



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Université Aboubekr Belkaid- Tlemcen  
Faculté de Technologie  
Département De génie mécanique

**MEMOIRE**  
En vue de l'obtention du diplôme de  
**MAGISTER**  
**EN GENIE MECANIQUE**  
**Option : Mécanique des Matériaux et structures**

Présenté par :

KADDOURI Djamel Eddine

*Thème*

**Analyse des effets de l'amplitude et  
température sur le comportement non  
linéaire d'une plaque annulaire sectorielle  
à gradient fonctionnel**

Soutenu devant le Jury :

Président	Mr. HADJOUI Abdelhamid	Prof	Univ. Tlemcen
Encadreur	Mr. HOUMAT Abderrahim	Prof	Univ. Tlemcen
Examineur	Mr. BELALIA Sid Ahmed	MC"A"	Univ. Tlemcen
Examineur	Mr. HAMZA CHERIF Sidi Mohamed	MC"B"	Univ. Tlemcen

Année universitaire 2013 -2014

---

## Remerciements

# الحمد لله رب العالمين

Ce travail a été réalisé au sein de la faculté de technologie à université ABOU BEKR BELKAID de Tlemcen.

Mes premiers remerciements vont naturellement à mon Directeur de mémoire, Monsieur **HOUMAT Abderrahim** Professeur à l'UABBT pour son suivi constitutif, ses précieux conseils et sa disponibilité durant toute notre formation en post-graduation ainsi que lors de la préparation de ce mémoire, et je tien lui adresser mes vifs remerciements les plus respectueux.

Je remercie le Président du jury Monsieur **HADJOUI Abdelhamid** Professeur à l'UABBT d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie aussi Monsieur **BELALIA Sid Ahmed** et Monsieur **HAMZA CHERIF Sidi Mohamed** Maîtres de conférences à l'UABBT pour l'intérêt qu'ils ont porté en acceptant d'examiner ce travail.

Mes vifs remerciements vont aussi à mes professeurs de département de génie mécanique qui n'ont ménagé aucun effort pour nous transmettre leurs précieuses connaissances.

Enfin, mes remerciements à tous ceux qui contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet : mes collègues de magister ; ma famille, pour leur patience à m'accorder tout le temps nécessaire ; ainsi qu'à mes chers amis.

---

# Résumé

---

La vibration non-linéaire d'une plaque annulaire sectorielle épaisse à gradient fonctionnel dans un environnement thermique est formulée en fonction des équations de Von Karman et la méthode des éléments finis hiérarchiques. L'épaisseur de la plaque est constante et les propriétés du matériau sont supposées varier continuellement selon une loi de puissance de la fraction du volume des constituants. Les équations non-linéaires du mouvement sont transformées du domaine temporel au domaine fréquentiel par la méthode d'équilibrage harmonique. Les équations non-linéaires résultantes sont résolues itérativement par la méthode du mode linéarisé actualisé. Les fréquences linéaires et non-linéaires sont déterminées. Les résultats numériques sont comparés avec les résultats publiés les effets de la composition du matériau et de la température sur les caractéristique vibratoires de la plaque sont examinés.

**Mots clés :** *effet de l'amplitude et température ; la version-p de la méthode des éléments finis ; matériau à gradient fonctionnel ; plaque annulaire sectorielle épaisse ; équations de Von Karman ; vibration libre linéaires et non-linaires.*

---

## Abstract

---

The non-linear vibration of thick functionally graded annular sector plate in a thermal environment is formulated in terms of Von Karman dynamic equations and the hierarchical finite element method. The plate thickness is constant and the properties of the material are assumed to vary continuously according to a power law of the volume fraction of the components. The non-linear equations of motion are transformed from the time domain to the frequency domain by the harmonic balance method. The resulting non-linear equations are solved iteratively by the method of linearized fashion updated. Linear and nonlinear frequencies are determined. The numerical results are compared with the published results of the effects of material composition and temperatures on the vibration characteristic of the plate are examined.

