

---

# Comportement hydromécanique d'un milieu élastique non saturé par une approche micromécanique

Duc Phi Do\* — Naïma Belayachi\* — Dashnor Hoxha\*

\* Institut PRISME, (EA4229) Polytech'Orléans, rue Léonard de Vinci, 45072 Orléans Cedex 2, France

duc-phi.do@univ-orleans.fr  
naima.belayachi@univ-orleans.fr  
dashnor.hoxha@univ-orleans.fr

---

*RÉSUMÉ. L'objectif de cette étude est la prédiction du comportement hydromécanique des milieux poreux linéaires non saturés en considérant la structure de la contrainte effective. Une approche d'homogénéisation en deux étapes basée sur la solution classique d'Eshelby est effectuée. On montre que la contrainte effective est liée au modèle conceptuel microscopique utilisé et à la microstructure. On considère alors dans cette contribution une expression de la contrainte effective qui est une fonction non linéaire de la saturation. Sous certaines conditions l'approche proposée permet de définir une contrainte de type Bishop. Les prédictions du modèle sont comparées avec des expressions connues dans la littérature de la contrainte effective.*

*ABSTRACT. The objective of this study is the prediction of the hydromechanical behaviour of the linear porous and unsaturated medium by considering the structure of the effective stress. An approach of homogenisation in two stages based on the classical solution of Eshelby is carried out. It is shown that the effective stress is related to the microscopic conceptual model used and the microstructure. In this contribution, we consider an expression of the effective stress which is a nonlinear function of saturation. Under certain conditions the approach suggested makes it possible to define a stress of Bishop type. The predictions of the model are compared with known expressions of the effective stress in the literature.*

*MOTS-CLÉS: non saturé, milieu poreux, homogénéisation, contrainte effective*

*KEYWORDS: unsaturated, porous media, homogenization, effective stress*

---

## 1. Introduction

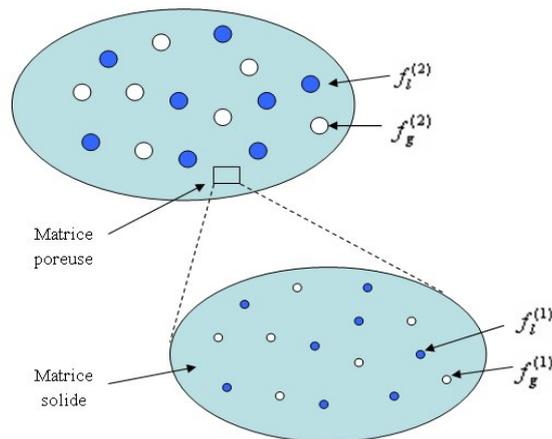
Le recours à l'utilisation des sols non saturés est très répandu avec des applications très variées allant de la réalisation de barrières ouvragées dans les sites de stockage de déchets aux noyaux des barrages en passant par les fondations des ouvrages urbains. Ces matériaux sont susceptibles de subir des sollicitations hydriques et/ou mécaniques qui peuvent entraîner de fortes modifications de leurs propriétés hydromécaniques. La description du comportement hydromécanique des matériaux poreux, notamment des géomatériaux, est effectuée depuis longtemps par le concept de la contrainte effective de Terzaghi. Ce concept, déjà bien admis et vérifié dans le cas des milieux saturés, a été étendu dans le cas des milieux non saturés par Corney et al. (1958) et Bishop (1959) faisant intervenir la pression de l'air et la pression de l'eau. En se basant sur des résultats expérimentaux, cette approche a été récemment développée par Khalili et al. (2004) et Hoxha et al. (2007). D'autres formulations plus générales du comportement des milieux poreux basées sur des considérations thermodynamiques ont été établies par Schreffler (1990), Coussy (1995). D'autres auteurs ont proposés des approches alternatives en se passant de l'usage même du concept de la contrainte effective qui n'est pas capable d'interpréter à lui seul tous les phénomènes qui caractérisent le comportement des sols non saturés (Alonso et al., 1990). Toutes ces approches macroscopiques ignorent les caractéristiques microscopiques des constituants du milieu poreux. Certains auteurs ont abordé le problème d'une manière différente à l'aide des approches micromécaniques (Chateau et Dormieux, 2002).

