

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier **ALLAH** tout puissant qui m'a donné la patience, la volonté et le courage pour bien achever mes études.

J'exprime ma gratitude et mes remerciements à mon directeur de mémoire Monsieur **F. ABI-AYAD**.

J'adresse mon respect à Monsieur **A.BENCHAIB**, mon professeur qui a honoré ce travail en acceptant de présider le jury, ainsi que l'examinatrice Madame **C.HESSAINE** qui ont consacré leurs temps à bien jugé mon travail de façon aussi minutieuse.

Enfin, vifs remerciements sont aussi transmis à tous mes professeurs et à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce mémoire.

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire à :

Mes très chère parents, qui, grâce à leur accompagnement j'ai pu réaliser ce modeste travail.

Mes sœurs et mes frères.

Tous mes amis : Rabha, Hayat, Khadidja, Djawida, Amina ,Hafida, Iméne, Nacira ,et mon fiancé Benamer.

Tous mes enseignants.

A tous ceux qui me sont chers.

NAZIHA

SOMMAIRE

Introduction.....	4
Chapitre 1 : introduction	5
1.1 Exemples	5
1.1.1 Equation de transport en 2D	5
1.1.2 Equation de diffusion stationnaire	7
1.2 Le principe des volumes finis pour les lois de conservation générale	8
1.2.1 La discrétisation temporelle	9
1.2.2 La discrétisation spatiale	9
Chapitre 2 : Problème elliptique en 1D	10
2.1 La méthode des volumes finis pour le problème de Dirichlet.	10
2.1.1 Formulation de schéma aux volumes finis.	10
2.2 Théorème de convergence et l'estimation de l'erreur pour le problème de Dirichlet	11
2.2.1 l'estimation de l'erreur des volumes finis dans le cas simple	11
2.3 L'équation elliptique générale en 1D	13
2.3.1 Formulation du schéma aux volumes finis	13
2.3.2 L'estimation de l'erreur	15
Chapitre 3 : Problème elliptique en 2D ou 3D	21
3.1 Condition au bord de Dirichlet.	21
3.1.1 Structure de maillage	22
3.1.2 Maillage et schéma en 2D ou 3D	25
3.1.3 Existence et Estimation	29
3.1.4 Convergence	34
3.1.5 L'estimation de l'erreur dans C^2	48
3.1.6 L'estimation de l'erreur dans H^2	58
3.2 Condition au bord de Neumann.	64
3.2.1 Maillage et schéma	65
3.2.2 Inégalité de Poincaré moyenne discrète	67
3.2.3 L'estimation de l'erreur.	68
3.2.4 Convergence	73
3.3 Les opérateurs elliptiques généraux	82
3.3.1 Matrice de diffusion à coefficients discontinus	82
3.3.2 L'estimation de l'erreur.	85
3.3.3 Autres condition au bord	89
3.4 Etude numérique de quelques modèles	91
3.4.1 Modèle de convection pure	91
3.4.2 Modèle de convection diffusion	92
3.4.3 Résultats de simulation	96
Conclusion	98
Référence.	99

INTRODUCTION

La méthode des volumes finis a été promise la première à atteindre un stade de développement avancé pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires. Elle a supplanté les méthodes classiques basées sur les différences finies des problèmes complexes notamment tridimensionnels.

Dans ce mémoire, on s'intéresse essentiellement à la présentation de certains problèmes elliptiques en dimension une, deux ou trois et à leur résolution numérique par la méthode des volumes finis.

Ce mémoire est devisé en trois chapitres :

Le premier chapitre sera consacré à l'exposé de la méthode des volumes finis pour le problème de transport et le problème de diffusion stationnaire.

Dans le second chapitre, on développe l'exemple du problème de diffusion et le problème de convection-diffusion dans le cas unidimensionnel avec les conditions au bord de Dirichlet. On étudie ensuite la convergence et l'estimation de l'erreur de ces problèmes.

Au chapitre trois, la discrétisation des problèmes elliptiques en dimension deux ou trois avec les conditions au bord de Dirichlet et de Neumann sera étudiée. Puis, des résultats de stabilité des schémas aux volumes finis seront présentés, Le théorème de convergence, l'estimation de l'erreur et le résultat de la régularité de la solution exacte dans C^2 et H^2 sont prouvés. Ensuite, dans la section 3.3 on étudie l'estimation de l'erreur d'un opérateur elliptique général dont les coefficients de diffusion sont discontinus. L'objectif de la dernière section est l'utilisation de la méthode des volumes finis pour résoudre le problème de convection pure et le problème de convection diffusion en dimension une et deux. On termine par la programmation de la résolution numérique V.F. d'un problème de convection diffusion en utilisant le langage Matlab.

Chapitre 1

Introduction

La méthode des **volumes finis** est une méthode de discrétisation bien adaptée pour la simulation numérique de type elliptique des lois de conservation, elle a été largement utilisée dans plusieurs domaines de l'ingénierie, tels que la mécanique des fluides, transfert de chaleur et de masse.

Quelques-unes des caractéristiques importantes de la méthode des **volumes finis** sont similaires à la méthode des éléments finis, elle peut être utilisée sur des géométries arbitraires. Une autre caractéristique réside dans la conservativité locale du flux numérique: conservation du flux d'une cellule de discrétisation à sa voisine. Cette dernière caractéristique rend la méthode des **volumes finis** tout à fait attrayante lorsque des problèmes de modélisation pour lequel le flux est d'important, comme en mécanique des fluides, sont considérés.

La méthode des **volumes finis** est localement prudente, car elle est fondée sur un «équilibre» approché : Un équilibre local est écrit sur chaque cellule de discrétisation qui est souvent appelée "**volume de contrôle**", selon la formule de divergence, une formulation intégrale des flux sur la limite du **volume de contrôle** est alors obtenue. Les flux sur la limite sont discrétisés par rapport aux inconnues discrètes.

Nous allons présenter la méthode plus précisément sur des exemples simples, puis donner une description de la discrétisation des lois générales de conservation.

En règle générale, le terme en temps est toujours discrétisé par différences finies, la méthode des **volumes finis** ne s'applique, en général, que pour la discrétisation spatiale.

Deux exemples de base peuvent être utilisés pour introduire la méthode des **volumes finis** et qui sont développés en détails aux chapitres suivants.

1.1 Exemples

Exemple 1.1 (Equation de transport en 2D) :

Considérons l'équation de transport suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \text{div}(\mathbf{v} \cdot u)(x, t) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.1)$$

avec la condition au bord de Dirichlet : $u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathbf{v}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \mathbf{v}(x_1, x_2) = (\mathbf{v}_1(x_1, x_2), \mathbf{v}_2(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot u)(x, t) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{v}_i u) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} (x_1, x_2) \cdot u(x_1, x_2) + \mathbf{v}_i(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} (x_1, x_2) \right]\end{aligned}$$

On suppose que $\mathbf{v} \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^2)$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Maillage et schéma :

Soit \mathcal{T} un maillage admissible de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, connexe, borné et polygonal et soit $K \in \mathcal{T}$ le volume de contrôle qui est convexe. On intègre l'équation (1.1) sur chaque volume de contrôle K au temps $t \in \mathbb{R}_+$

$$\int_K \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\partial K} \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}_K(x) \cdot u(x, t) d\gamma(x) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.2)$$

D'après la formule de Gauss, on a :

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot u)(x, t) dx = \int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot u)(x, t) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x)$$

$d\gamma$ étant la mesure de Lebesgue $(d-1)$ -dimensionnelle sur ∂K et \mathbf{n}_K le vecteur normal unitaire à ∂K se dirigeant vers l'extérieur de K .

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ le pas temporel qui est choisi constant pour des raisons de simplification de calcul

$$t_n = nk, \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

Une discrétisation temporelle du schéma d'Euler explicite est obtenue lorsque l'on prend $u^n(x)$ comme étant l'approximation de la solution u de (1,1) au temps $t = t_n$, puis on remplace $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_n)$ par son approximation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_n) = \frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{k} + O(k^2) \simeq \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{k}$$

Donc l'équation (1,2) devient :

$$\int_K \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{k} dx + \int_{\partial K} \mathbf{v}(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_K(x) \cdot u^n(x) d\gamma(x) = 0, \forall n = 0, \dots, N, \forall K \in \mathcal{T} \quad (1.3)$$

Soient $(u_K^n)_{K \in \mathcal{T}}$ les inconnues discrètes pour $K \in \mathcal{T}$ et $\sigma \subset \partial K$ c'est-à-dire

$$\partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sigma \text{ où } \mathcal{E}_K \subset \mathcal{E} \text{ qui est la famille des arêtes et } \mathbf{n}_{K,\sigma} \text{ le vecteur normal unitaire à } \sigma$$

se dirigeant vers l'extérieur de K . Alors la deuxième intégrale de (1,3) s'écrit :

$$\int_{\partial K} \mathbf{v}(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_K(x) \cdot u^n(x) d\gamma(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \mathbf{v}(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) \cdot u^n(x) d\gamma(x), \text{ pour } \sigma \subset \partial K \quad (1.4)$$

Pour $\sigma \subset \partial K$, soit :

$$v_{K,\sigma}^n = \int_{\sigma} \mathbf{v}(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x)$$

Chaque terme de la somme du membre de droite de (1,4) est discrétisé comme suit:

$$F_{K,\sigma}^n = \begin{cases} v_{K,\sigma}^n u_K^n & \text{si } v_{K,\sigma}^n \geq 0 \\ v_{K,\sigma}^n u_L^n & \text{si } v_{K,\sigma}^n < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où L est un volume de contrôle tel que $\sigma = K|L$.

Soit u_K^n les inconnues discrètes telles que :

$$u(x_K, t_n) \simeq u_K^n, \forall n = 0, \dots, N, \forall K \in \mathcal{T} \text{ et } u_K^0 = u(x_K, 0) = u_0(x_K), \forall K \in \mathcal{T}$$

Alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_K, t_n) \simeq \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k}$$

D'où :

$$\int_K \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} dx = m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k}$$

Nous avons toujours $F_{K,\sigma}^n = -F_{L,\sigma}^n$ si $\sigma = K|L, \forall n = 0, \dots, N$

L'équation(1,3) devient :

$$m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^n u_K^n = 0$$

$$\Rightarrow m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^n = 0, \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in N$$

Le schéma explicite aux volumes finis pour la discrétisation de l'équation (1,1) s'écrit :

$$\begin{cases} m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^n = 0, \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in N \\ u_K^0 = \int_K u_0(x) dx \end{cases} \quad (1.6)$$

Exemple 1.2 (équation de diffusion stationnaire) :

On considère l'équation de base de diffusion stationnaire suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

Ω un ouvert borné polygonal.

Maillage et schéma :

Soit \mathcal{T} un maillage rectangulaire et soit $K \in \mathcal{T}$ le volume de contrôle. On intègre l'équation (1.7) sur chaque volume de contrôle K du maillage

$$\int_K -\Delta u(x) dx = \int_K f(x) dx \Rightarrow \int_{\partial K} -\nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) = \int_K f(x) dx$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} -\nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = \int_K f(x) dx \quad (1.8)$$

Soit L un volume de contrôle et $x_K \in K, \forall K \in \mathcal{T}$, si $\sigma = K|L$, on est sûr que $x_K \neq x_L$ et on suppose que la droite joignant x_K à x_L , notée par $D_{K,L}$ est orthogonal à $\sigma = K|L$, dans ce cas on dit que x_K est le centre du volume de contrôle K .

Si $\nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x)$ est continue sur $\sigma, \exists \xi \in \sigma$ tel que d'après le théorème de la moyenne on a :

$$-\int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = -m(\sigma) \nabla u(\xi) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(\xi)$$

Comme $K \subset \mathbb{R}^2$ alors $m(\sigma)$ est la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle de σ

$$\nabla u(\xi) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi) v_{i,K,\sigma}(\xi) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi) \text{ où } v_i = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)$$

avec :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi) \simeq \begin{cases} \frac{u_L - u_K}{d\sigma} & \text{si } \sigma = K|L \\ -\frac{u_K}{d\sigma} & \text{si } \sigma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

D'où:

$$m(\sigma) \nabla u(\xi) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(\xi) \simeq \begin{cases} -m(\sigma) \frac{u_L - u_K}{d\sigma} & \text{si } \sigma = K|L \\ m(\sigma) \frac{u_K}{d\sigma} & \text{si } \sigma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

$$\int_K f(x) dx = m(K) f_K \text{ où } f_K \text{ la valeur moyenne de } f \text{ sur } K$$

Le schéma au volume finis du problème (1,7) s'écrit finalement comme suit :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} F_{K,\sigma} = m(K) f_K, \forall K \in \mathcal{T}$$

$$\text{où } F_{K,\sigma} = \begin{cases} -m(\sigma) \frac{u_L - u_K}{d\sigma} & \text{si } \sigma = K|L \\ m(\sigma) \frac{u_K}{d\sigma} & \text{si } \sigma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

1.2 Le principe des volumes finis pour les lois de conservation générale :

La méthode des volumes finis est utilisée pour la discrétisation des lois de conservation ; l'équation de convection s'écrit :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x, t) + \text{div}F(x, t) = f(x, t) \quad (1.9)$$

$$\text{où } \text{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_d}{\partial x_d}$$

et $F = (F_1, \dots, F_d)^t$ est la fonction vectorielle dépendant de la variable d'espace x et de la variable de temps t . La quantité f est un flux qu'exprime le mécanisme de transport de q où q est la quantité conservée. La quantité F peut aussi être donnée par la moyenne de la fonction de la variable d'espace x et de la variable de temps t et l'inconnue $u(x, t)$ ou par la moyenne de $\nabla u(x, t)$.

L'exemple de l'équation de transport est un cas particulier du problème (1.9) avec :

$$q(x, t) = u(x, t), F(x, t) = (\mathbf{v}u)(x, t) \text{ et } f(x, t) = f(x)$$

De même pour l'équation de diffusion stationnaire avec :

$$q(x, t) = u(x), F(x, t) = -\nabla u(x, t) \text{ et } f(x, t) = f(x)$$

Exemple (l'équation d'Euler en dimension une) :

On considère comme exemple de loi de conservation l'équation d'Euler en dimension une. Ces équations peuvent être écrites sous forme de l'équation (1,9) avec :

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}$$

où ρ, u, E et p sont des fonctions de la variable d'espace x et du temps t

1.2.1 La discrétisation temporelle :

La discrétisation temporelle de l'équation (1,9) est réalisée par l'introduction d'une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $t_0 = 0$. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ le pas temporel et $t_n = nk, n \in \mathbb{N}$
On applique la formule de Taylor pour q_t au voisinage de t_n

$$q_t(x, t_n) = \frac{q(x, t_{n+1}) - q(x, t_n)}{k} + O(k)$$

Soit $q_t(x, t_n) \simeq \frac{q^{n+1}(x) - q^n(x)}{k}$ et q^n est calculé avec une approximation de u au temps t_n , notée u^n

1.2.2 La discrétisation spatiale :

Soit \mathcal{T} un maillage de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3) tel que :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K}$$

où K est le volume de contrôle, et les inconnues discrètes au temps t_n sont notées par $u_K^n, K \in \mathcal{T}$ et u_K^n n'est autre que l'approximation de u sur le volume de contrôle K au temps t_n . On intègre l'équation (1,9) sur chaque volume de contrôle K :

$$\int_K \frac{q^{n+1}(x) - q^n(x)}{k} dx + \int_{\partial K} F(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) = \int_K f(x, t_n) dx$$

où \mathbf{n}_K le vecteur unitaire normal à ∂K au point x , se dirigeant vers l'extérieur de K .

Chapitre 2

Problème elliptique en 1D:

Le but de ce chapitre est de donner quelques développements sur la résolution numérique de l'exemple 1.2 dans le cas unidimensionnel avec des conditions au bord de type Dirichlet. Après quelques comparaisons avec d'autres schémas, les théorèmes de convergence et des estimations de l'erreur sont fournis.

2.1 La méthode des volumes finis pour le problème de Dirichlet :

2.1.1 Formulation d'un schéma V.F.

Le principe de la méthode des **volumes finis** sera présenté. Ici le problème de Dirichlet consiste en un opérateur différentiel du second ordre et des termes dépendant des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. On considère l'équation différentielle suivante avec condition de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Si $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ il existe une solution unique $u \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ du problème (2.1). L'équation $-u''(x) = f(x)$ peut être écrite sous forme conservative $\text{div } F = f$ avec $F = -u'$. Pour trouver l'approximation de la solution de cette équation, soit on définit un maillage admissible, noté par \mathcal{T} de $(0,1)$ qui consiste N volumes de contrôle, noté par $(K_i)_{i=1}^N$ et N points de $(0,1)$, notés par $(x_i)_{i=0}^N$ qui satisfont les hypothèses suivantes :

Définition 2.1 :

Soit $(K_i)_{i=1}^N$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ est la famille $(x_i)_{i=0}^N$ tel que :

$$0 = x_0 = x_{\frac{1}{2}} < x_1 < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N+\frac{1}{2}} = x_{N+1} = 1$$

On pose : $h_i = \text{mes}(K_i) = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $i = 1, \dots, N$ et donc

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1 \quad \text{et on note} \quad h_i^- = x_i - x_{i-\frac{1}{2}} \quad , \quad h_i^+ = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i \quad , \quad h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i = h_i^+ + h_{i+1}^-$$

et $\text{size}(\mathcal{T}) = h = \max_{i=1, \dots, N} h_i$

Les inconnues discrètes sont notées par u_i , $i = 1, \dots, N$ qui sont des approximations de $u(x_i)$ c'est-à-dire $u(x_i) \approx u_i$, qui est la moyenne de u sur K_i . On intègre la première équation du problème (2.1) sur chaque intervalle K_i :

$$\int_{K_i} -u''(x)dx = \int_{K_i} f(x)dx, \forall i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \int_{K_i} f(x)dx, \forall i = 1, \dots, N$$

L'approximation de $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ est établie à partir d'un procédé de différences finies (schéma centré). On pose :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

L'approximation est consistante dans le sens où si $u \in C^2([0,1], \mathbb{R})$, alors

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h) \quad (2.2)$$

où $|O(h)| \leq Ch$, $C \in \mathbb{R}_+$ dépend seulement de u . $\exists \eta \in K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ tel que, d'après le théorème de la moyenne on trouve :

$$\int_{K_i} f(x)dx = f(\eta) \int_{K_i} dx = h_i f(\eta) \simeq h_i f_i \text{ où } f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x)dx, i = 1, \dots, N$$

Finalement, le schéma aux volumes finis du problème(2.1) s'écrit

$$\begin{cases} F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i & i = 1, \dots, N \\ F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} & i = 1, \dots, N-1 \\ F_{\frac{1}{2}} = -\frac{u_1}{h_{\frac{1}{2}}}, F_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$

Le schéma numérique (2.3) peut s'écrire sous forme matricielle $AU = b$

où $U = (u_1, \dots, u_N)^T$, $b = (b_1, \dots, b_N)^T$ A et b sont définies par :

$$(AU)_i = \frac{1}{h_i} \left(-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right), \forall i = 1, \dots, N \text{ et } b_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x)dx, \forall i = 1, \dots, N$$

2.2 Théorème de convergence et l'estimation de l'erreur pour le problème de Dirichlet :

2.2.1 L'estimation de l'erreur des volumes finis dans le cas simple :

Théorème 2.1: Soient $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $u \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ la solution unique de problème(2.1).

Soit $\mathcal{T} = (K_i)_{i=1}^N$ le maillage admissible au sens de la définition 2.1

Alors, il existe un unique vecteur $U = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^n$ solution de (2.3) et $\exists c \geq 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^2 \leq c^2 h^2$$

et

$$|e_i| \leq Ch, \forall i = 1, \dots, N$$

avec $e_0 = e_{N+1} = 0$, $e_i = u(x_i) - u_i, \forall i = 1, \dots, N$

Preuve du théorème 2.1 :

On montre qu'il existe un unique vecteur $U = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^n$ solution de (2.3)

On multiplie la première équation de (2.3) par u_i et on fait la somme sur $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) u_i + \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) u_i = \sum_{i=1}^N u_i h_i f_i \\ \Rightarrow & - \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) u_i + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) u_{i+1} = \sum_{i=1}^N u_i h_i f_i \\ \Rightarrow & \frac{u_1^2}{h_{\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^2 + \frac{u_N^2}{h_{N+\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^N u_i h_i f_i, (u_0 = u_{N+1} = 0) \end{aligned}$$

Donc si $f_i = 0, \forall i = 1, \dots, N$, alors la solution unique de la première équation de (2.3) est obtenue lorsque $u_i = 0$, ceci donne l'existence et l'unicité de la solution de (2.3)

Soit $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ pour $i = 1, \dots, N$. On intègre l'équation $-u''(x) = f(x)$ sur K_i , on obtient

$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i$ d'après (2.3) on a :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i, \text{ avec } G_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\begin{aligned} G_{i+\frac{1}{2}} - G_{i-\frac{1}{2}} &= \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} + F_{i-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) - \left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right) = h_i f_i - h_i f_i = 0, \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

On utilise la consistance des flux de (2.2), $\exists c > 0$ dépendant de u tel que :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} + R_{i+\frac{1}{2}} \text{ et } |R_{i+\frac{1}{2}}| \leq ch$$

D'où :

$$\begin{aligned} G_{i+\frac{1}{2}} &= - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - R_{i+\frac{1}{2}}, \forall i = 0, \dots, N \\ &= - \frac{(u(x_{i+1}) - u_{i+1}) - (u(x_i) - u_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} - R_{i+\frac{1}{2}}, \forall i = 0, \dots, N \\ &= - \frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - R_{i+\frac{1}{2}}, \forall i = 0, \dots, N \end{aligned}$$

Comme on a

$$G_{i+\frac{1}{2}} - G_{i-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow - \frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{e_i - e_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} - R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}} = 0, \forall i = 1, \dots, N$$

On multiplie cette dernière équation par e_i et on fait la somme sur $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} e_i + \sum_{i=1}^N \frac{(e_i - e_{i-1})}{h_{i-\frac{1}{2}}} e_i = \sum_{i=1}^N R_{i+\frac{1}{2}} e_i - \sum_{i=1}^N R_{i-\frac{1}{2}} e_i \\
\Rightarrow & - \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} e_{i+1} = \sum_{i=0}^N R_{i+\frac{1}{2}} e_i - \sum_{i=0}^{N-1} R_{i+\frac{1}{2}} e_{i+1}, (e_0 = e_{N+1} = 0) \\
\Rightarrow & \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \sum_{i=0}^N R_{i+\frac{1}{2}} (e_{i+1} - e_i) \leq Ch \sum_{i=0}^N |e_{i+1} - e_i| \quad (*)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\sum_{i=0}^N |e_{i+1} - e_i| \leq \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N h_{i+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ car } \sum_{i=1}^N h_{i+\frac{1}{2}} = 1$$

(*) devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} & \leq Ch \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch \\
& \Rightarrow \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq C^2 h^2
\end{aligned}$$

$\forall i = 1, \dots, N$, on a :

$$\begin{aligned}
e_i & = \sum_{j=1}^i e_j - e_{j-1} = \sum_{j=0}^{i-1} e_{j+1} - e_j \leq \sum_{j=0}^N |e_{j+1} - e_j| \\
|e_i| & \leq \sum_{i=0}^N |e_{i+1} - e_i| \leq \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3 Équation elliptique en 1D:

2.3.1 Formulation d'un schéma aux volumes finis :

En mécanique des fluides, dans un milieu hétérogène où l'on étudie les phénomènes de convection-diffusion d'un fluide, on utilise souvent le modèle suivant :

$$\begin{cases} (-\lambda u')'(x) + au'(x) + bu(x) = f(x), x \in [0,1] \\ u(0) = c, u(1) = d \end{cases} \quad (2.7)$$

où $\lambda \in L^\infty(0,1)$, λ est une fonction choisie continue par intervalle dans $]0,1[$ de façon à mettre en évidence l'hétérogénéité du domaine d'étude. Pour toutes ses raisons, lorsque l'on discrétise un problème, on s'arrange pour que les discontinuités de λ coïncident avec les interfaces du maillage : Ce sont des points (en 1D) : $x_{i+\frac{1}{2}}, i = 1, \dots, N-1$

Soit $\lambda \in L^\infty(0,1)$ tel qu'ils existent $\bar{\lambda}, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ pp et soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $b \geq 0$ et $f \in L^2(0,1)$. On cherche une approximation de la solution u pour le problème suivant :

Maillage et schéma :

Soit $\mathcal{T} = (K_i)_{i=1}^N$ un maillage admissible dans le sens de la définition 2.1

On intègre l'équation de (2.7) sur chaque volume de contrôle K_i , il vient :

$$(-\lambda u')\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + (\lambda u')\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + au\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - au\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \int_{K_i} bu(x)dx = \int_{K_i} f(x)dx$$

où $(u_i)_{i=1}^N$ sont les inconnues discrètes.

Dans le cas $a \geq 0$, qui est le cas considéré dans la suite, le terme conservatif $au(x_{i+\frac{1}{2}}) \simeq au_i$ pour des raisons de stabilité du schéma. Ce schéma est stable si $ah \leq 2\lambda$, pour le maillage uniforme de taille h et de coefficient de diffusion la constante λ .

Dans le cas $a \leq 0$, l'approximation de $au(x_{i+\frac{1}{2}})$ est donnée par au_{i+1} .

$$\int_{K_i} bu(x)dx = bu(\eta) \int_{K_i} dx \simeq bu_i h_i, \eta \in K_i, \forall i = 1, \dots, N$$

$$\text{Soit } \lambda_i = \frac{1}{h_i}$$

Puisque $\lambda|_{K_i} \in C^1(\bar{K}_i), \exists C_\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\lambda_i - \lambda(x)| \leq C_\lambda h, \forall x \in K_i$ la conservativité du flux en $x_{i+\frac{1}{2}}$ a la même valeur sur K_i et K_{i+1} .

Soit $H_{i+\frac{1}{2}} \simeq -\lambda u'(x_{i+\frac{1}{2}})$, puisque sur K_i et K_{i+1} , λ est continue, l'approximation de $-\lambda u'$ peut être considéré de chaque côté de $x_{i+\frac{1}{2}}$ pour utiliser le principe de différences finies :

$$H_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda_i \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_i}{h_i^+} \text{ sur } K_i, \forall i = 1, \dots, N$$

$$H_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}^-} \text{ sur } K_{i+1}, \forall i = 0, \dots, N-1$$

avec $u_{\frac{1}{2}} = c$ et $u_{N+\frac{1}{2}} = d$

Les deux approximations ci-dessus de $\lambda u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ sont égales (à cause de la conservativité du flux)

Donc :

$$\forall i = 0, \dots, N-1, \quad -\lambda_i \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_i}{h_i^+} = -\lambda_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}^-} \quad (*)$$

$$\Rightarrow u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} \frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + u_i \frac{\lambda_i}{h_i^+}}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}}$$

D'où :

$$H_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda_i}{h_i^+} \left[\frac{u_{i+1} \frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + u_i \frac{\lambda_i}{h_i^+}}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} - u_i \right], \forall i = 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow H_{i+\frac{1}{2}} = \frac{-\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ \lambda_{i+1} + h_{i+1}^- \lambda_i} (u_{i+1} - u_i), \forall i = 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow H_{i+\frac{1}{2}} = -\tau_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i), \forall i = 1, \dots, N-1$$

$$\text{où } \tau_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ \lambda_{i+1} + h_{i+1}^- \lambda_i}, \forall i = 1, \dots, N-1 \text{ avec } H_{\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda_1}{h_1} (u_1 - c) \text{ et } H_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda_N}{h_N} (d - u_N)$$

Le schéma numérique pour l'approximation du problème(2.7) est :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} + bh_i u_i = h_i f_i, \forall i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

avec

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx, \forall i = 1, \dots, N$$

et

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) + au_i, \forall i = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda_1}{h_1}(u_1 - c) + ac \text{ et } F_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda_N}{h_N}(d - u_N) + au_N, \forall i = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

Remarque :

Si $a \geq 0$, dans le choix de l'approximation de $au(x_{i+\frac{1}{2}})$ par au_{i+1} le schéma est instable. Le schéma numérique (2.8) est un système de N équations avec N inconnues.

