
Résolution numérique de l'équation de Richards en milieu saturé – non saturé

Ali Hamza*— **Ramdane Bahar***— **Omar Boudlal ***— **Saeed Abrishami****

** Laboratoire de Recherche Géomatériaux, Environnement et Aménagement (LGEA), Département de génie civil, Faculté du génie de la construction, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Algérie, alihamza@mail.ummo.dz, ramdane_bahar@mail.ummo.dz, boudlal_omar@yahoo.fr*

*** Department of Civil and Environmental Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran, saeedabrishami@yahoo.com*

RÉSUMÉ: Cet article est focalisé sur la résolution numérique de l'équation de Richards basée sur la variable potentiel de pression en milieu saturé- non saturé. Un modèle numérique en éléments finis permettant de suivre l'évolution dans le temps du potentiel de pression est alors proposé puis validé par des résultats expérimentaux.

ABSTRACT: This paper is focused on the numerical solution of the "pressure-based" Richards equation in a saturated-unsaturated medium. A finite element numerical model capable to trace the evolution of the pressure in relation to time is proposed and then validated by experimental results.

MOTS-CLÉS: Equation de Richards, pression, milieu saturé- non saturé, éléments finis.

KEYWORDS: Richards equation, pressure, saturated-unsaturated medium, finite elements.

1. Introduction

La compréhension des processus qui régissent les phénomènes des transferts hydriques et des transports de masse dans les sols a toujours constitué un centre majeur d'intérêt pour la communauté des géotechniciens et des hydrogéologues.

Pour la modélisation de ces phénomènes, on distingue deux méthodes d'approches. La première méthode est celle qui repose sur la modélisation dite « saturée - non saturée » ou « complète » (Kacimov, 2000) qui considère l'ensemble du système constitué par la nappe et la zone non saturée entre la surface du sol et le toit de la nappe. Dans ce cas, le modèle est fondé sur l'équation dite de Richards, et nécessite – outre la définition des conditions aux limites - la connaissance de deux fonctions décrivant les propriétés hydrodynamiques du sol (relation succion - teneur en eau, relation conductivité hydraulique - teneur en eau). La deuxième méthode repose sur l'approche mathématique; appelée méthode « classique » des problèmes à surfaces libres ou à frontières libres.

Alors que l'approche basée sur l'équation de Richards permet de décrire le front de saturation ou surface libre, à travers la continuité des transferts hydrauliques entre zones saturée et non saturée, la méthode analytique ou l'approche mathématique limite la description de l'écoulement à la zone saturée en supposant une variation discontinue de certaines grandeurs physiques. On suppose que la perméabilité chute brutalement dès que l'on dépasse le front de saturation. Ce faisant, on néglige physiquement l'écoulement dans la frange capillaire. Il découle de cette approximation que la surface libre est non seulement l'isobare où règne la pression atmosphérique, mais aussi la limite supérieure du domaine de l'écoulement. Dans ce travail, nous avons donc opté pour la première méthode, c.à.d la modélisation dite « saturée - non saturée » basée sur l'équation de Richards, en utilisant la méthode des éléments finis. Celle-ci est, par la suite, validée par des résultats expérimentaux.

2. Ecoulements en milieux poreux non saturés

L'équation différentielle qui gouverne les écoulements en milieux poreux non saturés est exprimée par l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad [1]$$

où k est la perméabilité non saturée, θ ; la teneur en eau volumique, h ; le potentiel hydraulique. θ est liée à la porosité n et au degré de saturation S_r par $\theta = nS_r$. Pour les milieux non déformables la porosité n est constante, alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\psi) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\psi) \frac{\partial h}{\partial z} \right) = n \frac{\partial S_r}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad [2]$$

or $h = z + \psi$ avec z ; l'élévation, ψ ; le potentiel capillaire, alors on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right) = n \frac{\partial S_r}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad [3]$$

Cette équation est appelée équation de Richards (1931) basée sur la variable ψ . Sa solution, $\psi(x, z, t)$, décrit l'écoulement en tout point du domaine d'écoulement Ω et à tout instant en satisfaisant les conditions aux limites (Figure 1). Pour sa résolution, cette équation nécessite la connaissance des valeurs des courbes caractéristiques : les courbes de conductivité hydraulique $k(\psi)$ et les courbes de rétention d'eau $C(\psi) = \partial \theta / \partial \psi = n \partial S_r / \partial \psi$. Ce qui constitue le point de départ du développement du modèle.