Dans ce travail, nous utilisons une approche multi-échelle en suivant les travaux de (Chateau et Dormieux, 2002) pour déterminer le comportement macroscopique d'un milieu poreux non saturé. L'originalité de cette contribution réside dans la procédure d'homogénéisation en deux étapes qui prend en compte la porosité multiple du matériau dans le cas drainé et non drainé. Cette double porosité a été déjà abordée par (Khalili et al., 2005) avec une formulation à l'échelle macroscopique.

En considérant le matériau avec différentes taille de pores, la première étape d'homogénéisation permet d'homogénéiser la matrice argileuse avec les micropores contenant un liquide ou un gaz. La deuxième étape donne la solution macroscopique en ajoutant les macropores. Finalement une confrontation des résultats des modules effectifs avec ceux de la littérature est présentée.

## 2. Modèle simplifié d'un milieu poreux

La plupart des géo-matériaux, présentent une microstructure complexe qui est à l'origine de leur comportement hydromécanique. Dans le cadre des études menées par L'ANDRA (l'Agence Nationale de stockage des déchets radioactifs) sur les roches profondes telles que les argilites, les résultats expérimentaux et les observations microscopiques ont montré que c'est un matériau présentant une microstructure multiphasique. On s'intéresse ici aux milieux poreux à double porosité souvent rencontrés en géotechnique. En se limitant aux couplages hydromécaniques, nous ne faisons aucune hypothèse quant à la perméabilité, bien que souvent une double porosité est associée avec une double perméabilité. Un tel matériau poreux montre un espace poreux constitué d'une porosité multiple de tailles micrométriques ou inframicrométriques. Cette microstructure complexe suggère de proposer un modèle simplifié pour ce type de matériau. Selon le modèle simplifiée de la structure que nous proposons, le VER (Volume Élémentaire représentatif) comporte une matrice solide avec un espace poreux interne qui sera dans une deuxième étape homogénéisé avec les pores d'une taille supérieure pour représenter le matériau poreux (Figure 1).



**Figure 1.** Le volume élémentaire représentatif (V.E.R) du matériau poreux

## 3. Méthode d'homogénéisation d'un milieu poreux non saturé

Conformément au modèle simplifié de la microstructure nous développons dans cette partie la méthode d'homogénéisation en deux étapes où les effets des tensions surfaciques entre les phases ne sont pas pris en compte. Cette dernière hypothèse coïncide avec le cas particulier où, un pore est exclusivement remplis soit avec du liquide soit avec du gaz.

Selon ce modèle, le V.E.R ( $\Omega$ ) de ce matériau consiste en une phase solide  $\Omega_s$  et en l'espace poreux qui comporte une phase liquide  $\Omega_l$  et une phase gazeuse  $\Omega_g$ . Par la suite l'index « l » indique la phase liquide, « g » la phase gazeuse et « s » la phase solide. En plus, la frontière  $\partial\Omega$  appartient à la phase solide. Le V.E.R est soumis à un champ de déformation macroscopique uniforme  $E$  à la frontière  $\partial\Omega$ , les pressions  $p_l$  s'exerçant sur  $\partial\Omega_{sl}$  de la phase liquide et  $p_g$  sur  $\partial\Omega_{sg}$  de la phase gazeuse :

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= E \cdot \underline{x} \quad (\forall \underline{x} \in \partial\Omega) \quad , \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = -p_l \underline{n} \quad (\forall \underline{x} \in \partial\Omega_{sl}) \quad , \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} &= -p_g \underline{n} \quad (\forall \underline{x} \in \partial\Omega_{sg}) \end{aligned} \quad [1]$$