2.3.2 Estimations de l'erreur :

Théorème 2.2: Soient $a, b \geq 0$ et $c, d \in \mathbb{R}, \lambda \in L^\infty(0,1)$ tel que $\forall \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ pp avec $\bar{\lambda}, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in L^1(0,1)$. Soient u l'unique solution du problème (2.7) et $\mathcal{T} = (K_i)_{i=1}^N$ un maillage admissible au sens de définition 2.1 tel que $\lambda \in C^1(\bar{K}_i)$ et $f \in C(\bar{K}_i), \forall i = 1, \dots, N$, $\gamma = \max_{i=1, \dots, N} \|u''\|_{L^\infty(K_i)}$ et $\delta = \max_{i=1, \dots, N} \|\lambda\|_{L^\infty(K_i)}$. Alors :

1. $\exists ! U = (u_1, \dots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ solution de (2.8) – (2.10)

2. $\exists C$ dépendant de $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}, \gamma$ et δ tel que :

$$\sum_{i=1}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (e_{i+1} - e_i)^2 \leq Ch^2$$

et

$$|e_i| \leq Ch, \forall i = 1, \dots, N$$

avec $e_0 = e_{N+1} = 0$ et $e_i = u(x_i) - u_i, \forall i = 1, \dots, N$.

Preuve du théorème 2.2 :

La preuve de ce théorème se décompose en trois étapes :

Etape 1: L'existence et l'unicité de la solution de(2.8) – (2.10)

On multiplie l'équation (2.8) par u_i et on fait la somme pour $i = 1, \dots, N$ tel que : si $c = d = f_i = 0$ alors la solution unique est nulle. En effet :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N u_i F_{i+\frac{1}{2}} - \sum_{i=1}^N u_i F_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^N -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i)u_i + \sum_{i=1}^N au_i^2 + \sum_{i=1}^N \tau_{i-\frac{1}{2}}(u_i - u_{i-1})u_i - \sum_{i=1}^N au_i u_{i-1} + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{i=1}^N a u_i (u_i - u_{i-1}) + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 = 0 \text{ car } c = d = 0$$

D'après l'hypothèse de ce théorème, on a $a, b \geq 0$, il suffit de montrer que

$$\sum_{i=1}^N a u_i (u_i - u_{i-1}) \geq 0 \text{ pour déduire que la seule solution du système homogène est}$$

la solution triviale $u_i = 0$. En effet :

$$\sum_{i=1}^N a u_i (u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a [(u_i - u_{i-1})^2 + (u_i^2 - u_{i-1}^2)]$$

$$(*) \Rightarrow u_i = u_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-} (u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}), \forall i = 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow u_{i-1} = u_{i-\frac{1}{2}} - \frac{\lambda_i \lambda_{i-1}}{h_{i-1}^+ h_i^-} (u_i - u_{i-\frac{1}{2}}), \forall i = 2, \dots, N$$

$$u_i^2 - u_{i-1}^2 = (u_{i+\frac{1}{2}})^2 - (u_{i-\frac{1}{2}})^2 + \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-}\right)^2 (u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}})^2$$

$$- \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i-1}}{h_{i-1}^+ h_i^-}\right)^2 (u_i - u_{i-\frac{1}{2}})^2 - 2 \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-}\right) (u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}) u_{i+\frac{1}{2}} + 2 \frac{\lambda_i \lambda_{i-1}}{h_{i-1}^+ h_i^-} (u_i - u_{i-\frac{1}{2}}) u_{i-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (u_i^2 - u_{i-1}^2) &= \sum_{i=1}^N (u_{i+\frac{1}{2}})^2 - \sum_{i=0}^{N-1} (u_{i+\frac{1}{2}})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-}\right)^2 (u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}})^2 - \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-}\right)^2 (u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}})^2 \\ &- 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-}\right) (u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}) u_{i+\frac{1}{2}} + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-}\right) (u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}) u_{i+\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } u_{\frac{1}{2}} = u_{N+\frac{1}{2}} = u_{N+1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N a u_i (u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a (u_{i-1} - u_i)^2 \geq 0 \quad \text{car } a \geq 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 &= - \sum_{i=1}^N a u_i (u_i - u_{i-1}) \leq 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 &= 0 \\ \Rightarrow u_i &= 0, \forall i = 0, \dots, N \end{aligned}$$

Alors il existe une unique solution $U = (u_1, \dots, u_N)^t$ de (2.8) – (2.10)

Etape 2 : Consistance des flux

On rappelle que : $h = \max\{h_i, i = 1, \dots, N\}$

Soit $\bar{H}_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ et $H_{i+\frac{1}{2}}^* = -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_i))$, $\forall i = 0, \dots, N$

avec $\tau_{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_1}{h_1}$ et $\tau_{N+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_N}{h_N}$

On démontre alors qu'il existe une constante $C_1 \in \mathbb{R}_+^*$ dépendant de $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}, \gamma$ et δ tel que :

$$H_{i+\frac{1}{2}}^* = \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + T_{i+\frac{1}{2}}, \quad |T_{i+\frac{1}{2}}| \leq C_1 h, \quad \forall i = 0, \dots, N$$

Et on introduit :

$$H_{i+\frac{1}{2}}^{*, -} = -\lambda_i \frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_i)}{h_i^+} \text{ et } H_{i+\frac{1}{2}}^{*, +} = -\lambda_{i+1} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+\frac{1}{2}})}{h_{i+1}^-} \quad (2.11)$$

Puisque $\lambda \in C^1(\bar{K}_i)$ et $u \in C^2(\bar{K}_i)$, $\exists C(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\begin{cases} H_{i+\frac{1}{2}}^{*, -} = \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + R_{i+\frac{1}{2}}^- & \text{où } |R_{i+\frac{1}{2}}^-| \leq Ch, i = 1, \dots, N \\ H_{i+\frac{1}{2}}^{*, +} = \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + R_{i+\frac{1}{2}}^+ & \text{où } |R_{i+\frac{1}{2}}^+| \leq Ch, i = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} = H_{i+\frac{1}{2}}^{*, -} - R_{i+\frac{1}{2}}^- = H_{i+\frac{1}{2}}^{*, +} - R_{i+\frac{1}{2}}^+, \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow -\lambda_i \frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_i)}{h_i^+} - R_{i+\frac{1}{2}}^- = -\lambda_{i+1} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+\frac{1}{2}})}{h_{i+1}^-} - R_{i+\frac{1}{2}}^+, \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} u(x_{i+1}) + \frac{\lambda_i}{h_i^+} u(x_i)}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} + \frac{R_{i+\frac{1}{2}}^+ - R_{i+\frac{1}{2}}^-}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}}, \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

On remplace l'expression de $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ dans $H_{i+\frac{1}{2}}^{*, -}$ qui définie par (2.12):

$$\begin{aligned} H_{i+\frac{1}{2}}^{*, -} &= -\frac{\lambda_i}{h_i^+} \left[\frac{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} u(x_{i+1}) + \frac{\lambda_i}{h_i^+} u(x_i)}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} - u(x_i) \right] = -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u(x_{i+1}) - u(x_i)) - \frac{\lambda_i}{h_i^+} \frac{R_{i+\frac{1}{2}}^+ - R_{i+\frac{1}{2}}^-}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} \\ &= -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u(x_{i+1}) - u(x_i)) - \frac{\lambda_i}{h_i^+} S_{i+\frac{1}{2}}, \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \quad \text{où } S_{i+\frac{1}{2}} = \frac{R_{i+\frac{1}{2}}^+ - R_{i+\frac{1}{2}}^-}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité(2.14), il vient:

$$\begin{aligned} H_{i+\frac{1}{2}}^{*, -} &= \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + R_{i+\frac{1}{2}}^- = H_{i+\frac{1}{2}}^* - \frac{\lambda_i}{h_i^+} S_{i+\frac{1}{2}}, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow H_{i+\frac{1}{2}}^* &= \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + R_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{\lambda_i}{h_i^+} S_{i+\frac{1}{2}}, \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left| H_{i+\frac{1}{2}}^* - \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} \right| \leq \left| R_{i+\frac{1}{2}}^- \right| + \frac{\lambda_i}{h_i^+} \frac{1}{\underline{\lambda}} \frac{h_i^+ h_{i+1}^-}{h_i^+ + h_{i+1}^-} \left| R_{i+\frac{1}{2}}^+ - R_{i+\frac{1}{2}}^- \right| \\
&\Rightarrow \left| H_{i+\frac{1}{2}}^* - \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} \right| \leq \left| R_{i+\frac{1}{2}}^- \right| + \frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}} \frac{h_{i+1}^-}{h_i^+ + h_{i+1}^-} \left| R_{i+\frac{1}{2}}^+ - R_{i+\frac{1}{2}}^- \right|, \forall i = 1, \dots, N-1 \\
&\Rightarrow \left| H_{i+\frac{1}{2}}^* - \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} \right| \leq \left| T_{i+\frac{1}{2}} \right| \leq Ch + 2Ch \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}} \max_{i=1, \dots, N} \{h_i\} \\
&\Rightarrow \exists C_1 \text{ tel que } \left| H_{i+\frac{1}{2}}^* - \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} \right| \leq \left| T_{i+\frac{1}{2}} \right| \leq C_1 h, \forall i = 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

On définit le flux exact:

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} := \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + au \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right), \forall i = 1, \dots, N$$

et on définit aussi :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* := -\tau_{i+\frac{1}{2}} (u(x_{i+1}) - u(x_i)) + au(x_i), \forall i = 1, \dots, N-1$$

avec

$$F_{\frac{1}{2}}^* = -\frac{\lambda_1}{h_1} (u(x_1) - c) + ac \text{ et } F_{N+\frac{1}{2}}^* = -\frac{\lambda_N}{h_N^+} (d - u(x_N)) + au(x_N)$$

Comme

$$\bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + T_{i+\frac{1}{2}} = H_{i+\frac{1}{2}}^*, \forall i = 0, \dots, N$$

On a

$$\begin{aligned}
F_{i+\frac{1}{2}}^* &= H_{i+\frac{1}{2}}^* + au(x_i) = \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + T_{i+\frac{1}{2}} + au(x_i), \forall i = 1, \dots, N-1 \\
&\Rightarrow F_{i+\frac{1}{2}}^* = \bar{H}_{i+\frac{1}{2}} + au \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) + T_{i+\frac{1}{2}}, \forall i = 0, \dots, N
\end{aligned}$$

Car $au(x_0) = au(x_{\frac{1}{2}}) = u(0) = c$ et $au(x_{N+\frac{1}{2}}) = au(x_{N+1}) = u(1) = d$

Donc :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} + T_{i+\frac{1}{2}}$$

avec

$$\left| T_{i+\frac{1}{2}} \right| \leq C_1 h, \forall i = 0, \dots, N \quad (2.15)$$

Donc l'approximation numérique du flux est consistante.

Etape 3 : L'estimation de l'erreur

On commence par intégrer l'équation (2.7) sur chaque volume de contrôle K_i :

$$\begin{aligned}
&\int_{K_i} (-\lambda u')'(x) dx + \int_{K_i} au'(x) dx + \int_{K_i} bu(x) dx = \int_{K_i} f(x) dx \\
&\Rightarrow -\lambda u' \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) + \lambda u' \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right) + au' \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) - au' \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right) + bh_i u(x_i) = h_i f_i \\
&\Rightarrow \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} + bh_i (u(x_i) + S_i) = h_i f_i, \forall i = 1, \dots, N \quad (2.16)
\end{aligned}$$

où $S_i \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une constante C_2 dépend seulement de u tel que $|S_i| \leq C_2 h, \forall i = 1, \dots, N$, donc (2.16) devient :

$$\begin{aligned}
& F_{i+\frac{1}{2}}^* - T_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^* + T_{i-\frac{1}{2}} + bh_i(u(x_i) + S_i) = hf_i, \forall i = 1, \dots, N \\
\Rightarrow & F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i-\frac{1}{2}}^* + bh_i(u(x_i) + S_i) = T_{i+\frac{1}{2}} - T_{i-\frac{1}{2}} + hf_i, \forall i = 1, \dots, N \quad (2.17)
\end{aligned}$$

On soustrait (2.8) à (2.17) on trouve :

$$\begin{aligned}
& F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^* + F_{i-\frac{1}{2}} + bh_i(u(x_i) - u_i + S_i) = T_{i+\frac{1}{2}} - T_{i-\frac{1}{2}}, \forall i = 1, \dots, N \\
\Rightarrow & -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u(x_{i+1}) - u(x_i)) + au(x_i) + \tau_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) - au_i + \tau_{i-\frac{1}{2}}(u(x_i) - u(x_{i-1})) \\
& - au(x_{i-1}) - \tau_{i-\frac{1}{2}}(u_i - u_{i-1}) + au_{i-1} + bh_i(u(x_i) - u_i + S_i) = T_{i+\frac{1}{2}} - T_{i-\frac{1}{2}}, \forall i = 1, \dots, N \\
\Rightarrow & -\tau_{i+\frac{1}{2}}(e_{i+1} - e_i) + \tau_{i-\frac{1}{2}}(e_i - e_{i-1}) + a(e_i - e_{i-1}) + bh_i e_i = -bh_i S_i + T_{i+\frac{1}{2}} - T_{i-\frac{1}{2}} \\
& \forall i = 1, \dots, N \quad (2.18)
\end{aligned}$$

On multiplie cette équation par e_i et on fait la somme pour $i = 1, \dots, N$
D'abord, on calcule

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1}) e_i = ? \\
\sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1}) e_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1}) e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1}) e_i \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N e_i^2 - \sum_{i=1}^N e_i e_{i-1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1}) e_i \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=2}^{N+1} e_{i-1}^2 - \sum_{i=1}^N e_i e_{i-1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1}) e_i \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N e_{i-1}^2 - \sum_{i=1}^N e_i e_{i-1} + e_N^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1}) e_i \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i-1} (e_i - e_{i-1}) + \frac{1}{2} e_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1}) e_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})^2 + \frac{1}{2} (e_{N+1}^2 - e_N^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (e_i - e_{i-1})^2
\end{aligned}$$

Donc (2.18) devient :

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^N \tau_{i+\frac{1}{2}}(e_{i+1} - e_i) e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \tau_{i+\frac{1}{2}}(e_{i+1} - e_i) e_{i+1} + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (e_i - e_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^N bh_i e_i^2 \\
&= -\sum_{i=1}^N bh_i S_i e_i + \sum_{i=1}^N T_{i+\frac{1}{2}} e_i - \sum_{i=0}^{N-1} T_{i+\frac{1}{2}} e_{i+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_1 e_1^2 + \sum_{i=1}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (e_{i+1} - e_i)^2 + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (e_i - e_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^N b h_i e_i^2 \\ = - \sum_{i=1}^N b h_i S_i e_i + \sum_{i=1}^N T_{i+\frac{1}{2}} (e_{i+1} - e_i) \end{aligned}$$

Puisque $|S_i| \leq C_2 h$ et $a, b \geq 0$ donc :

$$\sum_{i=1}^N (e_{i+1} - e_i)^2 \tau_{i+\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^N b h_i |e_i| C_2 h + \sum_{i=1}^N C_2 h |e_{i+1} - e_i| (*)$$

On remarque que :

$$|e_i| \leq \sum_{j=1}^N |e_j - e_{j-1}| = \sum_{j=0}^{N-1} |e_{j+1} - e_j|$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|e_i| \leq \left(\sum_{i=1}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (e_{i+1} - e_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(*) devient :

$$A^2 \leq \sum_{i=1}^N C_2 b h_i h A B + A B C_1 h = C_2 b h A B + C_1 h A B \quad \text{car } \sum_{i=1}^N h_i = 1$$

avec

$$A = \left(\sum_{i=1}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (e_{i+1} - e_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } B = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque

$$\tau_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{\lambda_i h_{i+1}^- + \lambda_{i+1} h_i^+} \geq \frac{\underline{\lambda}^2}{\bar{\lambda} (h_{i+1}^- + h_i^+)} \geq \frac{\underline{\lambda}^2}{\bar{\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{\tau_{i+\frac{1}{2}}} \leq \frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}^2} \text{ et } \sum_{i=1}^N (h_{i+1}^- + h_i^+) = \sum_{i=1}^N h_{i+\frac{1}{2}} = 1$$

Ceci donne :

$$A \leq C_2 b h \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} + C_1 \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} h \Rightarrow A \leq C_2 b h \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} + C_1 \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} h \leq C_3 h$$

où C_3 est une constante dépendant de $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}, \gamma$ et δ .

$$\Rightarrow A^2 \leq \sum_{i=1}^N \tau_{i+\frac{1}{2}} (e_{i+1} - e_i)^2 \leq C h^2, \forall i = 1, \dots, N$$

et $|e_i| \leq A.B \leq \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} . C_3 h \leq Ch, \forall i = 1, \dots, N$ ce qui achève la démonstration ■

Chapitre 3 :

Problème elliptique en 2D ou 3D :

Le thème de ce chapitre est la discrétisation des problèmes elliptiques dans des espaces de dimension supérieure à l'unité par la méthode des **volumes finis**. Pour les formes générales des **volumes de contrôle**, la définition de schéma et la preuve de convergence nécessitent certaines hypothèses qui définissent un "**maillage admissible**".

Les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sont tous les deux considérées. Dans les deux cas, l'inégalité de Poincaré discrète est utilisée, et la stabilité du schéma est prouvée par l'établissement d'estimations sur les solutions approximatives.

La convergence du schéma sans aucune hypothèse sur la régularité de la solution exacte est prouvée. Puis, à nouveau dans les deux cas de condition de Dirichlet et de Neumann, une estimation d'erreur entre la solution approximative et la régularité de la solution dans C^2 ou H^2 est assurée.

Les résultats sont généralisés au cas des coefficients de diffusion de la matrice et les conditions aux limites. La section 3.4 est consacrée au schéma aux **volumes finis** établi sur le modèle de convection pure et de convection diffusion.

3.1 Conditions au bord de Dirichlet :

On considère ici l'équation elliptique suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot u)(x) + bu(x) = f(x) & , x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & , x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\mathbf{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto \mathbf{v}(x_1, x_2)$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$)
2. $b \geq 0$,
3. $f \in L^2(\Omega)$,
4. $\mathbf{v} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall i = 1, \dots, d, \mathbf{v}_i \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}), \operatorname{div}(\mathbf{v}) \geq 0$
5. $g \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}) = C(\partial\Omega)$ tel qu'il existe une fonction $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ tel que :
 $\bar{\gamma}(\tilde{g}) = g$ pp sur $\partial\Omega$ où $\bar{\gamma}(\tilde{g}) = \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g$
 $(\bar{\gamma}: H^1(\Omega) \rightarrow f \in L^2(\partial\Omega)$ est la fonction trace qui est linéaire est continue) .

On dit pour cette dernière supposition que \tilde{g} est un relèvement de g sur Ω .

Sous toutes ses suppositions, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution variationnelle du problème (3.1) : $u = w + \tilde{g}$, $\tilde{g} \in H^1(\Omega) = g$ si $g \in C(\partial\Omega)$ et $w \in H_0^1(\Omega)$ puisque $w = u - \tilde{g} \in H^1(\Omega)$ et $w|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} - \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g - g = 0$

$$(3.1) \Rightarrow \begin{cases} -\Delta w - \Delta \tilde{g} + \operatorname{div}(\mathbf{v}.w) + \operatorname{div}(\mathbf{v}.\tilde{g}) + bw + b\tilde{g} = f & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta w + \operatorname{div}(\mathbf{v}.w) + bw = \Delta \tilde{g} - \operatorname{div}(\mathbf{v}.\tilde{g}) - b\tilde{g} + f & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ donc la première équation de ce dernier problème devient :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \varphi \Delta w dx + \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(\mathbf{v}.w) dx + \int_{\Omega} b\varphi w dx \\ = \int_{\Omega} f\varphi dx + \int_{\Omega} \varphi \Delta \tilde{g} dx - \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(\mathbf{v}.\tilde{g}) dx - \int_{\Omega} b\varphi \tilde{g} dx \end{aligned}$$

D'après la formule de Green cette égalité devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx + \int_{\Omega} \nabla \varphi (\mathbf{v}.w) dx + \int_{\Omega} b\varphi w dx \\ = \int_{\Omega} f\varphi dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \tilde{g} dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi (\mathbf{v}.\tilde{g}) dx - \int_{\Omega} b\varphi \tilde{g} dx \quad (3.1)' \\ \Leftrightarrow a(w, \varphi) = L(\varphi) \end{aligned}$$

où

$$a(w, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx + \int_{\Omega} \nabla \varphi (\mathbf{v}.w) dx + \int_{\Omega} b\varphi w dx$$

$$L(\varphi) = \int_{\Omega} (f - b\tilde{g})\varphi dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi (\nabla \tilde{g} - \mathbf{v}.\tilde{g}) dx$$

3.1.1 structure du maillage :

Si Ω est un rectangle ($d = 2$) ou un parallélépipède ($d = 3$), il peut alors faire avec un volume de contrôle rectangulaire ou parallélépipédique. Dans ce cas, le schéma aux maillages rectangulaires pour l'opérateur de Laplace unidimensionnel peut être facilement généralisé.

Pour l'instant on considère, le cas bidimensionnel.

Soit $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ et $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$

On suppose dans le problème(3,1) que $b = \mathbf{v} = 0$, ce qui se réduit à une équation de diffusion pure

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & , (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit $\mathcal{T} = (K_{i,j})_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, M}$ un maillage admissible de $(0,1) \times (0,1)$ qui satisfait les hypothèses suivantes :

Soient $N, M \in \mathbb{N}^*$, $h_1, \dots, h_N > 0$, $k_1, \dots, k_M > 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1, \sum_{j=1}^M k_j = 1$$

Soit $h_0 = 0 = k_0$ et $h_{N+1} = 0 = k_{M+1}$

Pour $i = 1, \dots, N$, soit $x_{\frac{1}{2}} = 0, h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, x_{N+1} = 1$

Pour $j = 1, \dots, M$, soit $y_{\frac{1}{2}} = 0, k_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}, y_{M+1} = 1$

avec $K_{i,j} =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[\times]y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}[$

Soient $(x_i)_{i=0}^{N+1}$ et $(y_j)_{j=0}^{M+1}$ tel que :

$x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}}$, pour $i = 1, \dots, N, x_0 = 0, x_{N+1} = 1,$

$y_{j-\frac{1}{2}} < y_j < y_{j+\frac{1}{2}}$, pour $j = 1, \dots, M, y_0 = 0, y_{M+1} = 1,$

$x_{i,j} = (x_i, y_j)$, pour $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, on pose :

$h_i^- = x_i - x_{i-\frac{1}{2}}, h_i^+ = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i$, pour $i = 1, \dots, N$ et $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$

$k_j^- = y_j - y_{j-\frac{1}{2}}, k_j^+ = y_{j+\frac{1}{2}} - y_j$, pour $j = 1, \dots, M$ et $k_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j$

Soit $h = \max\{h_i, i = 1, \dots, N\}, (k_j, j = 1, \dots, M)$

Comme dans le cas unidimensionnel, le schéma aux volumes finis est retrouvé par l'intégration de l'équation du problème(3.2) sur chaque volume de contrôle $K_{i,j}$:

$$\begin{aligned} & - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) dx dy - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) dx dy = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(x, y) dx dy \\ \Rightarrow & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[-\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, y) \right] dy + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[-\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_{j-\frac{1}{2}}) \right] dx \\ & = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Les flux de $u(x_i, y_j)$ sont approximés par les inconnues discrètes $u_{i,j}$

L'approximation de $-\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$ est établie à partir d'un procédé de différence finies en x (y_j fixée)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) &= \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h_{i+\frac{1}{2}}} + O(h) \\ \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial x} (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) dy &\simeq - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2}}} dy = -(y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}) \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{k_j}{h_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}), \forall i = 0, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

On pose $F_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{k_j}{h_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}), \forall i = 0, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M.$

De même, l'application de $-\frac{\partial u}{\partial y} (x_i, y_{i+\frac{1}{2}})$ est établie à partir d'un procédé de différence finies en y (x_i fixée).

$$-\frac{\partial u}{\partial y} (x_i, y_{i+\frac{1}{2}}) = -\frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{k_{j+\frac{1}{2}}} + O(k)$$

où $|O(k)| \leq Ck, C \in \mathbb{R}_+^*$ dépendant de $u.$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial y} (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) &\simeq -\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k_{j+\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} -\frac{\partial u}{\partial y} (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) dx &\simeq - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k_{j+\frac{1}{2}}} dx = -(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k_{j+\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{h_i}{k_{j+\frac{1}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}), \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 0, \dots, M \end{aligned}$$

On pose $F_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{h_i}{k_{j+\frac{1}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}), \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 0, \dots, M$

D'après le théorème de la moyenne $\exists \xi \in K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ et $\exists \eta \in K_j =]y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}[$

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(x, y) dx dy &= f(\xi, \eta) \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy = f(\xi, \eta) h_i \times k_j \\ &\simeq f_{i,j} h_i \cdot k_j, \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{K_{i,j}} f(x, y) dx dy \simeq f_{i,j} h_{i,j}, \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M$$

où $h_{i,j} = h_i \times k_j, \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M$

On dit que : $f_{i,j}$ est la valeur moyenne de f sur $K_{i,j}$ avec

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{k_j}{h_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}), \forall i = 0, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M$$

$$F_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{h_i}{k_{j+\frac{1}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}), \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 0, \dots, M$$

$$u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,M+1}, \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M$$

Finalement le schéma numérique aux volumes finis s'écrit :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j} + F_{i,j-\frac{1}{2}} - F_{i,j+\frac{1}{2}} = h_{i,j} \cdot f_{i,j}, \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M$$

3.1.2 Maillage et schéma en 2D ou 3D :

Définition 3.1 : (maillages admissibles)

Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$)

Un maillage admissible de type **volumes finis** de Ω , notés par \mathcal{T} , est donnée par la famille des **volumes de contrôle** qui sont des parties ouvertes, convexes et polygonales de Ω .

