


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABOUBAKR BELKAID – TLEMCCEN  
Faculté des sciences  
Département de Mathématiques



**Mémoire de Fin d'Études En vue de l'Obtention du Diplôme de  
Master en Mathématiques  
Spécialité : Systèmes Dynamiques et Applications**

*Sur le thème*

***Stabilité Globale d'un modèle Ratio-Dépendant Structuré en  
Stade***

*Présenté par*

**Melle *Amina Dahaoui***

*Soutenu le 2 Juillet 2014 devant le jury composé de :*

|                           |                     |            |                    |
|---------------------------|---------------------|------------|--------------------|
| <i>Mr. S.E. Miri</i>      | <i>Président</i>    | <i>MCA</i> | <i>UAB-Tlemcen</i> |
| <i>Melle .C. Benosman</i> | <i>Examinatrice</i> | <i>MCB</i> | <i>UAB-Tlemcen</i> |
| <i>Mr. A. Attar</i>       | <i>Examineur</i>    | <i>MCB</i> | <i>UAB-Tlemcen</i> |
| <i>Mr. A. Moussaoui</i>   | <i>Encadreur</i>    | <i>MCA</i> | <i>UAB-Tlemcen</i> |

## *Dédicace*

*J*e dédie ce modeste travail à mes parents, mes frères,  
mes sœurs et à tous ceux qui me sont chers.

*Amina DAHAOUI*

## *Remerciements*

**J**e remercie **ALLAH** le Tout-puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail

J'exprime mes sincères remerciements à **Mr. A. Moussaoui**, Maître de Conférences à l'Université Abou Bekr Belkaïd de Tlemcen d'avoir accepté de m'encadrer, et je lui exprime particulièrement toute ma reconnaissance pour m'avoir fait bénéficier de ses compétences scientifiques, ses qualités humaines et sa constante disponibilité.

Je remercie sincèrement, **Mr. S .E. Miri** MCA à l'Université Abou Bekr Belkaïd de Tlemcen, d'avoir accepté de présider le Jury de ce mémoire.

Je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance à **Melle C. Benosman** et à **Mr. A. Attar** Maître de Conférences à l'Université Abou Bekr Belkaïd de Tlemcen pour le grand honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce mémoire.

En fin, je remercie tous ceux qui ont collaboré, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

# Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 0.1      | Introduction . . . . .                                  | 1         |
| <b>1</b> | <b>Notions préliminaires</b>                            | <b>3</b>  |
| 1.1      | Définition de la stabilité . . . . .                    | 3         |
| 1.2      | Fonction de Lyapunov . . . . .                          | 4         |
| 1.3      | Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .                 | 5         |
| <b>2</b> | <b>Quelques modèles de la dynamique des populations</b> | <b>8</b>  |
| 2.1      | Modèles avec une seule population . . . . .             | 8         |
| 2.1.1    | Modèle de Malthus . . . . .                             | 8         |
| 2.1.2    | Modèle de croissance logistique de Verhulst . . . . .   | 10        |
| 2.2      | Modèles avec deux populations . . . . .                 | 11        |
| 2.2.1    | Modèle de Lotka Volterra . . . . .                      | 11        |
| 2.2.2    | Modèle proie-prédateur de Holling . . . . .             | 12        |
| 2.2.3    | Modèle ratio-dépendant . . . . .                        | 14        |
| <b>3</b> | <b>Modèle ratio-dépendant proie prédateur</b>           | <b>15</b> |
| 3.1      | Présentation du modèle . . . . .                        | 15        |
| 3.2      | Persistance uniforme . . . . .                          | 16        |
| 3.3      | Stabilité globale . . . . .                             | 31        |
| 3.4      | Simulations numériques . . . . .                        | 39        |
| 3.5      | Conclusion . . . . .                                    | 41        |

## 0.1 Introduction

Les mathématiques sont de plus en plus présentes dans diverses disciplines et notamment en biologie. La modélisation en biologie a commencée à être utilisée en dynamique de population afin de modéliser non seulement la croissance des populations mais aussi les différentes interactions qui peuvent exister entre elles. Dans ce mémoire nous étudions la dynamique d'un système de dimension trois, ce modèle décrit une population proie juvénile, proie adulte et prédateur, il est basé sur le modèle de Lotka-Volterra et le ratio dépendant [1,2,3,6].

Nous intéressons à un modèle de type proie-prédateur ratio-dépendant

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_2(t) - r_1x_1(t) - bx_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} \\ \dot{y}(t) = y(t) \left( -r + \frac{a_2x_2(t)}{my(t) + x_2(t)} \right) \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$x_1(0) > 0, \quad x_2(0) > 0, \quad y(0) > 0$$

Où  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $y(t)$  sont les densités respectives de la proie juvénile, du proie adulte et du prédateur au temps  $t$ , et les constantes  $r, r_1, b, b_1, a, a_1, a_2, m$  sont les paramètres du modèle donné que nous supposons strictement positifs.

Ce travail est composé en trois chapitres:

Le premier chapitre, nous regroupons quelques outils mathématiques utilisés dans notre travail, en particulier, la notion de la stabilité au sens de Lyapunov. Nous introduisons aussi, le lemme de comparaison et les différentes définitions de la persistance.

Dans le second chapitre, nous rappelons les modèles classiques de Malthus, de Verhulst, et de Lotka Volterra.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème proie prédateur ratio-dépendant, nous montrons que les solutions du système sont asymptotiquement bornées. Nous étudions la stabilité locale et globale des points d'équilibre en construisant une fonction de Lyapunov appropriée. Nous donnons aussi des conditions sous lesquelles le modèle est uniformément persistant et nous terminons notre étude par des simulations numériques qui illustrent les résultats.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

### 1.1 Définition de la stabilité

Considérons un système continu autonome décrit par une équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

$x^*$  est appelé point d'équilibre pour le système (1.1) s'il est vérifie l'équation

$$f(x^*) = 0 \quad (1.2)$$

le point d'équilibre  $x^*$  est stable : si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$  tel que:

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad \forall t > 0 \quad (1.3)$$

sinon il est instable.

Le point d'équilibre  $x^*$  est asymptotiquement stable s'il est stable et il existe  $r > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.1) on a

$$\|x(0) - x^*\| < r \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0 \quad (1.4)$$

**Définition 1** (*stabilité globale*)

L'équilibre  $x^*$  est dit globalement asymptotiquement stable, s'il est stable asymptotiquement pour n'importe quelle condition initiale dans  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2 Fonction de Lyapunov

Soit  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, où  $\Omega$  désigne un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) contenant l'équilibre  $x^*$ . On dira que  $V(x)$  est définie positive (respectivement définie négative) si et seulement si :

1.  $V(x^*) = 0$  ;
2.  $V(x) > 0$  (respectivement  $V(x) < 0$ )  $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}$ ,

Elle est dite semi-définie positive (respectivement semi-définie négative) si et seulement si :

1.  $V(x^*) = 0$  ;
2.  $V(x) \geq 0$  (respectivement  $V(x) \leq 0$ ),  $\forall x \in \Omega$



### 1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit  $x(t)$  solution de  $\dot{x} = f(x)$  et  $V$  une fonction de classe  $\mathbb{C}^1$  définie positive sur  $\Omega$  un voisinage de  $x^* = 0$

(i) Si  $\dot{V}$  est semi-définie négative alors  $x^*$  est stable pour le système (1.1)

(ii) Si  $\dot{V}$  est définie négative alors  $x^*$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.1).

Dans le cas (i)  $V(x)$  est dite fonction de Lyapunov faible, et dans le cas (ii)  $V(x)$  est dite fonction de Lyapunov stricte [19].

**Lemme 2** (*lemme de comparaison*) considérons le problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (1.5)$$

$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue de classe  $C^1$  et supposons que sa solution  $x(t)$  est définie pour tout  $t \geq 0$ .

Soit inégalité différentielle

$$\dot{u} \leq f(t, u) \quad , \quad u(0) = u_0$$

avec  $u_0 \leq x_0$ .

Alors la solution  $u(t)$  de l'inégalité différentielle est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie

$$u(t) \leq x(t)$$

**Proposition 3** On considère un système d'équations différentielles sur  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (1.6)$$

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_n(t, x))$ , où  $F(t, x)$  est définie pour tout  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  supposons que  $F$  a la propriété que les solutions des problèmes aux conditions initiales  $x(t_0) = x_0$  sont unique pour  $x_0 \in [0, \infty)^n$ ,  $t_0 \geq 0$ , que pour tout  $j = 1, \dots, n$ ,  $t \geq 0$ , on a  $F_j(t, x) \geq 0$  pour  $x \in [0, \infty)^n$ ,  $x_j = 0$   $t \geq 0$

alors  $x(t) \in [0, \infty)^n$  pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  pour laquelle elle est définie pour tout  $x(t_0) \in [0, \infty)^n$ .

L'autre notion à définir est celle de la persistance.

Considérons pour cela un système d'équations différentielles ordinaires modélisant l'interaction de deux (ou plusieurs) espèces biologiques i.e ( $x_i \geq 0$ )

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2. \quad (1.7)$$

On suppose que le système (1.7) a la propriété d'existence et d'unicité des solutions et que ces solutions sont définies pour tout  $t \geq 0$ . Soit  $(x_1(t), x_2(t))$  une solution de (1.7) de condition initiale strictement positive  $(x_1(0), x_2(0))$ .