L'espace poreux  $\Omega_p$  du milieu hétérogène considéré se compose de la microporosité  $\Omega_p^{(1)}$  et de la macroporosité  $\Omega_p^{(2)}$ . En supposant que  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$  et  $f$  sont les fractions volumiques de la microporosité, de la macroporosité et de la porosité totale, on obtient :

$$f = f^{(1)} + f^{(2)} \quad [2]$$

En outre, nous définissons respectivement  $S_r^{(1)}$ ,  $S_r^{(2)}$  et  $S_r$  le degré de la saturation de la microporosité, de la macroporosité et de la porosité totale. On en déduit donc :

$$S_r^{(1)} = f_l^{(1)} / f^{(1)} \quad , \quad S_r^{(2)} = f_l^{(2)} / f^{(2)} \quad [3]$$

$$S_r = (f_l^{(1)} + f_l^{(2)}) / f = S_r^{(1)} \chi + S_r^{(2)} (1 - \chi) \quad [4]$$

Où  $\chi = f^{(1)} / f$  est un paramètre caractérisant la microstructure du matériau.

On applique maintenant une approche micromécanique en s'appuyant sur le principe d'homogénéisation des milieux aléatoires composés des constituants solides et d'un espace poreux partiellement saturé (liquide et gaz). La méthode d'homogénéisation basée sur la solution d'Eshelby (Eshelby, 1957) se développe en deux étapes permettant l'addition successive dans le modèle des micropores (pores interne à la matrice solide), des macropores et des constituants solides.

### 3.1. Etape 1, matrice solide et microporosité partiellement saturée

Cette première étape permet d'homogénéiser la phase solide contenant une microporosité interne qui est modélisé par des formes sphéroïdales. Ces pores sont remplis soit par la phase liquide soit par la phase gazeuse. La fraction volumique de chaque phase dans cette étape est recalculée par l'équation suivante :

$$f^I = f^{(1)} / (1 - f^{(2)}) = \chi \frac{f}{1 - (1 - \chi)f} \quad [5]$$

$$f_l^{(I)} = S_r^{(1)} f^I \quad , \quad f_g^{(I)} = (1 - S_r^{(1)}) f^I \quad [6]$$

Un des résultats importants des approches micro-macro consiste à trouver la règle de localisation reliant les champs de déformation microscopique et les champs imposés à l'échelle macroscopique. Compte tenu de la linéarité du problème, nous avons ainsi la solution de la déformation locale  $\varepsilon^I(\underline{x})$  qui est elle-même fonction linéaire des pressions  $p_l, p_g$  dans les micropores et de la déformation moyenne  $\varepsilon_m$  dans la phase matrice homogénéisée. Cette dernière est déterminée à partir de la solution de deuxième étape d'homogénéisation. On obtient donc la forme suivante :

$$\varepsilon^I(\underline{x}) = A^I(\underline{x}) : \bar{\varepsilon}_m + a_l^I(\underline{x}) p_l + a_g^I(\underline{x}) p_g \quad [7]$$

Où  $A^I(\underline{x})$  et  $a_l^I(\underline{x})$  désignent les tenseurs de localisation de quatrième et deuxième ordre au point  $\underline{x}$ .

Respectivement, la contrainte moyenne de la matrice homogénéisée  $\bar{\sigma}_m$  peut être déterminée en fonction linéaire de  $p_l, p_g$  et  $\varepsilon_m$  (voir par exemple Chateau et Dormieux, 2002):

$$\bar{\sigma}_m = C_{\text{hom}}^I : \bar{\varepsilon}_m + B_l^I p_l + B_g^I p_g \quad [8]$$

Ce dernier résultat est obtenu en utilisant le théorème de Levin (1967) qui permet de relier les champs de précontrainte macroscopiques et ceux locaux dans la phase liquide  $\sigma_p = -p_l \delta$  et gazeuse  $\sigma_p = -p_g \delta$ .  $\delta$  désigne le tenseur d'identité du deuxième ordre.