Le maillage admissible \mathcal{T} est donnée aussi par la famille des parties de $\bar{\Omega}$

($d - 1$)-dimensionnelle contenues des hyperplans de \mathbb{R}^d , notée \mathcal{E} (si $d = 2$, \mathcal{E} est la famille des arêtes et si $d = 3$, \mathcal{E} est la famille des faces)

Enfin, \mathcal{T} est donnée aussi par la famille des points de Ω , notée \mathcal{P} , ces trois familles satisfont les propriétés suivantes :

- i. La fermeture de l'union de tous les volumes de contrôle (cellules) est $\bar{\Omega} : K$ étant un volume de contrôle inclus dans Ω c'est-à-dire $K \in \mathcal{T}$, alors $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K}$.
- ii. $\forall K \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{E}_K \subset \mathcal{E} | \partial K = \bar{K} | K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sigma$ de plus $\mathcal{E} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \mathcal{E}_K$
- iii. $\forall (K, L) \in \mathcal{T}^2$ tel que $K \neq L$, la mesure de Lebesgue ($d - 1$)-dimensionnelle m tel que :

$$m(\bar{K} \cap \bar{L}) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \bar{K} \cap \bar{L} = \text{un sommet ou } \bar{K} \cap \bar{L} = \emptyset \\ m(\sigma) & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E} \text{ tel que } \sigma = K|L (\bar{K} \cap \bar{L} = \sigma = K|L) \end{cases}$$

- iv. La famille $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est telle que $x_K \in K, \forall K \in \mathcal{T}$ et si $\sigma = K|L$, on est sûr que $x_K \neq x_L$ et on suppose que la droite joignant x_K à x_L , notée par $D_{K,L}$ est orthogonal à $\sigma = K|L$, dans ce cas, on dit que x_K est le centre de volume de contrôle K
- v. $\forall \sigma \in \mathcal{E}_K$ tel que $\sigma \subset \partial \Omega$. Soient K le volume de contrôle dont $\sigma \in \mathcal{E}_K$ et $D_{K,\sigma}$ la droite orthogonal à σ pour tant x_K le centre de K , alors on note par $y_\sigma = D_{K,\sigma} \cap \partial \Omega$.

Notations supplémentaires :

La taille du maillage est définie par : $size(\mathcal{T}) = \sup_{K \in \mathcal{T}} \text{diam}(K)$ où $\text{diam}(K)$ est le diamètre de K c'est-à-dire :

$$\text{diam}(K) = \max_{(x,y) \in K} |x - y|$$

$\forall K \in \mathcal{T}$ et $\sigma \in \mathcal{E}_K$, $m(K)$ est la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle et $m(\sigma)$ est la mesure de Lebesgue ($d-1$)-dimensionnelle.

L'ensemble des interfaces $\sigma \subset \Omega$ de \mathcal{E} est notée par : $\mathcal{E}_{int} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \not\subset \partial \Omega\}$

L'ensemble des parties ($d-1$)-dimensionnelle de \mathcal{E} qui sont communes avec $\partial \Omega$ est notée par : $\mathcal{E}_{ext} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \partial \Omega\}$

L'ensemble des volumes de contrôle voisins à $K \in \mathcal{T}$ et qui possèdent une interface σ commune avec K ($\sigma \in \mathcal{E}_{int}$) est noté par : $N(K) = \{L \in \mathcal{T}, \exists \sigma \in \mathcal{E}_K | \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}\}$

Si $\sigma = K|L$ ($\sigma \in \mathcal{E}_{int}$), on note par $d_\sigma = d_{K,L}$ la distance entre x_K (centre de K), et x_L (centre de L), et par $d_{K,\sigma}$ la distance de x_K à σ .

Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}$ ($\sigma \subset \partial \Omega$), d_σ est dans ce cas la distance entre x_K et y_σ .

On définit la notion de transmissibilité à travers σ ($\sigma \in \mathcal{E}$) par : $\tau_\sigma = \frac{m(\sigma)}{d_\sigma}$ si $d_\sigma \neq 0$

Maillage admissible

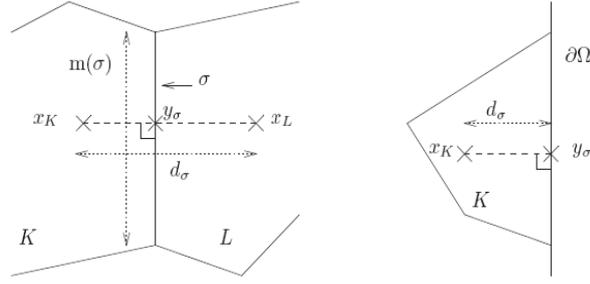


Schéma aux volumes finis :

Soit \mathcal{T} un maillage admissible. On définit le schéma aux volumes finis qui discrétise (3.1), en introduisant, tout d'abord la discrétisation du second membre de (3.1) sur $K, \forall K \in \mathcal{T}$

$$f_K = \frac{1}{m(K)} \int_K f(x) dx, \forall K \in \mathcal{T},$$

où f_K est la valeur moyenne de f sur K .

Ensuite, on introduit la discrétisation des opérateurs différentiels intervenant dans la modélisation du flux à travers les interfaces $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}$

Soit $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ le vecteur normal unitaire à σ se dirigeant vers l'extérieur de K

$$v_{K,\sigma} = \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x), \forall K \in \mathcal{T} \text{ et } \sigma \in \mathcal{E}_K$$

Si $\sigma = K|L$

$$u_{\sigma,+} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ u_L & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

Si $\sigma \subset \bar{K} \cap \partial\Omega :$

$$u_{\sigma,+} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ g(y_\sigma) & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

où $u(x) \simeq u_K$ sur K et $u(x) \simeq u_L$ sur L

Remarque 3.1 :

Dans l'équation (1.3), la modélisation du flux à travers les interfaces $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ s'effectue par l'opérateur différentiel de divergence : $\text{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$. Donc le schéma aux volumes finis s'écrit finalement comme suit :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} + b m(K) u_K = m(K) f_K, \forall K \in \mathcal{T} \quad (3.3)$$

où

$$F_{K,\sigma} = \begin{cases} -\tau_{K|L}(u_L - u_K) & , \forall \sigma = K|L \\ -\tau_\sigma(g(y_\sigma) - u_K) & , \forall \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases}, \tau_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d_{K|L}} = \tau_{L|K}$$

Si $\sigma = K|L$ $F_{L,\sigma} = -\tau_{L|K}(u_K - u_L) = \tau_{K|L}(u_K - u_L) = \tau_{K|L}(u_L - u_K) = -F_{K,\sigma}$

Pour obtenir le schéma aux volumes finis de(3.1), on intègre la première équation de(3.1) sur K ($\forall K \in \mathcal{T}$) :

$$-\int_K \Delta u(x) dx + \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot u)(x) dx + \int_K bu(x) dx = \int_K f(x) dx$$

Si on s'intéresse au second membre $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow f \in L^2(K)$ d'après le théorème de la moyenne on a :

$$\int_K f(x) dx = m(K) f_K$$

On sait que $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, alors

$$\begin{aligned} -\int_K \Delta u(x) dx &= -\int_K \operatorname{div}(\nabla u)(x) dx \\ &= -\int_{\partial K} (\nabla u)(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \\ &= -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} (\nabla u)(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \quad \text{car } \partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sigma, \forall K \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

On pose $h_K(x) = (\nabla u)(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x)$, $x \in \sigma \subset \partial K$

Si $h_K \in C(\sigma)$, $\exists \zeta \in \sigma$ tel que

$$\int_{\sigma} h_K(x) d\gamma(x) = h_K(\zeta) m(\sigma)$$

Puisque

$$h_K(\zeta) = (\nabla u)(\zeta) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(\zeta) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}(\zeta) v_{i,K}(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\zeta)$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\zeta) \simeq \begin{cases} \frac{u_L - u_K}{d_\sigma} \text{ si } \sigma = K|L \\ \frac{g(y_\sigma) - u_K}{d_\sigma} \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases}$$

Si $h_K \in L^\infty(\sigma)$, $\exists C_{h,K} \in]\inf_{\sigma} h_K(x), \sup_{\sigma} h_K(x)[$ tel que

$$C_{h,K} = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} h_K(x) d\gamma(x) = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) d\gamma(x)$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{u_L - u_K}{d_\sigma} & \text{si } \sigma = K|L \\ \frac{g(y_\sigma) - u_K}{d_\sigma} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases}$$

Donc

$$-\int_{\sigma} h_K(x) d\gamma(x) = -\int_{\sigma} (\nabla u)(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \\ \simeq \begin{cases} m(\sigma) \frac{u_L - u_K}{d_\sigma} & \text{si } \sigma = K|L \\ m(\sigma) \frac{g(y_\sigma) - u_K}{d_\sigma} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases}$$

Dans l'intégration de (3.1) sur K , on considère

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot u)(x) dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) u(x) \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$$

et on pose : $v_{K,\sigma} = \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$

Remarque 3.2 :

La vraie approximation de u_σ est:

$$u_\sigma = \frac{d_{K,\sigma} u_L + d_{L,\sigma} u_K}{d_{K,L}}, \quad d_{K,L} = d_{K,\sigma} + d_{L,\sigma}$$

Mais pour des raisons de simplicité de construction du schéma aux volumes finis on ne peut pas utiliser cette approximation. En approchant $u|_\sigma$ par $u_{\sigma,+}$, on a :

$$\int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \mathbf{n}_\sigma(x) u(x) d\gamma(x) \simeq u_{\sigma,+} \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \mathbf{n}_\sigma(x) d\gamma(x) = u_{\sigma,+} v_{K,\sigma}$$

D'où $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+}$ qui représente le second terme du schéma aux volumes finis .

$$\exists \zeta \in K \text{ tel que: } b \int_K u(x) dx = bu(\zeta) \int_K dx = bm(K)u(\zeta) \simeq bm(K)u_K$$

Définition 3.2 :

Soient Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2,3$ et \mathcal{T} un maillage admissible sur Ω .

Soit $X(\mathcal{T})$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω à valeurs réelles restant constantes sur chaque volume de contrôle du maillage.

Définition 3.3 : (la norme discrète H_0^1)

Soient Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2,3$ et \mathcal{T} un maillage admissible sur Ω .

Pour $u \in X(\mathcal{T})$, la norme discrète H_0^1 est définie par :

$$\|u\|_{1,\mathcal{T}} = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_\sigma = \frac{m(\sigma)}{d_\sigma}$$

où

$$D_\sigma u = \begin{cases} |u_L - u_K| & \text{si } \sigma = K|L, \sigma \in \mathcal{E}_{int} \\ |u_K| & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases}$$

Lemme 3.1 (inégalité de Poincaré discrète): Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d ($d = 2,3$) et soient \mathcal{T} un maillage admissible au sens de définition 3.1 et $u \in X(\mathcal{T})$

(d'après la définition 3.3) ;

$$\text{Alors, } \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1,\mathcal{T}}$$

3.1.3 L'existence et l'estimation :

A ce niveau, on prouve l'existence de la solution approximative et on l'estime. Ce qui assure la stabilité du schéma aux volumes finis obtenue par l'inégalité de Poincaré discrète.

Lemme 3.2 (Existence et estimation): Sous les hypothèses de la position du problème(3.1) , soit \mathcal{T} un maillage admissible au sens de la définition 3.1.

Alors, il existe une solution $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ de l'équation(3.3) tel que $(u_K)_{K \in \mathcal{T}} = u_{\mathcal{T}}$

De plus, si $g = 0$ et $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$, nous avons l'estimation suivante :

$$\|u\|_{1,\mathcal{T}} \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve du lemme 3.2 :

Le schéma(3.3) se ramène facilement à un système linéaire de N équations à N inconnues $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$, $N = \text{card}(\mathcal{T})$ avec $\mathcal{T} = \{K_i, i = 1, \dots, N\}$

Etape 1 : Existence et unicité

Il suffit de montrer que la seule solution du système homogène associée à(3.3) avec le second membre nul est la solution triviale.

Supposons que $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ satisfait le système linéaire avec $g(y_\sigma) = 0, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ et $f_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$ et montrons que $u_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$

On commence par multiplier l'équation suivante :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} + \text{bm}(K)u_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$$

par u_K et on fait la somme sur tous les volumes de contrôle K :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} u_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K) u_K^2 = 0$$

Ceci donne, après réarrangement des termes de cette somme suivant les faces de

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{int} \cup \mathcal{E}_{ext} ,$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} + \sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K) u_K^2 = 0, \forall K \in \mathcal{T} \quad (3.3)''$$

$$\text{où } v_\sigma = |v_{K,\sigma}| \text{ et } u_{\sigma,-} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \leq 0 \\ \begin{cases} u_L & \text{si } \sigma = K|L \\ 0 & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \end{cases}$$

Maintenant, on montre que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2$$

On a :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_1}} F_{K_1,\sigma} u_{K_1} + \dots + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_N}} F_{K_N,\sigma} u_{K_N} , N = \text{card}(\mathcal{T}) \quad (*)$$

Dans cette somme et après réarrangement des termes suivant les faces de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{int} \cup \mathcal{E}_{ext}$ deux cas de figure peuvent se présenter :

$\sigma \in \mathcal{E}_{int}$:

Dans ce cas $\exists K \in \mathcal{T} / \sigma \in \mathcal{E}_K$ et $\exists L \in \mathcal{T} / \sigma \in \mathcal{E}_L$ c'est-à-dire $\sigma = K|L$. En parcourant la somme dans (*), on rencontre la somme des deux termes liés à $\sigma = K|L$:

$$F_{K,\sigma} u_K + F_{L,\sigma} u_L = F_{K,\sigma} (u_K - u_L)$$

En faisant la somme sur toutes les interfaces de \mathcal{E}_{int} on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} F_{K,\sigma} (u_K - u_L) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} -\tau_\sigma (u_L - u_K) (u_K - u_L) \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (u_L - u_K)^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 \end{aligned}$$

$\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$\exists K \in \mathcal{T} / \sigma \in \mathcal{E}_K$, en parcourant la somme dans (*), on rencontre le terme $F_{K,\sigma} u_K$ liés à $\sigma \subset \partial\Omega$. En faisant la somme sur toutes les faces externes de \mathcal{E}_{ext} on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} F_{K,\sigma} u_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_\sigma u_K^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 \end{aligned}$$

Il faut montrer aussi que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} u_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+}$$

$$\text{On a : } u_{\sigma,+} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ \begin{cases} u_L & , \sigma = K|L \\ 0 & , \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases} \quad \text{et } u_{\sigma,-} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \leq 0 \\ \begin{cases} u_L & , \sigma = K|L \\ 0 & , \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \end{cases}$$

Donc :

$$u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-} = \begin{cases} \begin{cases} u_L - u_K & , \sigma = K|L \\ u_K & , \sigma \subset \partial\Omega \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ \begin{cases} u_L - u_K & , \sigma = K|L \\ -u_K & , \sigma \subset \partial\Omega \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

et de la même manière et pour les mêmes raisons on distingue deux cas :

$\sigma \in \mathcal{E}_{int}$:

Dans ce cas $\exists K, L \in \mathcal{T}$ tel que $\sigma = K|L$, en parcourant la somme dans(*), on rencontre la somme des deux termes liés à $\sigma = K|L$:

$$\begin{aligned} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} u_K + v_{L,\sigma} u_{\sigma,+} u_L &= v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} (u_K - u_L) \\ &= \begin{cases} (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -(u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases} \\ &= |v_{K,\sigma}| (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} = v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} \end{aligned}$$

$\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \exists K \in \mathcal{T} / \sigma \in \mathcal{E}_K$. En parcourant la somme dans(*), on rencontre le terme $F_{K,\sigma} u_K$ lié à $\sigma \subset \partial\Omega$:

$$\begin{aligned}
v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} u_K &= \begin{cases} (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -(u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases} \\
&= |v_{K,\sigma}| (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} = v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} u_K &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+}. \text{ Ceci explique l'apparition de ce terme dans l'équation (3.3)''}
\end{aligned}$$

Pour déduire que $u_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$, il suffit de montrer que le deuxième terme du premier membre de (3.3)'' est positif :

On remarque que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma ((u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-})^2 + (u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2))$$

On utilise l'hypothèse : $\text{div}(\mathbf{v}) \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\int_{\partial K} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) \right) u_K^2 \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \text{div}(\mathbf{v}(x)) u_K^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{v}) u_{\mathcal{T}_K}^2(x) dx \geq 0 \text{ où } u_{\mathcal{T}_K}(x) = u_K, \forall K \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

On montre alors que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} u_K^2 v_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2)$$

On sait que : $u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2 = (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-})(u_{\sigma,+} + u_{\sigma,-})$

Si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$:

$$u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-} = \begin{cases} u_K - u_L & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -(u_K - u_L) & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}, \quad u_{\sigma,+} + u_{\sigma,-} = \begin{cases} u_K + u_L & \text{si } v_{K,\sigma} \neq 0 \\ 2u_K & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \end{cases}$$

$$(u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2)v_\sigma = \begin{cases} (u_K^2 - u_L^2) v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -(u_K^2 - u_L^2) v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2)v_\sigma = (u_K^2 - u_L^2) |v_{K,\sigma}| = u_K^2 v_{K,\sigma} + u_L^2 v_{L,\sigma}$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -u_K & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}, u_{\sigma,+} + u_{\sigma,-} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \neq 0 \\ 2u_K & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \end{cases}$$

$$(u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2)v_\sigma = \begin{cases} u_K^2 v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -u_K^2 v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

$$(u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2)v_\sigma = u_K^2 |v_{K,\sigma}|$$

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_K^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_K^2 & (**) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} v_{K,\sigma} (u_K^2 - u_L^2) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} v_{K,\sigma} u_K^2 \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2)v_\sigma + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} (u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2)v_\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (u_{\sigma,+}^2 - u_{\sigma,-}^2)v_\sigma \end{aligned}$$

Alors (3.3)'' donne :

$$0 \leq \|u\|_{1,\mathcal{T}}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K)u_K^2 = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-})u_{\sigma,+} \leq 0$$

Ce qui entraîne que $u_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$ car par hypothèse on a $a, b \geq 0$.

Conclusion : la seule solution du problème homogène associé au système linéaire aux volumes finis (3.3) : (3.3)'' n'est autre que la solution triviale $u_{\mathcal{T}} = 0$, donc (3.3) admet une unique solution $u_{\mathcal{T}} = (u_K)_{K \in \mathcal{T}}$.

Etape 2 : Estimation

Supposons toujours que $g = 0$ sur $\partial\Omega$, ensuite, on multiplie les deux membres de (3.3) par $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ et on fait la somme sur tous les volumes de contrôle K :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K)u_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} u_K = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K \quad (***)$$

Après réarrangement des termes des deux dernières sommes du premier membre de (***) suivant toutes les faces de \mathcal{E} on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} b m(K) u_K^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u_{\mathcal{T}})^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \nu_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K$$

$$\Rightarrow b \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u_K^2 dx + \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K \text{ car } \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \nu_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} \geq 0$$

$$\Rightarrow b \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$b \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque $b \geq 0$, on peut dire que :

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq b \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f_K^2 dx = \int_{\Omega} f^2(x) dx = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u_K^2 dx = \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}}^2(x) dx = \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

alors

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}$$

D'après l'inégalité de Poincaré discrète il vient :

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \text{diam}(\Omega) \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \Rightarrow \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

où $u_{\mathcal{T}}$ est la solution discrète du système aux volumes finis. ■

3.1.4 Convergence :

Nous allons montrer la convergence des solutions approximatives qui sont obtenues par le schéma aux **volumes finis** quand la taille du maillage admissible \mathcal{T} tend vers 0. Pour cela on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3 : Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ et \mathcal{T} un maillage admissible au sens de la définition 3.1. Soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie dans 3.2. On définit \tilde{u} par

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{pp } \Omega \\ 0 & \text{pp } \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

alors, $\exists C > 0$ dépendant de Ω tel que :

$$\| \tilde{u}(\cdot + \eta) - \tilde{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \| u \|_{1,\mathcal{T}}^2 |\eta| (|\eta| + C \text{size}(\mathcal{T})), \forall \eta \in \mathbb{R}^d$$

Preuve du lemme 3.3 :

Pour $\sigma \in \mathcal{E}$, on définit la fonction χ_{σ} par $\chi_{\sigma} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}$

$$(x, y) \mapsto \chi_{\sigma}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \cap [x, y] \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \sigma \cap [x, y] = \emptyset \end{cases}$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}^d$, $\eta \neq 0$ on a :

$$| \tilde{u}(x + \eta) - \tilde{u}(x) | \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) |D_{\sigma} u|, \text{ pp } x \in \Omega$$

Ceci donne d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$| \tilde{u}(x + \eta) - \tilde{u}(x) | \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) \frac{|D_{\sigma} u|^2}{d_{\sigma} C_{\sigma}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) d_{\sigma} C_{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pp } x \in \Omega \quad (1)$$

où $C_{\sigma} = | \langle \mathbf{n}_{\sigma}, \frac{\eta}{|\eta|} \rangle_{\mathbb{R}^d} |$ et \mathbf{n}_{σ} le vecteur normal unitaire à σ (rappelons que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$ le produit scalaire dans \mathbb{R}^d).

On montre qu'il existe une constante $C > 0$ dépendant de Ω tel que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) d_{\sigma} C_{\sigma} \leq |\eta| + C \text{size}(\mathcal{T}) \text{ pp } x \in \mathbb{R}^d$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\sigma \cap [x, x + \eta]$ contient au plus un point $\forall \sigma \in \mathcal{E}$

Puisque Ω n'est pas supposé convexe, on peut dire que $[x, x + \eta] \not\subset \bar{\Omega}$. Soit $y, z \in [x, x + \eta]$ tel que $y \neq z$ et $[y, z] \subset \bar{\Omega}$, $\exists K, L \in \mathcal{T}$ tel que $y \in \bar{K}$ et $z \in \bar{L}$, on prend $d_{\sigma} = |y_1 - z_1|$

où $\begin{cases} y_1 = x_K \text{ ou } y_{\sigma} \text{ avec } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \text{ dépendant de la position de } y \text{ dans } \bar{K} \\ z_1 = x_L \text{ ou } z_{\tilde{\sigma}} \text{ avec } \tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_L \text{ dépendant de la position de } z \text{ dans } \bar{L} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(y, z) d_{\sigma} C_{\sigma} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(y, z) |y_1 - z_1| \langle \mathbf{n}_{\sigma}, \frac{\eta}{|\eta|} \rangle_{\mathbb{R}^d} | \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(y, z) |y_1 - z_1| \langle \mathbf{n}_{\sigma}, \frac{\eta}{|\eta|} \rangle_{\mathbb{R}^d} | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(y, z) \left| \left\langle y_1 - z_1, \frac{\eta}{|\eta|} \mathbf{n}_{\sigma} \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \right| \\
&= \left| \left\langle (y_1 - z_1), \frac{\eta}{|\eta|} \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \right| \cdot \text{avec } |\mathbf{n}_{\sigma}| = 1
\end{aligned}$$

On a $y, z \in [x, x + \eta]$ donc $y_1 - y = y_2$ avec $|y_2| \leq \text{size}(\mathcal{T})$

et $z_1 - z = z_2$ avec $|z_2| \leq \text{size}(\mathcal{T})$

$$|(y_1 - z_1) \cdot \frac{\eta}{|\eta|}| = |(y + y_2 - z - z_2) \cdot \frac{\eta}{|\eta|}| \leq |y - z| + |y_2| + |z_2| \leq |y - z| + 2\text{size}(\mathcal{T})$$

Ceci donne :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(y, z) d_{\sigma} C_{\sigma} \leq |y - z| + 2\text{size}(\mathcal{T})$$

Puisque $y, z \in [x, x + \eta]$ tel que $y \neq z$ et $[y, z] \subset \bar{\Omega}$, en particulier :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) d_{\sigma} C_{\sigma} \leq |\eta| + C\text{size}(\mathcal{T}), C = 2 \text{ si } [x, x + \eta] \subset \bar{\Omega}$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) dx \leq m(\sigma) C_{\sigma} |\eta|$$

Pour trouver l'inégalité cherchée on intègre l'inégalité (1) sur \mathbb{R}^d :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(x + \eta) - \tilde{u}(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) \frac{|D_{\sigma} u|^2}{d_{\sigma} C_{\sigma}} \right) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) d_{\sigma} C_{\sigma} \right) dx$$

$$\Rightarrow \| \tilde{u}(x + \eta) - \tilde{u}(x) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq (|\eta| + C\text{size}(\mathcal{T})) \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) \frac{|D_{\sigma} u|^2}{d_{\sigma} C_{\sigma}} dx$$

$$\Rightarrow \| \tilde{u}(x + \eta) - \tilde{u}(x) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq (|\eta| + C\text{size}(\mathcal{T})) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}} |\eta| |D_{\sigma} u|^2$$

$$\Rightarrow \| \tilde{u}(x + \eta) - \tilde{u}(x) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \| u \|_{1, \mathcal{T}}^2 \cdot |\eta| (|\eta| + C\text{size}(\mathcal{T})), \forall \eta \in \mathbb{R}^d \quad \blacksquare$$

A présent, nous pouvons énoncer le théorème de convergence. Premièrement, on va prouver le résultat de convergence avec des conditions au bord de Dirichlet homogène c'est-à-dire $g = 0$

Théorème 3.1 (convergence, conditions de Dirichlet homogène): *Sous les hypothèses de position du problème (3.1) avec $g = 0$. Soit \mathcal{T} un maillage admissible au sens de la définition 3.1*

et soit $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ la solution du système donné par les équations de (3.3). On définit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ pp $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$

Alors, $u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

De plus, $\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

Preuve du théorème 3.1 :

Soit Y l'ensemble des solutions approximatives c'est-à-dire :

$$Y = \{u_{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \text{ un maillage admissible au sens de définition 3.1}\}$$

On veut prouver que $u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

Grâce aux deux lemmes 3.1 et 3.2, il existe une constante C_1 dépendant de Ω et f tel que :

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1,$$

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq (\text{diam}(\Omega))^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1$$

Donc $u_{\mathcal{T}}$ est borné.

$$\text{Soit } \tilde{u}_{\mathcal{T}} = \begin{cases} u_{\mathcal{T}} & \text{pp } \Omega, \forall u_{\mathcal{T}} \in Y \\ 0 & \text{pp } \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

On a d'après le lemme 3.3 :

$$\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}(\cdot + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 |\eta| (|\eta| + C \text{size}(\mathcal{T})), \forall \eta \in \mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}(\cdot + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0 \text{ quand } \eta \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \|u_{\mathcal{T}}(\cdot + \eta) - u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quand } \eta \rightarrow 0 \text{ (} \Rightarrow x + \eta \in \Omega \text{ si } x \in \Omega \text{)}$$

Donc d'après le théorème de compacité Y est relativement compact dans $L^2(\Omega)$, et grâce à l'unicité de la solution (dans $H_0^1(\Omega)$) du problème(3.1), il suffit de prouver que

si $(u_{(\mathcal{T}_n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset Y \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $size(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

alors u est une solution de(3.1).

