > \varepsilon) \leq \frac{16A k_n^3 \|\Delta\|_L^2 N_n^2}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^4} + \frac{8A k_n}{n \lambda_{k_n}^2} + \frac{8B N_n^2 k_n^3}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2}$$

où $(k_n) \nearrow \infty$ et Δ est l'opérateur de covariance croisée de X_0, X_1 , A et B sont des constantes.

Preuve. Nous avons:

$$\begin{aligned} R_n &= \left\| \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_j} \left[\int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt - \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right] \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left\| \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt - \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \left| \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right| \end{aligned}$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right| &\leq \left(\int_0^1 X_n^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \varphi_j^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq N_n, \quad \text{car} \left(\int_0^1 \varphi_j^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_n &\leq \sum_{j=1}^{k_n} N_n \left\| \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}} \right) \int_0^1 d^*(.,t) \varphi_j(t) dt + \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 (d_n^*(.,t) - d^*(.,t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n} N_n \left[\left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}} \right| \left\| \int_0^1 d^*(.,t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 + \left| \frac{1}{\lambda_{jn}} \right| \left\| \int_0^1 (d_n^*(.,t) - d^*(.,t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \right] \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 d^*(.,t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 &\leq \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \left\| \int_0^1 d^*(.,t) f(t) dt \right\|_2 \\ &\leq \|\Delta^*\|_L = \|\Delta\|_L, \quad \|\Delta\|_L = \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|\Delta f\|_2 \end{aligned}$$

et

$$\left\| \int_0^1 (d_n^*(.,t) - d^*(.,t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \leq \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_L = \|\Delta_n - \Delta\|_L$$

Soit $E_n = \left\{ |\lambda_{k_n} - \lambda_{k_n n}| < \frac{\lambda_{k_n}}{2} \right\}$. Posons $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2k_n N_n \|\Delta\|_L}$, nous avons

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}} \right| \|\Delta^*\|_L > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n} \right) &\leq P \left(\left| \frac{\lambda_{jn} - \lambda_j}{\lambda_{jn} \lambda_j} \right| > \varepsilon_0, E_n \right) + P(E_n^c) \\ &\leq P \left(\frac{|\lambda_{jn} - \lambda_j|}{\frac{\lambda_{k_n}}{2} \lambda_{k_n}} > \varepsilon_0 \right) + P(E_n^c) \\ &\leq P \left(|\lambda_{jn} - \lambda_j| > \frac{\varepsilon_0 \lambda_{k_n}^2}{2} \right) + \frac{4A}{n \lambda_{k_n}^2} \\ &\leq \frac{16A k_n^2 \|\Delta\|_L^2 N_n^2}{n \varepsilon^2 \lambda_{k_n}^4} + \frac{4A}{n \lambda_{k_n}^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

où nous avons utilisé (1.4) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 P(E_n^c) &= P\left(|\lambda_{k_n n} - \lambda_{k_n}| > \frac{\lambda_{k_n}}{2}\right) \leq \frac{E(\lambda_{k_n n} - \lambda_{k_n})^2}{\left(\frac{\lambda_{k_n}}{2}\right)^2} \\
 &\leq \frac{4E\|\Gamma_n - \Gamma\|^2}{\lambda_{k_n}^2} \\
 &\leq \frac{4A}{n\lambda_{k_n}^2}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

et

$$\begin{aligned}
 P\left(|\lambda_{j_n} - \lambda_j| > \frac{\varepsilon_0 \lambda_{k_n}^2}{2}\right) &\leq P\left(\|\Gamma_n - \Gamma\| > \frac{\varepsilon_0 \lambda_{k_n}^2}{2}\right) \\
 &\leq \frac{16Ak_n^2 \|\Delta\|_L^2 N_n^2}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^4}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{1}{\lambda_{j_n}} \|\Delta_n - \Delta\|_L > \frac{\varepsilon}{2N_n k_n}\right) &\leq P\left(\frac{1}{\lambda_{j_n}} \|\Delta_n - \Delta\|_L > \frac{\varepsilon}{2N_n k_n}, E_n\right) \\
 &\quad + P(E_n^c) \\
 &\leq P\left(\|\Delta_n - \Delta\|_L > \frac{\varepsilon \lambda_{k_n}}{2N_n k_n}\right) + \frac{4A}{n\lambda_{k_n}^2} \\
 &\leq E\|\Delta_n - \Delta\|^2 \frac{4N_n^2 k_n^2}{\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2} + \frac{4A}{n\lambda_{k_n}^2} \\
 &\leq \frac{8BN_n^2 k_n^2}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2} + \frac{4A}{n\lambda_{k_n}^2}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

puisque $E\|\Delta_n - \Delta\|^2 \leq \frac{2B}{n}$. (cf chapitre I prop 1.4.2). Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 P(R_n > \varepsilon) &\leq P\left(\sum_{j=1}^{k_n} N_n \left|\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j_n}}\right| \left\| \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\lambda_{j_n}} \left\| \int_0^1 (d_n^*(\cdot, t) - d^*(\cdot, t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 > \varepsilon\right) \\
 &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left(P\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j_n}} \|\Delta^*\|_L > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) + P\left(\frac{1}{\lambda_{j_n}} \left\| \int_0^1 (d_n^*(s, t) - d^*(s, t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 > \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\left(\left|\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j_n}}\right| \left\| \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) + P\left(\frac{1}{\lambda_{j_n}} \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_L > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) \\ &\leq k_n \left(\frac{16 k_n^2 \|\Delta\|_L N_n^2}{n \varepsilon^2 \lambda_{k_n}^4} + \frac{8A}{n \lambda_{k_n}^2} + \frac{8BN_n^2 k_n^2}{n \varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2} \right). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.6.4 . Sous H_1, H_2 , si k_n tend vers l'infini,

$k_n^3 N_n^2 n^{-1} \lambda_{k_n}^{-4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $k_n^3 N_n^2 n^{-1} \lambda_{k_n}^{-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors on a:

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} 0$$

Preuve. Nous avons

$$\widehat{X}_{n+1}^{**}(s) - X_{n+1}^{**}(s) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(s, t) \varphi_j(t) dt - \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt -$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{j_n}} \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_j(t) dt - \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt$$

Donc

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_2 \leq \left\| R_n + \sum_{j=k_n+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt - \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|$$

et alors

$$\begin{aligned} P\left(\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_2 > \varepsilon\right) &\leq P\left(R_n > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &+ P\left(\left\| \sum_{j=k_n+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt - \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 > \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

Supposant que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(s, t) \varphi_j(t) dt - \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt$ converge uniformément presque partout.

$$P\left(\left\| \sum_{j=k_n+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt - \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'autre part $d^*(., t)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$, donc elle atteint son sup en un point $s_0 \in [0, 1]$ et donc

$$\sum_{j=k_n+1}^{+\infty} \left\| \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(., t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_{\infty} \leq \sum_{j=k_n+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left| \int_0^1 d^*(s_0, t) \varphi_j(t) dt \right| \left| \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right|$$

D'où la convergence de la série dans $C_{[0,1]}$ et par suite la convergence dans $L^2_{[0,1]}$ ent. D'où le résultat. ■

B) 2^{eme} cas. Estimation du prédicteur BLUP continu de $X_n^{}(s)$ dans le cas où les vecteurs propres φ_j sont inconnus .**

Soient $(\lambda_{jn}, \varphi_{jn}; j \in N^*)$ les éléments propres de l'opérateur intégral Γ_n . Supposons dans cette section que le processus est géométriquement α - mélangeant borné, Lipschitzien d'ordre α avec $E(e^{L(w)}) < \infty$. Supposons enfin que la condition H de la proposition 2.6.1 est satisfaite.

On note les hypothèses suivantes

$$H_1'' \quad \lambda_j = ar^j ; a > 0, 0 < r < 1$$

$$H_2 \quad P(\lambda_{1n} > \lambda_{2n} > \dots > \lambda_{nn} > 0) = 1$$

Proposition 2.6.5 [25]. Sous H_1'' , H_2 et si $k_n = o(\log n)$ et pour $n > n_{\gamma_1}$ on a

$$\sup_{1 \leq j \leq k_n} \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_{\infty} \rightarrow 0 p.s$$

$$P\left(\sup_{1 \leq j \leq k_n} \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_{\infty} > \varepsilon\right) \leq A_1 \exp(-A_2 n^{\gamma_1}) + A_3 \exp(-A_4 \varepsilon^2 n^{\frac{1}{6}-2\eta}) + A_5 \frac{1}{\varepsilon^2} \exp(-A_6 n^{\frac{1}{6}-\eta})$$

où A_i , $i = 1, 6$, sont des constantes positives et $\eta > 0$, $\frac{1}{6} < \gamma_1 < \frac{1}{4}$ peuvent être choisis convenablement.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
 \|\varphi'_j\|_\infty &= \|\varphi_j\|_\infty = \frac{1}{\lambda_j} \sup_{x \in [0,1]} |\lambda_j \varphi_j(x)| \quad (\text{pour } \varphi'_j \text{ cf lemme 1.4.1}) \\
 &= \frac{1}{\lambda_j} \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 c(y,x) \varphi_j(y) dy \right| \\
 &\leq \frac{1}{\lambda_j} \sup_{x \in [0,1]} \sqrt{\int_0^1 c^2(y,x) dy} \\
 &\leq \frac{1}{\lambda_j} \|c\|_\infty = M'_j
 \end{aligned}$$

Sans perte de généralité on peut supposer que les $\|\varphi_{in}\|_\infty \leq M_i^*$, puisque d'après la proposition 2.6.5 $\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_\infty$ converge vers zéro *p.s* et φ_j est fini. Soit $M'(k_n) = \max_{1 \leq j \leq k_n} M'_j$, $M^*(k_n) = \max_{1 \leq j \leq k_n} M_j^*$ et posons

$$\widehat{M}(k_n) = \max(M^*(k_n), M'(k_n))$$

Nous définissons le prédicteur $X_n^{**}(s)$ de $X_n^*(s)$, $s \in [0, 1]$ par :

$$\widehat{X}_{n+1}^{**} = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s,t) \varphi_{jn}(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_{jn}(t) dt.$$

Proposition 2.6.6 . Supposons que le processus $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie les hypothèses du théorème 2.6.1, H_1, H_1'' , H_2 et que $\|X_i\|_\infty \leq M_i$, $M_i > 0$, $k_n = o(\log n)$ et $\widehat{M}(k_n) = O(\log n)$ Alors on a

$$\left\| X_{n+1}^{**} - \widehat{X}_{n+1}^{**} \right\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$$

Preuve. Posons

$$X'_{n+1}(s) := \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s,t) \varphi'_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi'_j(t) dt$$

On remarque que $X'_{n+1}(s) = \widehat{X}_{n+1}^{**}(s)$.

$$\text{Posons } R_n^* = \left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X'_{n+1} \right\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{n+1}^{**}(s) - X'_{n+1}(s) &= \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \left[\int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_{jn}(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_{jn}(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi'_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi'_j(t) dt \right] \end{aligned}$$

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X'_{n+1} \right\|_{\infty} \leq \sum_{j=1}^{k_n} \left\| \frac{1}{\lambda_{jn}} \left[\int_0^1 \int_0^1 d_n^*(\cdot, t) [\varphi_{jn}(t) \varphi_{jn}(t') - \varphi'_j(t) \varphi'_j(t')] X_n(t') dt dt' \right] \right\|_{\infty}$$

Or $\|X_i\|_{\infty} \leq M_i$ par hypothèse, donc,

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{M_n}{|\lambda_{jn}|} \left\| \int_0^1 \int_0^1 d_n^*(\cdot, t) [\varphi'_j(t') (\varphi_{jn}(t) - \varphi'_j(t)) + \varphi_{jn}(t) (\varphi_{jn}(t') - \varphi'_j(t'))] dt dt' \right\|_{\infty}$$

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X'_{n+1} \right\|_{\infty} \leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{M_n}{|\lambda_{jn}|} \int_0^1 |\varphi'_j(t')| \int_0^1 \|d_n^*(\cdot, t)\|_{\infty} |\varphi_{jn}(t) - \varphi'_j(t)| dt dt' +$$

$$\int_0^1 |\varphi_{jn}(t)| \int_0^1 \|d_n^*(\cdot, t)\|_{\infty} |\varphi_{jn}(t') - \varphi'_j(t')| dt dt'$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{M_n}{|\lambda_{jn}|} \left\| \varphi_{jn} - \varphi'_j \right\|_{\infty} \|\varphi_{jn}\|_{\infty} \int_0^1 \sup_{s \in [0,1]} |d_n^*(\cdot, t)| dt + \\ &\quad \left\| \varphi_{jn} - \varphi'_j \right\|_{\infty} \|\varphi'_j\|_{\infty} \int_0^1 \sup_{s \in [0,1]} |d_n^*(\cdot, t)| dt \end{aligned}$$

Par suite,

$$R_n^* \leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{M_n}{|\lambda_{jn}|} \left\| \varphi_{jn} - \varphi'_j \right\|_{\infty} d_2 \left(\|\varphi_{jn}\|_{\infty} + \|\varphi'_j\|_{\infty} \right),$$

où $\|d_n^*\|_{\infty} \leq d_2$ p.s.

Alors presque sûrement, on a :

$$R_n^* \leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{M_n}{|\lambda_{jn}|} \left\| \varphi_{jn} - \varphi'_j \right\|_{\infty} d_2 (M^*(k_n) + M'(k_n))$$

Comme $\widehat{M}(k_n) = \max(M^*(k_n), M'(k_n))$. On a

$$\begin{aligned}
P(R_n^* > \varepsilon) &= P\left(\sum_{j=1}^{k_n} \frac{M_n}{\lambda_{jn}} \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_{\infty} d_2 \widehat{M}(k_n) > \varepsilon\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\left(\frac{M_n}{\lambda_{jn}} \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_{\infty} d_2 \widehat{M}(k_n) > \frac{\varepsilon}{k_n}\right)
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{k_n M_n d_2 \widehat{M}(k_n)}$, en utilisant prop 2.6.6 on a donc

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{\lambda_{jn}} \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_{\infty} > \varepsilon_0\right) &\leq P\left(\frac{1}{\lambda_{jn}} \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_{\infty} > \varepsilon_0, E_n\right) + P(E_n^c) \\
&\leq P\left(\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_{\infty} > \frac{\lambda_{k_n} \varepsilon_0}{2}\right) + P(E_n^c) \\
&\leq A_1 \exp(-A_2 n^{\gamma_1}) + A_3 \exp(-4^{-1} A_4 \varepsilon_0^2 \lambda_{k_n}^2 n^{\frac{1}{6}-2\eta}) \\
&\quad + A_5 \frac{4}{\varepsilon_0^2 \lambda_{k_n}^2} \exp(-A_6 n^{\frac{1}{6}-\eta}) + \frac{4A}{n \lambda_{k_n}^2}
\end{aligned}$$

où A_i , $i = 1, 6$, sont des constantes positives et $\eta > 0$, $\frac{1}{6} < \gamma_1 < \frac{1}{4}$ qui peuvent être choisis convenablement.