Dans l'équation [8]  $C_{\text{hom}}^I, B_l^I, B_g^I$  sont les tenseurs homogénéisés dépendant du schéma d'homogénéisation utilisé:

$$C_{\text{hom}}^I = C_s + f_l^I (C_l - C_s) : A_l^I + f_g^I (C_g - C_s) : A_g^I \quad [9]$$

$$B_l^I = f_l^I A_l^I : \delta = S_r^{(1)} f_l^I A_l^I : \delta \quad ,$$

$$B_g^I = f_g^I A_g^I : \delta = (1 - S_r^{(1)}) f_g^I A_g^I : \delta \quad [10]$$

Classiquement, dans le cas du schéma de Mori-Tanaka (Mori-Tanaka, 1973) nous avons l'expression suivante du tenseur de localisation de déformation :

$$A_i^l = A_i^{l,dil} : [(1 - f^l)I + f_l^{(l)} A_l^{l,dil} + f_g^{(l)} A_g^{l,dil}]^{-1} \quad [11]$$

avec  $A_i^{l,dil} = [I + P : (C_i - C_s)]^{-1}$  et  $I, P$  sont le tenseur d'identité et le tenseur de Hill du quatrième ordre et ( $i = l, g$ ).

### 3.2. Etape 2 : matrice poreuse et macroporosité partiellement saturée

Les résultats obtenus dans l'étape précédente sont utilisés comme données d'entrée de la phase matrice poreuse qui entoure les inclusions sphéroïdales de la macroporosité qui sont remplies soit par la phase liquide soit par la phase gazeuse.

De la même manière que dans l'étape précédente, en prenant en compte la linéarité du problème, on obtient ainsi la loi du comportement macroscopique :

$$\Sigma = C_{\text{hom}}^H : E - B_{\text{hom}}^l p_l - B_{\text{hom}}^g p_g \quad [12]$$

La précontrainte macroscopique  $B_{\text{hom}}^l p_l$  (respectivement  $B_{\text{hom}}^g p_g$ ) est déterminée à partir de celles locales  $\sigma_p = -B_l^l p_l$  dans la phase matrice poreuse et  $\sigma_p = -p_l \delta$  dans les macropores (respectivement  $\sigma_p = -B_g^l p_g$  et  $\sigma_p = -p_g \delta$ ) à travers le théorème de Levin. Elle vaut donc :

$$B_{\text{hom}}^l p_l = - \langle A : \sigma_p \rangle = f_m A_m : B_l^l p_l + f_l^{(2)} p_l A_l^{II} : \delta \quad [13]$$

Par l'utilisation de la condition de cohérence  $\langle A \rangle = I$ , il vient :

$$B_{\text{hom}}^l = B_l^l : (I - S_r^{(2)} f^{(2)} A_l^{II} - (1 - S_r^{(2)}) f^{(2)} A_g^{II}) + S_r^{(2)} f^{(2)} A_l^{II} : \delta \quad [14]$$

Les tenseurs de localisation  $A_i^{II}, (i = l, g)$  s'écrivent dans le cadre du schéma de Mori-Tanaka comme suit :

$$A_i^{II} = A_i^{II,dil} : [(1 - f^{(2)})I + f_l^{(2)} A_l^{II,dil} + f_g^{(2)} A_g^{II,dil}]^{-1} \quad [15]$$

où  $A_i^{II,dil}$  dépend du tenseur de rigidité de la matrice poreuse déterminée dans la première étape ( $C_m = C_{\text{hom}}^l$ ) :

$$A_i^{II,dil} = [I + P : (C_i - C_m)]^{-1}, (i = l, g) \quad [16]$$

Le comportement macroscopique du matériau (Eq. 12) peut être réécrit sous la forme de la contrainte effective :

$$(\Sigma + B_{\text{hom}} p_g) - B_{\text{hom}}^l p_c = C_{\text{hom}}^{\text{II}} : E \quad [17]$$

avec  $p_c = p_g - p_l$  est la pression capillaire (suction) et  $B_{\text{hom}} = B_{\text{hom}}^l + B_{\text{hom}}^g$ .