On suppose donc que $u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ et on montre que u est une solution de (3.1). Soit $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ et soit $size(\mathcal{T})$ assez petit tel que :

$\psi(x) = \psi(x_K)$ si $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$ et $\partial K \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Pour cela, on multiplie (3.3) par $\psi(x_K)$ et on fait la somme sur $K \in \mathcal{T}$ on obtient :

$$T_1 + T_2 + T_3 = T_4$$

avec :

$$\begin{aligned}
T_1 &= b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K \psi(x_K), \\
T_2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} F_{K,\sigma} \psi(x_K) = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) \psi(x_K), \quad N(K) = \{L \in \mathcal{T}, \exists \sigma \in \mathcal{E}_K | \sigma = K|L\}, \\
T_3 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} \psi(x_K), \\
T_4 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \psi(x_K)
\end{aligned}$$

Puisque $u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ on remarque que :

$$T_1 = b \sum_{K \in \mathcal{T}} \int u_K \psi(x_K) dx = b \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}}(x) \psi(x) dx \rightarrow b \int_{\Omega} u(x) \psi(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

$$T_4 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f(x) \psi(x_K) dx = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

On va étudier maintenant T_2

$$\begin{aligned}
T_2 &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) \psi(x_K) \\
&= - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) \psi(x_K) - \sum_{K \in N(L)} \tau_{L|K} (u_K - u_L) \psi(x_L) \\
&= - \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (u_L - u_K) (\psi(x_K) - \psi(x_L)) \text{ car } \tau_{K|L} = \tau_{L|K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } T_2' &= \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}}(x) \Delta \psi(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u_K \Delta \psi(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} u_K \int_{\partial K} \nabla \psi(x) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} u_K \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla \psi(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \\
&= \sum_{\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}} (u_K - u_L) \int_{\sigma} \nabla \psi(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \text{ car } \mathbf{n}_{K,\sigma} = -\mathbf{n}_{L,\sigma}
\end{aligned}$$

Puisque $u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$,

$$T_2' = \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}}(x) \Delta \psi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x) \Delta \psi(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

On définit maintenant :

$$R_{K|L} := \frac{1}{m(K|L)} \int_{K|L} \nabla \psi(x) \mathbf{n}_{K,L}(x) d\gamma(x) - \frac{\psi(x_L) - \psi(x_K)}{d_{K|L}}$$

où $\mathbf{n}_{K,L}$ le vecteur normal unitaire à $K|L$ se dirigeant vers l'extérieur de K (ou l'intérieur de L)

Alors

$$\begin{aligned} |T_2 + T_2'| &= \left| \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} [-\tau_{K|L}(u_L - u_K)(\psi(x_K) - \psi(x_L)) + (u_K - u_L) \int_{K|L} \nabla \psi(x) \cdot \mathbf{n}_{K|L} d\gamma(x)] \right| \\ &= \left| \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} (u_K - u_L) \left(\frac{m(K|L)}{d_{K|L}} (\psi(x_K) - \psi(x_L)) + \frac{m(K|L)}{m(K|L)} \int_{K|L} \nabla \psi(x) \cdot \mathbf{n}_{K|L}(x) d\gamma(x) \right) \right| \\ |T_2 + T_2'| &= \left| \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L)(u_K - u_L) R_{K|L} \right| \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|T_2 + T_2'| \leq \left(\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) \frac{(u_K - u_L)^2}{d_{K|L}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K|L} R_{K|L}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Les propriétés de régularité de la fonction ψ donnent l'existence d'une constante $C_2 \in \mathbb{R}$ qui dépend de ψ , telle que $|R_{K|L}| \leq C_2 \text{size}(\mathcal{T})$ et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K|L} &= \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} d_{K|L} d\gamma(x) \leq \int_{\partial K} d_{K|L} d\gamma(x) \leq \int_{\Omega} d_{K|L} dx = d_{K|L} \cdot m(\Omega) \\ &= |x_K - x_L| m(\Omega) \leq d \cdot m(\Omega) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |T_2 + T_2'| &\leq \left(\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (D_{\sigma} u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} (C_2^2 d \cdot m(\Omega) (\text{size}(\mathcal{T}))^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2 \text{diam}(\Omega) (d \cdot m(\Omega) (\text{size}(\mathcal{T}))^2)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$T_2 + T_2' \rightarrow 0 \quad \text{quand } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

Ensuite, on va montrer que

$$T_3 \rightarrow - \int_{\Omega} \mathbf{v}(x) u(x) \Delta \psi(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

Soit $T_3 := T_3' + T_3''$

où

$$T_3' := \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} (u_{\sigma,+} - u_K) \psi(x_K),$$

$$T_3'' := \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_K \psi(x_K) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}(x)) u_K \psi(x_K) dx$$

$$= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x)) u_{\mathcal{T}}(x) \psi_{\mathcal{T}}(x) dx \text{ où } \psi_{\mathcal{T}}(x) = \psi(x_K) \text{ si } x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$$

où ψ définie par : $\psi_{\mathcal{T}}(x) = \psi(x_K)$ si $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$ et $\partial K \cap \partial \Omega \neq \emptyset$

Puisque $u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\psi_{\mathcal{T}} \rightarrow \psi$ dans $L^2(\Omega)$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ et $\operatorname{div} \mathbf{v} \geq 0$, on a :

$$T_3'' \rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x)) u(x) \psi(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

On réécrit T_3' comme $T_3' = T_3'' + r_3$

où

$$T_3'' = \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (u_{\sigma,+} - u_K) \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) \psi(x) d\gamma(x),$$

$$r_3 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (u_{\sigma,+} - u_K) \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) (\psi(x_K) - \psi(x)) d\gamma(x)$$

Si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} : \exists x \in K | \sigma \in \mathcal{E}_K$ et $\exists x_L \in L | \sigma \in \mathcal{E}_L$

En parcourant la somme dans r_3 , on rencontre la somme des deux termes liés à $\sigma = K|L$

Donc :

$$\begin{aligned} r_3 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} (u_{\sigma,+} - u_K) \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} (\psi(x_K) - \psi(x)) d\gamma(x) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} (u_{\sigma,+} - u_L) \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} (\psi(x_L) - \psi(x)) d\gamma(x), \mathbf{n}_{K,\sigma} = -\mathbf{n}_{L,\sigma} \end{aligned}$$

D'après le théorème de la moyenne : $\exists \xi_1, \xi_2 \in \sigma = K|L$ tel que :

$$\begin{aligned}
|r_3| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} |u_{\sigma,+} - u_K| \int_{\sigma} |\mathbf{v}(\xi_1)| |\mathbf{n}_{K,\sigma}| |\psi(x_K) - \psi(\xi_1)| d\gamma(x) \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} |u_{\sigma,+} - u_L| \int_{\sigma} |\mathbf{v}(\xi_2)| |\mathbf{n}_{K,\sigma}| |\psi(x_L) - \psi(\xi_2)| d\gamma(x) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} |u_{\sigma,+} - u_K| m(\sigma) |\mathbf{v}(\xi_1)| |\mathbf{n}_{K,\sigma}| |\psi'(\xi_1)| |x_K - \xi_1| \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} |u_{\sigma,+} - u_L| (\xi_1) m(\sigma) |\mathbf{v}(\xi_2)| |\mathbf{n}_{K,\sigma}| |\psi'(\xi_2)| |x_L - \xi_2|
\end{aligned}$$

Grâce à la régularité de \mathbf{v} et ψ , $\exists C_3 \in \mathbb{R}$, C_3 dépendant de \mathbf{v} et ψ telle que

$$\begin{aligned}
|r_3| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} |u_{\sigma,+} - u_K| m(\sigma) C_3 \text{size}(\mathcal{T}) - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} |u_{\sigma,+} - u_L| m(\sigma) C_3 \text{size}(\mathcal{T}) \\
&\Rightarrow |r_3| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \cap \mathcal{E}_K} |u_{\sigma,+} - u_K - u_{\sigma,+} + u_L| m(\sigma) C_3 \text{size}(\mathcal{T}) \\
&\Rightarrow |r_3| \leq C_3 \text{size}(\mathcal{T}) \sum_{\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) |u_L - u_K|
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
|r_3| &\leq C_3 \text{size}(\mathcal{T}) \left(\sum_{\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} |u_L - u_K|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K|L} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\Rightarrow |r_3| \leq C_3 \text{size}(\mathcal{T}) \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} (d \cdot m(\Omega))^{\frac{1}{2}} \text{ car } \sum_{\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K|L} \leq d \cdot m(\Omega) \\
&\Rightarrow |r_3| \leq C_3 (d \cdot m(\Omega))^{\frac{1}{2}} \text{size}(\mathcal{T}) \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \\
&\Rightarrow |r_3| \rightarrow 0 \text{ quand } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Si $v_{K,\sigma} < 0$ et $\sigma \subset \partial\Omega$: $u_{\sigma,+} = 0$ car $g = 0$

$$T_3'' = - \sum_{K \in \mathcal{T}} u_K \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) \psi(x) d\gamma(x) = - \sum_{K \in \mathcal{T}} u_K \int_K \text{div}(\mathbf{v}(x)) \cdot \psi(x) dx$$

$$= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x))\psi(x)u_{\mathcal{T}}(x)dx \rightarrow - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x))\psi(x)u(x)dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

De même

$$\begin{aligned} T'_3 &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_K \psi(x) = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}(x) \cdot \psi(x_K)) u_K dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x) \cdot \psi_{\mathcal{T}}(x)) u_{\mathcal{T}}(x) dx \rightarrow - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x) \cdot \psi(x)) u(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T_3 &= T'_3 + T''_3 \rightarrow - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x) \cdot \psi(x)) u(x) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x)) \psi(x) u(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{v}(x) \nabla \psi(x) u(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On conclut alors que :

$$\begin{aligned} 0 = T_1 + T_2 + T_3 - T_4 &\rightarrow \int_{\Omega} (bu(x)\psi(x) - u(x)\Delta\psi(x) - \mathbf{v}(x)\nabla\psi(x)u(x) - f(x)\psi(x))dx, \\ \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega) &\text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} (bu(x)\psi(x) - u(x)\Delta\psi(x) - \mathbf{v}(x)\nabla\psi(x)u(x) - f(x)\psi(x))dx = 0, \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega)$$

On sait que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega} (bu(x)\psi(x) - u(x)\Delta\psi(x) - \mathbf{v}(x)\nabla\psi(x)u(x) - f(x)\psi(x))dx = 0, \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

C'est l'équation de (3.1)', ($g = 0$) qui admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ alors,

$u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ où u est l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ de (3.1)' .

Finalement, on montre que $\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ dans le cas de diffusion pure c'est-à-dire on pose $b = \mathbf{v} = 0$, donc l'équation de (3.1)' devient : $-\Delta u(x) = f(x)$

et l'équation (3.3) devient

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = m(K)f_K$$

On multiplie cette équation par u_K et on somme sur K , et d'après l'étape 1 de la preuve du lemme 3.2

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u_{\mathcal{T}})^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)f_K u_K \\ \Rightarrow \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f(x) u_K dx = \int_{\Omega} f(x) u_{\mathcal{T}}(x) dx \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ l'équation $-\Delta u(x) = f(x)$ devient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Par la formule de Green on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

Ceci devient, si on prend $u = \varphi$

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$$

Puisque $\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = \int_{\Omega} f(x) u_{\mathcal{T}}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) u(x) dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

Alors

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

On va étudier maintenant le cas de la condition de Dirichlet non homogène tel que : $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ où $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{g \in L^2(\partial\Omega), \tilde{g} \in H^1(\Omega) | \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g\}$.

Theoreme 3.2 : (convergence dans le cas des conditions de Dirichlet non homogène)

Supposons que les quatre premières hypothèses du problème (3.1) sont satisfaites et de plus $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Soient $\xi \in \mathbb{R}_+$, $M \in \mathbb{N}$ et soit \mathcal{T} un maillage admissible dans le sens de la définition 3.1 tel que $d_{K|L} \geq \xi \text{diam}(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}_K$ et $\text{card}(\mathcal{E}_K) \leq M$, $\forall K \in \mathcal{T}$. Soit $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ la solution du système donné par (3.3) et soit

$$g_\sigma = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} g(x) d\gamma(x), \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \quad (g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

On définit $u_K \in X(\mathcal{T})$ par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ pp $x \in K$, $\forall K \in \mathcal{T}$

Alors, $u_{\mathcal{T}} \rightarrow u \in H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$.

Dans la preuve de ce théorème on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.4 : Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^2 . Soient $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ et $g = \bar{\gamma}(\tilde{g})(\bar{\gamma}$ est l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$). Soit \mathcal{T} un maillage admissible dans le sens de la définition 3.1 tel que : $\exists \xi > 0, d_{K|L} \geq \xi \text{diam}(K), \forall K \in \mathcal{T}, \forall \sigma \in \mathcal{E}_K$

et $\text{card}(\mathcal{E}_K) \leq M, \forall K \in \mathcal{T}$. On définit $\tilde{g}_K, \tilde{g}_\sigma$ et $N(\tilde{g}, \mathcal{T})$ par :

$$\tilde{g}_K = \frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(x) dx, \forall K \in \mathcal{T}, \quad \tilde{g}_\sigma = \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma g(x) d\gamma(x), \forall \sigma \in \mathcal{E}_K$$

$$N(\tilde{g}, \mathcal{T}) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (\tilde{g}_K - \tilde{g}_L)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_{K|L} (\tilde{g}_K - \tilde{g}_\sigma)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors, $\exists C(M) \in \mathbb{R}_+$ tel que : $N(\tilde{g}, \mathcal{T}) \leq C \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}$

Preuve du théorème 3.2:

On prend le cas $b = \mathbf{v} = 0$

Soit $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ tel que $\bar{\gamma}(\tilde{g}) = \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g$. On définit $\tilde{u}_{\mathcal{T}} = u_{\mathcal{T}} - \tilde{g}_{\mathcal{T}}$ où $\tilde{g}_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie par :

$$\tilde{g}_{\mathcal{T}}(x) = \frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(y) dy, \forall K \in \mathcal{T}, \forall \sigma \in \mathcal{E}_K$$

Alors, $(\tilde{u}_K)_{K \in \mathcal{T}}$ satisfait :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma} = m(K) f_K - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma}, \forall K \in \mathcal{T} \quad (3.4)$$

$$\text{où } \tilde{F}_{K,\sigma} = \begin{cases} -\tau_{K|L}(\tilde{u}_L - \tilde{u}_K) & , \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \text{ si } \sigma = K|L \\ \tau_\sigma(\tilde{u}_K) & , \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \text{ tel que } \sigma \in \mathcal{E}_K \end{cases}$$

$$G_{K,\sigma} = \begin{cases} -\tau_{K|L}(\tilde{g}_L - \tilde{g}_K) & , \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \text{ si } \sigma = K|L \\ -\tau_\sigma(\tilde{g}_\sigma - \tilde{g}_K) & , \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \text{ tel que } \sigma \in \mathcal{E}_K \end{cases} \text{ où } \tilde{g}_\sigma = \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma g(x) d\gamma(x)$$

On multiplie l'équation (3.4) par \tilde{u}_K et on fait la somme sur $K \in \mathcal{T}$, on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma} \tilde{u}_K = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} \tilde{u}_K \quad (3.5)$$

Si $\sigma = K|L$:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma} \tilde{u}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tilde{F}_{K,\sigma} (\tilde{u}_K - \tilde{u}_L)$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (\tilde{u}_L - \tilde{u}_K)(\tilde{u}_K - \tilde{u}_L) \\
&= \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (\tilde{u}_K - \tilde{u}_L)^2 = \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2
\end{aligned}$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma} \tilde{u}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tilde{F}_{K,\sigma} \tilde{u}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_{\sigma} \tilde{u}_K^2 = \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2$$

L'équation (3.5) devient :

$$\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} \tilde{u}_K$$

Si $\sigma = K|L$:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} (\tilde{u}_K - \tilde{u}_L) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} (\tilde{u}_K - \tilde{u}_L)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K + \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (\tilde{g}_L - \tilde{g}_K)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (\tilde{u}_K - \tilde{u}_L)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K + N(\tilde{g}, \mathcal{T}) \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}
\end{aligned}$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} G_{K,\sigma} \tilde{u}_K$$

D'après, l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K + \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_{\sigma} (\tilde{g}_{\sigma} - \tilde{g}_K)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_{\sigma} \tilde{u}_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K + N(\tilde{g}, \mathcal{T}) \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}
\end{aligned}$$

Donc $\forall \sigma \in \mathcal{E}_K$:

$$\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K + N(\tilde{g}, \mathcal{T}) \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}$$

D'après le lemme 3.4 on a $:N(\tilde{g}, \mathcal{T}) \leq C \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}^2$, donc l'inégalité au-dessus devient :

$$\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{u}_K + C \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}^2 \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}^2 \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}$$

Ceci donne d'après l'inégalité de Poincaré discrète :

$$\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} + C \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}^2 \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}$$

$\exists C_1 \in \mathbb{R}$ dépendant de Ω , $\|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}$ et f tel que :

$$\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_1$$

et $\|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|\tilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C_1 \text{diam}(\Omega) \leq C_1 \Rightarrow \tilde{u}_{\mathcal{T}}$ est borné dans $L^2(\Omega)$

On va montrer maintenant que $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{u}$ dans $L^2(\Omega)$ quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ on raisonne comme dans le cas du théorème 3.1 c'est-à-dire on utilise le lemme 3.3, le résultat de compacité (dans $L^2(\Omega)$) et l'unicité de la solution (dans $H_0^1(\Omega)$) du schéma (3.3). Donc, il suffit de prouver que si $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega) \Rightarrow \tilde{u}$ est la solution de (3.3)

Soit $\tilde{g}_{\mathcal{T}}$ définie par :

$$\tilde{g}_{\mathcal{T}}(x) = \frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(y) dy, \forall x \in K, \forall K \in \mathcal{T} \text{ tel que : } \tilde{g}_{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{g} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

Soit $\tilde{\psi} \in C_c^\infty(\Omega)$ et soit $\text{size}(\mathcal{T})$ assez petit. On multiplie l'équation (3.4) par $\tilde{\psi}(x_K)$ et on fait la somme sur $K \in \mathcal{T}$, il vient:

$T_1 = T_2 - T_3$ avec

$$\begin{aligned} T_3 &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\tilde{g}_L - \tilde{g}_K) \tilde{\psi}(x_K), \quad N(K) = \{L \in \mathcal{T}, \exists \sigma \in \mathcal{E} | \sigma = K|L\} \\ &= - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\tilde{g}_L - \tilde{g}_K) \tilde{\psi}(x_K) - \sum_{K \in N(L)} \tau_{L|K} (\tilde{g}_K - \tilde{g}_L) \tilde{\psi}(x_L) \\ &= - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\tilde{g}_L - \tilde{g}_K) (\tilde{\psi}(x_K) - \tilde{\psi}(x_L)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit: } T_3' &= \int_{\Omega} \tilde{g}_{\mathcal{T}}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \left(\frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(y) dy \right) \Delta \tilde{\psi}(x) dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(y) dy \right) \nabla \tilde{\psi}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(y) dy - \frac{1}{m(L)} \int_L \tilde{g}(y) dy \right) \nabla \tilde{\psi}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x), \mathbf{n}_{K,\sigma} = -\mathbf{n}_{L,\sigma}$$

Puisque: $\tilde{g}_{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{g}$ dans $L^2(\Omega)$, $T_3' \rightarrow \int_K \tilde{g}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

Alors :

$$\begin{aligned} |-T_3 + T_3'| &= \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{\sigma} (\tilde{g}_L - \tilde{g}_K) (\tilde{\psi}(x_K) - \tilde{\psi}(x_L)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(y) dy - \frac{1}{m(L)} \int_L \tilde{g}(y) dy \right) \nabla \tilde{\psi}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right| \\ &= \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{\sigma} \left(\frac{1}{m(L)} \int_L \tilde{g}(y) dy - \frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(y) dy \right) (\tilde{\psi}(x_K) - \tilde{\psi}(x_L)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \left(\frac{1}{m(K)} \int_K \tilde{g}(y) dy - \frac{1}{m(L)} \int_L \tilde{g}(y) dy \right) m(\sigma) \frac{|\tilde{\psi}(x_K) - \tilde{\psi}(x_L)|}{d_{\sigma}} \right| = 0, \forall \tilde{\psi} \in C_c^{\infty}(\Omega) \end{aligned}$$

Donc :

$$T_3 = T_3' \rightarrow \int_K \tilde{g}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

On va étudier maintenant T_1 :

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma} \tilde{\psi}(x_K) = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\tilde{u}_L - \tilde{u}_K) \tilde{\psi}(x_K) \\ &= - \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (\tilde{u}_L - \tilde{u}_K) (\tilde{\psi}(x_K) - \tilde{\psi}(x_L)) \end{aligned}$$

$$\text{Soit } T_1' = \int_{\Omega} \tilde{u}_{\mathcal{T}}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}} \tilde{u}_K \int_{\partial K} \nabla \tilde{\psi}(x) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (\tilde{u}_K - \tilde{u}_L) \int_{\sigma} \nabla \tilde{\psi}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$$

Puisque $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{u}$ dans $L^2(\Omega)$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$,

$$T_1' = \int_{\Omega} \tilde{u}_{\mathcal{T}}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \tilde{u}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

On définit $R_{K,L}$ par $R_{K,L} := \frac{1}{m(K|L)} \int_{K|L} \nabla \tilde{\psi}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,L}(x) d\gamma(x) - \frac{\tilde{\psi}(x_L) - \tilde{\psi}(x_K)}{d_{K,L}}$

alors

$$\begin{aligned} |T_1 + T_1'| &= \left| \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} [-\tau_{K|L}(\tilde{u}_L - \tilde{u}_k)(\tilde{\psi}(x_K) - \tilde{\psi}(x_L)) - (\tilde{u}_L - \tilde{u}_k) \int_{K|L} \nabla \tilde{\psi}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,L}(x) d\gamma(x)] \right| \\ &= \left| \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} -m(K|L) (\tilde{u}_L - \tilde{u}_k) R_{K,L} \right| \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient :

$$|T_1 + T_1'| \leq \left(\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) \frac{(\tilde{u}_L - \tilde{u}_k)^2}{d_{K,L}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K,L} (R_{K,L})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La régularité de la fonction $\tilde{\psi}$ donne l'existence d'une constante $C_2 \in \mathbb{R}$ dépendant de $\tilde{\psi}$, tel que $|R_{K,L}| \leq C_2 \text{size}(\mathcal{T})$ et on sait que :

$$\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K,L} \leq d \cdot m(\Omega)$$

$$\Rightarrow |T_1 + T_1'| \leq \left(\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (D_\sigma u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} (C_2^2 \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K,L} (\text{size}(\mathcal{T}))^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow |T_1 + T_1'| \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} (C_2^2 dm(\Omega) (\text{size}(\mathcal{T}))^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ quand } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

Donc :

$$T_1 \rightarrow -T_1' \text{ quand } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

$$\text{Finalement, } T_2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \tilde{\psi}(x_K) = \int_{\Omega} f(x) \tilde{\psi}_{\mathcal{T}}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \tilde{\psi}(x) dx \text{ quand } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

où $\tilde{\psi}_{\mathcal{T}}(x) = \tilde{\psi}(x_K)$ si $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$ tel que $\tilde{\psi}_{\mathcal{T}}(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

On conclue que :

$$0 = T_1 - T_2 + T_3 \rightarrow - \int_{\Omega} \tilde{u}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx - \int_{\Omega} f(x) \tilde{\psi}(x) dx + \int_{\Omega} \tilde{g}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx, \forall \tilde{\psi} \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\text{quand } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

Par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \tilde{u}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \tilde{\psi}(x) dx - \int_{\Omega} \tilde{g}(x) \Delta \tilde{\psi}(x) dx, \forall \tilde{\psi} \in H_0^1(\Omega)$$

Cette dernière équation admet une unique solution (par le théorème de Lax-Milgram)

$\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. Comme $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{u}$ dans $L^2(\Omega)$ quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

et $\tilde{g}_{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{g}$ dans $L^2(\Omega)$ quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

Alors, $u_{\mathcal{T}} = \tilde{u}_{\mathcal{T}} + \tilde{g}_{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{u} + \tilde{g} = u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

Conclusion :

u est l'unique solution de problème (3.1) avec $u \in H^1(\Omega)$ ■

3.1.5 L'estimation de l'erreur dans C^2 :

Sous les hypothèses de la régularité de la solution de problème (3.1), on peut prouver que l'erreur entre la solution exacte et la solution approximative qui est donné au schéma aux **volumes finis**(3.3) est d'ordre $\text{size}(\mathcal{T}) = \sup_{K \in \mathcal{T}} (\text{diam}(K))$.