**Key words:** *effect of amplitude and temperature; p-version of the finite element method; functionally gradient material, thick annular sector plate; Von Karman equations, linear free vibration and non-linear.*

---

## ملخص

---

إن صياغة الاهتزازات الغير الخطية للصفائح الحلقية القطاعية المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفيا في بيئة حرارية تعتمد على أساس معادلات *فون كرمان* و طريقة العناصر المحدودة -*p*. سمك الصفيحة ثابت و نعتبر أن خصائص المواد تتغير بشكل مستمر باتجاه السمك وفقا لقانون القوة لجزء من حجم المكونات. يتم تحويل المعادلات غير الخطية للحركة من المجال الوقتي إلى المجال الترددي بطريقة التوازن المتناسق. يتم حل المعادلات الحركية غير الخطية بطريقة التكرار الخطي من اجل تحديد الترددات الخطية و غير الخطية. تتم مقارنة النتائج العددية المتحصل عليها مع النتائج المنشورة لتأثيرات تركيب المواد و درجة الحرارة على خاصية الاهتزازات على هذا النوع من الألواح.

**كلمات البحث:** تأثير السعة و درجة الحرارة؛ طريقة العناصر المحدودة - *p*، المواد المتدرجة وظيفيا ، سمكية لوحة القطاع الحلقي؛ معادلات *فون كرمان* ، والاهتزاز الحرة الخطية و غير الخطية.

---

## Sommaire

Titre	Page
<i>Sommaire</i> .....	i
<i>Liste des figures</i> .....	v
<i>Liste des tableaux</i> .....	viii
<i>Liste des symboles</i> .....	ix
<i>Introduction Générale</i> .....	01
<i>Etude bibliographique</i> .....	03
<b><u>CHAPITRE 1</u></b> <b><u>MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL FGM</u></b>	
1.1- Introduction.....	06
1.1- Concept des matériaux FGM.....	06
1.2- Idée générale.....	07
1.3- Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel.....	09
1.4- Analyse thermique.....	13
<b><u>CHAPITRE 2</u></b> <b><u>THEORIES DES PLAQUES</u></b>	
2.1- Introduction.....	16
2.2- Historique.....	16
2.3- Définitions et Hypothèses.....	16
2.3-1. Théorie de Kirchhoff.....	17
2.3-2. Théorie de Reissner-Mindlin.....	18
2.4- Relations cinématiques.....	19
2.4-1. Le champ de déplacements.....	19
2.4-2. Relations déformations-déplacements.....	19
2.4-3. Efforts résultants et moments.....	21
2.4-4. Facteur de correction transversal.....	23
2.4-5. Relations contraintes-déformations.....	24
2.5- Energie de déformation.....	25
2.6- Energie cinétique.....	25
2.7- Plaque circulaire.....	26
2.7-1. Relations cinématiques d'une plaque circulaire.....	26

2.7-2.	Relations déformations-déplacements.....	27
2.8-	Effet de la température sur les relations constitutives et constantes matérielles.....	28
2.9-	Plaque à gradient fonctionnel.....	29
2.9.1-	Energie de déformation d'une plaque à gradient fonctionnel.....	29
2.9.1-	Energie de déformation d'une plaque à gradient fonctionnel.....	30
2.10-	Equations du mouvement.....	31

---

**CHAPITRE 3**  
**VERSION-p DE LA MEF**

3.1-	Introduction.....	32
3.2-	Domaines d'application.....	32
3.3-	Types de problèmes MEF.....	33
3.4-	Fondements de la méthode-p.....	34
3.5-	Avantages de la méthode-p.....	35
3.6-	Inconvénients de la méthode-p.....	36
3.7-	Mise en œuvre de la méthode-p.....	37
3.5-1.	Polynômes de Legendre.....	37
3.5-1.1.	Propriétés des polynômes de Legendre.....	37
3.5-1.2.	Polynômes de Legendre déplacés.....	38
3.5-2.	Fonctions de formes hiérarchiques.....	39
3.5-2.1.	Élément unidimensionnel.....	39
3.5-2.2.	Élément bidimensionnel.....	41
3.5-2.2.1.	Espaces polynômiaux.....	41
3.5-2.2.2.	Élément 2-D quadrangulaires.....	42

---

**CHAPITRE 4**  
**MODELISATION PAR LA VERSION-P DE LA MEF**

4.1-	Formulation par élément-p.....	44
4.2-	L'énergie de déformation.....	46
4.2-1.	L'énergie de déformation due aux efforts vibratoires.....	47
4.2-2.	L'énergie de déformation de flambement du à la température.....	50
4.3-	L'énergie de cinétique.....	52
4.4-	Equations du mouvement.....	52