Le système (1.7) est dit :

Faiblement persistant si

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) > 0, \quad \text{pour tout } i = 1, 2.$$

Faiblement uniformément persistant s'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que, pour toute condition initiale  $(x_1(0), x_2(0))$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) > \varepsilon, \quad \text{pour tout } i = 1, 2.$$

Persistant si

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) > 0, \text{ pour tout } i = 1, 2.$$

Uniformément persistant s'il existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour toute condition initiale  $(x_1(0), x_2(0))$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) > \varepsilon_0, \text{ pour tout } i = 1, 2.$$

Dissipatif s'il existe une constante  $M_i > 0$  telle que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) < M_i, \text{ pour tout } i = 1, 2.$$

Le système (1.7) est dit permanent s'il est uniformément persistant et dissipatif [22].

Le système (1.7) est dit impermanent si

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) \right\} = 0$$

Pour plus de détails sur les différentes définitions de la persistance, nous nous référons à Freedman et Moson [8] et Thieme [20].

**Lemme 4** (*lemme de Barbalat*) [10]

Soit  $f$  une fonction positif définie sur  $[0, \infty)$

(i) Si  $f$  est intégrable et uniformément continue alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

(ii) Si  $f$  est intégrable et  $\dot{f}$  est uniformément continue alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{f}(t) = 0$ .

## Chapitre 2

# Quelques modèles de la dynamique des populations

### 2.1 Modèles avec une seule population

#### 2.1.1 Modèle de Malthus

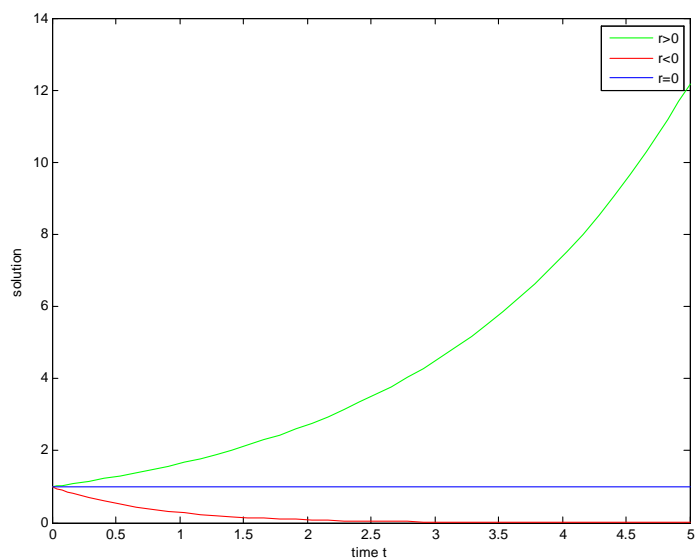
Ce modèle a été proposé par Thomas Malthus en 1798 [11,16,7]. Il suppose que la population possède un taux de croissance  $r$  constant, simple différence du taux de natalité et du taux de mortalité car la population est supposée isolée c'est-à-dire aucune migration n'est envisagée. En désignant par  $N(t)$  la taille de la population à l'instant  $t$ .

La forme générale de la loi de croissance de la population est la suivante :

$$\dot{N}(t) = rN(t)$$

avec la condition initiale  $N(0) = N_0$

La solution de cette équation différentielle :  $N(t) = N_0 \exp rt$



**Fig.1: Modèle de malthus**

On voit que :

Si  $r > 0$  il y a croissance exponentielle de la population.

Si  $r < 0$  il y a décroissance exponentielle de la population qui tend vers une extinction.

Si  $r = 0$  la population reste constante.

### 2.1.2 Modèle de croissance logistique de Verhulst

C'est suite aux considérations précédentes, que le biologiste belge Pierre-François-Verhulst [7,18,21] propose en 1838 un modèle amélioré tenant compte de la limitation imposée par l'effectif croissant de la population. Il suppose que le taux d'accroissement par capita de la population est donné par:

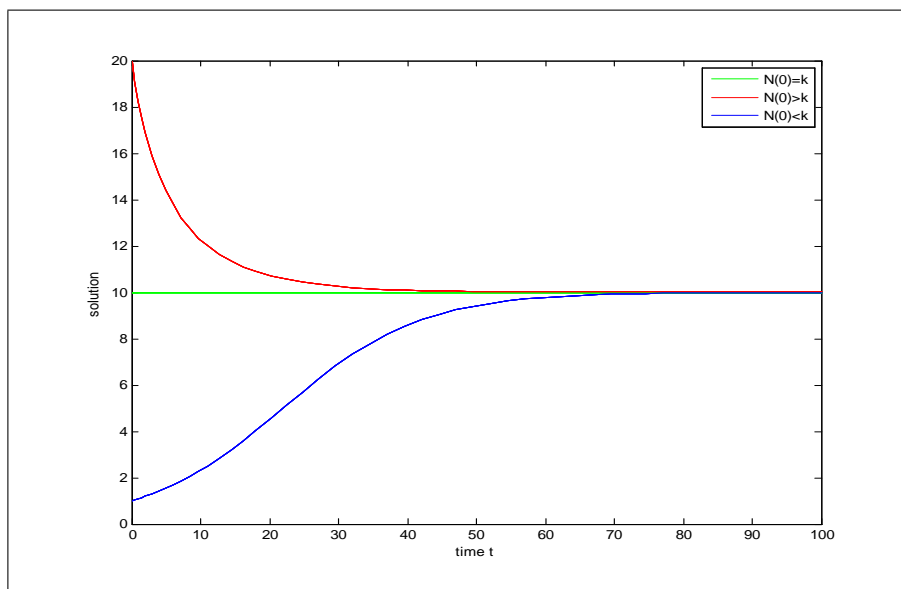
$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

avec la condition initiale  $N(0) = N_0$

$K$  : la capacité limite du milieu

La solution est donnée par :

$$N(t) = N_0 \frac{K \exp rt}{K + N_0(\exp rt - 1)}$$



**Fig.2: Modèle Logistique ,  $r = 0.1$  ,  $k = 10$ .**

On voit que :

Si  $N(0) < k$  La population croit et s'approche asymptotiquement de  $k$   
quand  $t \rightarrow +\infty$

Si  $N(0) > k$  la population décroît et elle s'approche asymptotiquement de  $k$   
quand  $t \rightarrow +\infty$

Et dans le cas ou  $N(0) = k$  la population reste constante pour tout ( $t > 0$ ).

## 2.2 Modèles avec deux populations

### 2.2.1 Modèle de Lotka Volterra

Le système proies-prédateur a été imaginé par Volterra en 1925 pour modéliser l'évolution de sardines et des requins dans la mer Adriatique. Un modèle similaire a été développé par Lotka, un scientifique américain à la même époque. Ce modèle se présente sous la forme deux équations différentielles.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + ebxy \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Où

$x$  : densité de proies

$y$  : densité de prédateur

$a$ : le taux de croissance des proies

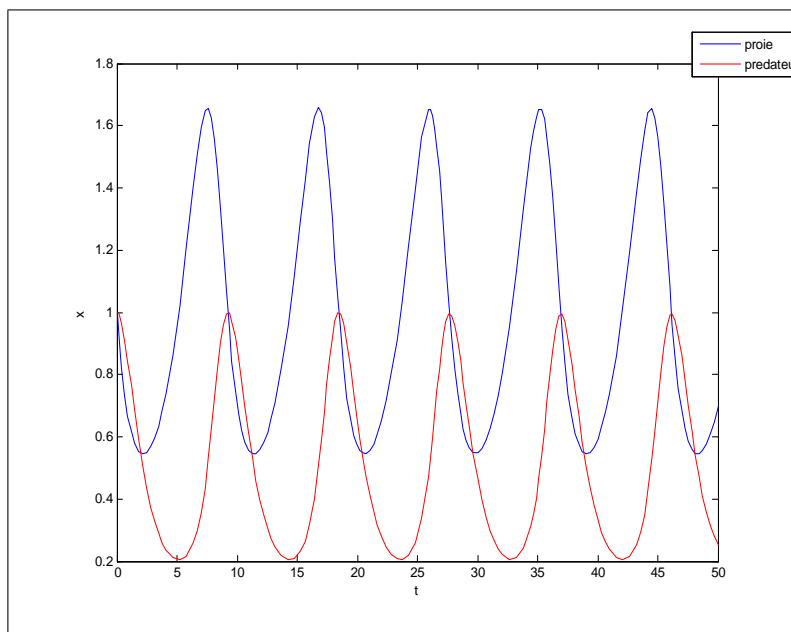
$b$ : le taux de prédation

$c$  : le taux de mortalité des prédateurs

$e$  : le taux de conversion.

le modèle de Lotka-Volterra prévoit des centres, qui sont structurellement instables.

Cela veut dire que ce dernier admet des solutions périodiques.



**Fig.3: Modèle de Lotka-Volterra**

Les valeurs des paramètres utilisées dans la simulation sont :

$a = 0.5$ ;  $b = 1$ ;  $c = 1$ ;  $e = 0.4$  avec la condition initiale  $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ .

### 2.2.2 Modèle proie-prédateur de Holling

La forme assez générale, d'un modèle proie-prédateur est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - h(x, y) \\ \dot{y} = g(y) + eh(x, y) \end{cases}$$

où le signe négatif devant la fonction  $h(x, y)$  indique que l'interaction avec les prédateurs a un effet négatif sur la croissance des proies.