Théorème 3.3 : *Sous les hypothèses de position de problème (3.1) , soit \mathcal{T} un maillage admissible au sens de définition 3.1, et soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie pp dans Ω par :*

$u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ pp $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$, où $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est la solution de (3.3) . On suppose que l'unique solution variationnelle u de problème (3.1) est de classe C^2 , soit pour chaque $K \in \mathcal{T}, e_K = u(x_K) - u_K$ et $e_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie par :

$$e_{\mathcal{T}}(x) = e_K \text{ pp } x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant de u, ν et Ω tel que :

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) , \text{ où } \|\cdot\|_{1,\mathcal{T}} \text{ la norme discrète } H_0^1$$

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{u_L - u_K}{d_{\sigma}} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{g(y_{\sigma}) - u_K}{d_{\sigma}} \right. \\ \left. - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) \right)^2 \leq C (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Preuve du théorème 3.3 :

Soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ tel que : $u(x) = u_K$ pp $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$. Soit la balance du flux :

$$\forall K \in \mathcal{T}, \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\bar{F}_{K,\sigma} - \bar{V}_{K,\sigma}) + b \int_K u(x) dx = \int_K f(x) dx \quad (3.7)$$

où $\bar{F}_{K,\sigma} = - \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$ la diffusion du flux

$\bar{V}_{K,\sigma} = \int_{\sigma} u(x) \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$ la convection du flux à σ vers l'extérieur de K

Soient $F_{K,\sigma}^*$ et $V_{K,\sigma}^*$ sont définies par :

$$F_{K,\sigma}^* = \begin{cases} -\tau_{K|L}(u(x_L) - u(x_K)), & \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}, \forall K \in \mathcal{T} \\ -\frac{m(\sigma)}{d(x_{K,\sigma})}(u(y_{\sigma}) - u(x_K)), & \forall \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}, \forall K \in \mathcal{T} \end{cases}$$

$$V_{K,\sigma}^* = v_{K,\sigma} u(x_{\sigma,+}), \forall \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}, \forall K \in \mathcal{T}$$

$$x_{\sigma,+} = \begin{cases} x_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ \begin{cases} x_L, \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \\ y_{\sigma}, \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

Alors la consistance de l'erreur sur la diffusion et la convection du flux est définie par :

$$R_{K,\sigma} := \frac{1}{m(\sigma)} (\bar{F}_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}^*) \text{ et } r_{K,\sigma} := \frac{1}{m(\sigma)} (\bar{V}_{K,\sigma} - V_{K,\sigma}^*) \quad (3.8)$$

Grâce à la régularité de u et \mathbf{v} , $\exists C_1 \in \mathbb{R}$ dépendant de u et \mathbf{v} tel que :

$$|R_{K,\sigma}| + |r_{K,\sigma}| \leq C_1 \text{size}(\mathcal{T}), \forall K \in \mathcal{T}, \forall \sigma \in \mathcal{E}_K$$

$$\text{Soit } \rho_K = u(x_K) - \frac{1}{m(K)} \int_K u(x) dx$$

$$|\rho_K| = \left| \frac{1}{m(K)} \int_K (u(x_K) - u(x)) dx \right| = \left| \frac{1}{m(K)} \int_K \frac{u(x_K) - u(x)}{x_K - x} (x_K - x) dx \right|$$

Il existe une constante C_2 dépendant de u tel que :

$$|\rho_K| \leq \left| \frac{1}{m(K)} \int_K \nabla u(\xi)(x_K - x) dx \right| \leq C_2 \text{size}(\mathcal{T})$$

On soustrait (3.3) à (3.7), grâce à (3.8) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\bar{F}_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\bar{V}_{K,\sigma} - V_{K,\sigma}) + b \int_K u(x) dx - bm(K)u_K &= \int_K f(x) dx - m(K)f_K \quad (3.9) \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\bar{F}_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)R_{K,\sigma} + F_{K,\sigma}^* - F_{K,\sigma} \end{aligned}$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} (\bar{F}_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma)R_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(-u(x_L) - u(x_K)) + (u_L - u_K)) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma)R_{K,\sigma} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(e_L - e_K) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma)R_{K,\sigma} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} G_{K,\sigma}
\end{aligned}$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} (\bar{F}_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma)R_{K,\sigma} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} \frac{m(\sigma)}{d(x_{K,\sigma})}(u(y_\sigma) - u(x_K) - g(y_\sigma) + u_K)) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma)R_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} \frac{m(\sigma)}{d(x_{K,\sigma})}e_K, (u = g \text{ sur } \partial\Omega) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma)R_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} G_{K,\sigma}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\bar{F}_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)R_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\bar{V}_{K,\sigma} - V_{K,\sigma}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)r_{K,\sigma} + V_{K,\sigma}^* - V_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)r_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} W_{K,\sigma}$$

où

$$G_{K,\sigma} = F_{K,\sigma}^* - F_{K,\sigma} = \begin{cases} -\tau_{K|L}(e_L - e_K), & \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}, \forall K \in \mathcal{T} \\ \frac{m(\sigma)}{d(x_{K,\sigma})}e_K, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}, \forall K \in \mathcal{T} \end{cases}$$

et $W_{K,\sigma} = V_{K,\sigma}^* - V_{K,\sigma} = v_{K,\sigma}(u(x_{\sigma,+}) - u_{\sigma,+})$

D'après le théorème de la moyenne $\exists \xi \in K$ tel que :

$$b \int_K u(x)dx - bm(K)u_K = b(m(K)u(\xi) - m(K)u_K)$$

On pose : $x_K = \xi$

$$b \int_K u(x)dx - bm(K)u_K = b(m(K)u(x_K) - m(K)u_K) = bm(K)e_K$$

Si u est seulement continue sur $\bar{\Omega}$, la première équation de problème(3.1) devient : $bu(x) = f(x)$

$$\begin{aligned}
\int_K f(x)dx - m(K)f_K &= b \int_K u(x)dx - \int_K f(x)dx = b(m(K)u(x_K) - \int_K u(x)dx) \\
&= bm(K)(u(x_K) - \frac{1}{m(K)} \int_K u(x)dx) = bm(K)\rho_K
\end{aligned}$$

Donc :(3.9) devient :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (G_{K,\sigma} + W_{K,\sigma}) + bm(K)e_K = bm(K)\rho_K - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) \quad (3.10)$$

On multiplie (3.10) par e_K et on fait la somme sur tous les $K \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} e_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} W_{K,\sigma} e_K + b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K^2 \\
= b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \rho_K e_K - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}$:

Dans ce cas $\exists K \in \mathcal{T} | \sigma \in \mathcal{E}_K$ et $\exists L \in \mathcal{T} | \sigma \in \mathcal{E}_L$ c'est-à-dire $\sigma = K|L$, en parcourant la somme, on rencontre la somme des deux termes liés à $\sigma = K|L$;

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} e_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} e_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_L} G_{L,\sigma} e_L = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (e_K - e_L)^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (D_\sigma e)^2$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}$:

Dans ce cas $\exists K \in \mathcal{T} | \sigma \in \mathcal{E}_K$, en parcourant la somme, on rencontre la somme des deux termes liés à $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} e_K &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} \frac{m(\sigma)}{d(x_{K,\sigma})} e_K^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m(\sigma)}{d(x_{K,\sigma})} e_K^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m(\sigma)}{d(x_{K,\sigma})} (D_\sigma e)^2 \\
\Rightarrow \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} e_K &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (D_\sigma e)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m(\sigma)}{d(x_{K,\sigma})} (D_\sigma e)^2 = \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2
\end{aligned}$$

(3.11) devient:

$$\begin{aligned}
\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} (u(x_{\sigma,+}) - u_{\sigma,+}) e_K + b \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K e_K^2 dx \\
= b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \rho_K e_K - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} (u(x_{\sigma,+}) - u_{\sigma,+}) e_K + b \int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}^2(x) dx \\
&\quad = b \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \rho_K e_K - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \\
&\Rightarrow \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} (u(x_{\sigma,+}) - u_{\sigma,+}) e_K \right| + \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad \leq b \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \rho_K e_K \right| + \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \right| \tag{3.12}
\end{aligned}$$

où $e_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$, $e_{\mathcal{T}}(x) = e_K$ pp $x \in K$, $\forall K \in \mathcal{T}$, $D_{\sigma} e = \begin{cases} |e_L - e_K| & \text{si } \sigma = K | L \in \mathcal{E}_{int} \\ |e_K| & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases}$

et $e_{\sigma,+} = u(x_{\sigma,+}) - u_{\sigma,+}$

D'après l'inégalité de Young on a :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \rho_K e_K \right| &= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \rho_K e_K dx \right| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \left(\frac{|\rho_K|^2}{2} + \frac{|e_K|^2}{2} \right) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (C_2 \text{size}(\mathcal{T}))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}^2(x) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} C_2^2 m(\Omega) (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \tag{3.13}
\end{aligned}$$

On montre que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} (u(x_{\sigma,+}) - u_{\sigma,+}) e_K \geq 0$$

On a :

$$u_{\sigma,+} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ u_L, \sigma = K | L \in \mathcal{E}_{int} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \\ g(y_{\sigma}), \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} & \end{cases} \text{ et } x_{\sigma,+} = \begin{cases} x_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ x_L, \sigma = K | L \in \mathcal{E}_{int} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \\ y_{\sigma}, \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} & \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Alors: } e_{\sigma,+} = u(x_{\sigma,+}) - u_{\sigma,+} &= \begin{cases} u(x_K) - u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ \begin{cases} u(x_L) - u_L, \sigma = K | L \in \mathcal{E}_{int} \\ u(y_{\sigma}) - g(y_{\sigma}), \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ \begin{cases} e_L, \sigma = K | L \in \mathcal{E}_{int} \\ 0, \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } e_{\sigma,-} = \begin{cases} e_K & \text{si } v_{K,\sigma} \leq 0 \\ \begin{cases} e_L, \sigma = K | L \in \mathcal{E}_{int} \\ 0, \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \end{cases}$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$:

$$v_{K,\sigma} e_K e_{\sigma,+} + v_{L,\sigma} e_L e_{\sigma,+} = v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} (e_K - e_L) \quad , v_{K,\sigma} = -v_{L,\sigma}$$

$$e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-} = \begin{cases} e_K - e_L & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ e_L - e_K & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} (e_K - e_L) &= \begin{cases} v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases} \\ &= |v_{K,\sigma}| (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) e_{\sigma,+} = v_\sigma e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) \end{aligned}$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-} = \begin{cases} e_K & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -e_K & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} e_K &= \begin{cases} v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases} \\ &= |v_{K,\sigma}| (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) e_{\sigma,+} = v_\sigma e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{J}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} e_K &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} v_\sigma e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} v_\sigma e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma e_{\sigma,+} (e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-}) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma [(e_{\sigma,+} - e_{\sigma,-})^2 + (e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2)] \end{aligned}$$

On utilise l'hypothèse $\text{div } \mathbf{v} \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2) &= \sum_{K \in \mathcal{J}} \left(\int_{\partial K} \mathbf{v}(x) \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) \right) e_K^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{J}} \int_K \text{div} \mathbf{v}(x) e_K^2 dx = \int_\Omega \text{div} \mathbf{v}(x) e_{\mathcal{J}}^2(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

On montre alors que :

$$\sum_{K \in \mathcal{J}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} e_K^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2)$$

Si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$:

$$e_{\sigma,+} + e_{\sigma,-} = \begin{cases} e_K + e_L & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 2e_K & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ e_K + e_L & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

$$(e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2)v_\sigma = \begin{cases} (e_K^2 - e_L^2)v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ (e_L^2 - e_K^2)v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

$$= (e_K^2 - e_L^2)v_{K,\sigma} = e_K^2 v_{K,\sigma} + e_L^2 v_{L,\sigma}$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$e_{\sigma,+} + e_{\sigma,-} = \begin{cases} e_K & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 2e_K & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ e_K & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

$$(e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2)v_\sigma = \begin{cases} e_K^2 v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} > 0 \\ 0 & \text{si } v_{K,\sigma} = 0 \\ -e_K^2 v_{K,\sigma} & \text{si } v_{K,\sigma} < 0 \end{cases}$$

$$= e_K^2 |v_{K,\sigma}|$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} e_K^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} v_{K,\sigma} e_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} v_{K,\sigma} e_K^2$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (e_K^2 - e_L^2)v_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} e_K^2 v_{K,\sigma}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2)v_\sigma + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} (e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2)v_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2)v_\sigma$$

Alors :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (e_{\sigma,+}^2 - e_{\sigma,-}^2)v_\sigma \geq 0$$

Donc l'équation (3.12) donne :

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + b \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq b \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \rho_K e_K \right| + \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \right|$$

$$\leq \frac{b}{2} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{b}{2} C_2^2 m(\Omega) (\text{size}(\mathcal{T}))^2 + \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \right|$$

$$\Rightarrow \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + \frac{b}{2} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_3 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 + \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \right| \quad (3.14)$$

D'après la propriété de la conservativité du flux on a :

$$R_{K,\sigma} = -R_{L,\sigma} \text{ et } r_{K,\sigma} = -r_{L,\sigma} \text{ pour } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) (e_L - e_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \\ &\leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) D_\sigma e + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) D_\sigma e \\ & \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) D_\sigma e \\ & \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \right| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma)(R_\sigma + r_\sigma) D_\sigma e \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K \right| \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{m(\sigma)}{d_\sigma} (D_\sigma e)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma (R_\sigma + r_\sigma)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} (d \cdot m(\Omega) C_1^2 (\text{size}(\mathcal{T}))^2)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C_4 \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \text{size}(\mathcal{T}) \text{ avec } C_4 \text{ dépendant de } u, \mathbf{v}, \Omega \text{ tel que } C_4 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

$$(3.14) \Rightarrow \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + \frac{b}{2} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_3 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 + C_4 \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \text{size}(\mathcal{T})$$

Par l'inégalité de Young on trouve :

$$\begin{aligned} & \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + \frac{b}{2} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_3 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 + \frac{C_4^2}{2} (\text{size}(\mathcal{T}))^2 + \frac{\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2}{2} \\ & \Rightarrow \frac{1}{2} \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + \frac{b}{2} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_3 + \frac{C_4^2}{2}) (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \\ & \Rightarrow \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + b \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2(C_3 + \frac{C_4^2}{2}) (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \leq C_5 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \end{aligned}$$

$$\text{Si } b > 0: \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq C_5 (\text{size}(\mathcal{T}))^2$$

On utilise l'inégalité de Poincaré discrète :

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\text{diam}(\Omega))^2 \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2$$

$$\| e_{\mathcal{T}} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_5 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 (\text{diam}(\Omega))^2 \Rightarrow \| e_{\mathcal{T}} \|_{L^2(\Omega)} \leq (C(\text{size}(\mathcal{T})))^2$$

De même si $b = 0$ on a $\| e_{\mathcal{T}} \|_{L^2(\Omega)} \leq (C(\text{size}(\mathcal{T})))^2$

On va prouver maintenant l'inégalité (3.6)

En effet,

$$\begin{aligned} & \| e_{\mathcal{T}} \|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq C_5 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{u_L - u_K}{d_{\sigma}} - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{g(y_{\sigma}) - u_K}{d_{\sigma}} \right. \\ & \left. - \frac{u(y_{\sigma}) - u(x_K)}{d_{\sigma}} \right)^2 \leq C_5 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \quad (*) \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} R_{K,\sigma} &= \frac{1}{m(\sigma)} (\bar{F}_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}^*) \Rightarrow \frac{1}{m(\sigma)} F_{K,\sigma}^* = \frac{1}{m(\sigma)} \bar{F}_{K,\sigma} - R_{K,\sigma} \\ -\frac{u_L - u_K}{d_{\sigma}} &= \frac{1}{m(\sigma)} F_{K,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)} (-G_{K,\sigma} + F_{K,\sigma}^*) = \frac{1}{m(\sigma)} \bar{F}_{K,\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} G_{K,\sigma} - R_{K,\sigma} \end{aligned}$$

$\sigma \in \mathcal{E}_{int}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m(\sigma)} G_{K,\sigma} - R_{K,\sigma} &= \frac{e_L - e_K}{d_{\sigma}} - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} + \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \\ &\simeq \frac{e_L - e_K}{d_{\sigma}} - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} + \frac{u_L - u_K}{d_{\sigma}} = \frac{e_L - e_K}{d_{\sigma}} - \frac{e_L - e_K}{d_{\sigma}} = 0 \end{aligned}$$

$\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m(\sigma)} G_{K,\sigma} - R_{K,\sigma} &= \frac{e_K}{d(x_{K,\sigma})} - \frac{u(y_{\sigma}) - u(x_K)}{d_{\sigma}} + \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \\ &\simeq \frac{e_K}{d(x_{K,\sigma})} - \frac{u(y_{\sigma}) - u(x_K)}{d_{\sigma}} + \frac{g(y_{\sigma}) - u_K}{d_{\sigma}} = \frac{e_K}{d(x_{K,\sigma})} - \frac{e_K}{d_{\sigma}} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall \sigma \in \mathcal{E}_K$, $-\frac{1}{m(\sigma)} G_{K,\sigma} - R_{K,\sigma} = 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(-\frac{u_L - u_K}{d_{\sigma}} + \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} \right)^2 \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{1}{m(\sigma)} \bar{F}_{K,\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} G_{K,\sigma} - R_{K,\sigma} + \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma R_{K,\sigma}^2 \\
\text{et } &\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{g(y_\sigma) - u_K}{d_\sigma} + \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} \right)^2 \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{1}{m(\sigma)} (\bar{F}_{K,\sigma} - G_{K,\sigma}) - R_{K,\sigma} + \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} \right)^2 \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma R_{K,\sigma}^2 \\
&\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma R_{K,\sigma}^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma R_\sigma^2 \\
&\quad \leq d \cdot m(\Omega) C_1^2 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \quad (**).
\end{aligned}$$

On fait la somme de (*) et (**):

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) \right)^2 \\
&\leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} + \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2
\end{aligned}$$

De même pour $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ on trouve :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{g(y_\sigma) - u_K}{d_\sigma} - \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{g(y_\sigma) - u_K}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) \right)^2
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{g(y_\sigma) - u_K}{d_\sigma} \right. \\ & \left. - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 \leq (C^2 + C_1^2 dm(\Omega)) (size(\mathcal{T}))^2 \\ & \leq C (size(\mathcal{T}))^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.1.5 L'estimation de l'erreur dans H^2 :

Dans le théorème suivant on obtient l'estimation (3.5) et (3.6) dans le cas $b = \mathbf{v} = 0$ et on suppose quelques hypothèses supplémentaire sur le maillage au sens de définition 3.4 sous l'hypothèse $u \in H^2(\Omega)$

Définition 3.4 : (Restriction du maillage admissible)

Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. La restriction du maillage admissible des volumes finis de Ω , noté par \mathcal{T} est un maillage admissible dans le sens de définition 3.1 tel que : $\exists \xi > 0$ on a : $d_{K,\sigma} \geq \xi \text{diam}(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}$ et $\forall \sigma \in \mathcal{E}_K$

Théorème 3.4 : *Sous les hypothèses de position de problème (3.1) avec $u = \mathbf{v} = 0$. Soit \mathcal{T} un maillage admissible restreinte dans le sens de définition 3.4 et soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie dans Ω par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ pp $x \in K$, $\forall K \in \mathcal{T}$ où $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est l'unique solution de (3.3) (l'existence et l'unicité sont donné dans le lemme 3.2). on suppose que la solution unique de problème (3.1) $u \in H^2(\Omega)$. Pour chaque K , soit $e_K = u(x_K) - u_K$ et soit $e_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie par :*

$$e_{\mathcal{T}}(x) = e_K \text{ pp } x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$$

Alors, il existe une constante C dépendant de u, ξ et Ω tel que : $\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C \text{size}(\mathcal{T})$ avec (3.5) et (3.6) du théorème 3.3 sont vérifiés.

Preuve de théorème 3.4 :

Soit K le volume de contrôle, $\sigma \in \mathcal{E}_K$

On définit $\mathcal{V}_{K,\sigma} = \{tx_K + (1-t)x, x \in \sigma, t \in [0,1]\}$

Pour $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$, soit $\mathcal{V}_\sigma = \mathcal{V}_{K,\sigma} \cup \mathcal{V}_{L,\sigma}$, si K et L sont deux volumes de contrôle tel que $\sigma = K|L$

Pour $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$, soit $\mathcal{V}_\sigma = \mathcal{V}_{K,\sigma}$

Le principe de cette démonstration est de prouver l'existence d'une constante C dépendant de la dimension d'espace d et ξ tel que :

$$\forall K \in \mathcal{T} \text{ et } \forall \sigma \in \mathcal{E}_K, |R_{K,\sigma}|^2 \leq C \frac{(size(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma) d_\sigma} \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \quad (3.15)$$

où H est la matrice Hessien de u c'est-à-dire

$$|H(u)(z)|^2 = \sum_{i,j=1}^N |D_i D_j u(z)|^2,$$

Rappelons que $R_{K,\sigma}$ la consistance de l'erreur sur la diffusion du flux tel que :

$$R_{K,\sigma} = \begin{cases} \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) & \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \\ \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext} \end{cases}$$

Etape 1 : preuve de(3.15)

Soit $\in \mathcal{E}$, puisque $u \in H^2(\Omega)$, $u|_{\mathcal{V}_\sigma} \in H^2(\mathcal{V}_\sigma)$ et $C^2(\mathcal{V}_\sigma)$ dense dans $H^2(\mathcal{V}_\sigma)$

Par densité de $C^2(\mathcal{V}_\sigma)$ dans $H^2(\mathcal{V}_\sigma)$ on va montrer l'inégalité (3.15) pour $u \in C^2(\mathcal{V}_\sigma)$ c'est-à-dire on suppose dans la suite de cette étape que $u \in C^2(\mathcal{V}_\sigma)$.

$\sigma \in \mathcal{E}_{int}$:

Soit K et L deux volumes de contrôle tel que: $\sigma = K|L$. Pour simplifier les notations et sans perte de généralité on pose $\sigma = \{0\} \times \tilde{\sigma}$, avec $\tilde{\sigma} \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $x_K = (-\alpha, 0)^t$, $x_L = (\beta, 0)^t$ avec $\alpha > \xi \text{diam}(K)$ et $\beta > \xi \text{diam}(L)$. On applique la formule de Taylor avec reste d'intégrale :

$$u(x_L) - u(x) = \nabla u(x)(x_L - x) + \int_0^1 H(u)(tx + (1-t)x_L)(x_L - x)^2 t dt ,$$

$$u(x_K) - u(x) = \nabla u(x)(x_K - x) + \int_0^1 H(u)(tx + (1-t)x_K)(x_K - x)^2 t dt$$

où H la matrice Hessien de u au point z

On soustraire l'une des deux dernières égalités à l'autre puis, on intègre sur σ

Notons que $x_L - x_K = \mathbf{n}_{K,\sigma} d_\sigma$

$$\begin{aligned} \int_\sigma (u(x_L) - u(x_K)) d\gamma(x) &= \int_\sigma \nabla u(x)(x_L - x_K) d\gamma(x) \\ &+ \int_\sigma \int_0^1 H(u)(tx + (1-t)x_K)(x_K - x)^2 t dt d\gamma(x) - \int_\sigma \int_0^1 H(u)(tx + (1-t)x_L)(x_L - x)^2 t dt d\gamma(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left| \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right| \\ & \leq \frac{1}{m(\sigma)d_\sigma} \int_\sigma \int_0^1 |H(u)(tx + (1-t)x_K)| |x_K - x|^2 t dt d\gamma(x) \\ & \quad + \frac{1}{m(\sigma)d_\sigma} \int_\sigma \int_0^1 |H(u)(tx + (1-t)x_L)| |x_L - x|^2 t dt d\gamma(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R_{K,\sigma}| \leq B_{K,\sigma} + B_{L,\sigma}$$

$$\text{où } B_{K,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)d_\sigma} \int_\sigma \int_0^1 |H(u)(tx + (1-t)x_K)| |x_K - x|^2 t dt d\gamma(x)$$

On utilise le changement de variables dans $B_{K,\sigma}$: $z = tx + (1-t)x_K$,

Puisque $|x_K - x| \leq \text{diam}(K)$ et $dz = t^{d-1} \alpha dt d\gamma(x)$. Soient $z_1 = (t-1)\alpha$ et $z_2 = (z_1, \bar{z})^t$,

$$B_{K,\sigma} \leq \frac{(\text{diam}(K))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} |H(u)(z)| \frac{\alpha^{d-2}}{\alpha(z_1 + \alpha)^{d-2}} dz$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$B_{K,\sigma} \leq \frac{\alpha^{d-3} (\text{diam}(K))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \left(\int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} \frac{1}{(z_1 + \alpha)^{2(d-2)}} dz \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

Si $d = 2$:

$$\begin{aligned} B_{K,\sigma} & \leq \frac{(\text{diam}(K))^2}{\alpha m(\sigma)d_\sigma} \left(\int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\sigma \int_0^1 t \alpha dt d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{(\text{diam}(K))^2}{\alpha m(\sigma)d_\sigma} \left(\frac{\alpha m(\sigma)}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{(\text{diam}(K))^2}{\sqrt{2} (m(\sigma)d_\sigma)^{\frac{1}{2}} (\alpha d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De même :

$$B_{L,\sigma} \leq \frac{(\text{diam}(L))^2}{\sqrt{2} (m(\sigma)d_\sigma)^{\frac{1}{2}} (\beta d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathcal{V}_{L,\sigma}} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque : $\alpha \geq \xi \text{diam}(K)$ et $d_\sigma = \alpha + \beta \geq \xi \text{diam}(K)$

$$\begin{aligned}
|R_{K,\sigma}|^2 &\leq (B_{K,\sigma} + B_{L,\sigma})^2 \leq 2(B_{K,\sigma}^2 + B_{L,\sigma}^2) \\
&\leq 2 \left(\frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^4}{2\alpha m(\sigma) d_\sigma^2} + \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^4}{2\beta m(\sigma) d_\sigma^2} \right) \left(\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^4 (\alpha + \beta)}{\alpha\beta m(\sigma) d_\sigma^2} \left(\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma) d_\sigma} \left(\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}, \quad C = \frac{1}{\xi^2}
\end{aligned}$$

Si $d = 3$:

Le calcul de l'intégrale $A = \int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} \frac{1}{(z_1 + \alpha)^2} dz$ par le changement de variable suivant :

$$z_1 = (t - 1)\alpha \text{ et } z = (z_1, \bar{z})^t \text{ et } t = \frac{z_1 + \alpha}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} \frac{1}{(z_1 + \alpha)^2} dz = \int_{-\alpha}^0 \frac{1}{(z_1 + \alpha)^2} \left(\int_{\bar{z} \in \tilde{\sigma}} d\bar{z} \right) dz_1 \\
&= \int_{-\alpha}^0 \frac{1}{(z_1 + \alpha)^2} \left(\int_{y \in \tilde{\sigma}} t^2 dt \right) dz_1 = \int_{-\alpha}^0 \frac{1}{(z_1 + \alpha)^2} \frac{(z_1 + \alpha)^2}{\alpha^2} m(\sigma) = \frac{m(\sigma)}{\alpha}
\end{aligned}$$

où $m(\tilde{\sigma}) = m(\sigma)$ car $\sigma = \{0\} \times \tilde{\sigma}$ c'est-à-dire $m(\sigma) = 1 \cdot m(\tilde{\sigma}) = m(\tilde{\sigma})$

Donc :

$$B_{K,\sigma} \leq \frac{(\text{diam}(K))^2}{(m(\sigma) d_\sigma)^{\frac{1}{2}} (\alpha d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathcal{V}_{K,\sigma}} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

De même :

$$B_{L,\sigma} \leq \frac{(\text{diam}(L))^2}{(m(\sigma) d_\sigma)^{\frac{1}{2}} (\beta d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathcal{V}_{L,\sigma}} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
|R_{K,\sigma}|^2 &\leq 2(R_{K,\sigma}^2 + R_{L,\sigma}^2) \leq 2 \frac{\beta(\text{diam}(K))^4 + \alpha(\text{diam}(L))^4}{\alpha\beta m(\sigma) d_\sigma^2} \left(\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \right) \\
&\leq \frac{2}{\xi^2} \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma) d_\sigma} \left(\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \right)
\end{aligned}$$

Alors, il existe une constante $C = \frac{2}{\xi^2}$ tel que :

$$|R_{K,\sigma}|^2 \leq C \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \left(\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \right)$$

$\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

Soit K le volume de contrôle tel que $\in \mathcal{E}_K$. On peut supposer, sans perte de généralité que $\sigma = \{2\alpha\} \times \tilde{\sigma}$ avec $\tilde{\sigma} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ et $\alpha \geq \frac{\xi}{2} \text{diam}(K)$, donc la démonstration au-dessus donne :

$$\left| \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right|^2 \leq C_2 \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \left(\int_{\mathcal{V}_{\tilde{\sigma}}} |H(u)(z)|^2 dz \right) \quad (3.17)$$

avec $\tilde{\sigma} = \left\{ \frac{\alpha x}{2}, x \in \tilde{\sigma} \right\}$, $\mathcal{V}_{\tilde{\sigma}} = \{ty_\sigma + (1-t)x, x \in \tilde{\sigma}, t \in [0,1]\} \cup \{tx_K + (1-t)x, x \in \tilde{\sigma}, t \in [0,1]\}$

Notons que $m(\sigma) = \frac{m(\tilde{\sigma})}{2^{\alpha-1}}$ et que $\mathcal{V}_{\tilde{\sigma}} \subset \mathcal{V}_\sigma$

On compare $I_\sigma = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$ avec $I_{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{m(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$

D'après la formule de Taylor avec reste d'intégrale on obtient :

$$I_\sigma - I_{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \int_{\frac{1}{2}}^1 H(u)(tx + (1-t)x_K)(x - x_K) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) dt d\gamma(x)$$

On fait le changement de variable suivant : $z = tx + (1-t)x_K$, $dz = 2\alpha t^{d-1} dt d\gamma(x)$

avec $E_\sigma = \left\{ tx + (1-t)x_K, x \in \sigma, t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}$, $t \leq \frac{1}{2}$

Alors, il existe une constante C_3 dépendant de la dimension d tel que :

$$|I_\sigma - I_{\tilde{\sigma}}| \leq \frac{C_3}{\alpha m(\sigma)} \int_{E_\sigma} |H(u)(z)| |x - x_K| dz$$

Puisque $|x - x_K| \leq \text{diam}(K)$ alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient :

$$|I_\sigma - I_{\tilde{\sigma}}|^2 \leq C_4 \frac{(\text{diam}(K))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \int_{E_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \quad \text{où } C_4 \text{ est une constante dépendant de } d \text{ et } \xi$$

Par l'inégalité (3.17) on trouve :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) - I_\sigma + I_{\tilde{\sigma}} \right|^2 \leq C_2 \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \int_{\mathcal{V}_{\tilde{\sigma}}} |H(u)(z)|^2 dz \\
& \Leftrightarrow \left| \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right|^2 - |I_\sigma - I_{\tilde{\sigma}}|^2 \\
& \leq \left| \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) - I_\sigma + I_{\tilde{\sigma}} \right|^2 \\
& \leq C_2 \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \\
& \Leftrightarrow \left| \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right|^2 \\
& \leq C_2 \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz + C_4 \frac{(\text{diam}(K))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \int_{E_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \\
& \Leftrightarrow \left| \frac{u(y_\sigma) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right|^2 \leq C \frac{(\text{size}(\mathcal{T}))^2}{m(\sigma)d_\sigma} \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz,
\end{aligned}$$

avec $E_\sigma \subset \mathcal{V}_\sigma$ et $\text{diam}(K) \leq \text{size}(\mathcal{T})$

Etape2 :

On précède comme dans le théorème 3.3, puisque $R_{K,\sigma} = -R_{L,\sigma}$ si $\sigma = K|L$, on prend

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) R_\sigma |D_\sigma e| \text{ avec } R_\sigma = |R_{K,\sigma}| \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_K$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma R_\sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{m(\sigma)}{d_\sigma} |D_\sigma e|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après l'étape 1, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma R_\sigma^2 \leq C (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz = C (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \int_{\Omega} |H(u)(z)|^2 dz, \Omega = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathcal{V}_\sigma \\
& \Rightarrow \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \left(\int_{\Omega} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Puisque $(\int_{\Omega} |H(u)(z)|^2 dz)^{\frac{1}{2}} < \infty$ car on a $u \in H^2(\Omega)$ donc $\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C \text{size}(\mathcal{T})$

Par l'inégalité de Poincaré discrète on a :

$$\| e_{\mathcal{T}} \|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \| e_{\mathcal{T}} \|_{1,\mathcal{T}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \text{diam}(\Omega) \leq C \text{size}(\mathcal{T})$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_{\sigma} R_{\sigma}^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} R_{K,\sigma}^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) d_{\sigma} R_{K,\sigma}^2$$

Même démonstration de(3.6) dans le théorème 3.3 on trouve :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \left(\frac{u_L - u_K}{d_{\sigma}} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \left(\frac{g(y_{\sigma}) - u_K}{d_{\sigma}} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) \right)^2 \leq C(\text{size}(\mathcal{T}))^2 \quad \blacksquare$$

3.2 Conditions au bord de Neumann :

Cette section assure la convergence de schéma aux **volumes finis** quand les conditions de Neumann sont imposées et la discrétisation d'une équation de convection-diffusion générale avec les autres conditions au bord quelles seront considérées dans la section 3.3 et le terme de convection a été étudié dans les sections précédentes. D'où on présente ici l'opérateur de diffusion pure.

Considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) , x \in \Omega \\ \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) = g(x) , x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.19)$$

Sous les hypothèses suivantes :

- 1 Ω est un ouvert borné polygonal connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2,3$
- 2 $g \in L^2(\partial\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et $\int_{\partial\Omega} g(x) d\gamma(x) + \int_{\Omega} f(x) dx = 0$

Sous toutes ses suppositions, le problème (3.19) admet une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ telle

$$\text{que: } \int_{\Omega} u(x) dx = 0$$

Soit $\psi \in H^1(\Omega)$; on multiplie la première équation de problème (3.19) par la fonction ψ puis, on intègre sur Ω , on trouve :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x) \psi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx$$

D'après la formule de Green, ceci donne :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \psi(x) dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \psi(x) \cdot \mathbf{n}(x) d\gamma(x) = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \psi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \bar{\gamma}(\psi)(x) d\gamma(x)$$

Rappelons que $\bar{\gamma}$ est la fonction trace définie dans $H^1(\Omega)$ à $L^2(\partial\Omega)$ ou $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$

alors u est l'unique solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \psi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \bar{\gamma}(x) d\gamma(x), \forall \psi \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (2.20)$$

3.2.1 Maillage et schéma :

Définition 3.5 :(maillage admissible)

Soit Ω un ouvert borné polygonal connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$.

Un maillage de type volume finis de Ω pour la discrétisation de problème (3.19), noté par \mathcal{T} , est donné par la famille des volumes de contrôle, qui sont des ouverts convexes et polygonal de Ω .

Le maillage \mathcal{T} est donné aussi par la famille des parties de $\bar{\Omega}$ contenues des hyperplans dans \mathbb{R}^d , noté par \mathcal{E} (ce sont des faces de volumes de contrôle), avec la mesure de Lebesgue (d-1)-dimensionnelle est strictement positive.

Enfin, \mathcal{T} est donné aussi par la famille des points de Ω , notés par \mathcal{N} . Ces trois familles satisfont les quatre premières propriétés de la définition 3.1 avec des mêmes notations qui sont utilisés dans la suite.

On définit l'ensemble $X(\mathcal{T})$ par l'ensemble des fonctions définies sur Ω à valeur réelle restant constant sur chaque volume de contrôle du maillage.

Définition 3.6 (la semi norme discrète H^1) :

Soit Ω est un ouvert borné polygonal connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ et soit \mathcal{T} un maillage de type volume finis admissible au sens de la définition 3.5. Pour $u \in X(\mathcal{T})$, la semi norme discrète H^1 de u définie par :

$$|u|_{1,\mathcal{T}} = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{\sigma} (D_{\sigma} u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ où } \tau_{\sigma} = \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}} \text{ et } D_{\sigma} u = |u_K - u_L| \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K|L$$

Schéma aux volumes finis :

Soit \mathcal{T} un maillage admissible au sens de définition 3.5. Pour $K \in \mathcal{T}$, on définit f_K et g_K par:

$$f_K := \frac{1}{m(K)} \int_K f(x) dx$$

$$g_K := \begin{cases} \frac{1}{m(\partial K \cap \partial \Omega)} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} g(x) d\gamma(x) & \text{si } m(\partial K \cap \partial \Omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } m(\partial K \cap \partial \Omega) = 0 \end{cases}$$

où $m(K)$ est la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle de K et $m(\partial K \cap \partial \Omega)$ la mesure de Lebesgue $(d-1)$ -dimensionnelle de $\partial K \cap \partial \Omega$. Soit $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ sont les inconnues discrètes ; le schéma numérique de problème (3.19) s'écrit :

$$- \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) = m(K) f_K + m(\partial K \cap \partial \Omega) g_K, \forall K \in \mathcal{T}$$

La condition $(u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u(x) dx = 0)$ est discrétisé par $\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K = 0$

Alors, la solution approximative $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie par :

$$u_{\mathcal{T}}(x) = u_K \text{ pp } x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$$

Le schéma aux volumes finis du problème (3.19) s'écrit :

$$\begin{cases} - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) = m(K) f_K + m(\partial K \cap \partial \Omega) g_K, \forall K \in \mathcal{T} \\ \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K = 0, \forall K \in \mathcal{T} \end{cases} \quad (3.21)$$

On va énoncer maintenant un lemme qui donne l'existence et l'unicité de la solution de (3.21).

Lemme 3.6 : *Sous l'hypothèse du problème (3.19), soit \mathcal{T} un maillage admissible et $\{f_K, K \in \mathcal{T}\}, \{g_K, K \in \mathcal{T}\}$ sont définies précédemment.*

Alors, il existe une unique solution $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ de (3.21)

Preuve du lemme 3.6 :

Soit $N = \text{card}(\mathcal{T})$, la première équation de (3.21) est un système de N équations avec N inconnues, notés $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$. Ce système peut être écrit sous forme d'une matrice $A(N \times N)$

Si $f_K = g_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$ et $\{u_K, K \in \mathcal{T}\}$ solution de (3.21), on multiplie la première équation de (3.21) par $u_K, \forall K \in \mathcal{T}$ et on fait la somme sur K :

$$\begin{aligned} - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) u_K &= - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) u_K - \sum_{K \in N(L)} \tau_{L|K} (u_K - u_L) u_L \\ &= - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K)^2 = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{\sigma} (D_{\sigma} u)^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{\sigma} (D_{\sigma} u)^2 = 0 \Rightarrow u_K = u_L, \forall K, L \in \mathcal{T}$$

Car :

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{\sigma} (D_{\sigma} u)^2 = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) u_K = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} m(\partial K \cap \partial \Omega) g_K = 0$$

En générale $(f_K)_{K \in \mathcal{T}}$ et $(g_K)_{K \in \mathcal{T}}$ sont des conditions nécessaires, c'est-à-dire (3.21) admet une solution si :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} m(\partial K \cap \partial \Omega) g_K = 0$$

Puisque la dimension de l'espace nul est 1, les conditions $(f_K)_{K \in \mathcal{T}}$ et $(g_K)_{K \in \mathcal{T}}$ sont aussi des conditions suffisantes. Donc le système de la première équation de (3.21) admet une

$$\text{solution ssi } \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} m(\partial K \cap \partial \Omega) g_K = 0$$

C'est-à-dire $AU = 0$, ($U = \{u_K, K \in \mathcal{T}\}$), tel que la solution de $AU = 0$ est la solution trivial

$$U = 0$$

On conclue que : u_K est une solution unique de problème (3.21) ■

3.2.2 Inégalité de Poincaré moyenne discrète :

La démonstration du théorème de l'estimation de l'erreur, sous les hypothèses de la régularité de la solution exacte et le résultat de convergence, dans le cas générales (sous les suppositions du problème (3.19)), nécessite l'inégalité de Poincaré discrète comme dans le cas du problème de Dirichlet.

Lemme 3.7 (Inégalité de Poincaré moyenne discrète) : Soit Ω est un ouvert borné polygonal connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$.

Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ dépendant de Ω tel que: $\forall \mathcal{T}$ et $\forall u \in X(\mathcal{T})$, on a l'inégalité suivante :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |u|_{1,\mathcal{T}}^2 + 2(m(\Omega))^{-1} \left(\int_{\Omega} u(x) dx \right)^2 \quad (3.22)$$

où $|\cdot|_{1,\mathcal{T}}$ la semi-norme discrète H^1

3.2.3 L'estimation de l'erreur :

théoreme 3.5 : Sous les hypothèses de position du problème (3.19), soient \mathcal{T} un maillage admissible au sens de définition 3.5 et $h = \text{size}(\mathcal{T})$. Soit $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ la solution unique de (3.21) (l'existence et l'unicité sont données dans le lemme 3.6). Soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie par $u_{\mathcal{T}}(x) =$

u_K pp $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$, supposons que la solution unique du problème (3.20) est de classe $C^2(\bar{\Omega})$

Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ dépendant de u et Ω tel que :

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch$$

$$\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{u_K - u_L}{d_{\sigma}} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 \leq Ch^2$$

Preuve du théorème 3.5 :

Soit $C_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \bar{u}(x_K) m(K) = 0 \text{ où } \bar{u} = u + C_{\mathcal{T}}$$

Soit pour chaque $K \in \mathcal{T}, e_K = \bar{u}(x_K) - u_K$, et $e_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie par: $e_{\mathcal{T}}(x) = e_K$ pp $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$. D'ab

$$|e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \leq Ch \text{ et } \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch$$

On intègre la première équation de problème(3.19) sur K , la deuxième équation sur $\partial K \cap \partial\Omega$ et on fait leur somme :

$$-\int_K \Delta u(x) dx = \int_K f(x) dx \Rightarrow -\int_{\partial K} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) = \int_K f(x) dx$$

$$\Rightarrow -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = \int_K f(x) dx$$

$$\int_{\partial K \cap \partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = \int_{\partial K \cap \partial\Omega} g(x) d\gamma(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = \int_{\partial K \cap \partial\Omega} g(x) d\gamma(x)$$

Donc :

$-\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) = \text{ord}$, on prouve l'existence d'une constante C dépendant de u et Ω tel que :

$$\int_K f(x) dx + \int_{\partial K \cap \partial\Omega} g(x) d\gamma(x)$$

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = \int_K f(x) dx + \int_{\partial K \cap \partial \Omega} g(x) d\gamma(x) \quad (3.24)$$

Pour $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ tel que $\sigma = K|L$, on définit la consistance de l'erreur sur le flux de K à σ par :

$$R_{K,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} \quad (3.25)$$

Grâce à la régularité de la solution u , $\exists C_1(u) \in \mathbb{R}_+$ tel que $|R_{K,\sigma}| \leq C_1 h$

L'égalité (3.24) donne :

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = m(K) f_K + m(\partial K \cap \partial \Omega) g_K$$

et l'égalité (3.25) donne :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} m(\sigma)$$

On a :

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K,L}(u_L - u_K) = m(K) f_K + m(\partial K \cap \partial \Omega) g_K = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$$

Par(3.25), il vient:

$$\begin{aligned} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(u_L - u_K) &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K,\sigma} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} m(\sigma) \\ &\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(e_L - e_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K,\sigma} = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(e_L - e_K)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_{K,\sigma}(e_L - e_K) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(e_L - e_K)^2 \simeq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} (R_{K,\sigma})^2 \\ &\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(e_L - e_K)^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} (C_1 h)^2 \\ &\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(e_L - e_K)^2 \leq dm(\Omega) (C_1 h)^2 \\ &\Rightarrow |e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq (C_1 h)^2 \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Poincaré moyenne discrète à la fonction $e_{\mathcal{T}}$:

$$\begin{aligned} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C|e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + 2(m(\Omega))^{-1} \left(\int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}(x) dx \right)^2 \\ &\leq C(C_1 h)^2 + 2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \right)^{-1} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K \right)^2 \leq (Ch)^2 \\ \text{car: } \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \bar{u}(x_K) - \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Soit $|u(x) - u(y)| \leq C_2 h \quad \forall x, y \in K, \forall K \in \mathcal{T}$ et $C_2(u) \in \mathbb{R}_+$

On a :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}}(x) dx = 0$$

De plus, on a:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (u(x_K) - u(x))^2 dx \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (C_2 h)^2 = m(\Omega) (C_2 h)^2$$

Alors :

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (u_{\mathcal{T}}(x) - u(x))^2 dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (u_K - u(x))^2 dx \leq m(\Omega) (C_2 h)^2 \leq (ch)^2$$

On a montré que :

$$\begin{aligned} |e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq Ch^2 &\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}} (e_L - e_K)^2 \leq Ch^2 \\ |e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq Ch^2 &\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{(u(x_L) - u_L) - (u(x_K) - u_K)}{d_{\sigma}} \right)^2 \leq Ch^2 \\ &\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{(u(x_L) - u(x_K)) - (u_L - u_K)}{d_{\sigma}} \right)^2 \leq Ch^2 \end{aligned}$$

On sait que: $\int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \simeq m(\sigma) \frac{u_L - u_K}{d_{\sigma}}$

et on a :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} (R_{K,\sigma})^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \left(\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{\sigma}} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) \right)^2$$

$$\leq dm(\Omega)(C_1 h)^2 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} \right)^2 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{u_L - u_K}{d_\sigma} \right)^2 \\ &\leq Ch^2 \quad (**) \end{aligned}$$

La somme de (*) et (**) donne :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left[\left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} \right)^2 + \left(\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) \right)^2 \right] \\ \leq Ch^2 + dm(\Omega)(C_1 h)^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 \leq Ch^2 + dm(\Omega)(C_1 h)^2 \leq Ch^2 \end{aligned}$$

■

Définition 3.7:

Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. On dit que le maillage admissible est restreint pour le problème de Neumann, noté par \mathcal{T} s'il est définie au sens de définition 3.2 tel que: $\exists \xi > 0$, on a $d_{K,\sigma} \geq \xi \text{diam}(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}$

Théoreme 3.6 (la régularité dans H^2 , problème de Neumann) : Sous les hypothèses de la position du problème (3.19), soient \mathcal{T} un maillage admissible au sens de définition 3.7 et $h = \text{size}(\mathcal{T})$. Soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ la solution approximative définie dans Ω par: $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ pp $x \in K$, $\forall K \in \mathcal{T}$ où $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est la solution unique de (3.20) (l'existence et l'unicité sont données dans le lemme 3.6). Supposons que la solution unique du problème (3.20) est de classe $H^2(\bar{\Omega})$. Soit $C_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \bar{u}(x_K) m(K) = 0 \text{ où } \bar{u} = u + C_{\mathcal{T}}$$

Soit pour chaque $K \in \mathcal{T}$, $e_K = \bar{u}(x_K) - u_K$ et $e_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie par :

$$e_{\mathcal{T}}(x) = e_K \text{ pp } x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$$

Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ dépendant de u , ξ et Ω tel que :

$$|e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \leq Ch \text{ et } \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch,$$

$$\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 \leq Ch^2$$

Preuve du théorème 3.6 :

La preuve de ce théorème est très similaire à la preuve du théorème 3.4, et les mêmes notations sont utilisées ici. En effet, il existe une constante C dépendant de la dimension d'espace d et ξ tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, |R_\sigma|^2 \leq C \frac{h^2}{m(\sigma)d_\sigma} \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \quad (3.26)$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma |R_\sigma|^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} Ch^2 \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \leq Ch^2 \int_{\Omega} |H(u)(z)|^2 dz, \Omega = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathcal{V}_\sigma$$

La preuve de (3.26) est fait dans la preuve du théorème 3.4 (il n'est pas besoin de considérer le cas $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$), on précède comme la preuve du théorème 3.4. Rappelons que :

$$|e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) R_\sigma |D_\sigma e|$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma R_\sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m(\sigma)}{d_\sigma} |D_\sigma e|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow |e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sqrt{Ch} \left(\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} |e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}$$

$$\Rightarrow |e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \leq \sqrt{Ch} \left(\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque $u \in H^2(\bar{\Omega})$, alors $\int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz < \infty$ d'où $|e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \leq Ch$

On applique l'inégalité de Poincaré moyenne discrète, on trouve :

$$\begin{aligned} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (Ch)^2 + 2(m(\Omega))^{-1} \left(\int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}(x) dx \right)^2 \\ &\leq (Ch)^2 + 2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \right)^{-1} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K \right)^2 \leq (Ch)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \bar{u}(x_K) - \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K = 0 - 0 = 0$$

$$|e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq (Ch)^2 \Leftrightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma (e_L - e_K)^2$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} \right)^2 \leq (Ch)^2$$

$$\text{On a: } \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma R_{K,\sigma}^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma R_\sigma^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma R_{K,\sigma}^2 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \right)^2 \\ &\leq Ch^2 \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \end{aligned}$$

Si on fait la somme sur les deux dernières inégalités on obtient :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_\sigma \left(\frac{u_L - u_K}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) \right)^2 \leq (Ch)^2 + Ch^2 \int_{\mathcal{V}_\sigma} |H(u)(z)|^2 dz \leq Ch^2$$

■

3.2.4 Convergence :

Le résultat de convergence, sous les hypothèses de position de problème(3.19), peut être prouvé sans quelques hypothèses de la régularité de la solution exacte. La preuve de théorème de convergence utilise l'inégalité trace suivante d'un élément de $X(\mathcal{T})$ sur le bord.

Lemme 3.8 : (inégalité trace) Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. Soit \mathcal{T} un maillage admissible au sens de la définition 3.5 et soit $u \in X(\mathcal{T})$. Soient u_K la valeur de u sur K et $\bar{\gamma}(u) = u_K$ pp pour la mesure de Lebesgue $(d-1)$ -dimensionnelle sur σ , si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ et $\sigma \in \mathcal{E}_K$.

Alors, $\exists C(\Omega)$ tel que : $\| \bar{\gamma}(u) \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(|u|_{1,\mathcal{T}} + \| u \|_{L^2(\Omega)})$

Lemme 3.9 : (l'estimation pour le problème de Neumann) Sous les hypothèses de position du problème(3.19), soit \mathcal{T} un maillage admissible au sens de définition 3.5. Soit $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est l'unique solution de problème (3.21), où $(f_K)_{K \in \mathcal{T}}$ et $(g_K)_{K \in \mathcal{T}}$ sont définies dans le schéma aux volumes finis (3.21), l'existence et l'unicité de $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est donné dans le lemme 3.6. Soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie par : $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ pp $x \in K$, $\forall K \in \mathcal{T}$.

Alors : $\exists C \in \mathbb{R}_+$ dépendant de Ω , f et g tel que : $|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \leq C$

Preuve du lemme 3.9 :

On multiplie la première équation de problème (3.21) par u_K et on fait la somme sur K , on obtient :

$$- \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) u_K = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} m(\partial K \cap \partial \Omega) g_K u_K$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (u_L - u_K)^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) g_\sigma u_\sigma \\
&\Rightarrow |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f_K u_K dx + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \int_\sigma g_\sigma u_\sigma d\gamma(x) \\
&\Rightarrow |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 = \int_\Omega f(x) u_{\mathcal{T}}(x) dx + \int_{\partial\Omega} \bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}})(x) g(x) d\gamma(x), \partial\Omega = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \sigma
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}})\|_{L^2(\partial\Omega)} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

D'après le lemme 3.7 et 3.8 ceci devient :

$$\begin{aligned}
|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} (C|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + 2(m(\Omega))^{-1} (\int_\Omega u_{\mathcal{T}}(x) dx)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C(|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

On a d'après (3.21) $\int_\Omega u_{\mathcal{T}}(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u_K dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$

$$\Rightarrow |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sqrt{C} \|f\|_{L^2(\Omega)} |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} + C(|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

D'après le lemme 3.7, il vient :

$$\begin{aligned}
|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 &\leq \sqrt{C} \|f\|_{L^2(\Omega)} |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \\
&\quad + C(|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + C|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + 2(m(\Omega))^{-1} (\int_\Omega u_{\mathcal{T}}(x) dx)^2)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\Rightarrow |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sqrt{C} \|f\|_{L^2(\Omega)} |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} + C\sqrt{1+C} |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\Rightarrow |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \leq \sqrt{C} \|f\|_{L^2(\Omega)} + C\sqrt{1+C} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

D'où: $|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} \leq C$ où $C \in \mathbb{R}_+$ dépendant de Ω, f et g ■

Maintenant, on va énoncer le résultat de convergence suivant:

Théorème 3.7 : (convergence dans le cas de problème de Neumann) *Sous les hypothèses de position du problème(3.19), soit u la solution unique de problème(3.20). Pour un maillage admissible (au sens de définition 3.5) \mathcal{T} , soit $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est l'unique solution de*

problème(3.21), l'existence et l'unicité de $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est donné dans le lemme 3.6 , et on définit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ par : $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ pp $x \in K , \forall K \in \mathcal{T}$.

Alors :

$u_{\mathcal{T}} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$,

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 ,$$

et $\bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}}) \rightarrow \bar{\gamma}(u)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ pour la topologie faible quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

où la fonction $\bar{\gamma}(u)$ est la trace de u sur Ω dans le sens qui est donné dans le lemme 3.8 quand $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ et dans le sens de l'opérateur classique trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ (ou $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$) quand $u \in H^1(\Omega)$.