L'équation [3] est l'équation qui gouverne les écoulements en milieux non saturés. Afin de généraliser cette dernière pour les milieux, simultanément, saturés et non saturés, il est nécessaire d'introduire quelques modifications.

Neuman (1973) a exprimé la perméabilité non saturée comme une fraction de la perméabilité hydraulique à saturation: $k(\psi) = k_r(\psi) k_s$

où, k_s est la perméabilité saturée avec des composantes k_x et k_z

k_r est la perméabilité relative qui varie suivant l'intervalle: $0 \leq k_r(\psi) \leq 1$

Afin de considérer l'effet du coefficient d'emmagasinement spécifique, un terme égal à $S_r S_s$ est rajouté au second membre de l'équation [3].

où, S_s est le coefficient d'emmagasinement spécifique, S_r ; le degré de saturation $0 \leq S_r \leq 1$: $S_r = 0$ en zone non saturée et $S_r = 1$ en zone saturée.

3 Propriétés hydrauliques du sol

En raison de leurs applications pratiques importantes, les courbes de rétention d'eau (CRE) et les courbes de conductivité hydraulique ont longtemps été un des sujets principaux de recherche en science de la terre et en mécanique des sols non saturés (Li 2005). Miles et al. (1988) ont réalisé un travail expérimental pour déterminer les variations de la conductivité hydraulique et de la teneur en eau volumique en fonction du potentiel capillaire d'un sable moyen. Des valeurs de celles ci ont été obtenues pour des densités sèches de 1.61, 1.64 et 1.68 g/cm³. Dans ce travail, les résultats obtenus pour un sable d'une densité sèche de 1,68 g/cm³ sont utilisés et seule la courbe de drainage est prise en compte. Ainsi l'hystérésis n'est pas considérée.

Afin de mettre en application les courbes de rétention d'eau et les courbes de conductivité hydraulique et les injecter dans le modèle, il est nécessaire d'ajuster des équations générales appropriées aux courbes expérimentales pour faciliter leur

utilisation dans la simulation numérique. Les équations les plus valables dans ce cas sont celles données par Vauclin et al. (1979) :

Pour les courbes de conductivité hydrauliques, on a :

$$K(\psi) = K_s K_r(\psi) = K_s \frac{\alpha}{\alpha + |\psi|^\gamma} \quad [4]$$

où $K(\psi)$ est la conductivité hydraulique non saturée,

K_s est la conductivité hydraulique saturée prise égale à 0,1 cm/s,

$K_r(\psi)$ est la perméabilité relative,

α et γ sont des coefficients qui dépendent de la densité sèche du sol.

Les valeurs de K_s , α et γ pour un sable de densité sèche $\rho_d = 1,68 \text{ g/cm}^3$ sont indiquées dans le tableau 1 de (Miles et al., 1988).

Pour les courbes de rétention d'eau (CRE), on a :

$$\theta(\psi) = \theta_1 \frac{\alpha'}{\alpha' + |\psi|^{\beta'}} + \theta_2 \quad [5]$$

où $\theta(\psi)$ est la teneur en eau volumique,

θ_1 est la teneur en eau volumique saturée,

θ_2 représente la teneur en eau volumique non- drainée,

α' et β' sont des coefficients qui dépendent de la densité sèche du sol.

Les valeurs de θ_1 , θ_2 , α' et β' pour un sable de densité sèche $\rho_d = 1,68 \text{ g/cm}^3$ sont indiquées dans le tableau 2 de (Miles et al., 1988).