Enfin, posons $c_n^* = A_1 \exp(-A_2 n^{\gamma_1}) + A_3 \exp(-A_4 \varepsilon_0^2 \lambda_{k_n}^2 n^{\frac{1}{6}-2\eta}/4) + A_5 \frac{4}{\varepsilon_0^2 \lambda_{k_n}^2} \exp(-A_6 n^{\frac{1}{6}-\eta}) + \frac{4A}{n \lambda_{k_n}^2}$. Alors de

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_{\infty} \leq \|X_n^{**} - X'_{n+1}\|_{\infty} + \left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X'_{n+1} \right\|_{\infty}, \quad \|X_{n+1}^{**} - X'_{n+1}\|_{\infty} \xrightarrow{p} 0$$

(par la prop 2.6.4)

On en conclut que

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_2 \xrightarrow{p} 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

D'où le résultat. ■

2.6.3 Liens avec le prédicteur probabiliste.

Si ρ de la représentation autorégressive (1.2) est un opérateur intégral à noyau :

$$\rho f(t) = \int_0^1 r(s, t) f(s) ds$$

où

$\sup_{s,t \in [0,1]} |r(s,t)| < 1$, alors on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.1 . *Si l'opérateur ρ de la représentation autorégressive est un opérateur intégral à noyau alors le meilleur prédicteur probabiliste $\rho X_{n-1}(t)$ de $X_n(t)$ coïncide avec le prédicteur BLUP $X_n^*(t)$ de $X_n(t)$, $\forall t \in [0, 1]$.*

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} X_n^*(s) &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(s,t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_{n-1}(t) \varphi_j(t) dt \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 \sum_{i,j' \geq 1} d_{ij'}^* \varphi_i(s) \varphi_{j'}(t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_{n-1}(t) \varphi_j(t) dt \end{aligned}$$

où $d_{ij'}^*$ sont les coefficients de Fourier de $d^*(s,t)$ dans le système $(\varphi_i \otimes \varphi_j, i, j \geq 1)$ sur $[0, 1]^2$. Par suite

$$\begin{aligned} X_n^*(s) &= \sum_{j,i,j' \geq 1} \frac{d_{ij'}^*}{\lambda_j} \int_0^1 \varphi_{j'}(t) \varphi_j(t) dt \varphi_i(s) \int_0^1 X_{n-1}(t) \varphi_j(t) dt \\ &= \sum_{j,i \geq 1} \frac{d_{ij}^*}{\lambda_j} \varphi_i(s) \int_0^1 X_{n-1}(t) \varphi_j(t) dt \\ &= \int_0^1 X_{n-1}(t) \sum_{j,i \geq 1} \frac{d_{ij}^*}{\lambda_j} \varphi_i(s) \varphi_j(t) dt \\ &= \int_0^1 X_{n-1}(t) r(s,t) dt \\ &= : \check{X}_n(s) = E(X_n / X_{n-1}) = (\rho X_{n-1})(s) \end{aligned}$$

où nous avons d'après le lemme 3.1.1 (p.35 [25]) : $\frac{d_{ij}^*}{\lambda_j} = r_{ij}$, avec r_{ij} les coefficients de Fourier de $r(s,t)$ dans le système $(\varphi_i \otimes \varphi_j, i, j \geq 1)$. ■

On peut montrer le résultat différemment. De la relation :

$$\begin{aligned}
\rho X_n(s) &= \int_0^1 X_{n-1}(t) r(s,t) dt \\
&= \int_0^1 X_{n-1}(t) \sum_{j,i \geq 1} \frac{d_{ij}^*}{\lambda_j} \varphi_i(s) \varphi_j(t) dt \\
&= \sum_{j,i \geq 1} \frac{d_{ij}^*}{\lambda_j} \varphi_i(s) \int_0^1 X_{n-1}(t) \varphi_j(t) dt \\
&= \sum_{i,j} a_{ij}(s) \xi_j
\end{aligned}$$

où $\xi_j = \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt$ et $\frac{d_{ij}^*}{\lambda_j} \varphi_i(s) = a_{ij}(s)$.

Comme $(\xi_j)_{j \geq 1}$ forme un système orthogonal dans l'espace $L_2[X_{n-1}(t), t \in [0, 1]]$ alors $\rho X_{n-1}(s)$ est élément de cet espace. Or $X_n^*(s)$ est le meilleur pour l'erreur quadratique dans cet espace. Donc

$$\rho X_{n-1}(s) = X_n^*(s). \blacksquare$$

Comparaison entre les prédicteurs \widehat{X}_n^{} , \tilde{X}_n .**

Rappelons que \tilde{X}_{n+1} le prédicteur de X_{n+1}^* proposé par Pumo (cf [25], chapitre 3) dans le cas où les φ_j sont connus est défini par :

$$\tilde{X}_{n+1}(s) = \int_0^1 r_{nk_n}(s,t) X_n(t) dt, \quad r_{nk_n}(s,t) = \sum_{i,j=1}^{k_n} r_{ijn} \varphi_{in}(t) \varphi_{jn}(s)$$

$$r_{ijn} = \frac{d_{ijn}^*}{\lambda_{jn}} \text{ et } d_{ijn}^* = \int_0^1 \int_0^1 d_n^*(s,t) \varphi_i(t) \varphi_j(s) ds dt$$

Proposition 2.6.7 . *Nous avons :*

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - \tilde{X}_{n+1} \right\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_{n+1}^{**}(s) &= \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt. \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{j', i \geq 1} \frac{d_{i, j'n}^*}{\lambda_{jn}} \int_0^1 \varphi_{j'}(t) \varphi_j(t) dt \varphi_i(s) \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i \geq 1} \frac{d_{i, jn}^*}{\lambda_{jn}} \varphi_i(s) \varphi_j(t) X_n(t) dt \\
&= \int_0^1 r_{nk_n}^*(s, t) X_n(t) dt
\end{aligned}$$

où

$$r_{nk_n}^*(s, t) := \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i \geq 1} \frac{d_{i, jn}^*}{\lambda_{jn}} \varphi_i(s) \varphi_j(t)$$

Lorsque $k_n \rightarrow +\infty$, on a $\|r_{nk_n}^*(s, t) - r_{nk_n}(s, t)\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P.S.} 0$. Par suite :

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - \widetilde{X}_{n+1} \right\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0 \quad \blacksquare$$

2.6.4 Comparaison entre les prédicteurs \widehat{X}_{n+1}^{**} et \widetilde{X}_n .

Rappelons que le prédicteur proposé par Pumo (cf [25], chapitre 3) dans le cas où les φ_j sont inconnus est défini par :

$$\widetilde{X}_n(s) = \int_0^1 \widehat{r}_{nk_n}(s, t) X_{n-1}(t) dt, \widehat{r}_{nk_n}(s, t) = \sum_{i, j=1}^{k_n} \widehat{R} \varphi_{in}(t) \varphi_{jn}(s)$$

où

$$\widehat{R} = \frac{d_{i, jn}^*}{\lambda_{jn}} \text{ et } d_{i, jn}^* = \int_0^1 \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_{jn}(t) \varphi_{in}(s) ds dt$$

Rappelons aussi que :

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{n+1}^{**}(s) &= \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_{jn}(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_{jn}(t) dt. \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{j', i \geq 1} \frac{d_{i, j' n}^*}{\lambda_{jn}} \int_0^1 \varphi_{j' n}(t) \varphi_{jn}(t) dt \varphi_{in}(s) \int_0^1 X_n(t) \varphi_{jn}(t) dt\end{aligned}$$

Proposition 2.6.8 . Nous avons :

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - \widetilde{X}_{n+1} \right\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$$

Preuve. Comme $\int_0^1 \varphi_{j' n}(t) \varphi_{jn}(t) dt$ converge vers $\int_0^1 \varphi_{j'}(t) \varphi_j(t) dt$, alors de $\int_0^1 \varphi_{j' n}(t) \varphi_{jn}(t) dt = 1$, si $j \neq j'$ et 0 sinon p.s, quand $n \rightarrow +\infty$ on a:

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{n+1}^{**}(s) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i \geq 1} \frac{d_{i, j' n}^*}{\lambda_{jn}} \varphi_{in}(s) \varphi_{jn}(t) X_n(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i \geq 1} \hat{R} \varphi_{in}(s) \varphi_{jn}(t) X_n(t) dt \\ &= \int_0^1 \hat{R}_{nk_n}^*(s, t) X_n(t) dt\end{aligned}$$

où $\hat{R}_{nk_n}^*(s, t) = \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i \geq 1} \hat{R} \varphi_{in}(s) \varphi_{jn}(t)$. Comme $\hat{R}_{nk_n}^*(s, t) - r_{nk_n}(s, t)$ converge vers 0 presque sûrement quand $n \rightarrow +\infty$, donc $\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - \widetilde{X}_{n+1} \right\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$, et

par suite $\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - \check{X}_{n+1} \right\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$ car $\left\| \widetilde{X}_{n+1} - \check{X}_{n+1} \right\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$ (cf [25] chapitre 3 p.51) ■

2.6.5 Estimation par interpolation linéaire

Reprenant les résultats de Pumo [25] chapitre 4 p.56, où une méthode d'approximation d'une fonction aléatoire, définie sur $[0, 1]$, connaissant ses valeurs seulement sur un ensemble de points discret est proposée. Les instants d'observations peuvent être équidistants ou non, mais une condition d'équidistance asymptotique sera demandée.

Soit f une fonction aléatoire définie sur $[0, 1]$ et supposons que nous connaissons les valeurs de f aux points $(t_i, i = 1, 2, \dots, m)$. Une approximation linéaire de f serait:

$$\hat{f}_2(t) = \begin{cases} f(t_1), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{(t-t_{i-1})f(t_i) + (t_i-t)f(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} & \text{si } t_{i-1} < t < t_i, i = 2, \dots, m-1 \\ f(t_m), & t_m < t \leq 1 \end{cases}$$

Nous montrons que \hat{f}_2 possède de bonnes propriétés de convergence.

Faisons l'hypothèse suivante qui assure la convergence uniforme des écarts $(t_i - t_{i-1})$ à vitesse $\frac{1}{m}$

$$H_4 ; \exists a > 0 \quad \sup_{i=1, \dots, m+1} (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{a}{m} \text{ où } t_0 = 0, t_{m+1} = 1$$

Lemme 2.6.1 . Supposons que f est Lipschitzienne d'ordre α , $0 < \alpha < 1$ i.e il existe une variable aléatoire positive de carré intégrable $L(w)$ telle que $\forall s, t$:

$$|f(t, w) - f(s, w)| \leq L(w) |s - t|^\alpha$$

Alors sous H_4 , \hat{f}_2 converge vers f en moyenne quadratique et

$$E \left\| \hat{f}_2 - f \right\|_\infty^2 \leq \frac{E(L^2) a^{2\alpha}}{m^2}$$

Preuve. Soit $\left\| \hat{f}_2 - f \right\|_\infty = \sup_t |\hat{f}_2(t) - f(t)|$. Pour $t \in [0, t_1]$ ou $t \in [t_m, 1]$, on a respectivement:

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}_2(t) - f(t) \right| &= |f(t_1) - f(t)| \leq L(w) |t_1 - t|^\alpha \leq L(w) |t_1 - t_0|^\alpha \\ \left| \hat{f}_2(t) - f(t) \right| &= |f(t_m) - f(t)| \leq L(w) |t_m - t|^\alpha \leq L(w) |t_{m+1} - t_m|^\alpha \end{aligned}$$

Pour $t \in [t_{i-1}, t_i]$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}_2(t) - f(t) \right| &= \left| \frac{(t-t_{i-1})(f(t_i) - f(t)) + (t-t_i)(f(t_{i-1}) - f(t))}{t_i - t_{i-1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{L(w) |t_i - t_{i-1}|^\alpha (t - t_{i-1} + t_i - t)}{t_i - t_{i-1}} \right| = L(w) |t_i - t_{i-1}|^\alpha \end{aligned}$$

D'où

$$E \left(\left\| \hat{f}_2 - f \right\|_\infty^2 \right) \leq \frac{E(L^2) a^{2\alpha}}{m^2} \quad \blacksquare$$

Application. Supposons que les trajectoires de $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont Lipschitzienne d'ordre α alors les trajectoires définies par

$$\rho X_{n-1} = X_n - \varepsilon_n$$

sont aussi Lipschitziennes d'ordre α car

$$\begin{aligned} |\rho X_{n-1}(w, t) - \rho X_{n-1}(w, s)| &= |X_n(w, t) - \varepsilon_n(w, t) + \varepsilon_n(w, s) - X_n(w, s)| \\ &\leq |X_n(w, t) - X_n(w, s)| + |\varepsilon_n(w, t) - \varepsilon_n(w, s)| \\ &\leq L_1(w) |s - t|^\alpha + L_2(w) |s - t|^\alpha \\ &\leq L(w) |s - t|^\alpha \text{ où } L(w) = L_1(w) + L_2(w) \end{aligned}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs des trajectoires des prédicteurs \widehat{X}_n et X_n^{**} , seulement sur un ensemble discret de points $(s_i, i = 1, \dots, m)$.

Alors des estimateurs de \widehat{X}_n et X_n^{**} seront:

$$Y_n^*(s) = \begin{cases} X_n^*(s_1), & 0 \leq s \leq s_1 \\ \frac{(s-s_{i-1})X_n^*(s_i) + (s_i-s)X_n^*(s_{i-1})}{s_i - s_{i-1}} & \text{si } s_{i-1} < s < s_i, \quad i = 2, \dots, m-1 \\ X_n^*(s_m), & s_m < s \leq 1 \end{cases}$$

$$\widehat{Y}_n(s) = \begin{cases} \widehat{X}_n(s_1), & 0 \leq s \leq s_1 \\ \frac{(s-s_{i-1})\widehat{X}_n(s_i) + (s_i-s)\widehat{X}_n(s_{i-1})}{s_i - s_{i-1}} & \text{si } s_{i-1} < s < s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \widehat{X}_n(s_m), & s_m < s \leq 1 \end{cases}$$

où $(s_i, i = 1, \dots, m)$ vérifie l'hypothèse H_4 .

Donc d'après le lemme 2.6.1, nous avons :

$$\begin{aligned} P\left(\|X_n^* - Y_n^*\|_\infty > \frac{\varepsilon}{2}\right) &\leq \frac{4E\|X_n^* - Y_n^*\|_\infty^2}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{4E(L^2)a^{2\alpha}}{m^{2\alpha}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Sur $[0, s_1]$ on a :

$$\begin{aligned} \left| Y_n^*(s) - \widehat{Y}_n(s) \right| &= \left| X_n^*(s_1) - \widehat{X}_n(s_1) \right| \\ &\leq \left\| X_n^* - \widehat{X}_n \right\|_\infty \end{aligned}$$

Sur $]s_{m-1}, s_m]$ on a :

$$\begin{aligned} \left| Y_n^*(s) - \widehat{Y}_n(s) \right| &= \left| X_n^*(s_m) - \widehat{X}_n(s_m) \right| \\ &\leq \left\| X_n^* - \widehat{X}_n \right\|_\infty \end{aligned}$$

Sur $]s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \dots, m-1$, on a

$$\begin{aligned} \left| Y_n^*(s) - \widehat{Y}_n(s) \right| &= \left| \frac{(s-s_{i-1})X_n^*(s_i) + (s_i-s)X_n^*(s_{i-1})}{s_i-s_{i-1}} - \frac{(s-s_{i-1})\widehat{X}_n(s_i) + (s_i-s)\widehat{X}_n(s_{i-1})}{s_i-s_{i-1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{(s-s_{i-1})}{s_i-s_{i-1}} \left(\widehat{X}_n(s_i) - X_n^*(s_i) \right) \right| + \left| \frac{(s-s_i)}{s_i-s_{i-1}} \left(\widehat{X}_n(s_{i-1}) - X_n^*(s_{i-1}) \right) \right| \\ &\leq \left| \widehat{X}_n(s_i) - X_n^*(s_i) \right| + \left| \widehat{X}_n(s_{i-1}) - X_n^*(s_{i-1}) \right| \\ &\leq 2 \left\| \widehat{X}_n - X_n^* \right\|_\infty \end{aligned}$$

Par suite $\left\| Y_n^* - \widehat{Y}_n \right\|_\infty \leq 2 \left\| \widehat{X}_n - X_n^* \right\|_\infty$.