#### 4. Résultats et discussion

Nous considérons dans un premier temps le comportement du matériau dans le cas drainé où  $C_l = C_g \rightarrow 0$ . Dans ce cas, compte tenu de l'hypothèse de la morphologie similaire entre les domaines  $\Omega_l$  et  $\Omega_g$ , nous avons :

$$A_l^I = A_g^I = \frac{1}{1-f^I} [I - S_s : C_{\text{hom}}^I], \quad A_l^{\text{II}} = A_g^{\text{II}} = \frac{1}{1-f^{(2)}} [I - S_m : C_{\text{hom}}^{\text{II}}] \quad [18]$$

où  $S_s, S_m$  sont les tenseurs de souplesse de la matrice solide et de la matrice poreuse. En plus, les tenseurs de rigidité homogénéisés  $C_{\text{hom}}^I, C_{\text{hom}}^{\text{II}}$  sont indépendants du degré de la saturation. Ainsi, dans ce cas drainé, l'expression du tenseur  $B_{\text{hom}}^l$  est linéaire par rapport au degré de saturation  $S_r^{(1)}, S_r^{(2)}$  et donc  $S_r$ . Plus particulièrement, pour  $\chi = 1$  (cas où la fraction volumique des macropores  $f^{(2)=0}$ ), on obtient l'expression trouvé par Chateau et Dormieux (Chateau et Dormieux, 2002). Dans le cas d'un solide incompressible, le résultat du tenseur  $B_{\text{hom}}^l$  égal à  $S_r \delta$  est conforme à celui trouvé par Schrefler (1990) et par Chateau et Dormieux (2002).

Le deuxième cas qu'on peut considérer est destiné au comportement du matériau dans le cas nettement non drainé où la masse des fluides dans chaque pore est constante. C'est le cas qui correspond à un chargement rapide à très court terme. On a ainsi le module de compressibilité des pores saturées par le liquide qui est différent de zéro et est égale à  $k_{pl} = 2 \text{ GPa}$  (voir par exemple Shafiro et Kachanov, 1997). Donc, les tenseurs de localisation  $A_l^I, A_g^I$  (respectivement  $A_l^{\text{II}}, A_g^{\text{II}}$ ) dépendent du degré de saturation  $S_r^{(1)}$  et  $S_r^{(2)}$  correspondant. Ceci conduit à une fonction non linéaire du tenseur homogénéisé  $B_{\text{hom}}^l$  par rapport à  $S_r^{(1)}, S_r^{(2)}$  et donc  $S_r$ . Par exemple dans le cas où  $S_r^{(2)} = 0$  (les macropores sont saturées par la phase gazeuse), on obtient la non linéarité de cette fonction sous la forme :

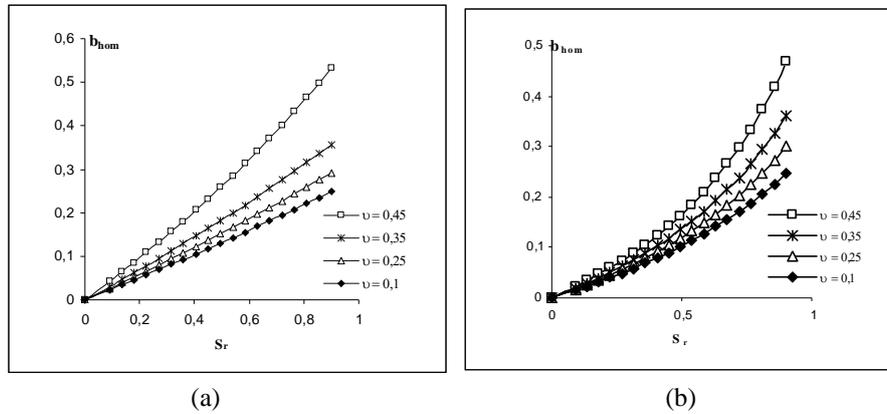
$$B_{\text{hom}}^l = F\left(\frac{AS_r}{BS_r + C}\right) \quad [19]$$

Où les coefficients  $A, B, C$  dans [19] sont fonction du tenseur de rigidité de la phase solide, du module de compressibilité de la phase liquide  $k_{pl}$  et de la morphologie de la microstructure de la porosité caractérisée par  $f, \chi$ .

La figure 2 nous montre l'évolution du coefficient de Biot homogénéisé du matériau isotrope en fonction du degré de saturation dans le cas nettement non drainé.