La capacité d'humidité spécifique, définie comme le gradient de la teneur en eau volumique, est alors donnée par

$$C(\psi) = \frac{d\theta(\psi)}{d\psi} = \frac{\theta_1 \alpha' \beta' |\psi|^{\beta'-1}}{(\alpha' + |\psi|^{\beta'})^2} \quad [6]$$

4. Résolution par la méthode des éléments finis

4.1. Discrétisation spatiale

La méthode de Galerkin est utilisée afin d'arriver à la formulation par éléments finis des équations intégrales. Zienkiewicz (1977) donne une explication détaillée de la méthode d'intégration numérique avec toutes les transformations nécessaires.

On aboutit alors à l'équation générale matricielle qui gouverne les écoulements en milieu saturé- non saturé:

$$[K]\{\psi\} + [C]\left\{\frac{d\psi}{dt}\right\} = -\{J\} \quad [7]$$

$$[K] = \sum_{e=1}^m k_r(\psi) k_x \int_{\Omega_e} N_l \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_z \int_{\Omega_e} N_l \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \quad [7a]$$

$$[C] = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left[n \left(\frac{\partial S_r}{\partial \psi} \right)_l N_l + S_r S_s \right] N_i N_j d\Omega \quad [7b]$$

$$\{J\} = \sum_{e=1}^m k_r(\psi) k_z \int_{\Omega_e} N_l \frac{\partial N_i}{\partial z} d\Omega - \sum_{e=1}^m \int_{\Gamma_e} N_i \lambda d\Gamma \quad [7c]$$

N_i, N_j et N_l sont les fonctions de transformation géométrique de l'élément i, j et l désignent les nœuds de l'élément. $i, j, l = 1, 2, 3, \dots, n_e$

n_e ; le nombre de nœuds de l'élément ($n_e=8$), m ; est le nombre d'éléments

Ω ; l'aire du domaine considéré, Ω_e ; l'aire de l'élément considéré

Γ ; la limite du domaine considéré, Γ_e ; la limite de l'élément considéré

λ ; le flux ou débit par unité de surface

Pour un milieu homogène et isotrope : $k_x = k_z = k_s$, où k_s est la conductivité saturée.

4.2. Discrétisation temporelle

En utilisant le schéma central de Crank-Nickolson de discrétisation temporelle par différence finie, l'équation [7] est arrangée selon la formulation suivante:

$$\left(\frac{[K]^{t+\Delta t/2}}{2} + \frac{[C]^{t+\Delta t/2}}{\Delta t}\right)\{\psi\}^{t+\Delta t} = \left(-\frac{[K]^{t+\Delta t/2}}{2} + \frac{[C]^{t+\Delta t/2}}{\Delta t}\right)\{\psi\}^t - \{J\}^{t+\Delta t/2} \quad [8]$$

4.3. Conditions aux limites et conditions initiales

Les conditions initiales sont: $h(x, z, 0) = h_0(x, z) \Rightarrow \psi_0 = h_0 - z$

Les types de conditions aux limites (Figure 1) à envisager sont les suivantes:

Condition de Dirichlet (pression imposée): $h(x, z, t) = h$ sur $\Gamma_1 \Rightarrow \psi = h - z$

Condition de Neuman (flux imposé): $\frac{\partial h}{\partial x} = q \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = q$ et $\frac{\partial h}{\partial z} = q \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = q - 1$

Si la limite Γ_2 est imperméable alors : $q = 0$.

Condition de Cauchy (ou condition mixte): C'est le cas de la surface de suintement où les deux conditions citées ci-dessus sont définies sur le même contour (Γ_3).