Le paramètre  $e > 0$  est le taux de conversion de la biomasse des proies en biomasse des prédateurs. Il est usuel de considérer le nombre de proies tuées par un seul prédateur par unité de temps qui est aussi appelé la fonction réponse du modèle proie-prédateur. Dans le modèle de Lotka-Volterra présenté précédemment, la fonction réponse  $\varphi(x, y)$  est la suivante:

$$\varphi(x, y) = \frac{h(x, y)}{y}$$

Dans le cas particulier du modèle de Lotka-Volterra, la fonction  $h(x, y) = axy$  et il vient donc :

$$\varphi(x, y) = ax$$

Cependant, il est évident que cette fonction réponse est irréaliste. En effet,  $\varphi$  est proportionnelle à  $x$ , cela veut dire que le nombre de proies ingurgitées par un seul prédateur peut être très grand si  $x$  est grand. On doit plutôt s'attendre à une limitation du nombre de proies tuées et ingurgitées par un prédateur même si la densité des proies est grande. Les capacités physiologiques d'absorption de proies par un prédateur sont limitées, et même si un grand nombre de proies est disponible, un prédateur ne pourra pas absorber un nombre de proies supérieur à cette limite. Il est donc plus réaliste de concevoir une fonction réponse présentant un effet de saturation avec la densité des proies.

Une telle fonction réponse présentant un plateau pour les grandes densités de proies est dite fonction réponse de type II, en opposition à la fonction réponse de Lotka-Volterra appelée de type I. La fonction de type II dite de Holling est la suivante :

$$\varphi(x, y) = \frac{ax}{x + D}$$

Où  $D$  est une constante positive. Le modèle du prédateur-proie de Holling est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{ax}{x + D} \\ \dot{y} = -my + e\frac{ax}{x + D} \end{cases}$$

Pour l'analyse mathématique de ce modèle, nous renvoyons le lecteur à [5].

### 2.2.3 Modèle ratio-dépendant

En 1989, Roger Arditi et Lev R. Ginzburg ont proposé un modèle appelé ratio-dépendant, c'est-à-dire le ratio entre le nombre de proies et le nombre de prédateurs.

La réponse fonctionnelle ratio-dépendant s'écrit sous la forme suivante :

$$P\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{c\left(\frac{x}{y}\right)}{m + \left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{cx}{my + x}$$

Le modèle ratio-dépendant est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx) - \frac{cxy}{my + x} \\ \dot{y} = -dy + \frac{fxy}{my + x} \end{cases}$$

Pour plus de détails sur ce modèle, nous renvoyons le lecteur à [2].

## Chapitre 3

# Modèle ratio-dépendant proie prédateur

Dans ce chapitre nous étudions la dynamique d'un système continu de dimension trois, Nous analysons la bornitude des solutions positives, la stabilité locale et globale des points d'équilibres positifs.

### 3.1 Présentation du modèle

Nous intéressons à un modèle de type proie-prédateur ratio-dépendant structuré en stade

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_2(t) - r_1x_1(t) - bx_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} \\ \dot{y}(t) = y(t) \left( -r + \frac{a_2x_2(t)}{my(t) + x_2(t)} \right) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$x_1(0) > 0, \quad x_2(0) > 0, \quad y(0) > 0 \quad (3.2)$$

Où  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $y(t)$  sont les densités respectives de la proie juvénile, du proie adulte et du prédateur au temps  $t$ . et les constantes  $r, r_1, b, b_1, a, a_1, a_2, m$  sont des paramètres supposés strictement positifs.

### 3.2 Persistance uniforme

**Lemme 5** *les solutions du système (3.1) avec les conditions initiales (3.2) sont asymptotiquement bornées*

**Preuve.** Soit  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  la solution du système (3.1) avec les conditions initiales

(3.2)

Considérons la fonction

$$\rho(t) = x_1(t) + x_2(t) + \frac{a_1}{a_2}y(t)$$

la dérivée de  $\rho(t)$  par rapport au temps  $t$

$$\dot{\rho}(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + \frac{a_1 r}{a_2} \dot{y}(t)$$

A partir du système (3.1) nous avons

$$\dot{\rho}(t) = ax_2(t) - rx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1 r}{a_2}y(t)$$

Notons par  $A = \min \{r, r_1\}$

$$\dot{\rho}(t) \leq ax_2(t) - Ax_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1 A}{a_2}y(t)$$

d'où

$$\dot{\rho}(t) \leq ax_2(t) - Ax_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1A}{a_2}y(t) + Ax_2 - Ax_2(t)$$

$$\dot{\rho}(t) \leq -Ax_1(t) - Ax_2(t) - \frac{a_1A}{a_2}y(t) + ax_2(t) + Ax_2(t) - b_1x_2^2(t)$$

$$\dot{\rho}(t) \leq -A\rho(t) + (a + A)x_2(t) - b_1x_2^2(t)$$

De plus, on vérifie facilement que

$$\max_{x \in \mathbb{R}^+} [(a + A)x_2(t) - b_1x_2^2(t)] = \frac{(a + A)^2}{4b_1}$$

on obtient alors l'inégalité suivante :

$$\dot{\rho}(t) \leq -A\rho(t) + \frac{(a + A)^2}{4b_1}$$

alors

$$\dot{\rho}(t) + A\rho(t) \leq \frac{(a + A)^2}{4b_1}$$

multiplions les deux membres par  $\exp(At)$

$$(\dot{\rho}(t) + A\rho(t)) \exp(At) \leq \frac{(a + A)^2}{4b_1} \exp(At)$$

C'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} (\rho(t) \exp(At)) \leq \frac{(a + A)^2}{4b_1} \exp(At)$$

integrant entre 0 et  $t$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left( \frac{d}{ds} (\rho(s) \exp(As)) \right) ds &\leq \int_0^t \frac{(a+A)^2}{4b_1} \exp(As) ds \\
\rho(t) \exp(At) - \rho(0) &\leq \frac{(a+A)^2}{4b_1} \left[ \frac{1}{A} \exp(As) \right]_0^t \\
\rho(t) \exp(At) - \rho(0) &\leq \frac{(a+A)^2}{4b_1} \left[ \frac{1}{A} \exp(At) - \frac{1}{A} \right] \\
\rho(t) \exp(At) &\leq \frac{(a+A)^2}{4Ab_1} \exp(At) - \frac{(a+A)^2}{4Ab_1} + \rho(0) \\
\rho(t) &\leq \frac{(a+A)^2}{4Ab_1} - \frac{(a+A)^2}{4Ab_1} \exp(-At) + \rho(0) \exp(-At)
\end{aligned}$$

On trouve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(t) \leq \frac{(a+A)^2}{4Ab_1} := M^*$$

donc il existe une constant positive  $M^* < M$  et  $T_1 > 0$  telque si  $t \geq T_1$  ;

$\rho(t) \leq M^* < M$ , ceci implique que les solutions sont définies pour tout  $t \geq 0$  et

sont bornées i.e. le système (3.1) est dissipatif. ■

**Théorème 6** *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

$$(H1) \quad a_1 > r ,$$

$$(H2) \quad \frac{ab}{r_1 + b} > \frac{a_1}{m} .$$

alors le système (3.1) est uniformément persistant.

**Preuve.** La preuve est donnée en plusieurs étapes

Considérons les solutions positives  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  du système (3.1) avec les conditions initiales  $(x_1(0), x_2(0), y(0))$

-1) écrire la seconde équation du système (3.1) sous la forme suivante :

$$\dot{x}_2(t) \geq bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1}{m}x_2(t)$$

on a

$$\dot{x}_2(t) = bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)}$$

d'où

$$\dot{x}_2(t) = bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)}{m} \left( \frac{y(t)}{y(t) + \frac{x_2(t)}{m}} \right)$$

comme

$$\frac{y(t)}{y(t) + \frac{x_2(t)}{m}} \leq 1$$

Multiplions l'inégalité par  $\left(-\frac{a_1x_2(t)}{m}\right)$

$$-\frac{a_1x_2(t)}{m} \left( \frac{y(t)}{y(t) + \frac{x_2(t)}{m}} \right) \geq -\frac{a_1x_2(t)}{m}$$

On ajoute  $bx_1(t) - b_1x_2^2(t)$

$$bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)}{m} \left( \frac{y(t)}{y(t) + \frac{x_2(t)}{m}} \right) \geq bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1}{m}x_2(t)$$

Alors on obtient

$$\dot{x}_2(t) \geq bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1}{m}x_2(t)$$

on trouve le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_2(t) - rx_1(t) - bx_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \geq bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1}{m}x_2(t) \end{cases}$$

■

-2) Etude de la stabilité:

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = au_2(t) - r_1u_1(t) - bu_1(t) \\ \dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1u_2^2(t) - \frac{a_1}{m}u_2(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système (3.3) a deux points d'équilibres :  $E_0(0,0)$  ,  $E_1^*(u_1^*, u_2^*)$

$$\begin{aligned} \text{où } u_1^* &= \frac{au_2^*}{r_1 + b}, \\ u_2^* &= \frac{1}{b_1} \left( \frac{ab}{r_1 + b} - \frac{a_1}{m} \right) \end{aligned}$$

La matrice jacobienne du système (3.3) au point  $E_0(0,0)$  est:

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -(r_1 + b) & a \\ b & -\frac{a_1}{m} \end{pmatrix}$$

Le déterminant est donné par:

$$\begin{aligned} \det J_{E_0} &= (r_1 + b) \frac{a_1}{m} - ab \\ \text{on à } \frac{ab}{r_1 + b} &> \frac{a_1}{m} \implies (r_1 + b) \frac{a_1}{m} - ab < 0 \\ \text{donc } \det J_{E_0} &< 0 \end{aligned}$$

et la trace vaut:

$$\text{tr } J_{E_0} = -(r_1 + b) - \frac{a_1}{m} < 0$$

Alors le point  $E_0(0,0)$  est un point-selle.