Comme $\left\| \widehat{X}_n - X_n^* \right\|_\infty \xrightarrow[p]{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit $\left\| Y_n^* - \widehat{Y}_n \right\|_\infty \xrightarrow[p]{n \rightarrow +\infty} 0$ ■

Ainsi nous avons obtenus le résultat suivant :

Proposition 2.6.9 . *Sous les conditions précédentes nous avons :*

$$\left\| X_n^* - \widehat{Y}_n \right\|_\infty \xrightarrow[p]{n \rightarrow +\infty} 0$$

2.6.6 Estimateur MVUL de la moyenne d'un processus ARC

Soit $(Y(t), t \in R)$ un processus de noyau de covariance K à représentation autorégressif (X_n) dans $C_{[0,1]}$ où $X_n(t) = Y(t+n)$, $n \in Z, t \in [0, 1]$. Notons par $m_n^*(t)$ l'estimateur MVUL de $m(t)$ construit à partir des observations $\{X_i(t), i = 0, \dots, n\}$. Sous les conditions du théorème 1.3.1 nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.6.10 . Soit $(X_i)_{i \in Z}$ un processus autorégressif à valeurs dans l'espace $C_{[0,1]}$ tel que, $\forall n \in Z, E(X_n) = m \in C_{[0,1]}$. Alors $\forall t \in [0, 1]$,

$$E |m_n^*(t) - m(t)|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$$

$$\text{et donc } m_n^*(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} m(t)$$

Preuve. Considérons les observations $\{X_i(t), i = 0, \dots, n\} = \{Y(i+t), i = 0, \dots, n\}$. Notons l'espace $L_2(Y(i+t), i = 0, \dots, n) = K_n$. On a vu que:

$$m_n^*(t) = \langle P_M(K(\cdot, t)), Y \rangle_{K_n}$$

$m_n^*(t)$ est le meilleur estimateur linéaire sans biais de variance minimale de $m(t)$. Donc le meilleur en erreur quadratique. Et comme $\bar{X}_n(t)$ est un élément de $L\{X_i(t), i = 0, \dots, n\}$ donc linéaire il est sans biais et de variance minimale (Lemme de Scheffé) alors les deux estimateurs coïncident. Les résultats concernant \bar{X}_n restent vrais pour $m_n^*(t)$ et on a

$$\begin{aligned} E |m_n^*(t) - m(t)|^2 &\leq E \sup_{s \in [0,1]} |m_n^*(s) - m(s)|^2 \\ &\leq E \|\bar{X}_n - m\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Chapitre 3

PREVISION D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF HILBERTIEN A COEFFICIENTS ALEATOIRES

3.1 Introduction

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet et $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert réel séparable muni de sa tribu borélienne. On note $L(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés définis sur H et à valeurs dans H , munie de la norme usuelle $\|\cdot\|_L$. Soit $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc fort Hilbertien et une suite $(\rho_n, n \in \mathbb{Z})$ d'applications mesurables de (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans $L(H)$. Nous considérons un processus $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ défini sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans $(H, H, \|\cdot\|)$ vérifiant l'équation suivante:

$$X_n = \rho_n X_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{ou} \quad X_n^w = \rho_n^w X_{n-1}(w) + \varepsilon_n(w), w \in \Omega, n \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

Ainsi pour tout $w \in \Omega, n \in \mathbb{Z}, \rho_n^w$ est un opérateur linéaire borné sur H . Le processus $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ est appelé processus autorégressif hilbertien à coefficient aléatoire noté ARHA(1) d'ordre un. Cette classe de processus constitue une extension en dimension infinie des processus AR à coefficients aléatoires (voir [20]).

Dans la suite nous imposons la condition suivante:

A1. Les v.a. (ρ_n) sont iid et la suite (ρ_n) est indépendante de la suite $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$

Pour l'existence et les propriétés de tels processus voir [19].

3.2 Prédicteurs BLUP Cas particuliers

Proposition 3.2.1 . Si l'opérateur ρ_n de la représentation autorégressive (3.1) est de la forme :

$$\rho_n f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_n f(t_i)$$

où les α_i sont des fonctions appartenant à $C_{[0,1]}$ et les β_n sont des variables aléatoires indépendantes des $X_i, i < n$. Alors le meilleur prédicteur probabiliste coïncide avec le prédicteur BLUP défini au chapitre 2.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} d^*(s, t) &= E(X_n(s) X_{n-1}(t)) \\ &= E((\rho_n X_{n-1}(s) + \varepsilon_n(s)) X_{n-1}(t)) \\ &= E((\rho_n X_{n-1}(s) X_{n-1}(t) + \varepsilon_n(s) X_{n-1}(t))) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(s) \beta_n X_{n-1}(t_i) X_{n-1}(t)\right) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(s) E(\beta_n) c(t_i, t) \end{aligned}$$

Or de (2.16) on a:

$$X_n^*(s) = - \begin{vmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) & d^*(s, t_1) \\ \dots & \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) & d^*(t_r, s) \\ X_{n-1}(t_1) \dots X_{n-1}(t_r) & 0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) \\ \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 X_i(s) X_{i-1}(t) &= \int_0^1 r_i(y, s) X_{i-1}(y) X_{i-1}(t) dy + \varepsilon_i(s) X_{i-1}(t) \\
 E(X_i(s) X_{i-1}(t)) &= \int_0^1 E r_0(y, s) E(X_{i-1}(y) X_{i-1}(t)) dy + E(\varepsilon_i(s) X_{i-1}(t))
 \end{aligned}$$

Comme r_n est indépendants des v.a (ε_i) et les v.a (ε_i) sont indépendants des v.a X_j , $j < i$ alors

$$d^*(s, t) = \int_0^1 k(y, s) c(y, t) dy$$

2)

$$\begin{aligned}
 d_{ij}^* &= \int_0^1 \int_0^1 d^*(s, t) \varphi_i(s) \varphi_j(t) dt ds \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 k(y, s) c(y, t) \varphi_i(s) \varphi_j(t) dy dt ds \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 k(y, s) \varphi_i(s) \int_0^1 c(y, t) \varphi_j(t) dt ds dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 k(y, s) \varphi_i(s) \lambda_j \varphi_j(y) ds dy \\
 &= \lambda_j k_{ij}
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
 \Delta^*(f)(s) &= \int_0^1 d^*(t, s) f(t) dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 k(t, y) c(y, s) dy f(t) dt \\
 &= \int_0^1 c(y, s) \int_0^1 k(t, y) f(t) dt dy \\
 &= \int_0^1 c(y, s) E(\rho_0(f))(y) dy \\
 &= C_{X_0}(E\rho_0(f))(s)
 \end{aligned}$$

4) Le prédicteur BLUP est:

$$\begin{aligned}
 X_n^*(s) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(s, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_{n-1}(t) \varphi_j(t) dt \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 \sum_{i, j' \geq 1} d_{ij'}^* \varphi_i(s) \varphi_j(t) \varphi_{j'}(t) dt \int_0^1 X_{n-1}(t) \varphi_j(t) dt \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i, j' \geq 1} d_{ij'}^* \varphi_i(s) \int_0^1 \varphi_j(t) \varphi_{j'}(t) dt \int_0^1 X_{n-1}(t) \varphi_j(t) dt \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{i, j \geq 1} \frac{d_{ij}^*}{\lambda_j} \varphi_i(s) \varphi_j(t) \right) X_{n-1}(t) dt \\
 &= \int_0^1 k(s, t) X_{n-1}(t) dt = E(\rho_0) X_{n-1}(s) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

3.2.1 Estimation de $E(\rho_0)$ connaissant les vecteurs propres de l'opérateur Γ_{X_0}

Soient (λ_j, φ_j) les éléments propres de l'opérateur de covariance intégral Γ_{X_0} et (λ_{jn}) les valeurs propres de Γ_n . On suppose dans ce cas que les φ_j sont connus.

Soit $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ un processus ARHA(1). Dans la proposition suivante nous avons la convergence en moyenne quadratique de l'opérateur de covariance croisée empirique du processus ARHA(1). Nous ferons la condition d'estimabilité suivante:

C1. $\sup_i \|\rho_i\|_{L(H)} < 1$, ρ_n i.i.d et la suite (ρ_n) est indépendante de la suite (ε_n) et $E\|X_0\|^4 < \infty$.

Proposition 3.2.3 [1] chapitre 3. Sous l'hypothèse **C1** on a :

$$E \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S^2 \leq \frac{K}{n-1}, \quad K \text{ est une constante positive.}$$

Proposition 3.2.4 [1] chapitre 3. Nous avons

$$E(\sup_{j \geq 1} |\lambda_{jn} - \lambda_j|^2) \leq \frac{K_1}{n}, \quad \text{où } K_1 > 0$$

Rappelons que d_{ijn}^* sont les coefficients de Fourier de d_n^* par rapport aux $(\varphi_i \otimes \varphi_j, i, j \in N^*)$

$$d_{ijn}^* = \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_i(s) \varphi_j(t) dt ds$$

Lemme 3.2.1 . Soit K la constante définie dans la proposition 3.2.3 Alors

$$E \left(\sup_{i,j \geq 0} |d_{ijn}^* - d_{ij}^*| \right)^2 \leq \frac{K}{n}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} |d_{ijn}^* - d_{ij}^*| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_i(s) \varphi_j(t) dt ds - \int_0^1 \int_0^1 d^*(s, t) \varphi_i(s) \varphi_j(t) dt ds \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 (d_n^*(s, t) - d^*(s, t)) ds \right)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds \right)^2 dt} \\ &\leq \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_L \sqrt{\int_0^1 \varphi_i^2(t) \left(\int_0^1 \varphi_j(s) ds \right)^2 dt} \\ &\leq \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_L \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_L &= \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \left\| \int_0^1 (d_n^*(s, t) - d^*(s, t)) f(s) ds \right\|_2 \\ &\geq \left\| \int_0^1 (d_n^*(s, t) - d^*(s, t)) ds \right\|_2 \\ &\geq \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 (d_n^*(s, t) - d^*(s, t)) ds \right)^2 dt} \end{aligned}$$

D'où le résultat en utilisant la proposition (3.2.3). ■

On définit un estimateur k_{ijn} de k_{ij} par $k_{ijn} = \frac{d_{ijn}^*}{\lambda_{jn}}$ p.s.. Ce qui permet de définir un estimateur de $k(s, t)$ par:

$$k_n(s, t) = \sum_{i,j=1}^{N_n} k_{ijn} \varphi_i(s) \varphi_j(t), \quad s, t \in [0, 1]$$

où $N_n \rightarrow \infty$

Rappelons les hypothèses suivantes

$$H_1'' \quad \lambda_j = ar^j ; a > 0, 0 < r < 1$$

$H_1 : \lambda_j > 0$ pour tout j

Proposition 3.2.5 . *Posons*

$$R_n = \sup_{s,t \in [0,1]} \left| k_n(s,t) - \sum_{i,j=1}^{N_n} k_{ij} \varphi_i(s) \varphi_j(t) \right|$$

et M_i tel que $\|\varphi_i\|_\infty \leq M_i$. Sous H_1, H_1'' on a: $\forall \varepsilon > 0$

$$P(R_n > \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{4K_1}{\lambda_{N_n}^2} + c_0 M^4(N_n) \frac{N_n^4}{\varepsilon^2 \lambda_{N_n}^4} \right) N_n^2$$

Preuve. De $\Gamma \varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ on a

$$\begin{aligned} |\lambda_i \varphi_i(s)| &= \left| \int_0^1 c(y,s) \varphi_i(y) dy \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 c^2(y,s) dy} \end{aligned}$$

D'où

$$\|\varphi_i\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda_i} \|c\|_c = M_i$$

Par suite;

$$R_n \leq \sum_{i,j=1}^{N_n} |k_{ijn} - k_{ij}| M_i M_j$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(R_n > \varepsilon) &\leq P\left(\sum_{i,j=1}^{N_n} |k_{ijn} - k_{ij}| M_i M_j > \varepsilon\right) \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{N_n} P\left(M_i M_j |k_{ijn} - k_{ij}| > \frac{\varepsilon}{N_n^2}\right) \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{N_n} P\left(|k_{ijn} - k_{ij}| > \frac{\varepsilon}{N_n^2 M_i M_j}\right) \end{aligned}$$

Soit $E_n = \left\{ |\lambda_{N_n} - \lambda_{N_n n}| \leq \frac{\lambda_{N_n}}{2} \right\}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon / N_n^2 M_i M_j$

$$\begin{aligned} P(|k_{ijn} - k_{ij}| > \varepsilon_0) &= P\left(|k_{ijn} - k_{ij}| > \varepsilon_0, \bar{E}_n\right) + P\left(|k_{ijn} - k_{ij}| > \varepsilon_0, E_n\right) \\ &\leq P\left(|\lambda_{N_n} - \lambda_{N_n n}| > \frac{\lambda_{N_n}}{2}\right) + P\left(|k_{ijn} - k_{ij}| > \varepsilon_0, E_n\right) \end{aligned}$$

Pour le premier terme on utilise la proposition 3.2.4 pour avoir

$$\begin{aligned} P\left(|\lambda_{N_n} - \lambda_{N_n n}| > \frac{\lambda_{N_n}}{2}\right) &\leq \frac{E|\lambda_{N_n} - \lambda_{N_n n}|^2}{\left(\frac{\lambda_{N_n}}{2}\right)^2} \\ &\leq \frac{4K_1}{n\lambda_{N_n}^2} \end{aligned}$$