---

**CHAPITRE 5**  
**TECHNIQUES DE PROGRAMMATION**

5.1-	Introduction.....	58
5.2-	Logiciels et matériel utilisés.....	58
5.3-	Organigramme du programme principal.....	58
5.4-	Description des sous – programme.....	62
5.4-1.	S/P INPUT.....	62
5.4-1.1.	Paramètre des éléments.....	63
5.4-1.2.	Paramètre physiques.....	63
5.4-1.3.	Paramètre géométriques.....	63
5.4-2.	S/P GAUSS.....	63
5.4-3.	S/P INTEG.....	64
5.4-4.	S/P CONSTS.....	64
5.4-5.	S/P BOUNDC.....	64
5.4-6.	Construction des matrices linéaires.....	64
5.4-7.	S/P STIFF4.....	64
5.4-8.	S/P JACOBI.....	65
5.4-9.	S/P MAXAMP.....	65
5.4-10.	S/P MODE.....	65
5.4-11.	Construction des matrices non linéaires.....	65
5.4-12.	S/P STIFF7.....	65
5.4-13.	S/P STIFF.....	66
5.4-14.	S/P SORT.....	66

---

**CHAPITRE 6**  
**RESULTATS ET VALIDATION NUMERIQUE**

6.1.	Introduction.....	67
6.2.	Plaque isotrope.....	68
6.2.1.	Convergence et validation.....	69
6.3.	Plaque à gradient fonctionnel.....	74
6.3.1	Etude des vibrations linéaires.....	74
6.3.1.1	Validation.....	74
6.3.2.	Etude paramétrique.....	78
6.3.2.1	Influence du rapport a/b.....	78
6.3.2.2	Influence de l'angle de secteur.....	80
6.3.2.3	Influence des conditions aux limites.....	82
6.3.2.4	Influence de nuance FGM.....	83
6.3.2.5	Influence de la température.....	85

---



6.3.3.	Etude de vibration non linéaire.....	87
6.3.3.1.	Influence des conditions aux limites.....	90
6.3.3.2.	Influence du rapport de rayons.....	90
6.3.3.3.	Influence de l'angle de secteur.....	91
6.3.3.4.	Influence de nuance.....	92
6.3.3.5.	Influence de la température.....	92
<hr/>		
	<b>Conclusion</b> .....	94
	<b>références</b> .....	95
	<b>Annexes</b> .....	100

---

## Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> : Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [Yin et al (2004)].....	8
<b>Figure 1.2</b> : Modèle analytique pour une couche de FGM.....	9
<b>Figure 1.3</b> : Fraction volumique du métal le long de l'épaisseur.....	10
<b>Figure 1.4</b> : Distribution de la température suivant l'épaisseur pour différentes valeurs de $T$ de la céramique.....	14
<b>Figure 1.5</b> : Distribution de la température dans l'épaisseur pour différentes valeurs de la fraction volumique $N$ .....	15
<b>Figure 2.1</b> : Géométrie d'une plaque.....	16
<b>Figure 2.2</b> : Modèle de Kirchhoff.....	17
<b>Figure 2.3</b> : Déformations dans le plan ( $XZ$ ) selon la théorie du premier ordre [Reissner-Mindlin].....	18
<b>Figure 2.4</b> : Efforts agissant dans le plan de la plaque.....	21
<b>Figure 2.5</b> : Moments agissant sur un élément de plaque.....	22
<b>Figure 2.6</b> : Efforts tranchants dans un élément de plaque.....	22
<b>Figure.2.7</b> : Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).....	23
<b>Figure.2.8</b> : Relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires.....	26
<b>Figure 3.1</b> : Domaines d'application de la MEF.....	33
<b>Figure 3.2</b> : Différents types des problèmes physiques en éléments finis.....	34
<b>Figure 3.3</b> : Élément unidimensionnel.....	39
<b>Figure 3.4</b> : Modes bulle $\phi_i^*(\xi)$ ( $j = 2,3, \dots 7$ ) .....	40
<b>Figure 3.5</b> : Famille « Serendipity ».....	41
<b>Figure 3.6</b> : Famille de « Lagrange ».....	41
<b>Figure 3.7</b> : Élément 2-D quadrangulaire.....	42
<b>Figure 4.1</b> : Élément annulaire sectorielle de référence.....	44