La matrice jacobienne du système (3.3) au point  $E_1^*(u_1^*, u_2^*)$  est:

$$J_{E_1^*} = \begin{pmatrix} -(r_1 + b) & a \\ b & -2 \left( \frac{ab}{r_1 + b} - \frac{a_1}{m} \right) - \frac{a_1}{m} \end{pmatrix}$$

Le déterminant est donné par:

$$\begin{aligned} \det J_{E_1^*} &= 2(r_1 + b) \left( \frac{ab}{r_1 + b} - \frac{a_1}{m} \right) + \frac{a_1}{m} \\ &= 2ab - \frac{2(r_1 + b)a_1}{m} + \frac{(r_1 + b)a_1}{m} \end{aligned}$$



$$= 2ab - \frac{(r_1 + b)a_1}{m} > 0$$

et la trace vaut:

$$\text{tr } J_{E_1^*} = -(r_1 + b) - 2 \left( \frac{ab}{r_1 + b} - \frac{a_1}{m} \right) - \frac{a_1}{m} < 0$$

Alors le point  $E_1^*(u_1^*, u_2^*)$  est stable

-3) écrire le système (3.3) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = \frac{a}{u_1^*} [-u_2(t)(u_1(t) - u_1^*) + u_1(t)(u_2(t) - u_2^*)] \\ \dot{u}_2(t) = \frac{b}{u_2^*} [-u_1(t)(u_2(t) - u_2^*) + u_2(t)(u_1(t) - u_1^*)] - b_1 u_2(t)(u_2(t) - u_2^*) \end{cases} \quad (3.4)$$

La première équation du système (3.3) donne:

$$\dot{u}_1 = au_2(t) - r_1 u_1(t) - bu_1(t)$$

$$\dot{u}_1 = au_2(t) - (r_1 + b)u_1(t)$$

$$\dot{u}_1 = a \left[ u_2(t) - \frac{(r_1 + b)}{a} u_1(t) \right]$$

$$\text{De plus on a } u_1^* = \frac{au_2^*}{r_1 + b} \implies \frac{r_1 + b}{a} = \frac{u_2^*}{u_1^*}$$

$$\dot{u}_1(t) = a \left[ u_2(t) - \frac{u_2^*}{u_1^*} u_1(t) \right]$$

$$\dot{u}_1(t) = \frac{a}{u_1^*} [u_2(t)u_1^* - u_2^*u_1(t)]$$

d'où

$$\dot{u}_1(t) = \frac{a}{u_1^*} [u_2(t)u_1^* - u_2^*u_1(t) + u_2(t)u_1(t) - u_2(t)u_1(t)]$$

On obtient

$$\dot{u}_1(t) = \frac{a}{u_1^*} [-u_2(t)(u_1(t) - u_1^*) + u_1(t)(u_2(t) - u_2^*)]$$

La deuxième équation du système (3.3) donne:

$$\begin{aligned}\dot{u}_2(t) &= bu_1(t) - b_1u_2^2(t) - \frac{a_1}{m}u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) &= bu_1(t) - b_1u_2(t) \left[ u_2(t) + \frac{a_1}{b_1m} \right]\end{aligned}$$

On a  $u_2^* = \frac{1}{b_1} \left( \frac{ab}{r_1 + b} - \frac{a_1}{m} \right) \implies \frac{a_1}{b_1m} = -u_2^* + \frac{ab}{b_1(r_1 + b)}$

$$\dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1u_2(t) \left[ u_2(t) - u_2^* + \frac{ab}{(r_1 + b)b_1} \right] \quad (3.5)$$

or  $u_1^* = \frac{au_2^*}{r_1 + b} \implies \frac{a}{r_1 + b} = \frac{u_1^*}{u_2^*}$

On remplace dans l'équation (3.5)

$$\begin{aligned}\dot{u}_2(t) &= bu_1(t) - b_1u_2(t) \left[ u_2(t) - u_2^* + \frac{bu_1^*}{b_1u_2^*} \right] \\ \dot{u}_2(t) &= bu_1(t) - b_1u_2^2(t) + b_1u_2(t)u_2^* - \frac{bu_1^*u_2(t)}{u_2^*} \\ \dot{u}_2(t) &= bu_1(t) - \frac{bu_1^*u_2(t)}{u_2^*} - b_1u_2^2(t) + b_1u_2(t)u_2^* \\ \dot{u}_2(t) &= \frac{bu_2^*u_1(t) - bu_1^*u_2(t)}{u_2^*} - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*)\end{aligned}$$

d'où

$$\dot{u}_2(t) = \frac{b}{u_2^*} (u_2^*u_1(t) - u_1^*u_2(t) + u_1u_2 - u_1u_2) - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*)$$

On obtient

$$\dot{u}_2(t) = \frac{b}{u_2^*} [-u_1(t)(u_2(t) - u_2^*) + u_2(t)(u_1(t) - u_1^*)] - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*)$$

Le système (3.3) se réécrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = \frac{a}{u_1^*} [-u_2(t)(u_1(t) - u_1^*) + u_1(t)(u_2(t) - u_2^*)] \\ \dot{u}_2(t) = \frac{b}{u_2^*} [-u_1(t)(u_2(t) - u_2^*) + u_2(t)(u_1(t) - u_1^*)] - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*) \end{cases}$$

-4) Considérons la fonction de Lyapunov

$$V_1(t) = c_1 \left( u_1 - u_1^* - u_1^* \ln \frac{u_1}{u_1^*} \right) + c_2 \left( u_2 - u_2^* - u_2^* \ln \frac{u_2}{u_2^*} \right)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes à déterminer

La dérivée de  $V_1(t)$  le long des trajectoires de (3.4) est donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^2 c_i (u_i(t) - u_i^*) \frac{\dot{u}_i(t)}{u_i(t)} \\ &= \frac{c_1 a (u_1(t) - u_1^*)}{u_1^* u_1(t)} [-u_2(t) (u_1(t) - u_1^*) + u_1(t) (u_2(t) - u_2^*)] \\ &\quad + \frac{c_2 b (u_2(t) - u_2^*)}{u_2(t) u_2^*} [-u_1(t) (u_2(t) - u_2^*) + u_2(t) (u_1(t) - u_1^*)] \\ &\quad - c_2 b (u_2(t) - u_2^*)^2 \end{aligned}$$

On pose  $c_1 = \frac{b u_1^*}{a u_2^*}$ ,  $c_2 = 1$

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -\frac{b_1}{u_2^*} \left[ \sqrt{\frac{u_2(t)}{u_1(t)}} (u_1(t) - u_1^*) + \sqrt{\frac{u_1(t)}{u_2(t)}} (u_2(t) - u_2^*) \right]^2 - b_1 (u_2(t) - u_2^*)^2$$

On observe que

$$-\frac{b_1}{u_2^*} \left[ \sqrt{\frac{u_2(t)}{u_1(t)}} (u_1(t) - u_1^*) + \sqrt{\frac{u_1(t)}{u_2(t)}} (u_2(t) - u_2^*) \right]^2 < 0$$

Cela conduit à l'inégalité

$$\frac{dV_1(t)}{dt} \leq -b_1 (u_2(t) - u_2^*)^2$$

intégrant entre 0 et  $t$

$$V_1(t) + b_1 \int_0^t (u_2(s) - u_2^*)^2 ds \leq 0$$

ceci implique que  $(u_2(t) - u_2^*)^2 \in L^1[0, \infty)$ , les solutions  $(u_1(t), u_2(t))$  du système (3.3)

sont bornées; on démontre que  $u_2(t) - u_2^*$  et  $\dot{u}_2(t)$  sont uniformément continues; et d'après

lemme de Barbalat (page 7)

on conclut que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_2(t) - u_2^*)^2 = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}_2(t) = 0$ ,

ceci implique que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = u_2^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = u_1^*$$

Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, il existe  $T_2 \geq T_1$  telque  $t \geq T_2$

$$\text{Nous avons donc } u_1(t) \geq u_1^* - \frac{\varepsilon}{2}, \quad u_2(t) \geq u_2^* - \frac{\varepsilon}{2};$$

en utilisant le principe de comparaison,

$$\text{on trouve alors que } \liminf_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \geq u_1^* - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} x_2(t) \geq u_2^* - \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit il existe  $T_2 \geq T_1$  telque  $t \geq T_2$ ,

$$x_1(t) \geq u_1^* - \varepsilon, \quad x_2(t) \geq u_2^* - \varepsilon \quad x_2(t) \geq u_2^* - \varepsilon$$

$$\text{-5) montrons que } \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{u_2^*(a_2 - r)}{2mr}$$

$$\text{On a } x_2(t) > \frac{x_2(t)}{2}$$

$$\text{et pour } \varepsilon > 0, \quad x_2(t) > u_2^* - \varepsilon \implies \frac{x_2(t)}{2} > \frac{u_2^*}{2} - \varepsilon$$

La troisième équation du modèle (3.1) donne

$$\dot{y}(t) = y(t) \left( -r + \frac{a_2 x_2(t)}{m y(t) + x_2(t)} \right)$$

$$\text{D'autre part: } \frac{x_2(t)}{2} > \frac{u_2^*}{2} - \varepsilon$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &> y(t) \left( -r + \frac{a_2 \frac{u_2^*}{2}}{my(t) + \frac{u_2^*}{2}} \right) \\
 \dot{y}(t) &> y(t) \left( \frac{-r \left( my(t) + \frac{u_2^*}{2} \right) + a_2 \frac{u_2^*}{2}}{my(t) + \frac{u_2^*}{2}} \right) \\
 \dot{y}(t) &> \frac{y(t)}{my(t) + \frac{u_2^*}{2}} \left[ -r \left( my(t) + \frac{u_2^*}{2} \right) + a_2 \frac{u_2^*}{2} \right] \\
 \dot{y}(t) &> \frac{y(t)}{m \left( y(t) + \frac{u_2^*}{2m} \right)} \left[ -r \left( my(t) + \frac{u_2^*}{2} \right) + a_2 \frac{u_2^*}{2} \right] \\
 \dot{y}(t) &> \frac{y(t)}{\left( y(t) + \frac{u_2^*}{2m} \right)} \left[ \frac{-r \left( my(t) + \frac{u_2^*}{2} \right) + a_2 \frac{u_2^*}{2}}{m} \right]
 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
 \frac{y(t)}{y(t) + \frac{u_2^*}{2m}} &\leq 1 \\
 \left[ \frac{-r \left( my(t) + \frac{u_2^*}{2} \right) + a_2 \frac{u_2^*}{2}}{m} \right] \left[ \frac{y(t)}{y(t) + \frac{u_2^*}{2m}} \right] &\geq \frac{-r \left( my(t) + \frac{u_2^*}{2} \right) + a_2 \frac{u_2^*}{2}}{m} \\
 \dot{y}(t) &\geq \frac{-r \left( my(t) + \frac{u_2^*}{2} \right) + a_2 \frac{u_2^*}{2}}{m} \\
 \dot{y}(t) &\geq \frac{-rmy(t) + (a_2 - r) \frac{u_2^*}{2}}{m} \\
 \dot{y}(t) &\geq -ry(t) + \frac{(a_2 - r) u_2^*}{2m} \\
 \dot{y}(t) + ry(t) &\geq \frac{(a_2 - r) u_2^*}{2m}
 \end{aligned}$$