Sur E_n , on a $\lambda_{N_n n} > \lambda_{N_n}/2$, par suite:

$$\begin{aligned} P\left(|k_{ijn} - k_{ij}| > \varepsilon_0, E_n\right) &= P\left(\left|\frac{d_{ijn}^*}{\lambda_{jn}} - \frac{d_{ij}^*}{\lambda_j}\right| > \varepsilon_0, E_n\right) \\ &\leq P\left(\frac{\lambda_j |d_{ijn}^* - d_{ij}^*| + |\lambda_j - \lambda_{jn}| |d_{ij}^*|}{\lambda_j \lambda_{jn}} > \varepsilon_0, \lambda_{N_n n} > \lambda_{N_n}/2\right) \\ &\leq P\left(\frac{\lambda_j |d_{ijn}^* - d_{ij}^*| + |\lambda_j - \lambda_{jn}| |d_{ij}^*|}{\frac{\lambda_{N_n}}{2} \lambda_{N_n}} > \varepsilon_0\right) \\ &\leq P\left(\lambda_j |d_{ijn}^* - d_{ij}^*| + |\lambda_j - \lambda_{jn}| |d_{ij}^*| > \varepsilon_0 \frac{\lambda_{N_n}^2}{2}\right) \\ &\leq P\left(\lambda_j |d_{ijn}^* - d_{ij}^*| > \varepsilon_0 \frac{\lambda_{N_n}^2}{4}\right) + P\left(|\lambda_j - \lambda_{jn}| |d_{ij}^*| > \varepsilon_0 \frac{\lambda_{N_n}^2}{4}\right) \\ &\leq P\left(|d_{ijn}^* - d_{ij}^*| > \varepsilon_0 \frac{\lambda_{N_n}^2}{4\lambda_1}\right) + P\left(|\lambda_j - \lambda_{jn}| > \varepsilon_0 \frac{\lambda_{N_n}^2}{4 \|R_{X_1 X_0}^*\|_L}\right) \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.2.1 on obtient

$$P\left(\lambda_1 |d_{ijn}^* - d_{ij}^*| > \varepsilon_0 \frac{\lambda_{N_n}^2}{4}\right) \leq \frac{K4^2 \lambda_1^2}{n\varepsilon_0^2 \lambda_{N_n}^4}$$

et la proposition 3.2.4 implique:

$$\begin{aligned} P\left(\|\Delta^*\|_L |\lambda_j - \lambda_{jn}| > \varepsilon_0 \frac{\lambda_{N_n}^2}{4}\right) &\leq P\left(\|\Delta_n - \Delta\|_L > \varepsilon_0 \frac{\lambda_{N_n}^2}{4\|\Delta^*\|_L}\right) \\ &\leq \frac{K_1}{n} \frac{16\|\Delta^*\|_L^2}{\varepsilon_0^2 \lambda_{N_n}^4} \end{aligned}$$

Posons $M(N_n) = \sup_{1 \leq i \leq N_n} M_i$ alors

$$P(R_n > \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{4K_1}{\lambda_{N_n}^2} + c_0 M^4(N_n) \frac{N_n^4}{\varepsilon^2 \lambda_{N_n}^4} \right) N_n^2, c_0 > 0$$

D'où le résultat. ■

Posons:

$$\begin{aligned} K_n(s, t) &= \sum_{i, j=N_n+1}^{+\infty} k_{ij} \varphi_i(s) \varphi_j(t) \\ \|K_n\|_c &= \sup_{s, t \in [0, 1]} |K_n(s, t)| \end{aligned}$$

On suppose que la série $\sum k_{ij} \varphi_i \varphi_j$ converge absolument et uniformément alors dans ce cas $\|K_n\|_c \rightarrow 0$ si $N_n \rightarrow +\infty$

Lemme 3.2.2 . Sous les condition $H_1, H, n^{-1} M^4(N_n) \lambda_{N_n}^{-4} N_n^6 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $n^{-1} N_n^2 \lambda_{N_n}^{-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors

$$\sup_{s, t \in [0, 1]} |k_n(s, t) - k(s, t)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Preuve. Elle résulte des propositions précédentes ■

On définit le prédicteur

$$X_{n+1}^{\sim}(\cdot) = \int_0^1 k_n(y, \cdot) X_n(y) dy \quad (3.3)$$

Le meilleur prédicteur probabiliste de X_{n+1} est $E(\rho_0) X_n$ qui est

$$X_{n+1}^{\sim}(\cdot) = \int_0^1 k(y, \cdot) X_n(y) dy \quad (3.4)$$

Proposition 3.2.6 . Sous les conditions du lemme précédent on a :

$$\left\| X_{n+1}^{\sim} - X_{n+1} \right\|_{\infty} \xrightarrow{p} 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Preuve. On se donne un $\eta > 0$ et $M_{\eta} > 0$ tels que

$$P(\|X_n\|_c > M_{\eta}) \leq \frac{\eta}{2}$$

Alors pour tout ε et n assez grand on a

$$\begin{aligned} P\left(\left\|X_{n+1}^{\sim} - X_{n+1}\right\|_c > \varepsilon\right) &\leq P(\|X_n\|_c > M_{\eta}) + P\left(\left\|X_{n+1}^{\sim} - X_{n+1}\right\|_c > \varepsilon, \|X_n\|_c < M_{\eta}\right) \\ &\leq \frac{\eta}{2} + P\left(\|K_n - K\| > \frac{\varepsilon}{M_{\eta}}\right) \\ &\leq \eta \end{aligned}$$

■

3.3 Prédicteur BLUP discret

Supposons que l'on dispose des observations $(X_j(t_i), j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, r, t_i \in [0, 1])$ et que les φ_j sont connus. Le prédicteur *BLUP* X_{n+1}^* de X_{n+1} est donné par (cf chap.2)

$$X_{n+1}^*(s) = - \begin{vmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) & d^*(s, t_1) \\ \dots & \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) & d^*(t_r, s) \\ X_n(t_1) \dots X_n(t_r) & 0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) \\ \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Considérons le prédicteur \tilde{X}_{n+1}^* de $X_n^*(s), s \in [0, 1]$ suivant

$$\tilde{X}_{n+1}^*(s) = - \begin{vmatrix} c_n^*(t_1, t_1) \dots c_n^*(t_1, t_r) & d_n^*(s, t_1) \\ \dots & \dots \\ c_n^*(t_r, t_1) \dots c_n^*(t_r, t_r) & d_n^*(t_r, s) \\ X_n(t_1) \dots X_n(t_r) & 0 \end{vmatrix} \div \Gamma_n \quad (3.6)$$

et

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} c_n^*(t_1, t_1) \dots c_n^*(t_1, t_r) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n^*(t_r, t_1) \dots c_n^*(t_r, t_r) \end{vmatrix}$$

où $c_n^*(s, t) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_{jn} \varphi_j(s) \varphi_j(t)$

Proposition 3.3.1 . *Supposons que $k_n^3 M^4(k_n) n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $k_n^6 M^4(k_n) n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors*

$$\|X_n^* - \tilde{X}_{n+1}^*\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$$

Preuve. Montrons tout d'abord que

$$\|c_n^* - c\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0$$

On a

$$\|c_n^* - c\|_\infty \leq \sup_{s,t \in [0,1]} \left| \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_{jn} \varphi_j(s) \varphi_j(t) - \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j \varphi_j(s) \varphi_j(t) \right| + \sup_{s,t \in [0,1]} \left| \sum_{k_n}^{\infty} \lambda_{jn} \varphi_j(s) \varphi_j(t) \right|$$

D'une part,

$$\sup_{s,t \in [0,1]} \left| \sum_{k_n}^{\infty} \lambda_{jn} \varphi_j(s) \varphi_j(t) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ (Th. de Mercer)}$$

et

$$\sup_{s,t \in [0,1]} \left| \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_{jn} \varphi_j(s) \varphi_j(t) - \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j \varphi_j(s) \varphi_j(t) \right| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |\lambda_{jn} - \lambda_j| M^2(k_n)$$

Donc

$$\begin{aligned} P(\|c_n^* - c\|_\infty > \varepsilon) &\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\left(|\lambda_{jn} - \lambda_j| M^2(k_n) > \frac{\varepsilon}{k_n}\right) \\ &\leq E(\sup_{j \geq 1} |\lambda_{jn} - \lambda_j|^2) \frac{k_n^3 M^4(k_n)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{k_n^3 M^4(k_n) K_1}{n \varepsilon^2}. \text{ (proposition 3.2.4)} \end{aligned}$$

Il suffit donc d'appliquer le proposition 3.4.3 pour $d_n^*(s, t)$.

Le reste de la proposition est similaire a celui de la proposition (2.6.2). ■

3.4 Prédicteur BLUP continu

Nous donnons les analogues des estimateurs définies dans le chapitre 2 et nous montrons dans un premier temps leur convergence dans l'espace $L_2 [0, 1]$. Sous des conditions supplémentaires on a aussi la convergence dans l'espace $C [0, 1]$.

Le prédicteur BLUP $X_n^{**}(s)$ continu s'écrit :

$$X_{n+1}^{**}(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(s, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt$$

où $(\lambda_j, \varphi_j)_{j \geq 1}$ sont les éléments propres de l'opérateur Γ_{X_0} de noyau $c(s, t)$.

Nous étudions des estimateurs de $X_n^{**}(s)$, $s \in [0, 1]$ dans deux cas.

3.4.1 A) 1^{er} cas. Estimation du prédicteur BLUP continu X_n^{**} dans le cas où les vecteurs propres de l'opérateur de covariance Γ_{X_0} sont connus.

a1) Convergence dans l'espace $L_2 [0, 1]$

Soit $(\lambda_j, \varphi_j)_{j \geq 1}$ les éléments propres de Γ_{X_0} et $(\lambda_{jn})_{j \geq 1}$ les valeurs propres de Γ_n . On suppose que les φ_j sont connus et les λ_j sont estimées à partir des λ_{jn} .

Posons

$$\hat{X}_{n+1}^{**} = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \quad (3.7)$$

où $k_n \nearrow \infty$

et

$$R_n = \left\| \hat{X}_{n+1}^{**}(\cdot) - \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_2$$

Nous avons le résultat suivant:

Proposition 3.4.1 . Soit $N_i = \|X_i\|_2$, sous les conditions H_1 et H_2 (cf proposition 2.6.4):

on a

$$\forall \varepsilon > 0, P(R_n > \varepsilon) \leq \frac{16 k_n^3 \|\Delta\|_L^2 N_n^2}{n \varepsilon^2 \lambda_{k_n}^4} + \frac{8 K_1 k_n}{n \lambda_{k_n}^2} + \frac{4 K N_n^2 k_n^3}{n \varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2}$$

ou $(k_n) \nearrow \infty$ et Δ est l'opérateur de covariance croisée de X_0, X_1 et K_1 et K sont des constantes.

Preuve. Nous avons :

$$\begin{aligned} R_n &= \left\| \sum_{j=1}^{k_n} \left(\frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt - \frac{1}{|\lambda_{jn}|} \int_0^1 d_n^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right) \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left\| \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt - \frac{1}{|\lambda_{jn}|} \int_0^1 d_n^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \left| \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right| \end{aligned}$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right| &\leq \left(\int_0^1 X_n^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \varphi_j^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq N_n, \quad \text{car} \left(\int_0^1 \varphi_j^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_n &\leq \sum_{j=1}^{k_n} N_n \left\| \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}} \right) \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt + \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 (d_n^*(\cdot, t) - d^*(\cdot, t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n} N_n \left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}} \right| \left\| \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 + \frac{1}{\lambda_{jn}} \left\| \int_0^1 (d_n^*(\cdot, t) - d^*(\cdot, t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 &\leq \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \left\| \int_0^1 d^*(\cdot, t) f(t) dt \right\|_2 \\ &\leq \|\Delta^*\|_L = \|\Delta\|_L, \quad \|\Delta\|_L = \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|\Delta f\|_2 \end{aligned}$$

et

$$\left\| \int_0^1 (d_n^*(.,t) - d^*(.,t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 \leq \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_L = \|\Delta_n - \Delta\|_L$$

Posons $E_n = \left\{ |\lambda_{k_n} - \lambda_{k_{nn}}| < \frac{\lambda_{k_n}}{2} \right\}$, et $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2k_n N_n \|\Delta\|_L}$. Nous avons

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}}\right| \|\Delta^*\|_L > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) &\leq P\left(\left|\frac{\lambda_{jn} - \lambda_j}{\lambda_{jn} \lambda_j}\right| > \varepsilon_0, E_n\right) + P(E_n^c) \\ &\leq P\left(\frac{|\lambda_{jn} - \lambda_j|}{\frac{\lambda_{k_n}}{2} \lambda_{k_n}} > \varepsilon_0\right) + P(E_n^c) \\ &\leq P\left(|\lambda_{jn} - \lambda_j| > \frac{\varepsilon_0 \lambda_{k_n}^2}{2}\right) + \frac{4K_1}{n\lambda_{k_n}^2} \\ &\leq \frac{16K_1 k_n^2 \|\Delta\|_L^2 N_n^2}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^4} + \frac{4K_1}{n\lambda_{k_n}^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où nous avons utilisé pour les processus ARHA(1) les résultats de Allam ([1]) pour avoir :

$$\begin{aligned} P(E_n^c) &= P\left(|\lambda_{k_{nn}} - \lambda_{k_n}| > \frac{\lambda_{k_n}}{2}\right) \leq \frac{E(\sup_{j \geq 1} |\lambda_{jn} - \lambda_j|^2)}{\left(\frac{\lambda_{k_n}}{2}\right)^2} \\ &\leq \frac{4K_1}{n\lambda_{k_n}^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

et

$$P\left(|\lambda_{jn} - \lambda_j| > \frac{\varepsilon_0 \lambda_{k_n}^2}{2}\right) \leq \frac{16K_1 k_n^2 \|\Delta\|_L^2 N_n^2}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^4}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{\lambda_{jn}} \|\Delta_n - \Delta\|_L > \frac{\varepsilon}{2N_n k_n}\right) &\leq P\left(\frac{1}{\lambda_{jn}} \|\Delta_n - \Delta\|_L > \frac{\varepsilon}{2N_n k_n}, E_n\right) \\
&\quad + P(E_n^c) \\
&\leq P\left(\|\Delta_n - \Delta\|_L > \frac{\varepsilon \lambda_{k_n}}{2N_n k_n}\right) + \frac{4K_1}{n\lambda_{k_n}^2} \\
&\leq E \|\Delta_n - \Delta\|^2 \frac{4N_n^2 k_n^2}{\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2} + \frac{4K_1}{n\lambda_{k_n}^2} \\
&\leq \frac{4KN_n^2 k_n^2}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2} + \frac{4K_1}{n\lambda_{k_n}^2} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

puisque $E \|\Delta_n - \Delta\|^2 \leq \frac{2B}{n}$. (prop.3.2.3).

Par conséquent

$$\begin{aligned}
P(R_n > \varepsilon) &\leq P\left(\sum_{j=1}^{k_n} N_n \left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}} \right| \left\| \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\lambda_{jn}} \left\| \int_0^1 (d_n^*(\cdot, t) - d^*(\cdot, t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 > \varepsilon\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\left(\left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}} \right| \|\Delta^*\|_L > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) + P\left(\frac{1}{\lambda_{jn}} \left\| \int_0^1 (d_n^*(s, t) - d^*(s, t)) \varphi_j(t) dt \right\|_2 > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\left(\left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{jn}} \right| \left\| \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \right\|_2 > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) + P\left(\frac{1}{\lambda_{jn}} \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_L > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n}\right) \\
&\leq k_n \left(\frac{16 k_n^2 \|\Delta\|_L^2 N_n^2}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^4} + \frac{8K_1}{n\lambda_{k_n}^2} + \frac{4KN_n^2 k_n^2}{n\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2} \right).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.4.2 . Sous $H_1, H_2, k_n \nearrow \infty, k_n^3 N_n^2 n^{-1} \lambda_{k_n}^{-4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $k_n^3 N_n^2 n^{-1} \lambda_{k_n}^{-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_{n+1}^{**}(s) - X_{n+1}^{**}(s) &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(s, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt - \\
&\quad \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_2 \leq R_n + \left\| \sum_{j=k_n+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|$$

où R_n est défini à la page 74.