<b>Figure 5.1 :</b> Organigramme du programme principal.....	61
<b>Figure 6.1 :</b> Plaque annulaire sectorielle.....	67
<b>Figure 6.2 :</b> Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire $\Omega_L$ d'une plaque isotrope mince encastrée ( $h/b=0.005$ ).....	69
<b>Figure 6.3 :</b> Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire $\Omega_L$ d'une plaque isotrope mince simplement appuyi ( $h/b=0.005$ ).....	69
<b>Figure 6.4 :</b> Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire $\Omega_L$ d'une plaque isotrope modérément épaisse encastrée ( $h/b=0.1$ ).....	70
<b>Figure 6.5 :</b> Graphes des trois premières modes d'une plaque annulaire sectorielle avec $\phi = 90^\circ$ : a) $a/b = 1/2$ ; b) $a/b = 0.001$ .....	71
<b>Figure 6.6 :</b> Graphes des trois premières modes d'une plaque annulaire sectorielle avec $\phi = 60^\circ$ : a) $a/b = 1/2$ ; b) $a/b = 0.001$ .....	72
<b>Figure 6.7 :</b> Graphes des trois premières modes d'une plaque annulaire sectorielle avec $\phi = 30^\circ$ : a) $a/b = 1/2$ ; b) $a/b = 0.001$ .....	73
<b>Figure 6.8 :</b> Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaires d'une plaque annulaire sectorielle mince à gradient fonctionnel encastré ( $h/b=0.005$ ).....	76
<b>Figure 6.9 :</b> Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaires d'une plaque modérément épaisse à gradient fonctionnel encastré ( $h/b=0.05, \Delta T=0^\circ\text{C}$ ).....	77
<b>Figure 6.10 :</b> Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaires d'une plaque à gradient fonctionnel modérément épaisse ( $h/b=0.05, \Delta T=300^\circ\text{C}$ ).....	77
<b>Figure 6.11:</b> Convergence du paramètre de fréquence linéaire d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents rapports de rayons ( $h/b=0.05, \Delta T=0^\circ\text{C}, \text{FGM1}$ ).....	79
<b>Figure 6.12:</b> Convergence du paramètre de fréquence linéaire d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents rapports de rayons ( $h/b=0.05, \Delta T=300^\circ\text{C}, \text{FGM1}$ ).....	79
<b>Figure 6.13:</b> Convergence du paramètre de fréquence linéaire d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents angles de secteurs ( $h/b=0.05, \Delta T=0^\circ\text{C}, \text{FGM1}$ ).....	81
<b>Figure 6.14:</b> Convergence du paramètre de fréquence linéaire d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents angles de secteurs ( $h/b=0.05, \Delta T=300^\circ\text{C}, \text{FGM1}$ ).....	81
<b>Figure 6.15:</b> Comparaison des paramètres de fréquence linéaire d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents conditions aux limites ( $h/b=0.05, \Delta T=0^\circ\text{C}, \text{FGM1}$ ).....	82

**Figure 6.16:** Comparaison des paramètres de fréquence linéaire d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents conditions aux limites ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=300^\circ\text{C}$ , FGM1).....83

**Figure 6.17:** Comparaison entre les paramètres de fréquence linéaire du mode fondamental pour différents types FGM ( $h/b=0.1$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ).....84

**Figure 6.18:** Comparaison entre les paramètres de fréquence linéaire pour différents types FGM ( $h/b=0.1$ ,  $\Delta T=300^\circ$ ).....85

**Figure 6.19:** Comparaison entre les paramètres de fréquences linéaires du mode fondamental d'une plaque à gradient fonctionnel différentes températures ( $h/b=0.1$ , FGM 1).....86

**Figure 6.20:** Comparaison entre les paramètres de fréquences linéaires de mode fondamental d'une plaque à gradient fonctionnel pour différentes températures ( $h/b=0.1$ , FGM 2).....87

**Figure 6.21:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (FGM2,  $a/b=0.5$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 60^\circ$ ).....88

**Figure 6.22:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (FGM2,  $a/b=0.5$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 90^\circ$ ).....89

**Figure 6.23:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel (FGM2,  $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 60^\circ$ ).....90

**Figure 6.24:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (FGM2,  $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 90^\circ$ ).....91

**Figure 6.25:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastrée (FGM2,  $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $a/b=0.5$ ,  $n=1$ ).....91

**Figure 6.26:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastrée ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $a/b=0.5$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 60^\circ$ ).....92

**Figure 6.27:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastrée ( $h/b=0.05$ ,  $a/b=0.5$ ,  $n=1$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $\phi = 60^\circ$ ).....93