Les calculs numériques sont effectués avec les paramètres suivants : le module d'Young de la phase solide  $E_s = 7.6 \text{ GPa}$ ,  $k_{pl} = 2 \text{ GPa}$ ,  $f = 0.25$ ,  $\chi = 0.9$  et  $S_r^{(2)} = 0$ .

Les courbes de la figure 2 montrent une non linéarité qui est aussi sensible au coefficient de Poisson de la phase solide et au coefficient de forme des pores sphéroïdaux ( $\alpha$  étant le rapport des deux rayons de la sphéroïde).



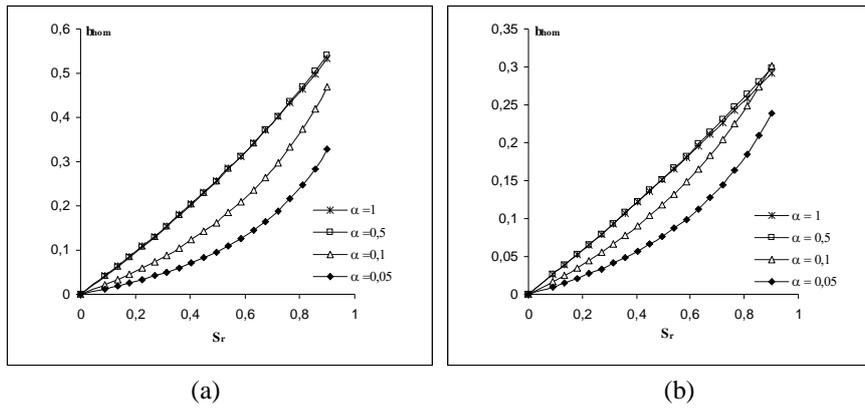
**Figure 2.** L'évolution du coefficient de Biot homogénéisé en fonction du degré de saturation : cas des pores sphériques (a), cas des pores sphéroïdaux dont le coefficient de forme  $\alpha = 0.1$  (b).

Cette sensibilité au coefficient de forme est représentée dans la figure 3 pour deux valeurs du coefficient de Poisson montrant une forte non-linéarité pour des faibles coefficients de forme.

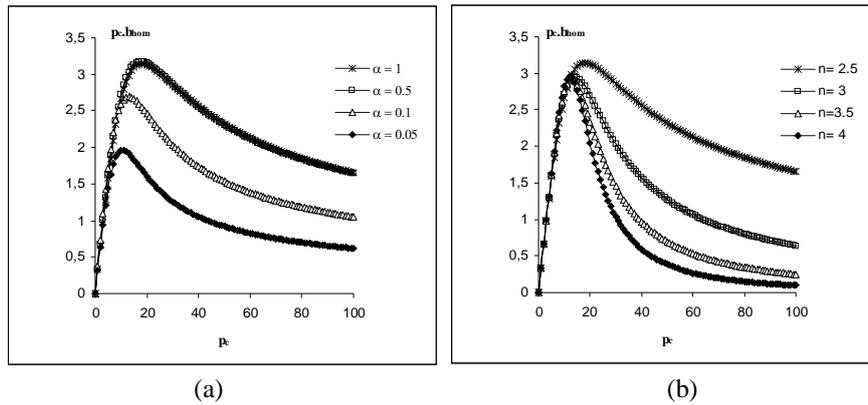
Selon l'équation [17] la contrainte effective obtenue est de type Bishop où le paramètre de la contrainte effective (coefficient de Biot) est exprimé en fonction de la saturation  $b_{\text{hom}}^l(S_r)$ . Il est intéressant de vérifier les valeurs limites de cette contrainte notamment dans deux cas extrêmes : le cas saturé et le cas complètement sec. Il est facile de vérifier que dans le cas saturé on récupère la contrainte de Biot. Pour le cas complètement sec, il faudra évaluer le deuxième terme de l'équation [17]. Pour ce faire on suppose que la courbe de rétention (la relation entre la saturation et la pression capillaire) est décrite par la loi de Van Genuchten (1980).

$$S_r = \left[ 1 + \left( \frac{P_c}{P_r} \right)^n \right]^{\frac{1-n}{n}} \quad [20]$$

$p_r$  et  $n$  dans [20] sont les deux paramètres du modèle. Pour que le deuxième terme de l'équation [17] reste fini lorsque la pression capillaire tend vers l'infini (donc lorsque le matériau se sèche complètement)  $n$  doit être supérieure à 2.