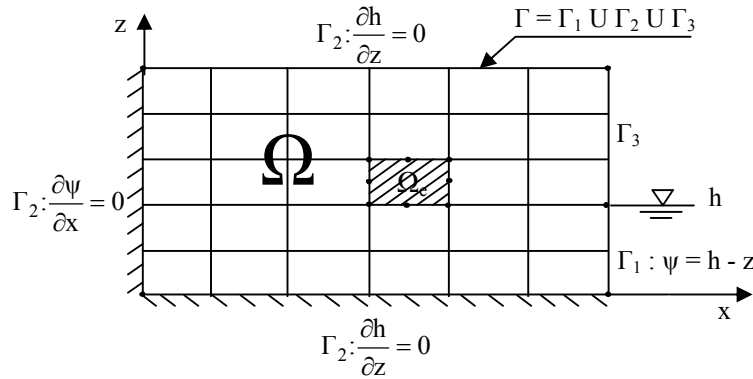


Figure 1. Domaine d'écoulement avec conditions aux limites

5. Modèle expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d'une cuve de 351,5 cm de longueur, 60 cm de hauteur et de 29,5 cm d'épaisseur, remplie de sable homogène ayant les caractéristiques suivantes : densité sèche moyenne de 1,68 g/cm³ ; perméabilité saturée de 0,1 cm/s ; porosité de 0,365 et un coefficient d'emmagasinement de 10⁻⁶ cm⁻¹. Le remplissage se fait par étapes et par dépose de couches de sable sec compactées jusqu'à une hauteur de 56,4 cm au-dessus de la base. La cuve, qui peut contenir jusqu'à 2 tonnes de sable, est composée de tôles d'acier inoxydable pour sa base et trois de ses parois verticales. Pour permettre l'inspection visuelle du sable avec lequel la cuve est remplie, la quatrième paroi est faite de plexiglas. Des niveaux d'eau dans la cuve sont contrôlés par trois tubes, situés sur le fossé drainant à l'aval du système, dont les vannes d'ouverture sont placées à 3,2 cm, à 28,3 cm, et à 56,3 cm au-dessus de la base de la cuve. A environ 15 cm à gauche des vannes, une grille avec des mailles carrées très fines est fixée dans le but de s'assurer que le sable reste en place tout en permettant à l'eau de le traverser. La longueur de la cuve contenant le sable est alors réduite à 351,5 cm. Les débits d'eau sortants par les vannes de contrôle de la surface libre se déversent dans un bac de réception en plastique de dimensions : 102 cm de longueur, 57 cm de hauteur et 57 cm d'épaisseur. Initialement, le sable est saturé progressivement en eau et maintenu en équilibre hydrostatique, pour une longue période afin de dégager les bulles d'air dans les pores, sur une hauteur d'eau de 56,3 cm au dessus de la base. Puis, à un temps $t = 0$, un drainage est effectué sur le coté aval de la cuve et le niveau d'eau a chuté jusqu'à une hauteur de 3,2 cm au dessus de la base et maintenu à ce niveau pour toute l'expérimentation. Pendant cette période, des tensiomètres répartis dans la cuve et connectés à des capteurs de pressions permettent de suivre l'évolution temporelle du potentiel de pression. Les résultats obtenus pour différents intervalles de temps sont exploités afin de valider le modèle numérique.

6. Interprétation des résultats et conclusion

Pour la modélisation numérique, le domaine d'écoulement est discrétisé en 66 éléments et 233 nœuds et a été conçu de sorte que les emplacements des tensiomètres du modèle expérimental coïncident avec des nœuds du modèle numérique. Des éléments isoparamétriques à 8 nœuds sont utilisés. Les courbes de conductivité hydraulique et les courbes de rétention d'eau pour un sol sableux de densité sèche $\rho_d = 1,68 \text{ g/cm}^3$ sont utilisées. Finalement, les résultats obtenus sur le modèle expérimental et ceux obtenus à l'aide de la simulation numérique par la méthode des éléments finis sont présentés. La figure 2 montre l'évolution dans le temps des potentiels de pression pour les deux modèles. Une bonne concordance des résultats est observée avec une erreur moyenne ne dépassant pas 10%.