Preuve du théorème 3.7 :

Etape1 : Compacité

Soit $Y = \{u_{\mathcal{T}} , \mathcal{T} \text{ un maillage admissible}\}$

Grace à le lemme 3.9 on a :

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C$$

Et d'après le lemme 3.7 on a :

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 + 2(m(\Omega))^{-1} \left(\int_{\Omega} u(x) dx \right)^2 \leq C^3 + 2(m(\Omega))^{-1} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K \right)^2 = C^3$$

$$\text{car } \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K = 0$$

Donc Y est borné dans $L^2(\Omega)$

On prouve que Y est relativement compact dans $L^2(\Omega)$ et que si $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de maillage admissible tel que $size(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$ et $u_{(\mathcal{T}_n)} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors $u \in H^1(\Omega)$. On montre qu'il existe un nombre réel positive C dépendant de Ω , f et g tel que :

$$\| \tilde{u}_{\mathcal{T}}(\cdot + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}} \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C |\eta| , \forall \mathcal{T} , \forall \eta \in \mathbb{R}^d , |\eta| \leq 1 \quad (3.27)$$

Pour $\bar{\omega}$ est un compact de Ω ,

$$\| \tilde{u}_{\mathcal{T}}(\cdot + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}} \|_{L^2(\bar{\omega})}^2 \leq C |\eta| (|\eta| + 2size(\mathcal{T})) , \forall \mathcal{T} , \forall \eta \in \mathbb{R}^d , |\eta| < d(\bar{\omega}, \Omega^c) \quad (3.28)$$

On rappelle que $\tilde{u}_{\mathcal{T}}$ est définie par : $\tilde{u}_{\mathcal{T}}(x) = \begin{cases} u_{\mathcal{T}}(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour prouver (3.27) et (3.28), on définit :

$$\chi_\sigma: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \{0,1\}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } [x, y] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } [x, y] \cap \sigma = \emptyset \end{cases}$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, alors :

$$|\tilde{u}_{\mathcal{T}}(x + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}}(x)| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_\sigma(x, x + \eta) |D_\sigma u_{\mathcal{T}}| + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_\sigma(x, x + \eta) |u_\sigma| \quad \text{pp } x \in \Omega$$

Pour $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$, $u_\sigma = u_K$ et K le volume de contrôle tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$

Premièrement, on prouve l'inégalité (3.28)

Si $x \in \bar{\omega}$, $|\eta| < d(\bar{\omega}, \Omega^c)$, $[x, x + \eta] \cap \sigma = \emptyset$ et $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ donc :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_\sigma(x, x + \eta) |u_\sigma| = 0$$

La démonstration de (3.28) est similaire à la démonstration de lemme 3.3

En effet, on intègre sur $\bar{\omega}$ au lieu de Ω avec $C = 2$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|\tilde{u}_{\mathcal{T}}(x + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}}(x)|^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_\sigma(x, x + \eta) \frac{|D_\sigma u_{\mathcal{T}}|^2}{d_\sigma C_\sigma} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_\sigma(x, x + \eta) d_\sigma C_\sigma \quad \text{pp } x \in \bar{\omega}$$

où $C_\sigma = |\mathbf{n}_\sigma \cdot \frac{\eta}{|\eta|}|$ et \mathbf{n}_σ le vecteur normal unitaire à σ

Soit $y, z \in [x, x + \eta]$ tel que $y \neq z$ et $[y, z] \subset \bar{\omega}$, $\exists K, L \in \mathcal{T}$ tel que $y \in \bar{K}$ et $z \in \bar{L}$,

$$\text{et on a: } \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_\sigma(y, z) d_\sigma C_\sigma = \left| (y_1 - z_1) \cdot \frac{\eta}{|\eta|} \right|$$

où $y_1 = x_K$ et $z_1 = x_L$

On a $y, z \in [x, x + \eta]$ donc $y_1 - y = y_2$ avec $|y_2| \leq \text{size}(\mathcal{T})$,

$z_1 - z = z_2$ avec $|z_2| \leq \text{size}(\mathcal{T})$

$$\left| (y_1 - z_1) \cdot \frac{\eta}{|\eta|} \right| = |(y + y_2 - z - z_2) \cdot \frac{\eta}{|\eta|}| \leq |y - z| + |y_2| + |z_2| \leq |y - z| + 2\text{size}(\mathcal{T})$$

Ceci donne :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_\sigma(y, z) d_\sigma C_\sigma \leq |y - z| + 2\text{size}(\mathcal{T})$$

En particulier :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) d_{\sigma} C_{\sigma} \leq |\eta| + C \text{size}(\mathcal{T}), C = 2 \text{ si } [x, x + \eta] \subset \bar{\omega}$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \int_{\bar{\omega}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) dx \leq m(\sigma) C_{\sigma} |\eta|$$

$$\int_{\bar{\omega}} |u_{\mathcal{T}}(x + \eta) - u_{\mathcal{T}}(x)|^2 dx \leq \int_{\bar{\omega}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) \frac{|D_{\sigma} u_{\mathcal{T}}|^2}{d_{\sigma} C_{\sigma}} \right) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) d_{\sigma} C_{\sigma} \right) dx$$

$$\Rightarrow \|u_{\mathcal{T}}(x + \eta) - u_{\mathcal{T}}(x)\|_{L^2(\bar{\omega})}^2 \leq (|\eta| + 2 \text{size}(\mathcal{T})) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}} |\eta| |D_{\sigma} u_{\mathcal{T}}|^2$$

$$\Rightarrow \|u_{\mathcal{T}}(x + \eta) - u_{\mathcal{T}}(x)\|_{L^2(\bar{\omega})}^2 \leq |u_{\mathcal{T}}|_{1, \mathcal{T}}^2 \cdot |\eta| (|\eta| + 2 \text{size}(\mathcal{T})), \forall \eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

Pour prouver (3.27), on prend

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma} \neq 0 \text{ pp } x \in \Omega$$

Donc cette somme est borné par un nombre réel positive dépend de Ω , qu'on peut prendre comme le nombre de face de Ω , noté par N d'où, avec $C_1 = (N + 1)^2$ qui dépendant de Ω on a :

$$|\tilde{u}_{\mathcal{T}}(x + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}}(x)|^2 \leq C_1 \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) |D_{\sigma} u|^2 \right) + C_1 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma}^2 \text{ pp } x \in \Omega \quad (*)$$

où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma} \right)^2 &\leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma}^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) \\ &\leq C_1 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma}^2 \end{aligned}$$

On intègre (*) sur \mathbb{R}^d :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) |D_{\sigma} u|^2 \right) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) \frac{|D_{\sigma} u|^2}{d_{\sigma} C_{\sigma}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) d_{\sigma} C_{\sigma} \right) dx \\ &\leq (|\eta| + 2 \text{size}(\mathcal{T})) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}} |\eta| |D_{\sigma} u|^2 \\ &\leq |u_{\mathcal{T}}|_{1, \mathcal{T}}^2 \cdot |\eta| (|\eta| + 2 \text{size}(\mathcal{T})) \end{aligned}$$

Le lemme 3.9 donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) |D_{\sigma} u|^2 \right) dx \leq C^2 |\eta| (|\eta| + 2 \text{size}(\mathcal{T})) \leq C_2 |\eta|$$

où C_2 dépendant de Ω, f et $g, |\eta| \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma}^2 dx &\leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} |\eta| m(\sigma) u_{\sigma}^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \int_{\sigma} u_{\sigma}^2 |\eta| d\gamma(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} (\bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}}))^2(x) |\eta| d\gamma(x) = |\eta| \| \bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}}) \|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Grâce à le lemme 3.8

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma}^2 dx \leq |\eta| C^2 (|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

D'après le lemme 3.7, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma}^2 dx &\leq |\eta| C^2 (|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + C|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + 2(m(\Omega))^{-1} \left(\int_{\Omega} u_{\mathcal{T}}(x) dx \right)^2)^2 \\ &\leq |\eta| C^2 (|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + C|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2)^2 \leq |\eta| C^2 |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^4 (1 + C)^2 \end{aligned}$$

$$\text{car d'après (3.21) } \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}}(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u_K dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$$

D'après le lemme 3.9,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \chi_{\sigma}(x, x + \eta) u_{\sigma}^2 dx \leq |\eta| C^2 C^4 (1 + C)^2 \leq C_3 |\eta| \text{ où } C_2 \text{ dépendant de } \Omega, f \text{ et } g$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}_{\mathcal{T}}(x + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}}(x)|^2 dx &\leq C_1 C_2 |\eta| + C_1 C_3 |\eta| \\ \Rightarrow \| \tilde{u}_{\mathcal{T}}(x + \eta) - \tilde{u}_{\mathcal{T}}(x) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq C |\eta| \\ \Rightarrow \| u_{\mathcal{T}}(x + \eta) - u_{\mathcal{T}}(x) \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C |\eta| \\ \Rightarrow \| u_{\mathcal{T}}(x + \eta) - u_{\mathcal{T}}(x) \|_{L^2(\Omega)}^2 &\rightarrow 0 \text{ quand } \eta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc Y est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Etape 2 : passage à la limite :

Puisque la solution de (3.20) est unique, et grâce à la compacité de Y , il suffit de prouver que

si $u_{(\mathcal{T}_n)} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $size(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ alors u est solution de (3.20)

Soit $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de maillage admissible et $(u_{(\mathcal{T}_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ la solution correspondant à (3.21) avec $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$. Supposons que $u_{(\mathcal{T}_n)} \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $size(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, d'après l'étape 1 $u \in H^1(\Omega)$, puisque $\int_{\Omega} u_{(\mathcal{T}_n)}(x) dx = 0$ et on a $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$ donc u est la solution de la première équation de (3.20)

Il reste à prouver que u satisfait la deuxième équation de (3.20). Puisque $(\bar{v}(u_{(\mathcal{T}_n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $L^2(\partial\Omega)$, on peut supposer qu'il existe une sous suite $(\bar{v}(u_{(\mathcal{T}_n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers v dans $L^2(\partial\Omega)$. On prouve que $\forall \varphi \in C^2(\bar{\Omega})$:

$$-\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) v(x) d\gamma(x) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \varphi(x) d\gamma(x)$$

Alors φ satisfait la seconde équation de (3.20)

Soient $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ et $\varphi_K = \varphi(x_K)$, on définit $\varphi_{\mathcal{T}}$ par $\varphi_{\mathcal{T}}(x) = \varphi_K$ pp $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$

et $\bar{v}(\varphi_{\mathcal{T}})(x) = \varphi_K$ pp $x \in \sigma, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ et $\forall K$ tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$

On multiplie la première équation de (3.21) par φ_K , et on fait la somme sur K

$$\begin{aligned} & - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L - u_K) \varphi_K = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K \varphi_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} m(\partial K \cap \partial\Omega) g_K \varphi_K \\ \Rightarrow & - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (u_L \varphi_K - u_K \varphi_K) = \int_{\Omega} f(x) \varphi_{\mathcal{T}}(x) dx + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K \cap \partial\Omega} g(x) \bar{v}(\varphi_{\mathcal{T}})(x) d\gamma(x) \\ \Rightarrow & - \sum_{K \in \mathcal{T}} u_K \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\varphi_L - \varphi_K) = \int_{\Omega} f(x) \varphi_{\mathcal{T}}(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \bar{v}(\varphi_{\mathcal{T}})(x) d\gamma(x) \quad (3.29) \end{aligned}$$

On utilise la consistance du flux et le fait que $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\varphi_L - \varphi_K) = m(K) f_K + m(\partial K \cap \partial\Omega) g_K \\ \Rightarrow & \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\varphi_L - \varphi_K) = - \int_K f(x) dx - \int_{\partial K \cap \partial\Omega} g(x) d\gamma(x) \\ \Rightarrow & \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\varphi_L - \varphi_K) = \int_K \Delta \varphi(x) dx - \int_{\partial K \cap \partial\Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) d\gamma(x) \end{aligned}$$

L'égalité (3.29) devient :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \Delta \varphi(x) u_K dx + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) u_K d\gamma(x) \\
& \quad = \int_{\Omega} f(x) \varphi_{\mathcal{T}}(x) dx + \int_{\partial \Omega} g(x) \bar{\gamma}(\varphi_{\mathcal{T}}(x)) d\gamma(x) \\
\Rightarrow & - \int_{\Omega} \Delta \varphi(x) u_{\mathcal{T}}(x) dx + \int_{\partial \Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) \bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}}(x)) d\gamma(x) \\
& \quad = \int_{\Omega} f(x) \varphi_{\mathcal{T}}(x) dx + \int_{\partial \Omega} g(x) \bar{\gamma}(\varphi_{\mathcal{T}}(x)) d\gamma(x)
\end{aligned}$$

On passe à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ avec \mathcal{T}_n , dans cette dernière égalité, on a :

$$u_{(\mathcal{T}_n)} \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \text{ et } n \rightarrow +\infty,$$

$$\bar{\gamma}(u_{(\mathcal{T}_n)}) \rightarrow v \text{ dans } L^2(\partial \Omega) \text{ pour la topologie faible quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \text{ et } n \rightarrow +\infty,$$

$$\varphi_{(\mathcal{T}_n)} \rightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \text{ et } n \rightarrow +\infty,$$

$$\bar{\gamma}(\varphi_{(\mathcal{T}_n)}) \rightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\partial \Omega) \text{ pour la topologie faible quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \text{ et } n \rightarrow +\infty$$

La dernière égalité devient :

$$- \int_{\Omega} \Delta \varphi(x) u(x) dx + \int_{\partial \Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) v(x) d\gamma(x) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \int_{\partial \Omega} g(x) \varphi(x) d\gamma(x)$$

D'après la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \nabla u(x) dx + \int_{\partial \Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) (v(x) - \bar{\gamma}(u)(x)) d\gamma(x) \\
& \quad = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \int_{\partial \Omega} g(x) \varphi(x) d\gamma(x), \forall \varphi \in C^2(\bar{\Omega}) (*)
\end{aligned}$$

Pour prouver que u est solution de la seconde équation de (3.20) il suffit (par la densité de $C^2(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$) de prouver que $v = \bar{\gamma}(u)$ pp sur $\partial \Omega$. On remarque que (*) donne:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \nabla u(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\
\Rightarrow & \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \nabla u(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), C_c^\infty(\Omega) \text{ dense dans } H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

$$(*) \Rightarrow - \int_{\partial\Omega} \nabla\varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) (v(x) - \bar{\gamma}(u)(x)) d\gamma(x) = 0, \forall \varphi \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Il reste à choisir φ pour conclure que $v = \bar{\gamma}(u)$ pp sur $\partial\Omega$

Soit $I \subset \partial\Omega$ tel que I inclus dans un hyperplan de \mathbb{R}^d

Supposons que $I = \{0\} \times J$, où J est une boule de \mathbb{R}^{d-1} centrée à l'origine et soit $\psi \in C_c^\infty(J)$, et pour $x = (x, y) \in \mathbb{R} \times J$, on définit :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \psi \text{ sur } I$$

Donc :

$$\int_J \psi(y) (\bar{\gamma}(u)(0, y) - v(0, y)) dy = 0, \forall \psi \in C_c^\infty(J), \text{ avec } (0, y) \in \{0\} \times J$$

Puisque ψ est choisis arbitraire dans $C_c^\infty(J)$, $v = \bar{\gamma}(u)$ pp sur $I = \{0\} \times J$, avec J est arbitraire, donc $v = \bar{\gamma}(u)$ pp sur $\partial\Omega$ d'où u est solution de seconde équation de (3.20) et donc u est solution de (3.20). On conclue que :

$$u_{\mathcal{T}} \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0,$$

On a :

$$\bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}}) \rightarrow v \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \text{ pour la topologie faible quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

et on a prouvé que $v = \bar{\gamma}(u)$ pp sur $\partial\Omega$ alors :

$$\bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}}) \rightarrow \bar{\gamma}(u) \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \text{ pour la topologie faible quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0.$$

On prouver aussi dans la preuve de lemme 3.9 :

$$\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (u_L - u_K)^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) g_\sigma u_\sigma$$

$$\Rightarrow |u_{\mathcal{T}}|_{1, \mathcal{T}}^2 = \int_{\Omega} f(x) u_{\mathcal{T}}(x) dx + \int_{\partial\Omega} \bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}})(x) g(x) d\gamma(x)$$

D'après la seconde équation de (3.20) (on prend u au lieu de φ)

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} u(x) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \bar{\gamma}(u)(x) g(x) d\gamma(x)$$

On a: $\int_{\Omega} f(x) u_{\mathcal{T}}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x) f(x) dx$ dans $L^2(\Omega)$ quand $size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$

$$\int_{\partial\Omega} \bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}})(x)g(x)d\gamma(x) \rightarrow \int_{\partial\Omega} \bar{\gamma}(u)(x)g(x)d\gamma(x) \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0$$

Puisque la dimension est finie, donc la topologie faible et la topologie forte coïncident. Alors :

$$\begin{aligned} |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 &= \int_{\Omega} f(x)u_{\mathcal{T}}(x)dx + \int_{\partial\Omega} \bar{\gamma}(u_{\mathcal{T}})(x)g(x)d\gamma(x) \rightarrow \int_{\Omega} u(x)f(x)dx + \int_{\partial\Omega} \bar{\gamma}(u)(x)g(x)d\gamma(x) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que :

$$|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } size(\mathcal{T}) \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

3.3 Les opérateurs elliptiques généraux :

3.3.1 Matrice de diffusion à coefficients discontinues :

Maillage et schéma :

Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3

On s'intéresse ici la discrétisation d'un opérateur elliptique avec la matrice de diffusion à coefficients discontinues, qui peut appliquer dans le cas réel des problèmes de transfert électrique ou thermique ou, plus généralement des problèmes de diffusion dans un milieu hétérogène. Dans ce cas, le maillage est adapté la discontinuité des données .D'où la définition d'un maillage admissible qui est donnée dans la définition (3.1) peut être adapté.

On considère le même problème qu'on a étudié dans le chapitre 2 mais dans le cas de d – dimensionnelle($d = 2$ ou 3 max) :

$$\begin{cases} -\text{div}(\Lambda \nabla u)(x) + \text{div}(\mathbf{v}u)(x) + bu(x) = f(x) & , x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & , x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.30)$$

Avec des hypothèses suivantes sur les données (on note par $\mathbb{R}^{d \times d}$ la matrice ($d \times d$) avec des coefficients réels) :

1. Λ est une fonction borné mesurable de Ω à $\mathbb{R}^{d \times d}$ tel que $\forall x \in \Omega$, $\Lambda(x)$ est symétrique et il existe $\bar{\lambda}, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\underline{\lambda} \xi \cdot \xi \leq \Lambda(x) \xi \cdot \xi \leq \bar{\lambda} \xi \cdot \xi, \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

2. $\mathbf{v} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, $\text{div}(\mathbf{v}) \geq 0$ sur Ω , $b \in \mathbb{R}_+$
3. f est une fonction borné continue par morceau de Ω à \mathbb{R}

4. g est tel qu'il existe $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ tel que $\bar{\gamma}(\tilde{g}) = g$ pp sur Ω et g est une fonction borné continue par morceau de $\partial\Omega$ à \mathbb{R} (rappelons que $\bar{\gamma}$ est l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ à $L^2(\partial\Omega)$)

Sous les quatres suppositions, il existe une solution variationnelle unique $u \in H^1(\Omega)$ de problème(3.27). Ce problème satisfait $u = w + \tilde{g}$ où $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ tel que :

$\bar{\gamma}(\tilde{g}) = g$ pp sur Ω et w est une fonction unique de $H_0^1(\Omega)$ satisfait :

$$\int_{\Omega} (\Lambda(x)\nabla w(x) \cdot \nabla \psi(x) + \text{div}(\mathbf{v}w)(x) \cdot \psi(x) + buw(x) \cdot \psi(x)) dx = \int_{\Omega} (-\Lambda(x)\nabla \tilde{g}(x) \cdot \nabla \psi(x) - \text{div}(\mathbf{v}\tilde{g})(x) \cdot \psi(x) - b\tilde{g}(x) \cdot \psi(x) + f(x)\psi(x)) dx, \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

On définit maintenant le maillage admissible pour la discrétisation du problème (3.30)

Définition 3.8: (maillage admissible pour l'opérateur de diffusion générale)

Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 max. Un maillage admissible de type volumes finis pour la discrétisation du problème (3.30) est un maillage admissible \mathcal{T} de Ω dans le sens de définition 3.1 où les deux dernières conditions (iv) et (v) sont remplacées par les deux conditions suivantes :

(iv)' soit \mathcal{T} tel que la restriction de g sur chaque bord $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ est continue $\forall K \in \mathcal{T}$, Λ_K est la valeur moyenne de Λ sur K tel que $\Lambda_K = \frac{1}{m(K)} \int_K \Lambda(x) dx$. Ils existent une famille des points $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{T}}$ tel que $x_K \cap_{\sigma \in \mathcal{E}_K} D_{K,\sigma} \in \bar{K}$ où $D_{K,\sigma}$ est la droite perpendiculaire à σ par rapport à le produit scalaire introduit par Λ_K^{-1} tel que $:D_{K,\sigma} \cap \sigma = D_{L,\sigma} \cap \sigma \neq \emptyset$ si $\sigma = K|L$. De plus, si $\sigma = K|L$, soit $y_\sigma = D_{K,\sigma} \cap \sigma = D_{L,\sigma} \cap \sigma$ et on suppose que $x_K \neq x_L$

(v)' $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}$, soit K le volume de contrôle tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$ et soit $D_{K,\sigma}$ la droite orthogonal à σ par rapport à le produit scalaire introduit par Λ_K^{-1} , alors il existe $y_\sigma \in \sigma \cap D_{K,\sigma}$; soit $g_\sigma = g(y_\sigma)$.

Les notations sont les mêmes comme on introduit dans la définition (3.1)

A ce niveau on définit les inconnues discrètes du schéma numérique, avec les mêmes notations comme dans la section 3.1.2, les inconnues principales $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ seront utilisés et qui sont des approximations de la valeur de $u(x_K)$ et quelques inconnues auxiliaires à savoir les flux $F_{K,\sigma} \forall K \in \mathcal{T}$ et $\sigma \in \mathcal{E}_K$ et quelques approximations de u dans σ notés $u_\sigma \forall \sigma \in \mathcal{E}$. Ces inconnues auxiliaires sont des utiles pour écrire le schéma, mais ils peuvent être éliminés au niveau local à fin que les inconnues discrètes seront seulement écrire par rapport à des inconnues discrètes $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$. Pour $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$, $u_\sigma = g(y_\sigma)$

Le schéma aux volumes finis pour l'approximation numérique de la solution du problème (3.30) est obtenu par l'intégration de la première équation de (3.30) sur chaque volume de contrôle, et l'approximation du flux sur chaque bord σ de K :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} + bm(K)u_K = f_K, \forall K \in \mathcal{T} \quad (3.31)$$

où $v_{K,\sigma} = \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x)$ ($\mathbf{n}_{K,\sigma}$ le vecteur normal unitaire à σ se dirigeant vers K)

Si $\sigma = K_{\sigma,+} | L_{\sigma,+}$:

$u_{\sigma,+} = u_{K_{\sigma,+}}$, où $u_{K_{\sigma,+}}$ est l'amont de volume de contrôle c'est-à-dire $v_{K,\sigma} \geq 0$, avec $K = K_{\sigma,+}$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$u_{\sigma,+} = \begin{cases} u_K & \text{si } v_{K,\sigma} \geq 0 \text{ (c'est-à-dire } K \text{ est l'amont à } \sigma \text{ par rapport à } u) \\ u_{\sigma} & \text{sinon} \end{cases}$$

$F_{K,\sigma}$ est une approximation de $\int_{\sigma} \Lambda_K \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x)$; qui s'écrit par rapport à des inconnues discrètes $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ et $(u_{\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}}$

Pour $K \in \mathcal{T}$ et $\sigma \in \mathcal{E}_K$, soit $\lambda_{K,\sigma} = |\Lambda_{K,\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}|$ (rappelons que $|\cdot|$ est la norme euclidien)

Si $x_K \notin \sigma$:

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma} &\simeq \int_{\sigma} -\Lambda_K \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) = -\Lambda_K |\mathbf{n}_{K,\sigma}| \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi) m(\sigma) \\ &= -|\Lambda_{K,\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi) m(\sigma) \quad \text{car } \Lambda_K > 0 \text{ et } |\mathbf{n}_{K,\sigma}| = 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$F_{K,\sigma} = -m(\sigma) \lambda_{K,\sigma} \frac{u_{\sigma} - u_K}{d_{K,\sigma}}$$

On écrit la conservativité de schéma, c'est-à-dire $F_{K,\sigma} = -F_{L,\sigma}$ si $\sigma = K|L \subset \Omega$, on obtient la valeur de u_{σ} (si $x_L \notin \sigma$) par rapport à $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma} &= -m(\sigma) \lambda_{K,\sigma} \frac{u_{\sigma} - u_K}{d_{K,\sigma}} = -F_{L,\sigma} = m(\sigma) \lambda_{L,\sigma} \frac{u_{\sigma} - u_L}{d_{L,\sigma}} \\ \Rightarrow u_{\sigma} &= \frac{1}{\frac{\lambda_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}} + \frac{\lambda_{L,\sigma}}{d_{L,\sigma}}} \left(\frac{\lambda_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}} u_K + \frac{\lambda_{L,\sigma}}{d_{L,\sigma}} u_L \right) \end{aligned}$$

Si $x_K \in \sigma$:

On a $u_{\sigma} = u_K$ d'où la valeur de $F_{K,\sigma}$ est :

$\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$:

$$F_{K,\sigma} = -\tau_{\sigma} (u_L - u_K), \sigma = K|L$$

où

$$\tau_{\sigma} = \begin{cases} m(\sigma) \frac{\lambda_{K,\sigma} \lambda_{L,\sigma}}{\lambda_{K,\sigma} d_{L,\sigma} + \lambda_{L,\sigma} d_{K,\sigma}} & \text{si } y_{\sigma} \neq x_K \text{ et } y_{\sigma} \neq x_L \\ m(\sigma) \frac{\lambda_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}} & \text{si } x_K \notin \sigma \end{cases}$$

$\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$F_{K,\sigma} = -\tau_\sigma(g_\sigma - u_K), \text{ si } x_K \notin \sigma \text{ où } \tau_\sigma = m(\sigma) \frac{\lambda_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}}$$

Si $x_K \in \sigma$, alors l'équation associée à u_K est $u_K = g_\sigma$ et le flux numérique $F_{K,\sigma}$ est un inconnue qui peut déduit de (3.30)

Remarque 3.4:

Si $\Lambda = I_d$ alors le schéma (3.31) est le même schéma (3.3) dans la section 3.1.2

3.3.2 L'estimation de l'erreur :

Théorème 3.8 : Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 max, sous les hypothèses de position de problème(3.30), soit u la solution unique de problème variationnelle(3.30). Soit \mathcal{T} un maillage admissible pour la discrétisation du problème(3.30), dans le sens de définition 3.8. Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\xi_1(\text{size}(\mathcal{T}))^2 \leq m(K) \leq \xi_2(\text{size}(\mathcal{T}))^2$$

$$\xi_1(\text{size}(\mathcal{T})) \leq m(\sigma) \leq \xi_2(\text{size}(\mathcal{T}))$$

$$\xi_1(\text{size}(\mathcal{T})) \leq d_\sigma \leq \xi_2(\text{size}(\mathcal{T}))$$

On suppose que :

$$f|_K \in C(\bar{K}), \forall K \in \mathcal{T}, \Lambda|_K \in C^1(\bar{K}, \mathbb{R}^{d \times d}), \forall K \in \mathcal{T} \text{ et } u|_K \in C^2(\bar{K}) \forall K \in \mathcal{T}$$

(rappelons que $C^m(\bar{K}, \mathbb{R}^n) = \{v|_K, v \in C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)\}$ et $C^m(\cdot) = C^m(\cdot, \mathbb{R})$)

Alors il existe une famille unique de $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ satisfait(3.31), de plus $e_K = u(x_K) - u_K$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ dépendant de $\xi_1, \xi_2, \gamma = \sup_{K \in \mathcal{T}} (\|D^2 u\|_{L^2(K)})$ et $\delta = \sup_{K \in \mathcal{T}} (\|D\Lambda\|_{L^\infty(K)})$ tel que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{(D_\sigma e)^2}{d_\sigma} m(\sigma) \leq C(\text{size}(\mathcal{T}))^2 \text{ et } \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K^2 \leq C(\text{size}(\mathcal{T}))$$

$$\text{où : } D_\sigma e = \begin{cases} |e_L - e_K| & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K|L \\ |e_K| & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{cases}$$

Preuve du théorème 3.8 :

Etape 1: Estimations

L'approximation du flux de diffusion exacte est : $\int_\sigma -\Lambda_K \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x)$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}$

$$\text{Soit : } F_{K,\sigma}^* := \begin{cases} -\tau_\sigma(u(x_L) - u(x_K)) & , \text{ si } \sigma = K|L \\ -\tau_\sigma(u(y_\sigma) - u(x_K)) & , \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{cases}$$

Il existe une constante C_1 dépendant de u et Λ tel que :

$F_{K,\sigma}^* - \int_{\sigma} \Lambda_K \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) = R_{K,\sigma}$, avec $|R_{K,\sigma}| \leq C_1 \text{size}(\mathcal{T})m(\sigma)$ et il existe une constante C_2 dépendant de u et \mathbf{v} tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, v_{K,\sigma} u(x_{K_{\sigma,+}}) - \int_{\sigma} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = r_{K,\sigma} \text{ avec } |r_{K,\sigma}| \leq C_2 \text{size}(\mathcal{T})m(\sigma)$$

On intègre la première équation de (3.30) sur chaque volume de contrôle :

$$\begin{aligned} & - \int_K \text{div}(\Lambda \nabla u)(x) dx + \int_K \text{div}(\mathbf{v}u)(x) dx + b \int_K u(x) dx = \int_K f(x) dx \\ \Rightarrow & - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \Lambda(x) \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} (\mathbf{v}u)(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \\ & + b \int_K u(x) dx = \int_K f(x) dx \end{aligned}$$

On soustrait cette dernière équation à l'équation (3.31)

$$\begin{aligned} & - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \Lambda(x) \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} (\mathbf{v}u)(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) \\ & - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} + b \left(\int_K u(x) dx - m(K)u_K \right) = \int_K f(x) dx - m(K)f_K(*) \end{aligned}$$

$\sigma \in \mathcal{E}_{int}$:

$$\begin{aligned} & - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} \Lambda(x) \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} F_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (F_{K,\sigma}^* - F_{K,\sigma} - R_{K,\sigma}) \\ & = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (-\tau_{\sigma}(u(x_K) - u(x_L)) + \tau_{\sigma}(u_K - u_L)) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} R_{K,\sigma} \\ & = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{\sigma}(e_L - e_K) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} R_{K,\sigma} \end{aligned}$$