**Figure 3.** L'évolution du coefficient de Biot homogénéisé en fonction du degré de saturation : coefficient de Poisson de la phase solide  $\nu_s = 0.25$  (a), et  $\nu_s = 0.45$  (b).



**Figure 4.** L'évolution de la précontrainte macroscopique  $p_c b_{hom}^l$  en fonction de la pression capillaire  $p_c$  pour une valeur de  $p_r = 15$  MPa : influence du coefficient de forme des pores pour  $n = 2.5$  (a), influence du paramètre  $n$  du modèle Van Genuchten pour un coefficient de forme de 1 (b).

La figure 4 montre l'évolution du produit  $p_c b_{hom}^l$  par rapport à la pression capillaire  $p_c$  où  $p_c b_{hom}^l$  s'approche de zéro quand  $p_c$  tend vers l'infini.

## 5. Conclusion

Une approche micromécanique a été proposée pour étudier le comportement élastique macroscopique d'un milieu poreux. La procédure d'homogénéisation en deux étapes a été présentée. Les lois de comportement macroscopique obtenues donnent une expression générale de la contrainte effective qui dans le cas d'une monoporosité ou le cas incompressible revient à des valeurs trouvées dans la littérature avec d'autres approches micromécaniques ou thermodynamiques. Les résultats montrent une sensibilité aux propriétés de la matrice solide ainsi qu'à la forme morphologique des pores. Cette approche met en évidence la validité de la contrainte effective de Bishop dans le cas des milieux poreux non saturés et l'influence de la microstructure sur le comportement macroscopique.

## 6. Bibliographie

- Alonso, E., Gens, A., Josa, A., 1990. A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique* 40, p. 405–430.
- Bishop A.W., 1959. The principle of effective stress. *Teknisk Ukeblad*, 39, p. 859–863.
- Chateau, X., Dormieux, L., 2002. Micromechanics of saturated and unsaturated porous media. *Int. J. Numer. Methods Geomech.* 26, p. 831–844.
- Corney D., Coleman D. J, Black W. P. M, 1958. The movement and distribution of water in soil in relation to highway design and performance. *Highway Res. Board Special Report*, Washington DC, 40, p. 226-252.
- Coussy, O., 1995. *Mechanics of Porous Continua*. Wiley Ltd., New York, p. 455.
- Eshelby, J. D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Royal Society London, A* 241, p. 376-396.
- Hoxha, D., Giraud, A, Homand, F., Auvray, C. , 2007. Saturated and unsaturated behaviour modelling of Meuse-Haute/Marne argillite. *International Journal of Plasticity* 23, p. 733–766.
- Khalili, N., Geiser, F., Blight, G.E., 2004. Effective stress in unsaturated soils, a review with new evidence. *Int. J. Geomech. ASCE* 42, p. 115–126.
- Khalili, N., Witt, N., Laloui, L., Vulliet, L., Koliji, A., 2005. Effective stress in double porous media with two immiscible fluids. *Geophys. Res. Lett.* 32 (15) Art. No. 15309.
- Levin, V. M., 1967. On the thermal expansion coefficients of heterogeneous materials. *Mechanics of Solids*. 1, p. 88-94.
- Mori., T., Tanaka, K., 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.* 21, p. 571-574.
- Shafiro, B., Kachanov, M., 1997. Materials with fluid-filled pores of various shapes: effective elastic properties and fluid pressure polarization. *Int. J. Solids Struct.* 34, p. 3517-3540.

Schrefler, B. A., 1990. Recent Advances in Numerical Modelling of Geomaterials, Key note Lecture. III EPMESC CONT. MACAU, Meccanica.

Van Genuchten, M. Th., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soil. Soil Sci. Soc.Am. J. 44, p. 892-898.