En résolvant l'équation suivante

$$\dot{y}(t) + ry(t) \geq \frac{(a_2 - r) u_2^*}{2m}$$

On trouve

$$y(t) \geq \frac{(a_2 - r) u_2^*}{2mr} + y(0) \exp(-rt)$$

Nous obtenons:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \frac{(a_2 - r) u_2^*}{2mr}$$

Conclusion : le système (3.1) est uniformément persistant.

**Théorème 7** si  $a_2 < r$

$$\text{ou } r_1 > r \text{ et } \frac{a_1}{m - a} > r,$$

alors le système (3.1) est impermanent

**Preuve.** Pour montrer que le système (3.1) est impermanence on distingue deux cas: ■

**Le premier cas:** si  $a_2 < r$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

La troisième équation du modèle (3.1) donne

$$\dot{y}(t) = -ry(t) + a_2y(t) \frac{x_2(t)}{my(t) + x_2(t)}$$

comme

$$\begin{aligned} \frac{x_2(t)}{x_2(t) + my(t)} &\leq 1 \\ a_2y(t) \frac{x_2(t)}{x_2(t) + my(t)} &\leq a_2y(t) \\ -ry(t) + a_2y(t) \frac{x_2(t)}{x_2(t) + my(t)} &\leq -ry(t) + a_2y(t) \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité suivante:

$$\dot{y}(t) \leq (a_2 - r)y(t)$$

$$\dot{y}(t) - (a_2 - r)y(t) \leq 0$$

La solution est donnée par

$$y(t) = y(0) \exp(a_2 - r)t$$

puisque  $a_2 < r$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ ; dans ce cas le prédateur va vers l'extinction.

**Deuxième cas:** si  $r_1 > r$  et  $\frac{a}{m-a} > r$

La preuve se fera par l'absurde

Supposons qu'il existe  $t_1 > 0$  tel que  $\frac{x_1(t_1) + x_2(t_1)}{y(t_1)} = \beta$ ,

et pour  $t \in [0, t_1)$   $\frac{x_1(t) + x_2(t)}{y(t)} < \beta$

La somme de la première et la deuxième équation du système (3.1) donne:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) &= ax_2(t) - r_1x_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} \\ \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) &\leq ax_2(t) - r_1x_1(t) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} \\ \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) &\leq ax_2(t) - r_1x_1(t) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{y(t)\left(m + \frac{x_2(t)}{y(t)}\right)} \\ &\leq ax_2(t) - r_1x_1(t) - \frac{a_1x_2(t)}{m + \frac{x_2(t)}{y(t)}} \\ &\leq -r_1x_1(t) + x_2(t) \left[ a - \frac{a_1}{m + \frac{x_2(t)}{y(t)}} \right] \end{aligned}$$

on pose  $\beta = \frac{x_2(t)}{y(t)}$

d'où

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) \leq -r_1x_1(t) + x_2(t) \left[ a - \frac{a_1}{m + \beta} \right]$$

or  $\frac{a_1}{(m + \beta)} = a + r \implies a - \frac{a_1}{(m + \beta)} = r$

alors l'inégalité devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) &\leq -rx_1(t) - rx_2(t) \\ \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) &\leq -r(x_1(t) + x_2(t)) \\ \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) + r(x_1(t) + x_2(t)) &\leq 0 \\ \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) \exp rt + r(x_1(t) + x_2(t)) \exp rt &\leq 0 \\ \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) \exp rt &\leq 0 \\ \int_0^s \left( \frac{d}{ds}(x_1(s) + x_2(s)) \exp rs \right) ds &\leq 0 \\ x_1(t) + x_2(t) &\leq (x_1(0) + x_2(0)) \exp(-rt) \end{aligned}$$

De plus

$$y(t) \geq y(0) \exp(-rt)$$

$$\text{donc } \exp(-rt) \leq \frac{y(t)}{y(0)}$$

d'où

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &\leq (x_1(0) + x_2(0)) \frac{y(t)}{y(0)} \\ \frac{x_1(t) + x_2(t)}{y(t)} &\leq \frac{x_1(0) + x_2(0)}{y(0)} \end{aligned}$$

et on a posé

$$\delta = \frac{x_1(0) + x_2(0)}{y(0)} < \beta$$

$$\frac{x_1(t) + x_2(t)}{y(t)} \leq \frac{x_1(0) + x_2(0)}{y(0)} = \delta < \beta$$

alors  $\frac{x_1(t) + x_2(t)}{y(t)} < \beta$  pour tout  $t \in [0, t_1]$ ; donc contradiction.

puisque  $x_1(t) + x_2(t) \leq (x_1(0) + x_2(0)) \exp(-rt)$  pour  $t \geq 0$

on trouve  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t) + x_2(t)) = 0$



$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$$

**Théorème 8** si  $r_1 > r$  et  $\frac{a_1}{m-a}$ , alors il existe une solution positive  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  du système (3.1) vérifiant  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), x_2(t), y(t)) = (0, 0, 0)$

**Preuve.** D'après la démonstration du théorème (7): ■

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$$

et Puisque  $y(t)$  est positive et bornée alors:

$$0 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) = s < +\infty$$

La preuve se fera par l'absurde

Supposons qu'il existe  $t \geq T_4$  tel que  $x_2(t) < \frac{mrs}{2a_2}$

D'autre part qu'il existe  $t_1 \geq T_4$  tel que  $y(t_1) > \frac{s}{2}$  et  $\dot{y}(t_1) > 0$

on a

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_1) &> 0 \\ -ry(t_1) + \frac{a_2 x_2(t_1) y(t_1)}{m y(t_1) + x_2(t_1)} &> 0 \\ -ry(t_1) + \frac{a_2 x_2(t_1) y(t_1)}{m \left( y(t_1) + \frac{x_2(t_1)}{m} \right)} &> 0 \end{aligned}$$

du faite que

$$\frac{y(t_1)}{y(t_1) + \frac{x_2(t_1)}{m}} \leq 1$$

nous obtenons l'inégalité suivante:

$$\dot{y}(t_1) \leq \frac{a_2 x_2(t_1)}{m} - ry(t_1) \tag{3.8}$$

puisque  $\dot{y}(t_1) > 0$  alors  $\frac{a_2 x_2(t_1)}{m} > ry(t_1) \implies x_2(t_1) > \frac{rmy(t_1)}{a_2}$

et on a  $y(t_1) > \frac{s}{2}$  donc  $x_2(t_1) > \frac{rm}{a_2}y(t_1) > \frac{rms}{2a_2}$

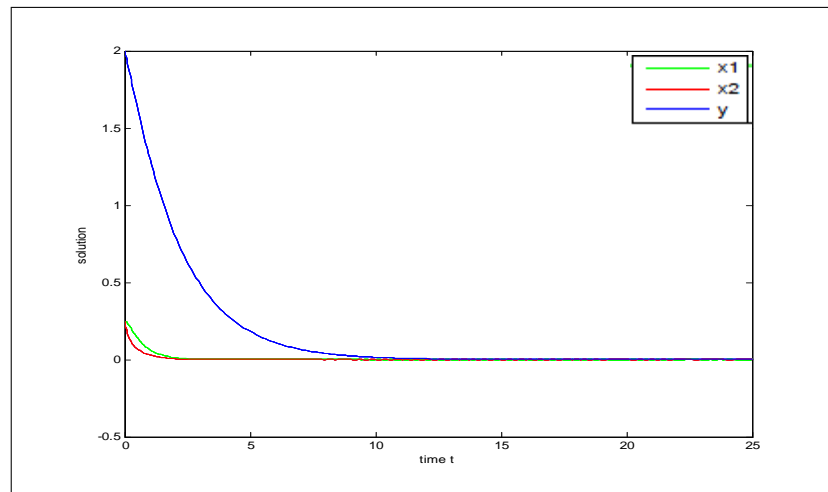
contradiction

Conclusion : si  $s = 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

**Exemple :** *Considérons le système suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_2(t) - x_1(t) - 2x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 2x_2^2(t) - \frac{6x_2(t)y(t)}{y(t) + x_2(t)} \\ \dot{y}(t) = y(t) \left( -0.5 + \frac{1.5x_2(t)}{my(t) + x_2(t)} \right) \end{cases}$$

Avec les paramètres  $r_1 = 1$ ,  $r = 0.5$ ,  $\frac{a_1}{m} = 6$ ,  $a + r = 3.5$ ,  $m = 1$ ,  $b = 2$ ,  $r_1 = 1$ ,  $b_1 = 2$ ,  $r = 0.5$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 1.5$  l'inégalité  $\left( \frac{x_1(0) + x_2(0)}{y(0)} \right) < \beta = \frac{1}{3}$  est satisfait avec la condition initiale  $(x_1(0), x_2(0), y(0)) = (0.25, 0.25, 2)$ . Les hypothèses de théorème (8) sont vérifiées alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ , La simulation effectuée à l'aide du Matlab est représentée sur la figure 4, dans ce cas les trois espèces disparaissent.