## **Liste des tableaux**

<b>Tableau 1.1</b> : Module d'élasticité de la céramique et du métal en Pa.....	12
<b>Tableau 1.2</b> : Coefficient de dilatation thermique de la céramique et du métal en $K^{-1}$ .....	12
<b>Tableau 1.3</b> : Conductivité thermique de la céramique et du métal en $W m K^{-1}$ .....	12
<b>Tableau 1.4</b> : Coefficient de poisson de poisson du céramique.....	13
<b>Tableau.6.1</b> : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire $\Omega_L$ d'une plaque annulaire sectorielle encastré avec, $\phi = 90^\circ$ , $a/b = 0,5$ , $h/b = 0,005$ , $\nu = 0,3$ .....	68
<b>Tableau.6.2</b> : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire $\Omega_L$ d'une plaque annulaire sectorielle simplement appui avec, $\phi = 45^\circ$ , $a/b = 0,5$ , $h/b = 0,005$ , $\nu = 0,3$ .....	68
<b>Tableau.6.3</b> : Propriétés de mélange pour 3 types d'un FGM [Zhao et al. (2009)].....	74
<b>Tableau.6.4</b> : Paramètres de fréquence linéaire $\Omega_L$ pour une plaque à gradient fonctionnel encastré avec, $\phi = 90^\circ$ , $a/b = 0,5$ , $h/b = 0,005$ , $\nu = 0,3$ , $\Delta T = 0^\circ C$ .....	75
<b>Tableau.6.5</b> : Paramètres de fréquence linéaire $\Omega_L$ pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec, $\phi = 60^\circ$ , $a/b = 0,5$ , $h/b = 0,05$ , $\nu = 0,3$ , $n = 1$ .....	76
<b>Tableau.6.6</b> : Paramètres de fréquence linéaire $\Omega_L$ pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec, $\phi = 60^\circ$ , $h/b = 0,05$ , $\nu = 0,3$ , $n = 1$ .....	78
<b>Tableau.6.7</b> : Paramètres de fréquence linéaire $\Omega_L$ pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec, $a/b = 0.5$ , $h/b = 0.05$ , $\nu = 0.3$ , $n = 1$ .....	80
<b>Tableau.6.8</b> : Paramètres de fréquence linéaire $\Omega_L$ pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec, $a/b = 0.5$ , $h/b = 0.05$ , $\phi = 60^\circ$ , $\nu = 0.3$ .....	82
<b>Tableau.6.9</b> : Paramètres de fréquence linéaire $\Omega_L$ pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec : $a/b = 0.5$ , $h/b = 0.1$ , $\phi = 60^\circ$ , $\nu = 0.3$ .....	84
<b>Tableau.6.10</b> : Paramètres de fréquence linéaire $\Omega_L$ pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec : $a/b = 0.5$ , $h/b = 0.1$ , $\phi = 60^\circ$ , $\nu = 0.3$ .....	86
<b>Tableau.6.11</b> : Comparaison des rapports des paramètres de fréquence non-linéaires aux fréquences linéaires $\Omega_{NL}/\Omega_L$ pour le mode fondamental des plaques annulaires sectorielles à gradient fonctionnel avec, $a/b = 0.5$ , $\nu = 0.3$ .....	88

## Liste des symboles

$x, y, z$	<i>Coordonnées cartésiennes.</i>
$r, \theta$	<i>Coordonnées polaires.</i>
$\xi, \eta$	<i>Coordonnées locales.</i>
$a$	<i>Diamètre intérieur de la plaque annulaire sectorielle.</i>
$b$	<i>Diamètre extérieur de la plaque annulaire sectorielle.</i>
$h$	<i>Épaisseur de la plaque.</i>
$\phi$	<i>Angle du secteur.</i>
$t$	<i>Temps.</i>
$u, v$	<i>Déplacements membranaires.</i>
$w$	<i>Déplacement flexionnel.</i>
$\varphi_r$	<i>Rotation suivant l'axe-<math>r</math>.</i>
$\varphi_\theta$	<i>Rotation suivant l'axe-<math>\theta</math>.</i>
$\{\sigma\}$	<i>Tenseur de contrainte.</i>
$\{\varepsilon\}$	<i>Tenseur de déformation.</i>
$[C]$	<i>Matrice d'élasticité.</i>
$N_x, N_y, N_{xy}$	<i>Efforts normaux par unité de longueur.</i>
$M_x, M_y, M_{xy}$	<i>Moments de flexion par unité de longueur.</i>
$Q_x, Q_y$	<i>Efforts tranchants par unité de longueur.</i>
$k$	<i>Facteur de correction.</i>
$U$	<i>Énergie de déformation.</i>
$T$	<i>Énergie cinétique.</i>
$\bar{\mathbf{K}}$	<i>Matrice de rigidité extensionnel.</i>
$\mathbf{K}$	<i>Matrice de rigidité due à la rotation.</i>
$\mathbf{K}_g$	<i>Matrice de rigidité de flambement due à la variation de température.</i>