Par suite,

$$P\left(\left\|\widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**}\right\|_2 > \varepsilon\right) \leq P\left(R_n > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left\|\sum_{j=k_n+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt\right\|_2 > \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (3.11)$$

La série (2.5) étant convergente on a :

$$P\left(\left\|\sum_{j=k_n+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^*(\cdot, t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt\right\|_2 \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.12)$$

En combinant (3.12), (3.13), prop.3.4.1 on a le résultat. ■

a2) Convergence dans $C[0, 1]$

On suppose que les vecteurs propres φ_j sont connus et λ_j estimés par λ_{jn} .

Proposition 3.4.3 . Posons

$$d^{**}(s, t) = \sum_{j,i=1}^{k_n} d_{ij}^* \varphi_i(s) \varphi_j(t), \quad d_n^{**}(s, t) = \sum_{j,i=1}^{k_n} d_{ijn}^* \varphi_i(s) \varphi_j(t)$$

et

$$R_{1n} = \sup_{s,t \in [0,1]} |d_n^{**}(s, t) - d^{**}(s, t)|$$

Alors

$$1) P(R_{1n} > \varepsilon) \leq \frac{k_n^6 M^4(k_n) K}{\varepsilon^2 n}$$

$$2) P\left(\sup_{s,t \in [0,1]} |d_n^*(s, t) - d^*(s, t)| > \varepsilon\right) \leq \frac{k_n^6 M^4(k_n) K}{\varepsilon^2 n}$$

Preuve. Rappelons que $M(k_n) = \sup_{1 \leq i \leq k_n} M_i$ (cf chapitre 2).

On a du lemme 3.2.1

$$E\left(\sup_{i,j \geq 0} |d_{ijn}^* - d_{ij}^*|\right)^2 \leq \frac{K}{n}$$

Donc on a:

$$\begin{aligned}
 P(R_{1n} > \varepsilon) &\leq \sum_{j,i=1}^{k_n} P\left(\sup_{s,t \in [0,1]} |\varphi_i(s) \varphi_j(t)| |d_{ijn}^* - d_{ij}^*| > \frac{\varepsilon}{k_n^2}\right) \\
 P(R_{1n} > \varepsilon) &\leq \sum_{j,i=1}^{k_n} \frac{E\left(\sup_{i,j \geq 0} |d_{ijn}^* - d_{ij}^*|\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon}{k_n^2 M^2(k_n)}\right)^2} \\
 &\leq \frac{k_n^6 M^4(k_n) K}{\varepsilon^2 n}
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.4.4 . Posons

$$R_{2n} = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^{**}(\cdot, t) \varphi_j(t) \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt - \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 d^{**}(\cdot, t) \varphi_j(t) \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt$$

Alors

$$P(\|R_{2n}\|_\infty > \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon_1 k_n^9 M^6(k_n) N_n^2}{n \lambda_{k_n}^2} + \frac{\varepsilon_2 k_n^3 N_n^2 M^2(k_n)}{n \lambda_{k_n}^4} + \frac{4K_1}{n \lambda_{k_n}^2} \quad (3.13)$$

où $\varepsilon_1 = 4K\varepsilon^{-2}$, $\varepsilon_2 = K_1 16 \|d^*\|_\infty^2 \varepsilon^{-2}$.

Preuve On a:

$$\begin{aligned}
 \|R_{2n}\|_\infty &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left(\frac{1}{|\lambda_{jn}|} (\|d_n^{**}(\cdot, t) - d^{**}(\cdot, t)\|_\infty) \|\varphi_j\|_\infty + \left| \frac{1}{\lambda_{jn}} - \frac{1}{\lambda_j} \right| \|d^{**}(\cdot, t)\|_\infty \|\varphi_j\|_\infty \right) N_n \\
 P(\|R_{2n}\|_\infty > \varepsilon) &\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\left(\frac{1}{|\lambda_{jn}|} \|d_n^{**}(\cdot, t) - d^{**}(\cdot, t)\|_\infty > \frac{\varepsilon}{2k_n N_n M(k_n)}\right) + P\left(\left|\frac{1}{\lambda_{jn}} - \frac{1}{\lambda_j}\right| \geq \frac{\varepsilon}{\|d^*\|_\infty 2k_n N_n M(k_n)}\right) \\
 &\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\left(\|d_n^{**}(\cdot, t) - d^{**}(\cdot, t)\|_\infty > \frac{\lambda_{k_n} \varepsilon}{2k_n N_n M(k_n)}, E_n\right) \\
 &\quad + P\left(\left|\frac{\lambda_j - \lambda_{jn}}{\lambda_{jn} \lambda_j}\right| \geq \frac{\varepsilon}{\|d^*\|_\infty 2k_n N_n M(k_n)}, E_n\right) + 2P(E_n^c) \\
 &\leq k_n \left(\frac{4k_n^6 M^4(k_n) k_n^2 K N_n^2}{n \lambda_{k_n}^2 \varepsilon^2} + P\left(|\lambda_j - \lambda_{jn}| \geq \frac{\varepsilon \lambda_{k_n}^2}{\|d^*\|_\infty 4k_n N_n M(k_n)}\right) + \frac{4K_1}{n \lambda_{k_n}^2} \right) \\
 &\leq \frac{4k_n^9 M^6(k_n) K N_n^2 M^2(k_n)}{n \lambda_{k_n}^2 \varepsilon^2} + \frac{K_1 16 \|d^*\|_\infty^2 k_n^3 N_n^2 M^2(k_n)}{n \lambda_{k_n}^4 \varepsilon^2} + \frac{4k_n K_1}{n \lambda_{k_n}^2}; \\
 \text{où } E_n &= \left\{ |\lambda_{k_n} - \lambda_{k_n n}| < \frac{\lambda_{k_n}}{2} \right\}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Proposition 3.4.5 . Sous les conditions des propositions 3.4.4,

$k_n^9 M^6(k_n) N_n^2 n^{-1} \lambda_{k_n}^{-2} \rightarrow 0$ et $k_n^3 N_n^2 M^2(k_n) n^{-1} \lambda_{k_n}^{-4} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on

a

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0$$

Preuve. Posons:

$$rd^{**}(s, t) = \sum_{i,j=k_n+1}^{+\infty} d_{ij}^* \varphi_i(s) \varphi_j(t) \text{ et } rd_n^{**}(s, t) = \sum_{i,j=k_n+1}^{+\infty} d_{ijn}^* \varphi_i(s) \varphi_j(t)$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_{\infty} &\leq R_{2n} + \left\| \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 rd_n^{**}(\cdot, t) \varphi_j(t) \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_{\infty} + \\ &\quad \left\| \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 rd_n^{**}(\cdot, t) \varphi_j(t) \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 rd_n^{**}(\cdot, t) \varphi_j(t) \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i,j'=k_n+1}^{+\infty} \varphi_i(s) d_{ij'}^* \int_0^1 \varphi_{j'}(t) \varphi_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt$$

Comme $j \neq j'$, ce dernier terme vaut 0, de même pour

$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 rd_n^{**}(\cdot, t) \varphi_j(t) \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt$$

En utilisant les propositions précédentes (3.3.4), (3.3.5) on trouve le résultat. ■

3.4.2 B) 2^{eme} cas. Estimation du prédicteur BLUP continu de $X_n^*(s)$ dans le cas où les vecteurs propres φ_j de Γ_{X_0} sont inconnus.

Soient $(\lambda_{jn}, \varphi_{jn}; j \in N^*)$ les éléments propres de l'opérateur intégral Γ_n .

b1) Convergence dans l'espace $L_2[0, 1]$

Proposition 3.4.6 . Supposons que le processus $(X_n, n \in Z)$ vérifie les hypothèses du théorème 2.6.3, H_1 , H_2 et que $\|X_i\|_2 \leq N_i, N_i > 0, k_n = o(\log n), \widehat{M}(k_n) = O(\log n)$.

Alors

$$\left\| X_{n+1}^{**} - \widehat{X}_{n+1}^{**} \right\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$$

Preuve. Posons

$$X'_{n+1}(s) := \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi'_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi'_j(t) dt$$

On remarque que $X'_n(s) = \widehat{X}_{n+1}^{**}(s)$.

Posons $R_n^* = \left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X'_n \right\|_2$. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{n+1}^{**}(s) - X'_{n+1}(s) &= \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi_{jn}(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi_{jn}(t) dt - \\ &\quad \frac{1}{\lambda_{jn}} \int_0^1 d_n^*(s, t) \varphi'_j(t) dt \int_0^1 X_n(t) \varphi'_j(t) dt \end{aligned}$$

Or $\|X_i\|_2 \leq N_i$ par hypothèse, donc

$$\begin{aligned} R_n^* &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{|\lambda_{jn}|} \left\| \int_0^1 d_n^*(\cdot, t) (\varphi_{jn}(t) - \varphi'_j(t)) dt \right\|_2 \left| \int_0^1 \varphi'_j(t) X_n(t) dt \right| + \\ &\quad \frac{1}{|\lambda_{jn}|} \left\| \int_0^1 \varphi_{jn}(t) d_n^*(\cdot, t) dt \right\|_2 \left| \int_0^1 X_n(t) (\varphi_{jn}(t) - \varphi'_j(t)) dt \right| \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^1 X_n(t) (\varphi_{jn}(t) - \varphi'_j(t)) dt &\leq \sqrt{\int_0^1 X_n^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 (\varphi_{jn}(t) - \varphi'_j(t))^2 dt} \\ &\leq N_n \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2 \end{aligned}$$

Donc

$$R_n^* \leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{N_n}{|\lambda_{jn}|} \left\| \left(\int_0^1 d_n^{*2}(\cdot, t) \right)^{\frac{1}{2}} dt \right\|_2 \left(\int_0^1 (\varphi_{jn}(t) - \varphi'_j(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N_n}{|\lambda_{jn}|} \left\| \left(\int_0^1 d_n^{*2}(\cdot, t) \right)^{\frac{1}{2}} dt \right\|_2 \left(\int_0^1 (\varphi_{jn}(t) - \varphi'_j(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_0^1 d_n^{*2}(\cdot, t) \right)^{\frac{1}{2}} dt \right\|_2 &= \left(\int_0^1 \int_0^1 d_n^{*2}(s, t) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i,j \geq 1} d_{ijn} \varphi_i(t) \varphi_j(s) \right)^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{j,i \geq 1} \sum_{j',i' \geq 1} d_{ijn}^* d_{i'j'n}^* \int_0^1 \varphi_i(t) \varphi_{i'}(t) dt \int_0^1 \varphi_j(s) \varphi_{j'}(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{j,i \geq 1} d_{ijn}^{*2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{j,i \geq 1} \left(\int_0^1 \int_0^1 d_n^*(t, s) \varphi_i(t) \varphi_j(s) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\Delta_n^*\|_S \end{aligned}$$

$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X'_{n+1} \right\|_2 \leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{N_n \|\Delta_n^*\|_S}{|\lambda_{jn}|} \left(\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2 + \|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2^2 \right)$. Soit C tel que $\|R_n\|_S \leq C$ et rappelons que $E_n = \left\{ |\lambda_{kn} - \lambda_{k_n n}| \leq \frac{\lambda_{kn}}{2} \right\}$. Alors

$$\begin{aligned}
P(R_n^* > \varepsilon) &\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\left(\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2 > \frac{\varepsilon \lambda_{k_n}}{4CN_n k_n}\right) + P\left(\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2 > \sqrt{\frac{\varepsilon \lambda_{k_n}}{4CN_n k_n}}\right) + 2P(l) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{16k_n^2 C^2 N_n^2 E\left(\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2\right)^2}{\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2} + \frac{4Ck_n N_n E\left(\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2\right)^2}{\varepsilon \lambda_{k_n}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{k_n} a_j\right) \frac{K_1}{n} \left(\frac{16k_n^2 C^2 N_n^2}{\varepsilon^2 \lambda_{k_n}^2} + \frac{4Ck_n N_n}{\varepsilon \lambda_{k_n}}\right)
\end{aligned}$$

car on a d'après [1].

$$E\left(\|\varphi_{jn} - \varphi'_j\|_2\right)^2 \leq a_j \frac{K_1}{n}$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 4

SIMULATIONS

4.1 Simulation et prévision d'un processus ARC(1)

4.1.1 Définitions

Pour simuler des trajectoires de processus AR fonctionnels et le calcul des prédicteurs BLUP (cas discret et cas continu) nous utilisons le travail exécuté par Pumo dans sa thèse (1992) et la bibliothèque *far* développée par Julien Damons et Serge Guillas (Modelization for Functional AutoRegressive processes Package: *far* Version: 0.6-2 License: LGPL-2.1 version 2.0.0 du logiciel R) .

Plus précisément. On simule un processus dont les valeurs appartiennent à l'espace engendré par les fonctions $\{e_j(t) = \sqrt{2} \sin [(j - 1/2) \pi t], j = 1, 2, \dots, h\}$

B.Pumo a simulé un mouvement Brownien sur $[0, n+1]$. Ainsi on peut construire $n + 1$ observations à partir des définitions suivantes:

- **Bruit blanc**

Pumo (1992) utilise la décomposition de Karhunen Loève pour simuler les trajectoires de mouvements browniens indépendants sur $[0, 1]$ comme suit:

$$\varepsilon_t(w) s = W_{t+s}(w) - W_t(w), s \in [0, 1]$$

$$W_u = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2n+2} Y_j^* \frac{\sin \left[(j-1/2) \frac{\pi u}{n+1} \right]}{\pi (j-1/2)}, \quad u \in [0, n+1]$$

Les Y_j^* sont des variables aléatoires i.i.d $N(0, 1)$

Cette méthode est un peu fastidieuse à programmer, c'est pourquoi nous lui avons préféré d'itérer n fois un mouvement brownien sur l'intervalle $[0, 1]$

$$W_u = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_j^* \frac{\sin \left[(j-1/2) \pi u \right]}{\pi (j-1/2)}$$

Pour la simulation on doit approximer des sommes infinies par des sommes finies.

- L'opérateur ρ

Puisque nous resterons sur le sous-espace engendré par les vecteurs (e_k) s'il suffit de définir

$\rho[e_k(s)]$. Nous posons

$$\rho[e_k(s)] = \beta_k e_k(s)$$

où la suite (β_i) est une suite de réels convergente.

- Valeur initiale de X_0

Pour la simulation d'un ARC(1) on prend comme valeur initiale la valeur $X_0 = 0$ ou $X_0 = \varepsilon_0$

Soient (X_i^j) $j = 1, \dots, 2m$ les coordonnées de X_i dans la base (e_i) pour $i = 0, 1, \dots, n$

On a:

$$X_{i+1}^j = \beta_j X_i^j + \varepsilon_{i+1}^j \quad j = 1, \dots, 2m$$

4.1.2 Prédicteur BLUP cas discret

La fonction simul.blup.discret

- Description

Etant donnée les observations $X_j(t_i)$ ($j = 1:n, i = 1:m$), on calcule le prédicteur BLUP $X_n^{**}(t_i)$, $i = 1:m$, en utilisant un nombre discret de points

- Usage

simul.blup.discret

- Détails

on utilise les n observations pour prédire la $(n+1)^{eme}$ observation

Le prédicteur BIUP discret est défini par la forme matricielle suivante

$$X_{n+1}^{**} = X_n^t C_n^{-1} D_n, \quad C_n = \begin{bmatrix} c_n(t_1, t_1) & \dots & c_n(t_1, t_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ c_n(t_m, t_1) & \dots & c_n(t_m, t_m) \end{bmatrix}, \quad D_n = \begin{bmatrix} d_n^*(s, t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n^*(s, t_m) \end{bmatrix},$$

$$X_n = \begin{bmatrix} X_n(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n(t_m) \end{bmatrix}, \quad X_{n+1}^{**} = \begin{bmatrix} X_{n+1}^{**}(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n+1}^{**}(t_m) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1(t_1) & \dots & X_n(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1(t_m) & \dots & X_n(t_m) \end{bmatrix}.$$

C_n et D_n sont définis par les formules suivantes $C_n = 1/n X_n X_n^t$, $D_n = (1/n - 1) a A^t$. On trouve la matrice a et A en retranchant le premier et le dernier vecteur de la matrice X respectivement.