**Fig.4: Trajectoires des solutions**

### 3.3 Stabilité globale

Le système (3.1) à deux point d'équilibres  $E_0(0, 0, 0)$ ,  $E_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$

$$\bar{x}_1 = \frac{a^2b}{b_1(r_1 + b)^2}, \bar{x}_2 = \frac{ab}{b_1(r_1 + b)}$$

$$x_1^* = \frac{ax_2^*}{r_1 + b}, x_2^* = \frac{ab}{b_1(r_1 + b)} - \frac{a_1(a_2 - r)}{ma_2b_1}, y^* = \frac{x_2^*(a_2 - r)}{mr}.$$

La matrice jacobienne du système (3.1) au point  $E_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$  est donnée par

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -r_1 - b & a & 0 \\ b & -2b_1\bar{x}_2 & -a_1 \\ 0 & 0 & a_2 - r \end{pmatrix}$$

(i) Si  $a < r$ , alors  $E_1$  est localement asymptotiquement stable.

(ii) Si  $a > r$ , alors  $E_1$  est instable.

La matrice jacobienne du système (3.1) au point  $E^*(x_1^*, x_2^*, y^*)$  est donnée par

$$J_{E^*} = \begin{pmatrix} -r_1 - b & a & 0 \\ b & -2b_1x_2^* - \frac{ma_1(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} & \frac{-a_1(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} \\ 0 & \frac{ma_2(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} & \frac{-ma_2x_2^*y^*}{(my^* + x_2^*)^2} \end{pmatrix}$$

Nous allons, maintenant, montrer que, sous certaines conditions, le point d'équilibre

$E^*(x_1^*, x_2^*, y^*)$  est globalement asymptotiquement stable.

**Théorème 10** *Supposons que les l'hypothèses suivantes sont vérifiées*

- 1)  $a_2 > r$
- 2)  $\frac{ab}{(r_1 + b)m} > \frac{2a_1}{m}$

Alors, le point d'équilibre  $E^*(x_1^*, x_2^*, y^*)$  est globalement asymptotiquement

stable.

**Preuve.** La preuve est donnée en plusieurs étapes

-1) écrire le système (3.1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{a}{x_1^*} [-x_2(t)(x_1(t) - x_1^*) + x_1(t)(x_2(t) - x_2^*)] \\ \dot{x}_2(t) = \frac{b}{x_2^*} [-x_1(t)(x_2(t) - x_2^*) + x_2(t)(x_1(t) - x_1^*)] \\ \quad + x_2(t) \left( -b_1(x_2(t) - x_2^*) + \frac{a_1 r y^*(m y(t) + x_2(t)) - a_1 y(t) a_2 x_2^*}{a_2 x_2^*(m y(t) + x_2(t))} \right) \\ \dot{y}(t) = y(t) \frac{m a_2 [y^*(x_2(t) - x_2^*) - x_2^*(y(t) - y^*)]}{(m y^* + x_2^*)(m y(t) + x_2(t))} \end{cases}$$

La première équation du système (3.1) donne:

$$\dot{x}_1(t) = a x_2(t) - r x_1(t) - b x_1(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = a x_2(t) - (r + b) x_1(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = a \left[ x_2(t) - \frac{(r + b)}{a} x_1(t) \right]$$

De plus on a  $x_1^* = \frac{a x_2^*}{r_1 + b} \implies \frac{r_1 + b}{a} = \frac{x_2^*}{x_1^*}$

$$\dot{x}_1(t) = a \left[ x_2(t) - \frac{x_2^*}{x_1^*} x_1(t) \right]$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{a}{x_1^*} [x_2(t) x_1^* - x_2^* x_1(t)]$$

D'où

$$\dot{x}_1(t) = \frac{a}{x_1^*} [x_2(t) x_1^* - x_2^* x_1(t) + x_2(t) x_1(t) - x_2(t) x_1(t)]$$

On obtient

$$\dot{x}_1(t) = \frac{a}{x_1^*} [-x_2(t)(x_1(t) - x_1^*) + x_1(t)(x_2(t) - x_2^*)] \quad (3.9)$$

La deuxième équation du système (3.1):

$$\dot{x}_2(t) = b x_1(t) - b_1 x_2^2(t) - \frac{a_1 x_2(t) y(t)}{m y(t) + x_2(t)}$$

D'où

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= bx_1(t) + \left( \frac{ab}{r_1+b}x_2(t) - \frac{ab}{r_1+b}x_2(t) \right) - b_1x_2^2(t) \\ &\quad + (bx_2(t)x_2^* - b_1x_2(t)x_2^*) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} \\ \dot{x}_2(t) &= b \left[ x_1(t) - \frac{a}{r_1+b}x_2(t) \right] + \frac{ab}{r_1+b}x_2(t) - b_1x_2^2(t) - b_1x_2(t)x_2^* \\ &\quad + b_1x_2(t)x_2^* - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)}\end{aligned}$$

De plus on a  $y^* = \frac{x_2^*(a_2 - r)}{mr}$  et  $x_1^* = \frac{ax_2^*}{r_1 + b} \implies \frac{a}{r_1 + b} = \frac{x_1^*}{x_2^*}$

On remplace dans l'équation et on ajoute  $(x_1x_2 - x_1x_2)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= b \left[ x_1(t) - \frac{x_1^*}{x_2^*}x_2(t) + (x_1x_2 - x_1x_2) \right] + \frac{ab}{r_1+b}x_2(t) \\ &\quad - b_1x_2^2(t) - b_1x_2(t)x_2^* + b_1x_2(t)x_2^* - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= \frac{b}{x_2^*} [x_2^*x_1(t) - x_1^*x_2(t) + x_1x_2 - x_1x_2] + \frac{ab}{r_1+b}x_2(t) \\ &\quad - b_1x_2^2(t) - b_1x_2(t)x_2^* + b_1x_2(t)x_2^* - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= \frac{b}{x_2^*} [-x_1(x_2 - x_2^*) + x_2(x_1 - x_1^*)] \\ &\quad + x_2(t) \left( -b_1(x_2(t) - x_2^*) + \frac{ab}{r_1+b} - b_1x_2^* - \frac{a_1y(t)}{my(t) + x_2(t)} \right)\end{aligned}$$

On a  $x_2^* = \frac{ab}{b_1(r_1+b)} - \frac{a_1(a_2-r)}{ma_2b_1} \implies b_1x_2^* = \frac{ab}{(r_1+b)} - \frac{a_1(a_2-r)}{a_2m}$  ■

$$\implies \frac{ab}{(r_1+b)} - b_1x_2^* = \frac{a_1(a_2-r)}{a_2m}$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \frac{b}{x_2^*} [-x_1(x_2 - x_2^*) + x_2(x_1 - x_1^*)] \\ &\quad + x_2(t) \left( -b_1(x_2(t) - x_2^*) + \frac{a_1(a_2 - r)}{a_2 m} - \frac{a_1 y(t)}{m y(t) + x_2(t)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a } y^* = \frac{x_2^*(a_2 - r)}{mr} \implies \frac{r y^*}{x_2^*} = \frac{(a_2 - r)}{m}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \frac{b}{x_2^*} [-x_1(x_2 - x_2^*) + x_2(x_1 - x_1^*)] \\ &\quad + x_2(t) \left( -b_1(x_2(t) - x_2^*) + \frac{a_1 r y^*}{a_2 x_2^*} - \frac{a_1 y(t)}{m y(t) + x_2(t)} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.11)

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \frac{b}{x_2^*} [-x_1(x_2 - x_2^*) + x_2(x_1 - x_1^*)] \\ &\quad + x_2(t) \left( -b_1(x_2(t) - x_2^*) + \frac{a_1 r y^* (m y(t) + x_2(t)) - a_1 y(t) a_2 x_2^*}{a_2 x_2^* (m y(t) + x_2(t))} \right) \end{aligned}$$

$$y^* = \frac{x_2^*(a_2 - r)}{mr} \implies a_2 x_2^* = r(m y^* + x_2^*)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \frac{b}{x_2^*} [-x_1(x_2 - x_2^*) + x_2(x_1 - x_1^*)] \\ &\quad + x_2(t) \left( -b_1(x_2(t) - x_2^*) + \frac{a_1 r y^* (m y(t) + x_2(t)) - a_1 y(t) r(m y^* + x_2^*)}{r(m y^* + x_2^*) (m y(t) + x_2(t))} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \frac{b}{x_2^*} [-x_1(x_2 - x_2^*) + x_2(x_1 - x_1^*)] \\ &\quad + x_2(t) \left( -b_1(x_2(t) - x_2^*) + \frac{a_1 r y^* m y(t) + a_1 r y^* x_2(t) - a_1 y(t) r(m y^* + x_2^*)}{r(m y^* + x_2^*) (m y(t) + x_2(t))} \right) \end{aligned}$$