$\tilde{\mathbf{K}}$	<i>Matrice de rigidité de couplage extension-rotation.</i>
$\hat{\mathbf{K}}$	<i>Matrice de rigidité non linéaire de couplage extension-rotation.</i>
$\tilde{\mathbf{K}}$	<i>Matrice de rigidité non linéaire flexionnel.</i>
$\mathbf{M}$	<i>Matrice masse.</i>
$\bar{\mathbf{q}}$	<i>Vecteur de déplacements membranaires.</i>
$\mathbf{q}$	<i>Vecteur de déplacement flexionnel.</i>
$P_i^*$	<i>Polynôme de Legendre déplacé d'ordre <math>i</math>.</i>
$p$	<i>Degré du polynôme.</i>
$V_m$	<i>Fraction volumique.</i>
$P$	<i>La fonction de la température.</i>
$E_m$	<i>Module de Young du métal.</i>
$E_c$	<i>Module de Young de la céramique.</i>
$\nu_m$	<i>Coefficient de poisson du métal.</i>
$\nu_c$	<i>Coefficient de Poisson de la céramique.</i>
$\alpha_m$	<i>Coefficient de dilatation thermique du métal.</i>
$\alpha_c$	<i>Coefficient de dilatation thermique de la céramique.</i>
$\kappa_m$	<i>Conductivité thermique du métal.</i>
$\kappa_c$	<i>Conductivité thermique de la céramique.</i>
$\rho_m$	<i>Masse volumique du métal.</i>
$\rho_c$	<i>Masse volumique de la céramique.</i>
$w_{max}$	<i>Amplitude maximale.</i>
$\omega$	<i>Fréquence.</i>
$\Omega_L = wb\sqrt{\rho/E}$	<i>Paramètre de fréquence pour une plaque isotrope.</i>
$\Omega_L = wb\sqrt{\rho_m/E_m}$	<i>Paramètre de fréquence pour une plaque à gradient fonctionnel.</i>

### **INTRODUCTION GENERALE**

L'industrie moderne dans la mécanique de construction, l'aéronautique, le génie civil et plus généralement le domaine des transports sont à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication le plus court possible. Un matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques mécaniques, et pour atteindre cet objectif, il faut nécessairement utiliser des matériaux composites.

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie grâce à leur performances dominantes. Par exemple, une couche élastique homogène en céramique peut être collée sur la surface d'une structure métallique et agit en tant que barrière thermique dans un environnement à hautes températures. Cependant, en raison d'une interface distincte entre les deux matériaux (céramique et métallique), les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement soudain, qui produit le saut d'effort et peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface.

Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation de matériaux à gradient fonctionnel FGM (*Functionally Graded Materials*) pour lesquels des propriétés matérielles, tel que module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux homogènes et feuilletés dans le maintien de l'intégrité de la structure. Un tel fonctionnement leur permet d'être fabriqués comme des structures différentes dans l'accord aux exigences de services divers.

L'analyse des structures composites a connu un essor avec l'apparition des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis qui est la méthode la plus répandue dans le domaine de calcul en site industriel. Parmi les phénomènes physiques qui agissent sur les structures pendant leur durée de vie le phénomène des vibrations et les conditions d'environnement. Donc le comportement vibratoire non linéaire des plaques dans un environnement thermique mérite bien d'être étudié puisque aucune des solutions exactes obtenues ne considère tous les états frontières possibles,



les facteurs géométriques, les différents types de matériaux, les effets de déformation dus au cisaillement et l'effet thermique. Par conséquent, cette insuffisance d'informations nous poussé d'investir dans ce domaine.

L'objectif de ce mémoire est l'analyse des effets de l'amplitude et température sur le comportement vibratoire non linéaires d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel en utilisant la méthode des éléments finis hiérarchique, avec la prise en compte des effet de cisaillement transversal, inertie de rotation, non-linéarité géométrique et paramètres physiques et géométriques.