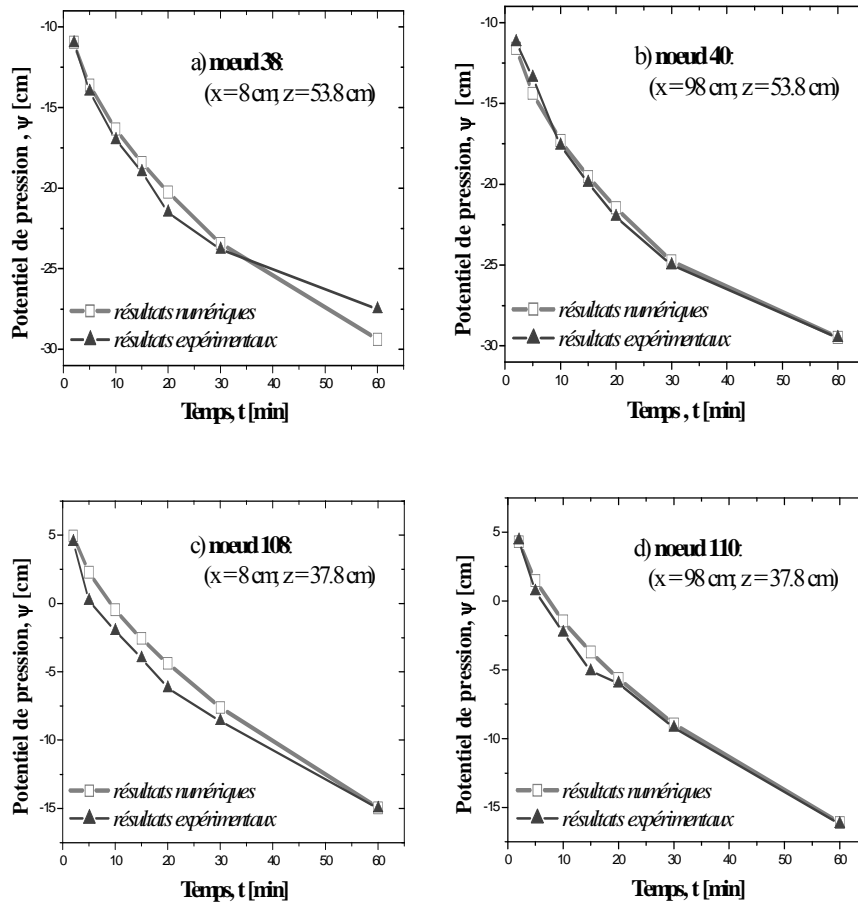


Figure 2. Variation du potentiel de pression en fonction du temps

La figure 3 montre la variation du potentiel de pression sur une hauteur du domaine d'écoulement correspondant à $x = 98\text{ cm}$ pour les temps $t = 2, 15, 30$ et 60 minutes. Nous avons observé qu'elle confirme bien la variation linéaire de la pression avec des valeurs négatives en zone non saturée, positives en zone saturée et égales à zéro sur la limite entre les deux zones ; laquelle correspond à la position du front de saturation ou surface de pression nulle.