La troisième équation du modèle (3.1) donne:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= y(t) \left( -r + \frac{a_2 x_2(t)}{m y(t) + x_2(t)} \right) \\ \dot{y}(t) &= y(t) \left( \frac{-r m y(t) + (a_2 - r) x_2(t)}{m y(t) + x_2(t)} \right) \\ \dot{y}(t) &= r m y(t) \left( \frac{-y(t) + \frac{(a_2 - r)}{r m} x_2(t)}{m y(t) + x_2(t)} \right) \end{aligned}$$

$$y^* = \frac{x_2^*(a_2 - r)}{mr} \implies \frac{y^*}{x_2^*} = \frac{(a_2 - r)}{mr}$$

$$\dot{y}(t) = rmy(t) \left( \frac{-y(t) + \frac{y^*}{x_2^*}x_2(t)}{my(t) + x_2(t)} \right)$$

$$\dot{y}(t) = rmy(t) \left( \frac{-x_2^*y(t) + y^*x_2(t)}{x_2^*(my(t) + x_2(t))} \right)$$

$$\dot{y}(t) = rmy(t) \frac{a_2}{a_2} \left( \frac{-x_2^*y(t) + y^*x_2(t)}{x_2^*(my(t) + x_2(t))} \right)$$

$$\text{On a } y^* = \frac{x_2^*(a_2 - r)}{mr} \implies mry^* = a_2x_2^* - rx_2^*$$

$$\implies a_2x_2^* = mry^* + rx_2^*$$

$$\implies a_2x_2^* = r(my^* + x_2^*)$$

$$\dot{y}(t) = a_2rmy(t) \left( \frac{-x_2^*y(t) + y^*x_2(t)}{a_2x_2^*(my(t) + x_2(t))} \right)$$

On ajoute  $(+x_2^*y^* - x_2^*y^*)$

$$\dot{y}(t) = a_2rmy(t) \left( \frac{-x_2^*y(t) + y^*x_2(t) + (x_2^*y^* - x_2^*y^*)}{a_2x_2^*(my(t) + x_2(t))} \right)$$

$$\dot{y}(t) = a_2rmy(t) \left( \frac{y^*(x_2(t) - x_2^*) - x_2^*(y(t) - y^*)}{r(my^* + x_2^*)(my(t) + x_2(t))} \right)$$

On trouve

$$\dot{y}(t) = y(t) \frac{ma_2[y^*(x_2(t) - x_2^*) - x_2^*(y(t) - y^*)]}{(my^* + x_2^*)(my(t) + x_2(t))}$$

-2 Considérons la fonction de Lyapunov

$$V(t) = \sum_{i=1}^2 c_i \left( x_i - x_i^* - x_i^* \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right) + c_3 \left( y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right)$$

ou  $c_i$  et  $c_3$  sont des constant à déterminer

La dérivée de  $V_1(t)$  le long des trajectoires de (3.10) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^2 c_i (x_i(t) - x_i^*) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i^*} + c_3 (y(t) - y^*) \frac{\dot{y}(t)}{y^*} \\
&= \frac{c_1 a (x_1(t) - x_1^*)}{x_1^* x_1(t)} [-x_2(t) (x_1(t) - x_1^*) + x_1(t) (x_2(t) - x_2^*)] \\
&\quad + \frac{c_2 b (x_2(t) - x_2^*)}{x_2^* x_2(t)} [-x_1(t) (x_2(t) - x_2^*) + x_2(t) (x_1(t) - x_1^*)] \\
&\quad + c_2 (x_2(t) - x_2^*) \left[ -b_1 (x_2(t) - x_2^*) + \frac{a_1 y^* (x_2(t) - x_2^*) - a_1 x_2^* (y(t) - y^*)}{(my(t) + x_2(t))(my^* + x_2^*)} \right] \\
&\quad + c_3 m a_2 (y(t) - y^*) \frac{y^* (x_2(t) - x_2^*) - x_2^* (y(t) - y^*)}{(my(t) + x_2(t))(my^* + x_2^*)}
\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{b_1 x_1^*}{a_1 x_2^*}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{a_1 x_2^*}{m a_2 y^*}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= -\frac{b}{x_2^*} \left[ \sqrt{\frac{x_2(t)}{x_1(t)}} (x_1(t) - x_1^*) + \sqrt{\frac{x_1(t)}{x_2(t)}} (x_2(t) - x_2^*) \right]^2 - b_1 (x_2(t) - x_2^*) \\
&\quad + \frac{a_1 y^* (x_2(t) - x_2^*)^2}{(my(t) + x_2(t))(my^* + x_2^*)} - \frac{a_1 (x_2^*)^2 (y(t) - y^*)^2}{y^* (my(t) + x_2(t))(my^* + x_2^*)}
\end{aligned}$$

On observe que

$$-\frac{b}{x_2^*} \left[ \sqrt{\frac{x_2(t)}{x_1(t)}} (x_1(t) - x_1^*) + \sqrt{\frac{x_1(t)}{x_2(t)}} (x_2(t) - x_2^*) \right]^2 < 0$$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 \text{ telque } \varepsilon \frac{ab}{(r_1 + b)} - \frac{2a_1}{m} - b_1 \varepsilon > 0, \text{ d'après le théorème (7),}$$

il existe  $T \geq 0$  telque si  $t \geq T$  alors  $x_2(t) > u_2^* - \varepsilon$

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq - \left( b_1 - \frac{a_1}{m(u_2^* - \varepsilon)} \right) (x_2(t) - x_2^*)^2 - \frac{a_1 (x_2^*)^2 (y(t) - y^*)^2}{y^* y(t) \left( m + \frac{x_2(t)}{y(t)} \right) (my^* + x_2^*)}$$

on pose  $\beta = \frac{x_2(t)}{y(t)} = 1$

Cela conduit à :

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq - \left( b_1 - \frac{a_1}{m(u_2^* - \varepsilon)} \right) (x_2(t) - x_2^*)^2 - \frac{a_1 (x_2^*)^2 (y(t) - y^*)^2}{y^* M (m + 1) (my^* + x_2^*)} \quad (3.12)$$



On trouve la solution:

$$V(t) + \left( b_1 - \frac{a_1}{m(u_2^* - \varepsilon)} \right) \int_0^t (x_2(s) - x_2^*)^2 ds + \frac{a(x_2^*)^2}{y^* M(m+1)(my^* + x_2^*)} \int_0^t (y(t) - y^*)^2 \leq V(0)$$

$$(x_2(t) - x_2^*)^2, (y(t) - y^*)^2 \in L^1]0, \infty)$$

Les solutions  $(x_2(t), y(t))$  du système (3.1) sont bornées; on démontre que  $x_2(t) - x_2^*$ ,  $y(t) - y^*$  et  $\dot{x}_2(t)$  sont uniformément continue; et d'après lemme de Barbalat (page 7) on conclut

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_2(t) - x_2^*)^2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}_2(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - y^*)^2 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = x_2^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_1^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*$$

Nous allons, maintenant, montrer que, sous certaines conditions, le point d'équilibre

$E_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$  est globalement asymptotiquement stable.

**Théorème 11** *Supposons que les l'hypothèses suivantes sont vérifiées ,*

- 1)  $\frac{ab}{r_1 + b} > \frac{a_1}{m}$
- 2)  $a_2 < r$

alors  $E_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$  du problème (3.1) est globalement asymptotiquement stable.

**Preuve.** Considérons une solution  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  de (3.1) avec une condition initiale  $(x_1(0), x_2(0), y(0))$  ■

d'après la démonstration du théorème (7), il existe  $T_3^* \geq 0$  telque si  $t \geq T_3^*$ , alors  $x_2(t) > \frac{u_2^*}{2}$  et par la preuve du théorème (7) on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

Soit  $\varepsilon \in \left(0, \frac{ab}{r_1 + b}\right)$  il existe  $T_5 \geq T_3^*$  telque si  $t \geq T_5^*$  alors  $\frac{a_1 y(t)}{m y(t) + x_2(t)} < \varepsilon$

Considérons les deux systèmes suivantes :

$$\dot{u}_1(t) = au_2(t) - r_1u_1(t) - bu_1(t)$$

$$\dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1u_2^2(t) - \varepsilon u_2(t)$$

et

$$\dot{v}_1(t) = av_2(t) - r_1v_1(t) - bv_1(t) \tag{3.13}$$

$$\dot{v}_2(t) = bv_1(t) - b_1v_2^2(t)$$

On utilise la même preuve du théorème (7) on obtient:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_1(t) = \bar{x}_1 - \frac{a\varepsilon}{b_1(r+b)}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u_2(t) = \bar{x}_2 - \frac{\varepsilon}{b_1},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_1(t) = \bar{x}_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v_2(t) = \bar{x}_1$$

à l'aide du principe de comparaison nous obtenons:

$$\bar{x}_1 - \frac{a\varepsilon}{b_1(r+b)} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \leq \bar{x}_1, \quad \bar{x}_2 - \frac{\varepsilon}{b_1} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \leq \bar{x}_2.$$

$$\text{pour } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \bar{x}_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = \bar{x}.$$

### 3.4 Simulations numériques

exemple 1: Considérons le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 4x_2(t) - 0.1x_1(t) - 2x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2^2(t) - \frac{x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} \\ \dot{y}(t) = y(t) \left( -r + \frac{a_2x_2(t)}{my(t) + x_2(t)} \right) \end{cases} \quad (3.14)$$

avec la condition initiale  $(x_1(0), x_2(0), y(0)) = (1, 1, 1)$ , et les paramètres  $a_2 = 1.5, r = 0.5,$