### **Plan de mémoire**

Ce mémoire de magister comprend essentiellement six chapitres en plus d'une introduction, une étude bibliographique et une conclusion.

- Dans le premier chapitre, nous présentons la théorie des matériaux à gradient fonctionnel, par une description détaillée d'une microstructure graduée.
- Dans le deuxième chapitre, nous citons les diverses théories des plaques (mince et épaisse) et leur hypothèses fondamentales (hypothèses de Kirchhoff et Mindlin).
- Le troisième chapitre est consacré à une présentation de la méthode des éléments finis hiérarchiques ces particularités, avantages, inconvénient et les fonctions de formes utilisées dans la version.
- Le quatrième chapitre concerne la modélisation d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel dans un environnement thermique par la méthode des éléments finis hiérarchiques.
- Le cinquième chapitre est réservé à l'organisation de la programmation, ainsi un organigramme général du code développé est décrit.
- Le sixième chapitre est consacré à la validation numérique du modèle de plaque, et une étude de l'influence des caractéristiques géométriques, physiques et conditions aux limites sur le modèle étudié.

## **ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

Les vibrations des plaques à gradient fonctionnel dans un environnement thermique ont été largement étudiées. Praveen et Reddy (1998) ont étudié la réponse thermo-élastique statique et dynamique des plaques rectangulaires à gradient fonctionnels par la MEF. Cependant, ils ont considéré que les propriétés des matériaux sont indépendantes de la température. Noda (1999) a fait une discussion sur les contraintes thermiques dans un matériau FGM soumis à un champ continu de température ou de choc thermique. Fuchiyama et Noda (1995) ont étudié le transfert de chaleur par conduction transitoire et la contrainte thermique par la MEF avec des propriétés du matériau qui varient graduellement. Yang et Shen (2002) ont étudié les caractéristiques de vibration et de réponse transitoire des plaques FGM rectangulaires dans un environnement thermique et ont considéré que les propriétés des matériaux dépendent de la température. Huang et Shen (2004) ont traité la vibration et dynamique non linéaire des plaques rectangulaires FGM dans un environnement thermique en se basant sur une théorie d'ordre supérieur. Kim (2005) a étudié la vibration des plaques FGM rectangulaires dans un environnement thermique par la méthode de Rayleigh- Ritz basée sur la théorie du troisième ordre et a examiné l'effet de la composition des matériaux, géométrie de la plaque, et champs de température sur la vibration de la plaque. Li et al. (2009) ont obtenus les fréquences naturelles de plaques FGM rectangulaires dépendantes de la température en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle et la méthode de Chebyshev-Ritz. Sur la base de la théorie des plaques du premier ordre (FSDT), Zhao et al.(2009) ont fait une analyse des vibrations des plaques FGM en utilisant la méthode KP-Ritz. Dans cette étude, l'effet des contraintes thermiques initiales n'a pas été considéré. Malekzadeh (2009) a étudié la vibration libre 3D des plaques épaisses à gradient fonctionnel sur des fondations élastiques. Malekzadeh et Alibeygi Beni (2010) ont étudié la vibration libre des plaques FGM quadrangulaires à bord droit et arbitraires dans un environnement thermique en se basant sur la théorie des plaques du premier ordre.

Les recherches sur les plaques circulaires et annulaires dans un environnement thermique sont très limitées. Efraim et Eisenberger(2007) ont étudié la vibration des plaques annulaires isotropes et FGM avec une épaisseur variable. Nie et Zhong (2007) ont étudié les vibrations 3D des plaques circulaires à gradient fonctionnel en utilisant la méthode semi-

analytique. Dong (2008) a étudié les vibrations libres 3D des plaques à gradient fonctionnel circulaires et annulaires en utilisant la méthode de Chebyshev-Ritz. Prakash et Ganapathi (2006) ont fait une analyse des vibrations flexionnelles asymétriques et la stabilité thermo-élastique des plaques circulaires FGM en utilisant la MEF. Récemment, Malekzadeh et al. (2010) ont utilisé la méthode de quadrature différentielle (DQM) pour étudier les vibrations 3D des plaques annulaires épaisses à gradient fonctionnel dans un environnement thermique. Dans un autre travail, Malekzadeh et al. (2011) ont utilisé la théorie du premier ordre pour l'analyse de la vibration libre des plaques annulaires minces et modérément épaisses avec des propriétés du matériau qui dépendent de la température. Sepahi et al. (2010) ont étudié l'effet des fondations élastiques à trois paramètres, charge thermomécanique, et grandes déformations sur les plaques annulaires FGM simplement appuyées.