4.1.3 Prédicteur BLUP cas continu

On utilise dans ce cas la fonction suivante:

La fonction simul.blup.continu

- Description

Etant donnée les observations $X_j(t_i)$ ($j=1:n, i=1:m$), on calcule le prédicteur BLUP continu $X_{n+1}(t_i)$, $i=1:m$ en utilisant les trajectoires simulées d'observations

- Usage

simul.blup.continu

- Détails

Pour le prédicteur X_n^{**} on propose d'estimer les variables X_i ($i=1, \dots, n$) par les fonctions aléatoires proposées par Pumo

$$X_i^*(t) = X_i\left(\frac{j}{m}\right) + \frac{t - \frac{j}{m}}{\frac{1}{m}} \left[X_i\left(\frac{j+1}{m}\right) - X_i\left(\frac{j}{m}\right) \right], \quad \frac{j}{m} \leq t \leq \frac{j+1}{m}, \quad j = 0, \dots, m-1$$

On suppose Connaître les valeurs $X_i\left(\frac{j}{m}\right)$, $j = 0, \dots, \frac{m-1}{m}$ et dans ce cas pour l'estimation des trajectoires on pose $X_i(1) = X_i\left(\frac{m-1}{m}\right)$

On a dans ce cas

$$X_{n+1}^{**}(s) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} X_{i+1}(s) X_i(t) \Phi_j(t) \right) \left(\sum_{i=0}^{m-1} \int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} X_n^*(t) \Phi_j(t) dt \right)$$

Nous présentons ci dessous des simulations d'un processus ARC(1) sur des intervalles successifs et les prédicteurs BLUP (discret ou continu) de la dernière trajectoire du processus simulé accompagnées de l'erreur quadratique.

La Figure (1.1) représente la simulation de $n=70$ trajectoires successives d'un processus $ARC(1)$. Chaque trajectoire est calculées en $m=25$ points de discrétisation de $[0,1]$.

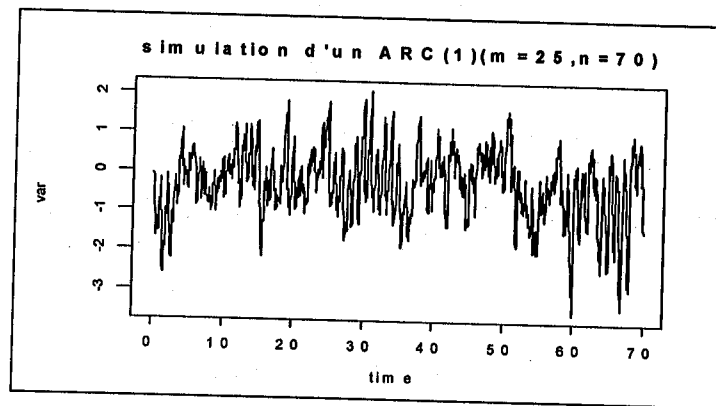


Figure (1.1)

Les Figures (1.2), (1.3), (1.4), représentent le prédicteur *BLUP* discret ou continu (trait pointillé rouge) de la 70^{ème} trajectoire (trait continu noir) pour le nombre d'observation $n=69$ et $n=39$ et les valeurs de $m=10$ et 20 (points de discrétisation).

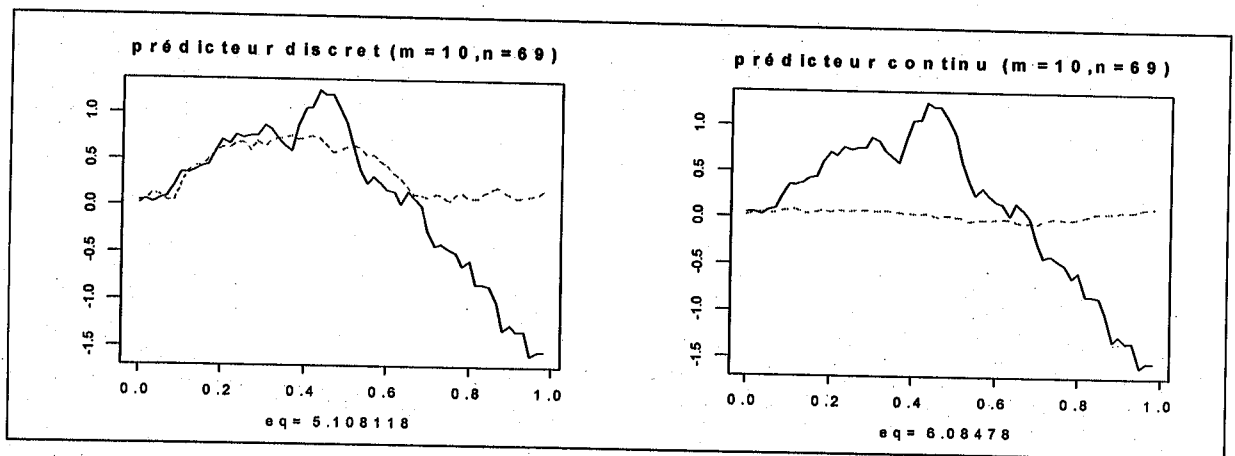


Figure (1.2)

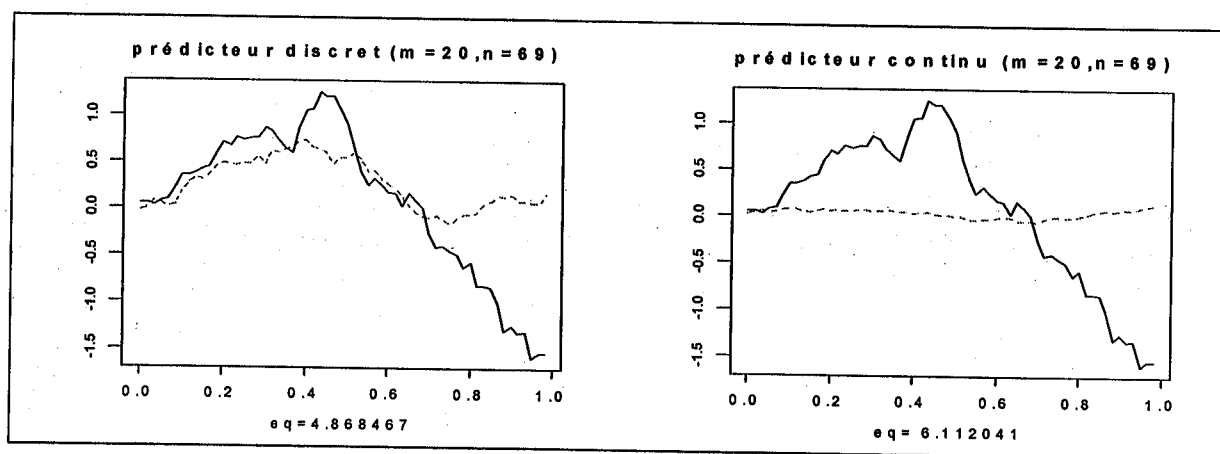


Figure (1.3)

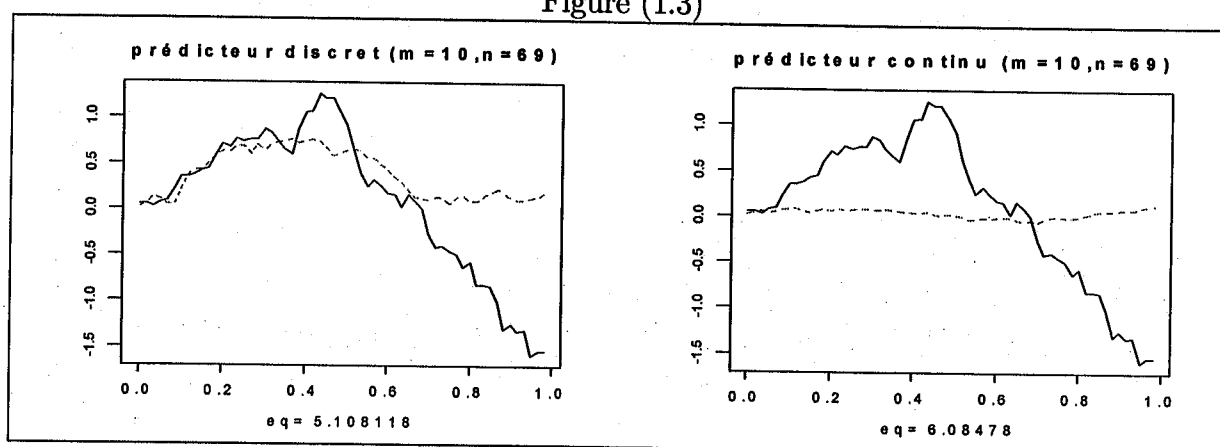


Figure (1.4)

Nous remarquons que le prédicteur BLUP donne une bonne "indication" de la tendance mais moins sensible aux variations. Pour mesurer l'effet de discrétisation sur la prévision, nous présentons ci-dessous pour 200 répliques, la moyenne des erreurs quadratiques pour $n = 70$ (fixé) et différentes valeurs de $m = 15, 25, 35$ (points de discrétisation) (Tableau 1) et ensuite pour $m=25$ (points de discrétisation fixé) et différentes valeurs de $n = 30, 50, 70, 120, 130$.

Tableau 1

m	15	25	35
Mean	2.6789	3.566	4.308

Tableau 2

n	30	50	70	120	130
Mean	4.220	3.990	3.566	3.6202	3.4088

Nous remarquons pour n fixé l'erreur moyenne croît avec m (Tableau 1) et pour m fixé elle décroît avec n (Tableau 2). Ce qui suggère un choix de m par validation croisée.

Exemples.

Nous utilisons les prédicteurs *BLUP* pour la prévision de séries réelles et nous comparons leurs performances avec d'autres méthodes de prédiction.

1) **Série climatologique ENSO.** Nous appliquons la méthode de prédiction *BLUP* à la série chronologique décrivant le phénomène climatologique ENSO qui résulte des interactions entre l'atmosphère et l'océan au dessus de l'Océan Pacifique tropical. Le phénomène EL Nino (EN) est le composant océan dans ENSO tandis que Southern Oscillation (SO) est la composante atmosphère. Un index mesurant la variabilité d'EL Nino est fourni par les températures à la surface de l'océan ramenées à une moyenne observée dans le domaine Nino-3 (5oS - 5oN, 150oW - 90oW). Des valeurs moyennes mensuelles sont enregistrées depuis le mois de Janvier 1950 à Juin 2007 par des centres nationaux de la prévision environnementale aux Etats-Unis. La série chronologique de cet index montre des variations inter-annuelles marquées et superposées à une composante saisonnière forte. Cette série a été analysée par beaucoup d'auteurs (voir, par exemple, Besse, Cardot et Stephenson, 2000[6]; Antoniadis et Sapatinas, 2003[5]). Pour pouvoir comparer avec leurs résultats nous utilisons des observations mensuelles durant la période 1950-1985 pour la prédiction de la température durant l'année 1986. La qualité d'un prédicteur \widehat{X}_{n+1} calculé aux points t_i , $i = 1, \dots, m$, pour prévoir X_{n+1} est mesurée par l'erreur relative absolue *RMAE* définie par:

$$RMAE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|\widehat{X}_{n+1}(t_i) - X_{n+1}(t_i)|}{|X_{n+1}(t_i)|}$$

Le tableau suivant donne les valeurs de l'erreur *RMAE* associées aux différentes méthodes de prévision : Wavelet II et Wavelet III : Antoniadis et Sapatinas 2003) [5], Antoniadis, Paparoditis et Sapatinas. (2005) [4], ARH et ARHD: André Mas et Besnik Pumo [16], FAR: Besse, Cardot et le Stephenson, 2000 [6].

Tableau 3: Erreur *RMAE* de différentes méthodes de prévision de la température à la surfacede l'océan de l'année 1986

Méthodes de prévision	RMAE
Wavelet II	0.89%
Wavelet III	1.20%
ARHD $\alpha = 0.4, \beta = 0.8$	1.33%
ARHD $\alpha = 0.1, \beta = 0.4$	1.25%
FAR	0.89%
SARIMA	3.72%
ARH (1)	1.60%
BLUP discret	1.25%
BLUP continu	1.70%

Nous remarquons que les méthodes BLUP discret ou continu fournissent des erreurs RMAE assez faibles.

La Figure (2.1) représente la variation de la température (EL Nino3) de 1950 à 2006. Les figures (2.2) et (2.3) représentent la température à la surface (EL Nino3) de l'année 1986 et sa prévision par le prédicteur *BLUP* discret et continu avec leur erreur RMAE.

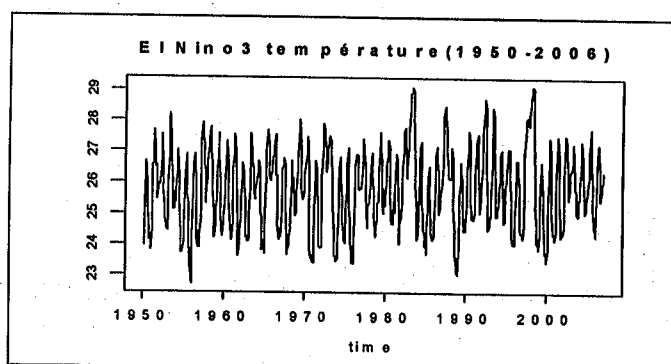


Figure (2.1)

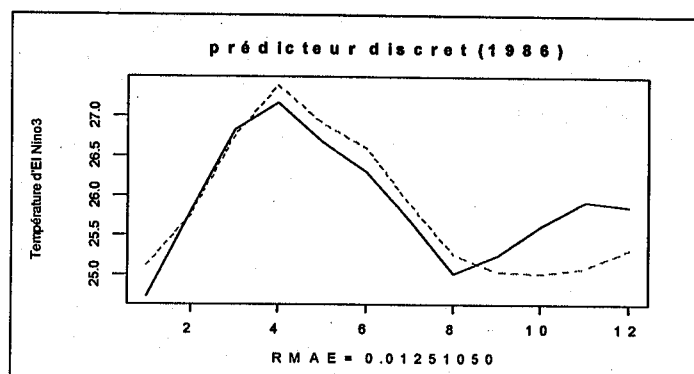


Figure (2.2)

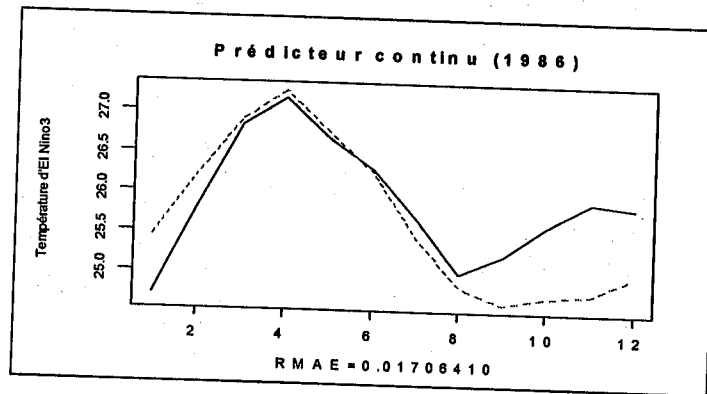


Figure (2.3)

Dans la suite nous utilisons les observations (un intervalle =1 année) de la période 1950-2005 pour la prévision de la température à la surface de l'océan de l'année 2006. Dans [6] plusieurs méthodes de prévision ont été utilisées en particulier la méthode de prévision "Climatologie" est basée sur l'estimation du cycle moyen d'une année pour la prévision de l'année suivante.