$\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$:

$$\begin{aligned} & - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \int_{\sigma} \Lambda(x) \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} F_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} (F_{K,\sigma}^* - F_{K,\sigma} - R_{K,\sigma}) \\ & = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} (-\tau_{\sigma}(u(y_{\sigma}) - u(x_K)) + \tau_{\sigma}(g_{\sigma} - u_K)) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} R_{K,\sigma} \\ & = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_{\sigma} e_K - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} R_{K,\sigma}, \quad (u(y_{\sigma}) - g_{\sigma} = 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \Lambda(x) \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} R_{K,\sigma}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} (\mathbf{v}u)(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (v_{K,\sigma} u(x_{K_{\sigma,+}}) - v_{K,\sigma} u_{\sigma,+}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} r_{K,\sigma} \end{aligned}$$

$$b \left(\int_K u(x) dx - m(K)u_K \right) = bm(K)(u(x_K) - u_K) = bm(K)e_K$$

Si $u \in C(\Omega)$, l'équation du problème de (3.30) devient : $bu(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} \int_K f(x) dx - m(K)f_K &= b \left(\int_K u(x) dx - m(K)u_K \right) = bm(K)u_K - b \int_K u(x) dx \\ (*) \Rightarrow - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} + bm(K)e_K &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) + S_K, \forall K \in \mathcal{T} \quad (3.32) \end{aligned}$$

$$\text{où } S_K = bm(K)u_K - b \int_K u(x) dx$$

avec $|S_K| \leq C_3 m(K)$ où $C_3(u, b) \in \mathbb{R}^+$,

$$G_{K,\sigma} = \begin{cases} \tau_{\sigma}(e_L - e_K) & , \text{ si } \sigma = K|L \\ -\tau_{\sigma} e_K & , \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{cases} ,$$

$e_{\sigma,+} = e_{K_{\sigma,+}}$ l'erreur associée à l'amont de volume de contrôle à σ . On multiplie l'équation (3.32) par e_K , on fait la somme sur $K \in \mathcal{T}$, et on utilise la conservativité de schéma (si $\sigma = K|L$ alors $R_{K,\sigma} = -R_{L,\sigma}$)

$$\begin{aligned} & - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} e_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} e_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K) e_K^2 \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} S_K e_K \\ \Rightarrow & - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} e_K \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}) e_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} S_K e_K \end{aligned}$$

Car dans le théorème 3.3 on a prouvé que :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} e_{\sigma,+} e_K &\geq 0 \text{ et } \sum_{K \in \mathcal{T}} bm(K) e_K^2 \geq 0 \quad (b \geq 0) \\ - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} G_{K,\sigma} e_K &= \begin{cases} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_{\sigma} (e_L - e_K)^2 \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K|L \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_{\sigma} e_K^2 & \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{cases} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_{\sigma} (D_{\sigma} e)^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_{\sigma} (D_{\sigma} e)^2 \leq (C_1 + C_2) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \text{size}(\mathcal{T}) m(\sigma) (e_L - e_K) + C_3 \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K$$

et par l'inégalité de Cauchy- Schwartz, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_{\sigma} (D_{\sigma} e)^2 &\leq (C_1 + C_2) \text{size}(\mathcal{T}) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m(\sigma) d_{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}} (e_L - e_K)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_3 \int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}(x) dx \\ &\leq (C_1 + C_2) \text{size}(\mathcal{T}) (dm(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} + C_3 (m(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré discrète, on obtient :

$$\begin{aligned} \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 &\leq (C_1 + C_2) \text{size}(\mathcal{T}) \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} (dm(\Omega))^{\frac{1}{2}} + C_3 (m(\Omega))^{\frac{1}{2}} \text{diam}(\Omega) \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \\ \Rightarrow \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} &\leq ((C_1 + C_2)(dm(\Omega))^{\frac{1}{2}} + C_3 (m(\Omega))^{\frac{1}{2}}) \text{size}(\mathcal{T}) \\ &\leq C. \text{size}(\mathcal{T}) \text{ où } e_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T}) \text{ tel que : } e_{\mathcal{T}}(x) = e_K \text{ pp } x \in K \end{aligned}$$

Alors :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}} (D_{\sigma} e)^2 \leq (C \text{size}(\mathcal{T}))^2$$

On applique l'inégalité de Poincaré discrète, on trouve :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) e_K^2 = \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\text{diam}(\Omega))^2 \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq (\text{diam}(\Omega))^2 (C. \text{size}(\mathcal{T}))^2 \leq C (\text{size}(\mathcal{T}))^2$$

Etape 2 : Existence et l'unicité

On utilise le principe du maximum c'est-à-dire si $f_K \geq 0 \forall K \in \mathcal{T}$ et $g_{\sigma} \geq 0 \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}$

Alors $(u_K)_{K \in \mathcal{T}}$ la solution de (3.31) satisfait $u_K \geq 0 \forall K \in \mathcal{T}$

Supposons par l'absurde que K_0 est un volume de contrôle tel que $\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_{K_0}$ et que $u_{K_0} < 0$, alors pour $\sigma \subset \partial\Omega$, $g_{\sigma} < 0$ (contradiction)

Le principe du maximum donne l'unicité de la solution numérique de schéma

D'où si $f_K = 0 \forall K \in \mathcal{T}$ et $g_{\sigma} = 0 \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ alors $u_K = 0$

Donc l'équation (3.31) devient :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} + m(K) b u_K = 0$$

On multiplie cette équation par u_K on obtient :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} u_K + m(K) b u_K^2 = 0, \forall K \in \mathcal{T}$$

On a : $f_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}$ et $g_K = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ donc il s'agit de prouver que $u_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}$

En effet : on somme la dernière équation sur chaque volume de contrôle K

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} u_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} u_{\sigma,+} u_K + \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) b u_K^2 = 0$$

Ce qui donne après réarrangement des termes de cette somme suivant les faces de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{int} \cup \mathcal{E}_{ext}$:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) b u_K^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma (u_{\sigma,+} - u_{\sigma,-}) u_{\sigma,+} = 0$$

D'après le lemme 3.2: $u_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}$

Ainsi la seule solution du problème homogène associée au système linéaire aux volumes finis (3.31) n'est autre que la solution triviale. ■

3.3.3 Autres conditions au bord :

Le schéma aux **volumes finis** peut être utilisé à la discrétisation du problème elliptique avec les conditions au bord de Dirichlet et de Neumann. Il est aussi facile à appliquer le cas de Fourier et le cas des conditions d'interface entre deux régions géométriques. On propose ici quelques conditions au bord et d'interface.

Soit Ω un ouvert rectangulaire de \mathbb{R}^2 définie par : $\Omega = (0,1) \times (0,2)$

On considère le problème modèle suivant: (par exemple la conduction de la chaleur)

$-\text{div}(\lambda_i \nabla u(x)) = f(x), x \in \Omega_i, i = 1,2$ où $f \in C(\bar{\Omega}), \lambda_1, \lambda_2 > 0$ sont les deux conductivités thermiques dans les domaines Ω_1 et Ω_2 avec $\Omega_1 = (0,1) \times (0,1)$ et $\Omega_2 = (0,1) \times (1,2)$

On rappelle $\Gamma_1 = [0,1] \times \{0\}, \Gamma_2 = \{1\} \times [0,2], \Gamma_3 = [0,1] \times \{2\}, \Gamma_4 = \{0\} \times [0,2]$ les frontières extérieures de Ω , et on note $I = [0,1] \times \{1\}$ l'interface entre Ω_1 et Ω_2 , dans la suite on notera λ la conductivité thermique sur Ω , avec $\lambda|_{\Omega_i} = \lambda_i, i = 1,2$.

On va considérer plusieurs types des conditions aux limites :

Condition aux limite de type de Fourier sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$:

On suppose qu'il existe un Transfer thermique entre les parois Γ_1, Γ_3 et l'extérieur. Ce transfert est décrit par la condition de Fourier, qu'exprime que le flux transféré est proportionnel à la diffusion de température entre l'extérieur et l'intérieur :

$$-\lambda \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \alpha(u(x) - u_{ext}) \quad \forall x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

où $\alpha > 0$ est le coefficient de transfert thermique, \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ extérieur à Ω et u_{ext} la température extérieur (donnée).

Condition aux limites de type de Neumann sur Γ_2 :

On suppose que la paroi Γ_2 soit parfaitement isolée, et que le flux de la chaleur à travers cette paroi est donc nul, ceci se traduit par une condition dite de Neumann homogène

$$-\lambda \cdot \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2 .$$

Condition aux limites de type de Dirichlet sur Γ_4 :

Sur la paroi Γ_4 , on suppose que la température est fixé, ceci est une condition assez difficile à obtenir expérimentalement pour un problème de type de chaleur, mais qu'on peut rencontre dans d'autre problème pratique

$$u(x) = g(x) \quad \forall x \in \Gamma_4, g \in C(\Gamma_4)$$

Condition sur l'interface I:

On suppose que l'interface I est par exemple le siège d'une réaction chimique surfacique θ et ϕ qui provoque un dégagement de chaleur surfacique. On a donc un saut du flux de chaleur à travers l'interface I. Ceci se traduit par les deux conditions de saut suivantes :

$$-\lambda_1 \nabla u_1(x) \cdot \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \nabla u_2(x) \cdot \mathbf{n}_2 = \theta(x) \quad , x \in I$$

$$u_1(x) - u_2(x) = \phi(x) \quad , x \in I$$

où \mathbf{n}_i désigne le vecteur unitaire normal à I et extérieur à Ω_i , θ et ϕ sont des fonctions données (θ et $\phi \in C(I)$)

3.4 Etude numérique de quelques modèles :

3.4.1 Modèle de convection pure :

Problème et schéma :

Nous considérons à présent le cas de la convection pure avec la vitesse v constante. Les équations du modèle sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + v \operatorname{div} u(x, t) = 0 \quad , x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2, t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) \quad , x \in \bar{\Omega}, u_0(x) \text{ donné} \end{cases} \quad (3.33)$$

Le cas d=1 :

Soit $(K_i)_{i=1}^n$ un maillage admissible au sens de définition 2.1 (section 2.1.1). On intègre l'équation de problème (3.33) sur chaque intervalle K_i au temps $t \in]0, T[$:

$$\int_{K_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + v \int_{K_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = 0 \quad , \forall i = 1, \dots, N \quad (3.34)$$

Le terme en temps est discrétisé, en générale, par la méthode de différence finis. En effet, soit $k \in \mathbb{N}^*$ le pas temporel est choisi constant donc la discrétisation temporelle du schéma

d'Euler explicite est obtenue lorsque l'on prend $u^n(x)$ l'approximation de la solution u au temps $t = t_n$ c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_n) \simeq \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{k}$$

Les inconnues discrètes sont notées par u_i^n , $i = 1, \dots, N$, $n \in \mathbb{N}$ qui sont des approximations de $u(x_i, t_n)$ donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}$$

(3.34) devient :

$$\int_{K_i} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} dx + v \left(u \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n \right) - u \left(x_{i-\frac{1}{2}}, t_n \right) \right) = 0$$

Si $v \geq 0$, quel est considéré ici, le terme conservative $vu \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n \right)$ est approximé par vu_i^n à cause de la considération de la stabilité.

Si $v \leq 0$, l'approximation de $vu \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n \right)$ est u_{i+1}^n pour le même raison.

D'où le schéma explicite aux volumes finis pour la discrétisation du problème (3.33) en 1D s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{h_i}{k} (u_i^{n+1} - u_i^n) + v(u_i^n - u_{i-1}^n) = 0, \forall i = 1, \dots, N, \forall n \in \mathbb{N} \\ u_i^0 = \int_{K_i} u_0(x) dx \end{cases}$$

où $h_i = m(K_i) = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$

Le cas d=2 :

Soit \mathcal{T} un maillage admissible de Ω , ouvert, convexe, borné et polygonal et soit $K \in \mathcal{T}$ le volume de contrôle. Pour prouver le schéma aux volumes finis de (3.33) en 2D on intègre l'équation de (3.33) sur chaque volume de contrôle K au temps $t \in]0, T[$:

$$\int_K \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + v \int_{\partial K} u(x, t) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) = 0, \forall t \in]0, T[\quad (3.35)$$

où \mathbf{n}_K le vecteur normal unitaire à ∂K se dirigeant vers l'extérieur de K

Toujours, le terme en temps est discrétisé par différence finis et d'après la section 3.1.1, on a

$$\partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sigma, (3.35) \Rightarrow \int_K \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{k} dx + v \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} u(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) = 0 \quad (3.36)$$

Soit u_K^n les inconnues discrètes pour $K \in \mathcal{T}$ et soit $u_{K,\sigma}^n = \int_{\sigma} u(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$ tel que :

$$u_K^n \simeq u(x_K, t_n), \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donc: } \frac{\partial u}{\partial t}(x_K, t_n) \simeq \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k}$$

(3.36) devient :

$$\int_K \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} dx + \nu \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} u_{K,\sigma}^n = 0, \forall t \in]0, T[$$

D'où le schéma aux volumes finis pour la discrétisation du problème (3.33) en 2D est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m(K)}{k} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \nu \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} u_{K,\sigma}^n = 0, \forall K \in \mathcal{T} \\ u_K^0 = \int_K u_0(x) dx \end{array} \right.$$

3.4.2 Modèle de convection diffusion :

Nous considérons maintenant le cas de la convection –diffusion avec ν, μ sont des constantes. Les équations du modèle sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nu \operatorname{div} u(x, t) - \mu \Delta u(x, t) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2, t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \quad \quad x \in \bar{\Omega}, u_0(x) \text{ donné} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \quad \quad t \in]0, T[\end{array} \right. \quad (3.37)$$

Le cas d=1 :

On va résoudre le problème (3.37) par la méthode de séparation de variable

Soit $(x, t) = X(x).T(t)$, le problème (3.37) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x).T'(t) + \nu X'(x).T(t) - \mu X''(x).T(t) = 0 \\ X(x).T(0) = u_0(x), \\ X(0).T(t) = X(1).T(t) = 0 \end{array} \right.$$

et nous avons que X et T sont des solutions de problème

$$\text{suivant : } \left\{ \begin{array}{l} -\mu X'' + \nu X' - \lambda X = 0 \quad (*) \\ T'(t) = \lambda T(t) \\ X(0) = X(1) = 0 \end{array} \right.$$

L'équation caractéristique associée à (*) est : $-\mu r^2 + \nu r - \lambda = 0$ c'est une équation différentielle de second ordre, son discriminant $\Delta = \nu^2 + 4\lambda\mu$. Pour $\Delta \geq 0$, (*) n'admet pas des solutions non trivial. Donc cette équation admet des solutions périodique pour $\Delta < 0$ et qui a deux racines complexes $r_{1,2} = \frac{\nu \pm i\sqrt{\Delta}}{2\mu}$ d'où :

$$X(x) = e^{\frac{\nu}{2\mu}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\mu} x + B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\mu} x \right),$$

$$X(0) = A = 0 ,$$

$$X(1) = B e^{\frac{\nu}{2\mu}} \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\mu} = 0 , \text{ ceci n'est possible pour } B e^{\frac{\nu}{2\mu}} \neq 0 \text{ et } \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\mu} = k\pi , k \in \mathbb{N}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_k = -\frac{\nu^2}{4\mu} - k^2\pi^2\mu$ et les fonctions propres associées:

$$X(x) = \sqrt{2} e^{\frac{\nu}{2\mu}x} \sin k\pi x , k \geq 1 \text{ forment une base orthonormée dans } L^2((0,1))$$

$$\text{Développons } u_0 \text{ suivant cette base : } u_0(x) = \sum_{k \geq 1} \sqrt{2} B_k e^{\frac{\nu}{2\mu}x} \sin k\pi x , k \in \mathbb{N} ,$$

$$\text{Ainsi : } B_k = \sqrt{2} \int_0^1 e^{\frac{\nu}{2\mu}y} u_0(y) \sin k\pi y dy$$

D'où :

$$u(x, t) = 2 \sum_{k \geq 1} \left(\int_0^1 u_0(y) e^{\frac{\nu}{2\mu}y} \sin k\pi y dy \right) e^{\frac{\nu}{2\mu}x} (\sin k\pi x) e^{-\left(\frac{\nu^2}{4\mu} + k^2\pi^2\mu\right)t}$$

Pour simplifier les calculs on pose $u_0(y) = e^{-\frac{\nu}{2\mu}y}$ donc

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \sum_{k \geq 1} \left(\int_0^1 \sin k\pi y dy \right) e^{\frac{\nu}{2\mu}x} (\sin k\pi x) e^{-\left(\frac{\nu^2}{4\mu} + k^2\pi^2\mu\right)t} \\ &= \frac{2}{k\pi} \sum_{k \geq 1} (1 - (-1)^k) e^{\frac{\nu}{2\mu}x} (\sin k\pi x) e^{-\left(\frac{\nu^2}{4\mu} + k^2\pi^2\mu\right)t} \\ u(x, t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p \\ \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+1} e^{\frac{\nu}{2\mu}x} (\sin(2p+1)\pi x) e^{-\left(\frac{\nu^2}{4\mu} + (2p+1)^2\pi^2\mu\right)t} & \text{si } k = 2p+1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} e^{\frac{\nu}{2\mu}x} (\sin(2k+1)\pi x) e^{-\left(\frac{\nu^2}{4\mu} + (2k+1)^2\pi^2\mu\right)t}$$

On va prouver maintenant le schéma aux volumes finis de problème (3.37) en 1D pour cela on fait seulement la discrétisation du troisième membre gauche de l'équation de problème (3.37) car les deux autres membres on a déjà fait dans le premier modèle .En effet,

$$\int_{K_i} -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(x_{i-\frac{1}{2}}, t \right) \right)$$

Soit u_K^n les inconnues discrètes pour $K \in \mathcal{T}$ et l'approximation de $-\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)$ est établie à partir d'un procédé de différence finis (schéma centré). On pose :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n := -\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_i^n}{h_i^+} \text{ sur } K_i \text{ pour } i = 1, \dots, N$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n := -\frac{u_{i+1}^n - u_{i+\frac{1}{2}}^n}{h_{i+1}^-} \text{ sur } K_{i+1} \text{ pour } i = 0, \dots, N-1$$

Grâce à la conservativité de flux à travers les interfaces, on peut déduire la valeur de $u_{i+\frac{1}{2}}^n$ en fonction de u_i^n et u_{i+1}^n c'est-à-dire

$$-\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_i^n}{h_i^+} = -\frac{u_{i+1}^n - u_{i+\frac{1}{2}}^n}{h_{i+1}^-} \Leftrightarrow u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{h_i^+ u_{i+1}^n + h_{i+1}^- u_i^n}{h_i^+ + h_{i+1}^-}$$

On remplace $u_{i+\frac{1}{2}}^n$ par son valeur dans $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ on trouve :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = -\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_i^+ + h_{i+1}^-} = -\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \forall i = 0, \dots, N-1$$

où $h_{i+\frac{1}{2}} = h_i^+ + h_{i+1}^- = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \dots, N$

D'où le schéma aux volumes finis pour la discrétisation du problème (3.37) en 1D :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h_i}{k} (u_i^{n+1} - u_i^n) + \mu (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) + v (u_i^n - u_{i-1}^n) = 0, \forall i = 1, \dots, N, \forall n \in \mathbb{N} \\ F_{i+\frac{1}{2}}^n = -\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \forall i = 0, \dots, N \\ u_i^0 = \int_{K_i} u_0(x) dx \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Le cas d=2 :

On intègre l'équation de (3.37) sur $K (\forall K \in \mathcal{T})$

$$\int_K \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + v \int_K \operatorname{div} u(x, t) dx - \mu \int_K \Delta u(x, t) dx = 0$$

$$v \int_K \operatorname{div} u(x, t) dx = v \int_{\partial K} u(x, t) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) = v \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} u(x, t) \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}(x) d\gamma(x)$$

Les inconnues discrètes $(u_K^n)_{K \in \mathcal{T}}$ sont des approximations de $u(x_K, t_n)$, $\forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{K,\sigma}^n = \int_{\sigma} u(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$$

$$-\mu \int_K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx = -\mu \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \mathbf{n}_K(x) d\gamma(x) = -\mu \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x)$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) \in C(\sigma)$, $\exists \xi \in \sigma$ tel que:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t_n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(x) d\gamma(x) &= m(\sigma) \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t_n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(\xi) = m(\sigma) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi, t_n) \\ &= \begin{cases} m(\sigma) \frac{u(x_L, t_n) - u(x_K, t_n)}{d_{\sigma}} & \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \\ m(\sigma) \frac{u_0(y_{\sigma}, t_n) - u(x_K, t_n)}{d_{\sigma}} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{cases} \\ &\simeq \begin{cases} m(\sigma) \frac{u_L^n - u_K^n}{d_{\sigma}} & \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \\ m(\sigma) \frac{u_0^n(y_{\sigma}) - u_K^n}{d_{\sigma}} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K \end{cases} = F_{K,\sigma}^n \end{aligned}$$

Le schéma aux volumes finis s'écrit finalement comme suit :

$$\begin{cases} \frac{m(K)}{k} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \mu \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^n + \nu \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} u_{K,\sigma}^n = 0, \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N} \\ u_K^0 = \int_K u_0(x) dx \end{cases}$$

Résultat de simulation:

```
function U=diffusion1(n,k,mu,nu)

x(1)=0;
for i=2:2*n+1
    x(i)=i/((2*n+1));
end
z=-nu/(2*mu);
for i=1:n
    z1=z*x((2*i)+1);
    z2=z*x((2*i)-1);
    u_0(i)=(1/z)*exp(z1)-((1/z)*exp(z2))
end
h_d(1)=x(2)-x(1)
for i=1:n-1
```

```

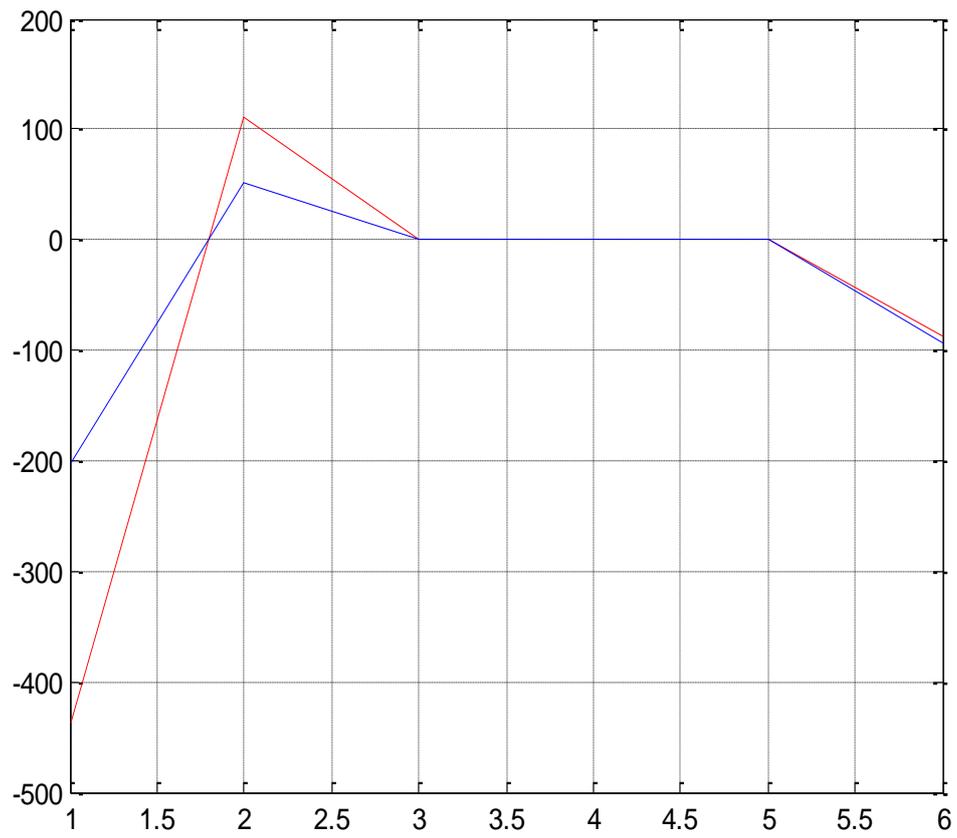
    h_d(i+1)=x((2*i)+2)-x(2*i)
end
for i=1:n
    h_i(i)=x((2*i)+1)-x(i)
end

%la matrice A
for i=1:n
    a1=h_i(i)/k;
    a2=1/h_d(i);
    a3=1/h_d(i);
    a(i,i)=a1-mu*(a2+a3)-nu;
    b(i)=h_i(i)/k;
end
for i=1:n-1
    a(i+1,i)=(mu/h_d(i+1))+nu;
    a(i,i+1)=mu/h_d(i+1);
end
a
u_0=(u_0)'
u1=a*u_0;
for i=1:n
    U(i)=u1(i)/b(i);
    %U(i)=k*u1(i)/h_i(i);
end
U=U'

%la définition d'erreur
erreur=norme(n,u_0,U)

%le graphe
m=1:1:n
plot(m,U,'r',m,u1,'b')

```



CONCLUSION

La discrétisation des problèmes de diffusion dans un milieu hétérogène est établie par la méthode des volumes finis qui se décompose en deux étapes importantes:

Le maillage : il consiste à diviser le domaine d'étude en plusieurs cellules appelées volumes de contrôle.

La discrétisation: Dans de cette étape, on procède à l'intégration des équations elliptiques sur chaque volume de contrôle.

L'étude de l'estimation de l'erreur et de la convergence des solutions approximatives est effectuée. Par ailleurs, les calculs numériques et la programmation des schémas de discrétisation par volumes finis n'a porté que sur les problèmes en dimension une (1D) avec des conditions aux limites de type de Dirichlet, le temps alloué à la réalisation du mémoire étant, malheureusement, insuffisant.

Restera, par conséquent, en perspectives, l'approche numérique qui pourra être réalisée pour des problèmes posés avec d'autres conditions au bord.

RÉFÉRENCES

[1] Gallouët.T, R.Herbin and M.H.Vignal : Error estimate on the approximation finite volume solutions of convection diffusion equations with general boundary conditions, SIAM J. Numer. Anal .,37, 6, 1935-1975, 2000.

[2] Gerald Teschl: Nonlinear functional analysis, Universität Wien, 1990 Wien. Austria.

[3] Haim Brezis : Analyse fonctionnelle : Théorie et applications (Masson, Paris), 1983.

[4] Raphaële Herbin : An errorestimate for a finite volume scheme for a diffusion convection problem on a triangularmesh, PSMN ENS-Lyon 46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex07, France.

[5] Robert Eymard : Thierry Galouët and Raphaële Herbin , finite volume methods n0 97-19 du LATP,UMR 6632, Marseille September 1997 .

[6] R. Herbin : analyse numérique des équations aux dérivées partielle, Université Aix-Marseille ,17 avril 2010.

[7] Roger Temam: Navier-Stokes Equation theory and its application (North Holland, Amsterdam), 1977.

[8] Y.Goudière, J.P.Vila and P.VilledieuConvergence: Rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection diffusion problem, Math.Model.Numer.Anal. 33, no 3 ,493-516, 1999.