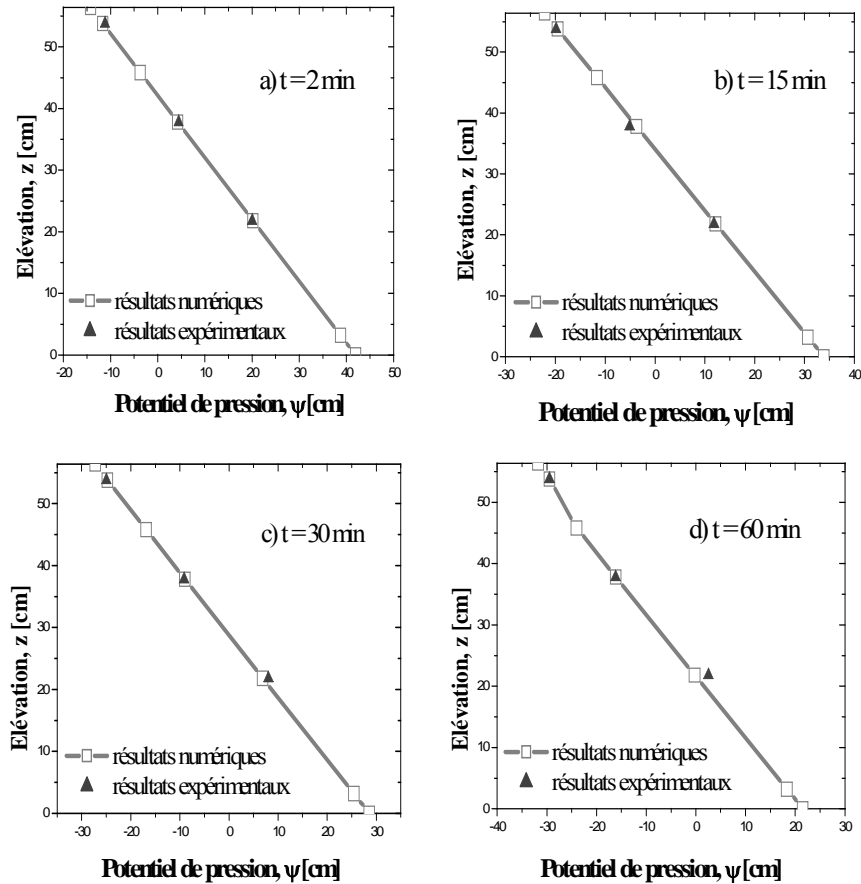


Figure 3. Variation du potentiel de pression sur la hauteur $x = 98$ cm

La figure 4 montre les résultats numériques et les résultats expérimentaux de l'évolution du front de saturation ($\psi = 0$) à des intervalles de temps différents; celui ci représente la limite entre la zone saturée et la zone non saturée du domaine d'écoulement. Dans l'analyse classique des écoulements à surface libre, celui ci est représenté comme une limite imperméable et désignée habituellement sous le nom de surface libre. Cette évolution démontre clairement l'existence d'un gradient hydraulique indiquant l'écoulement de haut vers le bas dans la zone non saturée. La surface de suintement disparaît presque complètement après 15 minutes alors que le régime permanent est plus ou moins atteint après 60 minutes.

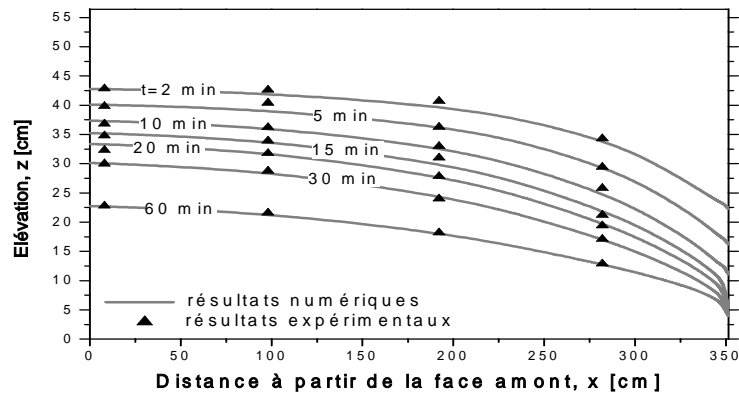


Figure 4. Evolution du front de saturation en fonction du temps

7. Conclusion

On conclut que les résultats obtenus par la résolution numérique de l'équation de Richards en milieu saturé - non saturé sont très satisfaisants du moment qu'ils concordent bien avec les résultats expérimentaux durant toute l'évolution du front de saturation. La cadence de l'avance du front de saturation, qui est fortement affecté par des conditions antérieures de teneur en eau dans la zone non saturée, est diminuée à mesure que le temps augmente. La hauteur de la surface de suintement est aussi affectée par les conditions aux limites à l'amont du domaine d'écoulement (pression variable) ; on remarque que celle-ci est négligeable lorsque le régime permanent est atteint.

8. Bibliographie

- Kacimov A.R., «Comment on the paper: An analytical solution for design of bi-level drainage systems», *Agr. Water Manage.*, 2000, 46, p. 193-200.
- Li X.S. «Modelling of hysteresis response for arbitrary wetting/drying paths», *Computers and geo-techniques*, 2005, 32, 133-137.
- Miles J.C., Thomas H.R., Abrishami J. «The effect of small density changes on the movement of water through an unsaturated sand», *J. of hydrology*, 1988, 104, 93-110.
- Neuman S.P., «Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements», *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, vol. 99, n° HY12, 1973, p. 2233-2250.

Richards L.A., «Capillary conduction of liquids through porous medium», *Physics*, vol. 1, 1931, p. 318-333.

Vauclin M., Khanji D., Vachaud G., «Experimental and numerical study of a transient two dimensional unsaturated-saturated water-table recharge problem», *Water resour. Res.*, 1979, 15, 1089-1101.

Zienkiewicz O.C., *The finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 1977.