Tableau 4: Erreur *RMAE* de différentes méthodes de prévision de la température à la surface de l'océan de l'année 2006.

Méthodes de prévision	RMAE
Climatologie	2.5%
SARIMA	3.7%
Kernel	2.3%
Functional kernel	2.2%
Smooth FAR(1)	2.3%
Smooth FAR(1) with $q=p=12$	2.4%
Local FAR(1)	2.2%
BLUP discret	1.40%
BLUP continu	2.25%

Nous remarquons que les méthodes BLUP discret et continu fournissent de bons résultats avec des erreurs *RMAE* les plus faibles.

Les Figure (2.4), (2.5) représentent la température à la surface de l'océan (EL Nino) de l'année 2006 et son prédicteur *BLUP* discret ou continu avec erreur *RMAE*.

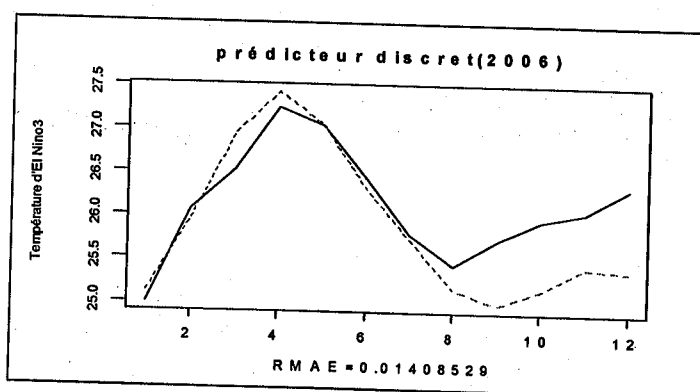


Figure 4.1: Figure (2.4)

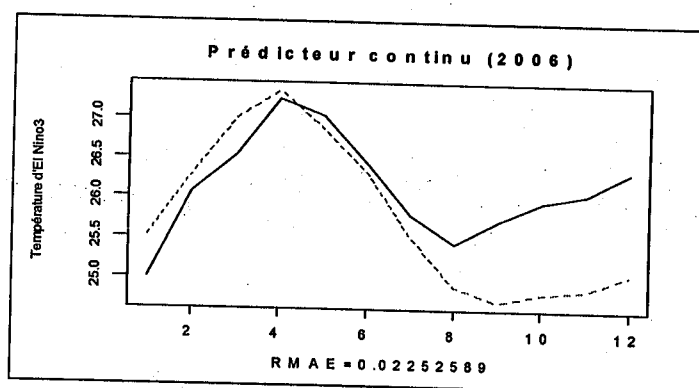


Figure (2.5)

2. Préviation de la température à Nottingham. Nous appliquons aussi la méthode de prédiction *BLUP* sur la série historique des relevés de la température à Nottingham (température moyenne mensuelle au château de Nottingham de Janvier 1920 et arrêtée en 1939) disponible dans la série Notttem de la bibliothèque de MASSE de S-PLUS. Nous utilisons les observations de la période 1920-1938 pour la prévision par la méthode *BLUP* discret ou continu de la température de l'année 1939 et nous présentons les erreurs *RMSE* des différentes méthodes de prévision disponibles (voir [5]).

Tableau 5: Erreur *RMSE* de prévision de différentes méthodes de la température de l'année 1939 à Nottingham.

Méthodes de prévision	RMAE
Wavelet -Kernel	30 %
SS (Spline Smoothing)	28 %
SARIMA	31 %
BLUP cas discret	4.5%
BLUP cas continu	2.96%

Nous remarquons que les méthodes BLUP discret ou continu fournissent les erreurs RMAE les plus faibles.

La Figure (2.6) représente la température à Nottingham de 1920-1939. Figure (2.7), (2.8) représentent la température de l'année 1939 à Nottingham et sa prévision BLUP.

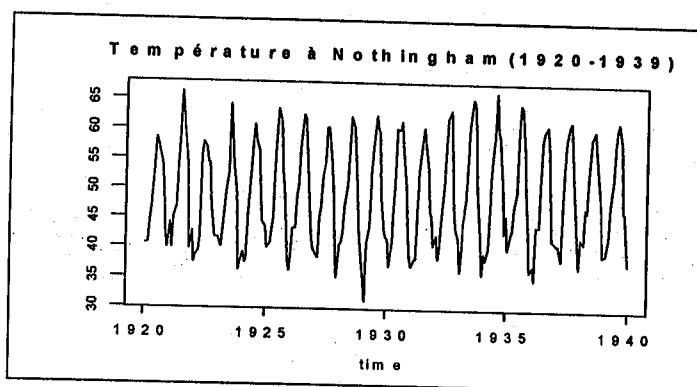


Figure (2.6)

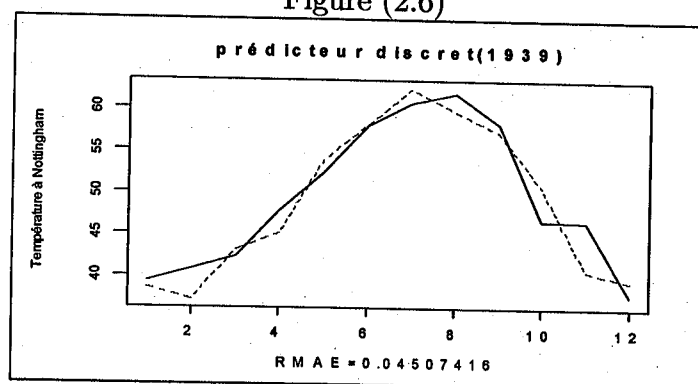


Figure (2.7)

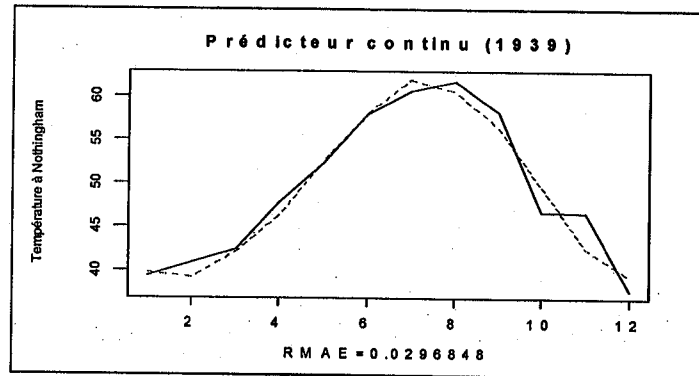


Figure (2.8)

3-Prévision de la température à Alger. Dans cette troisième partie nous présentons des résultats de prévision de la température maximale et minimale moyenne à Alger pour l'année 2004. La Figure (2.9) représente la variation de la température à Alger durant la période 1956-2004. Les Figures (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) représentent la température moyenne maximale et minimale de l'année 2004 à Alger et les prédicteurs *BLUP* discret et continu avec les erreurs quadratiques respectives.

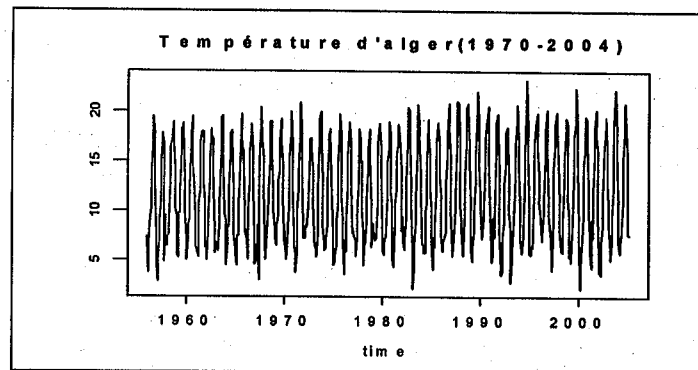


Figure (2.9)

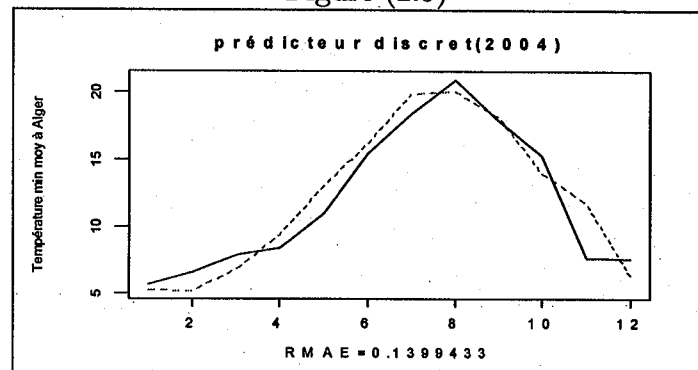
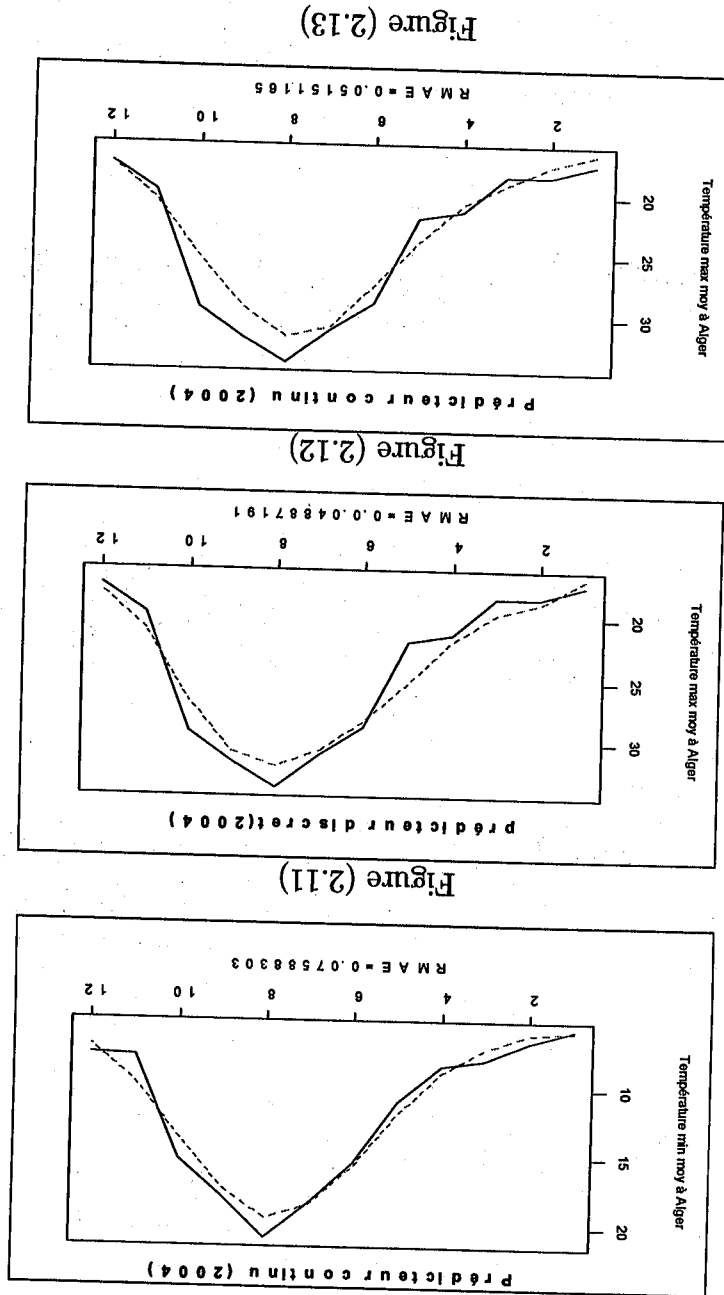


Figure (2.10)

4.2 Simulation dans le cas d'un Processus a coef- ficient aléatoire

Pour simuler un ARCA(1) on utilise la fonction suivante:



La fonction `simul.far.wiener.alea`

- Description

Simulation du processus ARCA(1) en utilisant le bruit Wienerien

- Usage

`simul.far.wiener.alea(m=64, n=128, m2=NULL)`

- Détails

Cette fonction simule ARCA(1) processus avec un bruit Wienerien. Elle utilise

le développement en série de Karhunen-Loève du bruit. Le processus ARCA(1),

définie par son opérateur linéaire aléatoire est calculé dans la base de Karhunen-

Loève puis projeté dans la base naturelle. Les paramètres donnés de (`d.rho` and `cs1`)

sont exprimés dans la base de Karhunen-Loève.