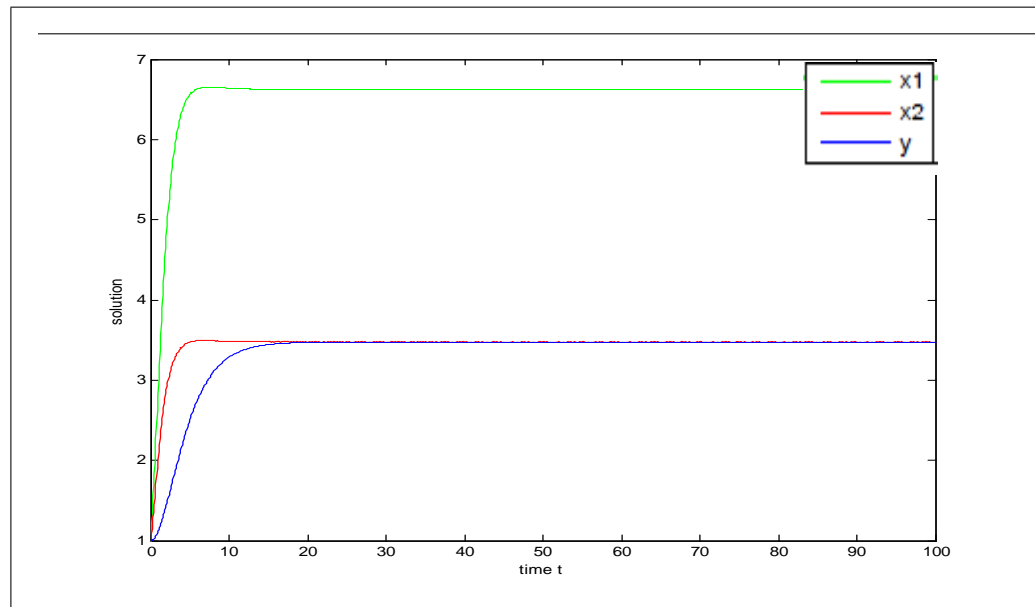
$a = 4, r_1 = 0.1, b = 2, b_1 = 1, m = 2, r = 0.5,$  le système (3.14) admet

un unique point d'équilibre positif  $E_3\left(\frac{2940}{441}, \frac{73}{21}, \frac{73}{21}\right)$ , les hypothèses des théorèmes (6) et

(10) sont donc vérifiées, c'est-à-dire le point d'équilibre  $E_3\left(\frac{2940}{441}, \frac{73}{21}, \frac{73}{21}\right)$  est globalement

asymptotiquement stable et le système (3.14) est uniformément persistante. Ce résultat est

illustré par la simulation dans la figure 5



**Fig.5:** Le système (3.14) est uniformément persistante

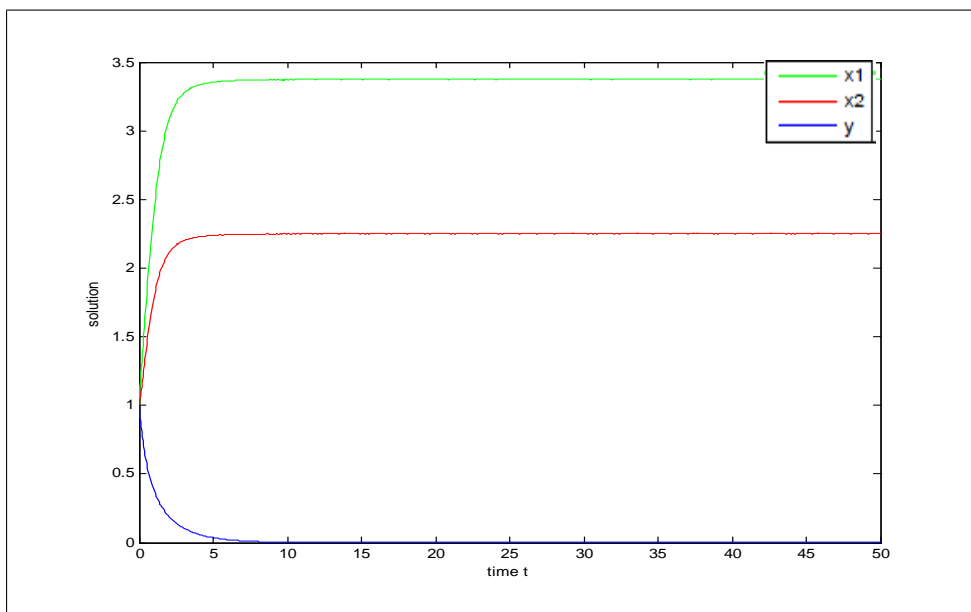
## Exemple 2

Considérons le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 6x_2(t) - x_1(t) - 3x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2^2(t) - \frac{x_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} \\ \dot{y}(t) = y(t) \left( -2 + \frac{x_2(t)}{my(t) + x_2(t)} \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

avec la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), y(0)) = (1, 1, 1)$ , et les paramètres  $a_2 = 1$ ,

$r = 2, a_1 = 1, a = 6, r_1 = 1, b = 3, b_1 = 2, m = 1$  les hypothèses du théorèmes (11) sont vérifiées, c'est-à-dire le point d'équilibre positif  $E_3(\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, 0)$  est globalement asymptotiquement et le système (3.15) est impermanent. Ce résultat est illustré par simulation dans la figure 6



**Fig.6:** Le système (3.15) est impermanent.

### 3.5 Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié un modèle de type proie-prédateur ratio-dépendant structuré en stade, on a démontré que les solutions du système sont asymptotiquement bornées. En utilisant une fonction de Lyapunov, on a démontré la stabilité globale du point d'équilibre, ensuite on a donné des conditions sous lesquelles le modèle est uniformément persistant. Pour illustrer les résultats théoriques, des simulations numériques ont été proposées à la fin de ce mémoire.

## Bibliographie

- [1] R. Arditi, H. Saiah, Empirical evidence of the role of heterogeneity in ratio- dependent consumption, *Ecology* 73 (1992) 1544– 1551
- [2] R. Arditi, L.R. Ginzburg, H.R. Akcakaya, Variation in plankton densities among lakes: a case for ratio-dependent models, *American Nat.* 138 (1991) 1287– 1296.
- [3] R. Arditi, L .R. Ginzburg, Coupling in prey dynamics ratio-dependence, *J .Theor.Biol.* 139 ( 1989) 311– 326.
- [4] R. Arditi, N. Perrin, H. Saiah, Functional response and heterogeneities: an experiment test with cladocerans, *OIKOS* 60 (1991) 69– 75.
- [5] P. Auger, C. Lett, J.C. Poggiale, *Modélisation Mathématique en écologie* (2006)
- [6] F. Brauer, Z. Ma, Stability of stage-structured population models, *J. Math. Anal. Appl.* 126 (1987) 301– 315.
- [7] H.I. FREEDMAN, "Deterministic Mathématique Models in Population Ecology" 1987
- [8] H.I. Freedman, J. Wu, Persistence and global asymptotic stability of single species dispersal models with stage structure, *Quart. Appl. Math.* 49 (1991) 351– 371.
- [9] H. I. Freedman and P. Moson, Persistence and definitions and their connections, *Proc.Amer.Math.Soc.*109, pp 1025-1033, 1990.
- [10] K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic, Dordrecht/ Norwell, MA, 1992.
- [11] A.P. Gutierrez, The physiological basis of ratio-dependent predator– prey theory: a metabolic pool model of Nicholson's blowflies as an example, *Ecology* 73 (1992)

1552–1563.

[12] I. Hanski, The functional response of predator: worries about scale, *TREE* 6 (1991)

141– 142.

[13] S.B. Hsu, T.W. Hwang, Y. Kuang, Rich dynamics of a ratio-dependent one prey two predator model, *J. Math. Biol.* 43 (2001) 377– 396.

[14] V. S. Ivlev, *Experimental Ecology of the feeding of fishes*. Yale University Press, NewHaven, CT 1961.

[15] C. Jost, O. Arino, R. Arditi, About deterministic extinction in ratio-dependent predator–prey models, *Bull. Math. Biol.* 61 (1999) 19– 32.

[16] Y. Kuang, E. Beretta, Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator–prey system, *J. Math. Biol.* 36 (1998) 389– 406.

[17] T.R. Malthus. *An Essay on the Principles of Population, and A Summary View of the Principles of Population*. Penguin, Harmondsworth, England. (1798).

[18] J.D. Murray, *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition, 2001, Springer

[19] H. Reinhard, *Equation différentielles Fondement et applications*, 1982, BOR-DAS.

[20] H. R. Thieme, Uniform persistence and permanence for non-autonomous semiflows in population biology, *Math. Biosci.* 166, pp 173–201, 2000.

[21] Verhulst, P.F. 138. Notice sur la loi que la population suit dans un accroissement. *correspondances Mathématiques et physiques* 10:113–121.

[22] W. Wang, G. Mulone, F. Salemi, V. Salone, Permanence and stability of a

stage-structured predator–prey model, *J. Math. Anal. Appl.* 262 (2001) 499–528.

[23] D. Xiao, S. Ruan, Global dynamics of a ratio-dependent predator–preysystem, *J. Math. Biol.* 43 (2001) 268–290.



## **Résumé :**

Dans ce mémoire, nous étudions un modèle proie-prédateur ratio-dépendant structuré en stade. Tout d'abord, Nous montrons la stabilité globale du point d'équilibre par la fonction de Lyapunov, Ensuite on donne des conditions sous lesquelles le modèle est uniformément persistence et nous terminons notre étude par des simulations numériques pour illustrer nos résultats théorique.

## **Mots clés**

modèle proie-prédateur, ratio-dépendance, Persistence uniforme, Stabilité globale.

## **Abstract**

A ratio-dependent predator–prey model with stage structure for prey is investigated. First, sufficient conditions are derived for the uniform persistence of the model. Next, by constructing appropriate Lyapunov functions, a set of easily verifiable sufficient conditions are obtained for the global asymptotic stability of nonnegative equilibria of the model. Numerical simulations are presented to illustrate the validity of our main results.

## **Keywords**

Predator–prey model; Ratio-dependence; Uniform persistence; Global stability.