L'opérateur linéaire `d.rho`, exprimé dans la base de Karhunen-Loève est de la

forme

$$\begin{pmatrix} d.rho & 0 \\ 0 & eps.rho \end{pmatrix}$$

où `d.rho` est une matrice aléatoire diagonale d'ordre 4 dont ses éléments sont des

réalisations générées par la loi uniforme. Les deux 0 sont deux blocs de 0, et `eps.rho`

est la matrice aléatoire diagonale ayant pour diagonale les termes suivants:

$$(\epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2}, \dots, \epsilon_{m2})$$

ou

$$\epsilon_i = \frac{\epsilon_i^2}{cs1} + \frac{\epsilon_i}{1-cs1}$$

`cs1` est un nombre aléatoire généré par la loi uniforme et `k` est la dimension de la

diagonale de `d.rho`

- Valeur

Fonction représentant la simulation de `n` trajectoires d'un processus ARCA(1)

chacune calculées en `m` points

Figure (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) représente des simulations de 70 trajectoires en 60 points utilisant un nombre de trajectoires finies égal à 69 et un nombre de points égal à 10,30,40,60

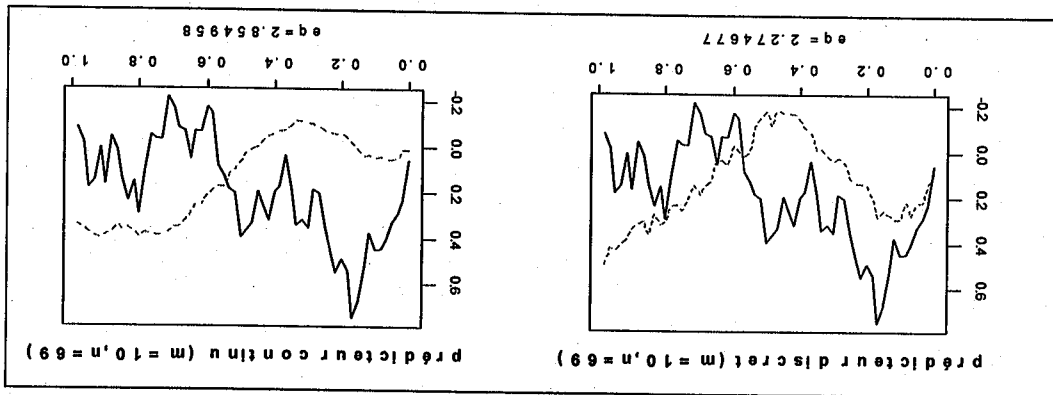


Figure (3.1)

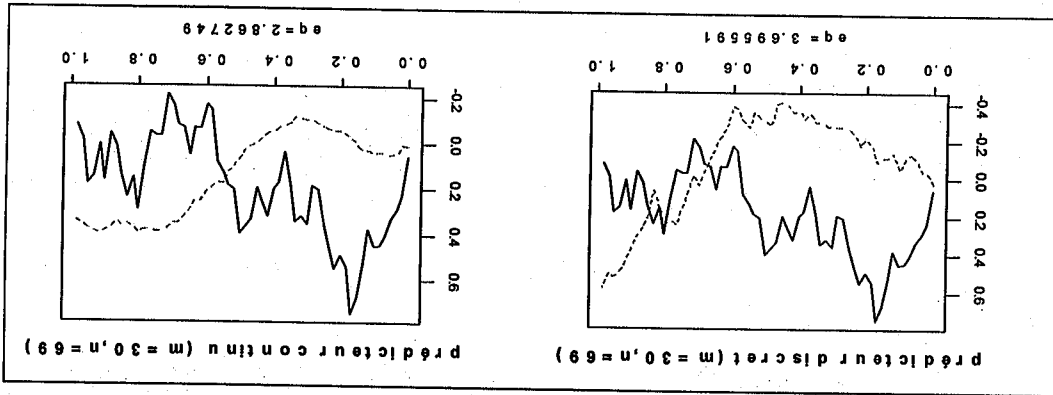


Figure (3.2)

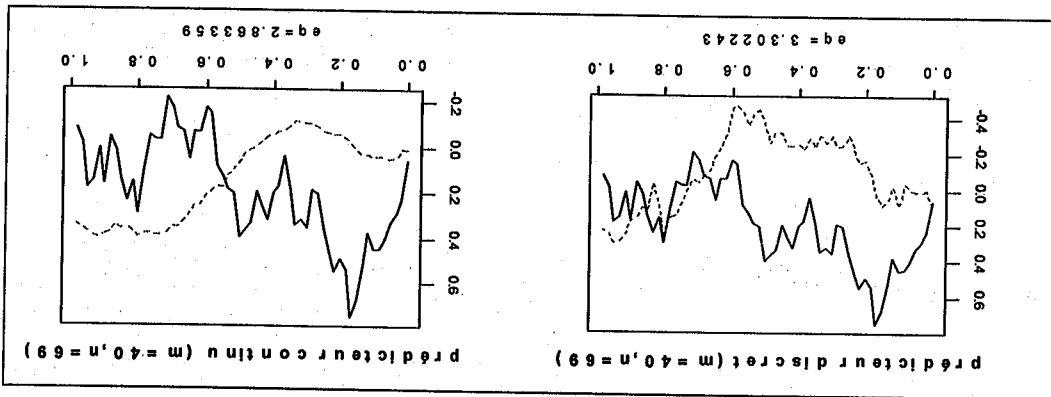


Figure (3.3)

Figure (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), représente des simulations de 70 trajectoires en 20 points utilisant un nombre de trajectoires finies égal à 69, 59, 49, 39 et un nombre de points égal à 20.

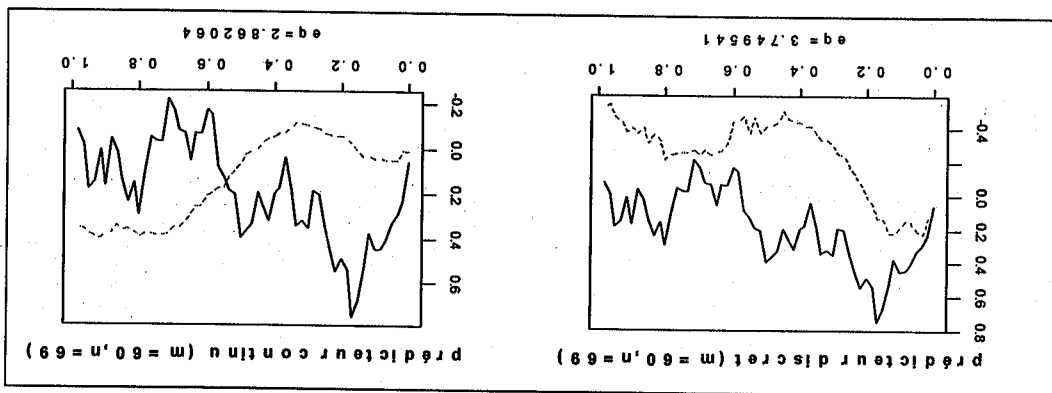


Figure (3.4)

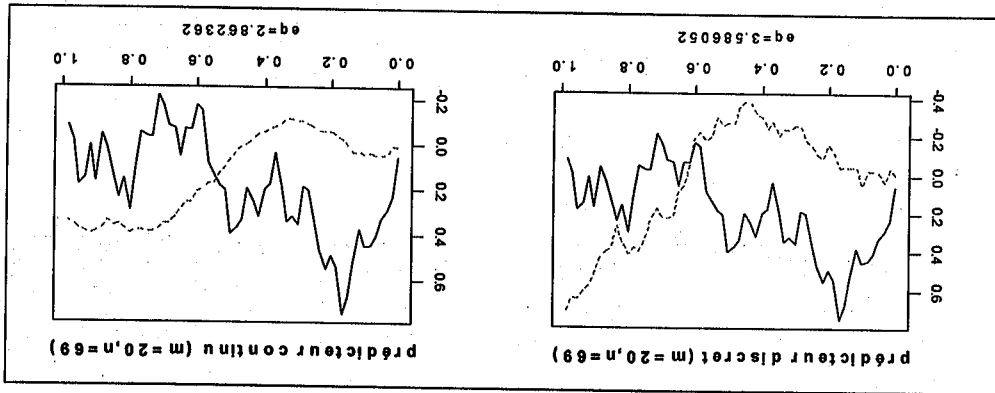


Figure (3.5)

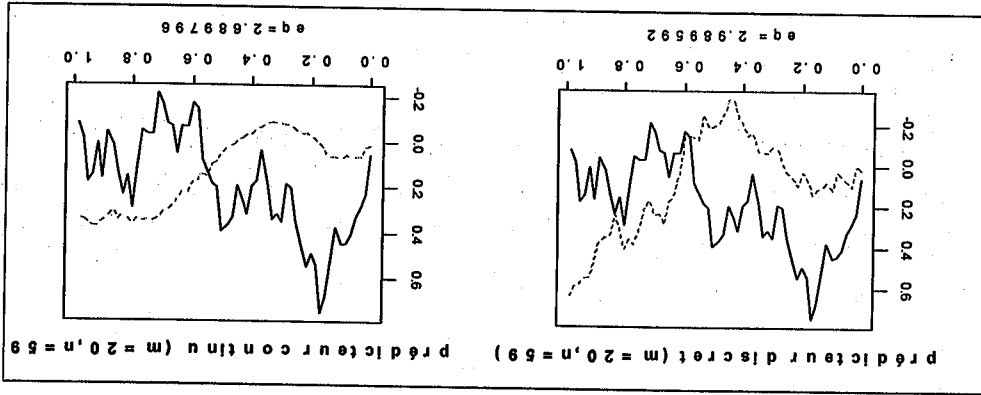


Figure (3.6)

Tableau 6 et 7 représente la moyenne des erreurs quadratiques de 200 répétitions utilisant 69, 59, 49, 39 trajectoires chacune calculé en 20 points pour prévoir 20 points de la 70^{ème} trajectoire (prédicteur discret et continu respectivement).

n	69	59	49	39
eq	3.3035	3.6379	3.5014	3.4418

Tableau 8

n	69	59	49	39
eq	3.1290	3.3244	3.3021	3.2070

Tableau 7

Tableau 6 et 7 représente la moyenne des erreurs quadratiques de 200 répétitions utilisant 69, 59, 49, 39 trajectoires chacune calculé en 20 points pour prévoir 20 points de la 70^{ème} trajectoire (prédicteur discret et continu respectivement).

Tableau 6

Figure (3.8)

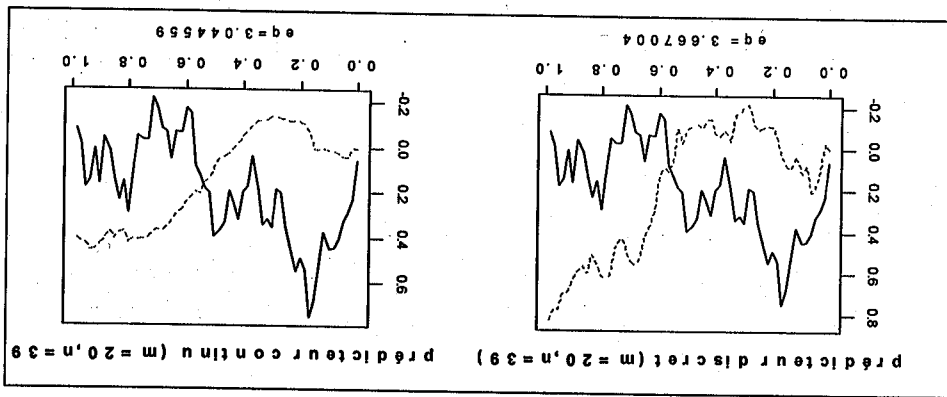
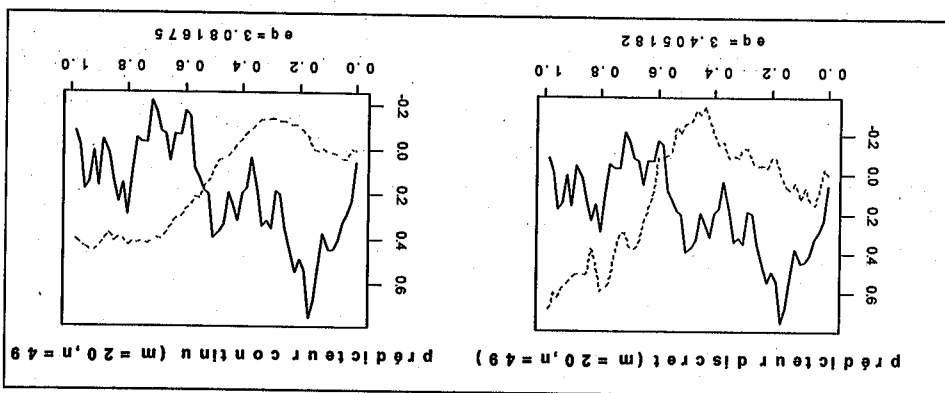


Figure (3.7)



Conclusion. Dans cette étude nous avons comparé notre méthode de prévision BLUP avec plusieurs méthodes de prévision disponibles dans la littérature ([4][5][6][16]) sur la base de leurs erreurs relatives moyennes RMAE. Pour les prédicteurs BLUP discret ou continu nous obtenons en général des erreurs RMAE assez faibles ce qui donne dans certains cas un léger avantage de cette méthode sur les autres méthodes de prévision présentées.

m	60	40	30	10
eq	5.865	4.7126	3.0520	0.9284

Tableau 9

m	60	40	30	10
eq	5.865	5.452	5.875	5.4727

Bibliographie

- [1] ALLAM A. Propriété de mélange des processus linéaires généraux et estimation d'un ARMA. Thèse de Doctorat. Université de Tiemcen 2007.
- [2] ALLAM A., MOURID T. Propriétés de mélange des processus autoregressifs banachiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (2001) 363-368.
- [3] ARONSAJN N. La théorie générale des noyaux reproduisant et ses applications. Proc. CAMBRIDGE Philo. Soc, vol 39, pp. 133-153. 1944
- [4] ANTONIADIS A., PAPARODITIS E., SAPATINAS T. A functional Wavelet-kernel approach for continuous-time Prediction.ccsd-00004891, version 1-10 May 2005
- [5] ANTONIADIS A., SAPATINAS T. Wavelet methods for continuous-time prediction using Hilbert-valued autoregressive processes. J. Multivariate Anal., 87, 133-158
- [6] BESSE P., CARDOT H., STEPHENSON D. Autoregressive Forecasting of Some Functional Climatic Variations. Scandinavian Journal of Statistics 27 (4), 673-687.(2003)
- [7] BOSQ D. Modelization, non parametric estimation and related topics. ED G-Roussas-NATO ASI-Series.1991
- [8] BOSQ D. Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications. Lecture Notes in Statistics 149 Springer 2000
- [9] BOSQ D., BLANKE D. Inference and Prediction in Large Dimensions. Wiley Series in Probability and Statistics Dec. 2007. 312 pp.
- [10] COHBERG I., KREIN M.G. Opérateurs linéaires non auto-adjointes dans un espace Hilbertien. Dunod 1971
- [11] DOOB J.T. Stochastic Process. J. Wiley, New-York 1958.
- [12] DUNFORD N., SCHWARTZ J.T. Linear Operators Part I. John Wiley, New-York 1958.

- [13] GEFROY J. Quelques extensions du théorème de P.Lévy sur la convergence pas des séries aléatoires à terme indépendantes. GRAS (t 24) pg 1180-1182 (1959)
- [14] GULLAS S. Thèse de Doctorat. Université Paris 6. 2002.
- [15] LOEVE M. Probability Theory. New York, Van Nostrand. Wiley. 1955
- [16] MAS A., PUMO B. The ARHD model . arXiv:math.ST/0.502285 v1. 14 Feb 2005
- [17] MOKHTARI F., MOURID T. Prediction of continuous time autoregressive processes via the Reproducing Kernel spaces . Statistical Inference for Stochastic Processes 6: 247-266. 2003
- [18] MOURID T. Contribution à la statistique des processus autorégression à temps continu. Thèse de Doctorat Es Sciences. Paris 6 1995 .
- [19] MOURID T. Processus autorégressifs hilbertiens à coefficients aléatoires. Ann. I.S.U.P. 48 (2004), no. 3, 79-85. 60B12
- [20] NICHOLLS D. F., QUINN B. G. The estimation of random coefficient autoregressive models. II. J. Time Ser. Anal. 2 185-203. 1981
- [21] PARZEN E. Regression analysis of continuous parameter time series. Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. Theory Ed. J.Neyman 1960.
- [22] PARZEN E. A new approach to synthesis of optimal smoothing and prediction systems. Mathematical Optimization Techniques . University of California Press. Berkeley CA 1963 pp. 75-108 .
- [23] PARZEN E. An approach to time series analysis. Source: Ann. Math. Statist. Volume 32, Number 4 (1961), 951-989.
- [24] PARZEN E. Modern probability theory and its application. J. Wiley, New-York 1960.
- [25] PUMO B. Prévission d'un processus autorégressif à temps continu. Thèse de doctorat. Université Paris 6. 1993
- [26] PUMO B. Prediction of continuous time processes by $C(0,1)$ - valued autoregressive process. Statist. Inf. Stoch. Proc. I (1998) pp. 139-153.