Par ailleurs, la revue de la littérature prouve que peu d'études ont été faites sur le comportement vibratoire non linéaire des plaques à gradient fonctionnel. Praveen et Reddy(1998), Woo et Meguid (2001) ont étudié la vibration non linéaire des plaques et coques peu profondes à gradient fonctionnel. Woo et al. (2006) présentent une solution analytique du comportement vibratoire libre non linéaire des plaques minces rectangulaires à gradient fonctionnel. Kitipornchai et al. (2004) ont présenté une solution semi-analytique pour la vibration non linéaire des plaques FGM stratifiés avec imperfections géométriques et ont montré que les fréquences de vibration sont très dépendantes de l'amplitude de vibration et du mode d'imperfection. Yang et al. (2003) ont présenté des vibrations à grande amplitude des plaques FGM stratifiées qui sont composées de la couche à gradient fonctionnel et deux couches d'actionneurs piézo-électriques montés en surface. Allahverdizadeh et al. (2008 a-c) ont étudié les vibrations non-linéaires libres et forcées des plaques minces circulaires à gradient fonctionnel en se basant sur la théorie classique des plaques. Les travaux cités ont supposé que les propriétés des matériaux sont indépendantes de la température.

Plus récemment, Chorfi et Houmat (2010) ont étudié les vibrations libres non linéaires des coques elliptiques à double courbure et à gradient fonctionnel par un élément- $p$  de forme arbitraire. Belalia et Houmat (2012) ont fait une étude sur les vibrations non

linéaires des plaques sectorielles à gradient fonctionnel par un élément p triangulaire courbé.

La recherche bibliographique menée révèle qu'aucun travail n'existe sur l'analyse des effets de l'amplitude et température sur le comportement vibratoire non linéaire des plaques annulaires sectorielles à gradient fonctionnel. Ce travail tente de combler ce vide.

**CHAPITRE 1****MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL FGM****1.1- Introduction**

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material " F.G.M "*). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques .

**1.2- Concept des matériaux FGM**

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant que les composés stratifiés, y compris une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absente ou sévèrement réduite de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de FGM ont été édités (par exemple, Suresh et Mortensen 1998 ; Miyamoto et autres 1999 ; Birman et Byrd 2007).

### **1.3- Idée générale**

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- *Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;*
- *Ténacité du matériau coté basse température ;*
- *Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.*

Pour répondre à un tel cahier de charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

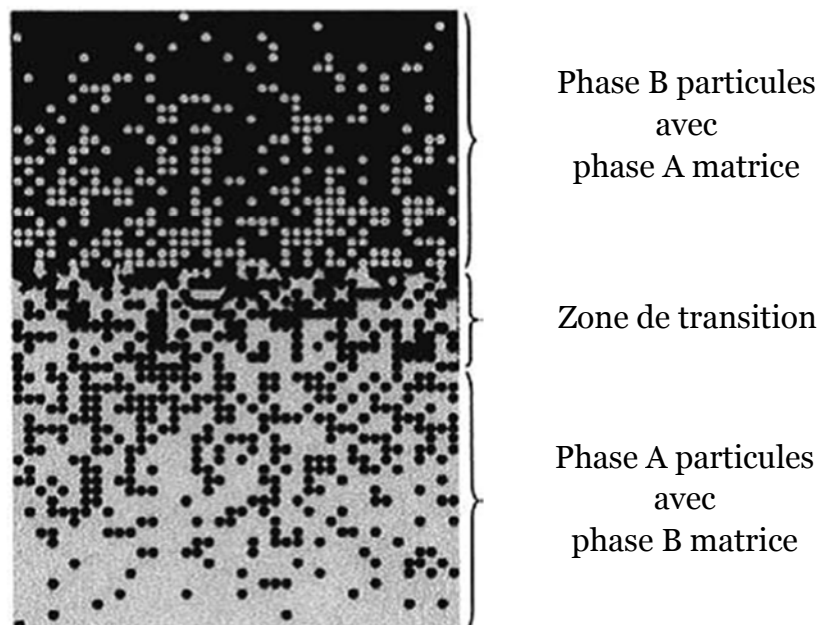
A la fin de la première étape (**1987-1989**), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer

les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- ❖ Le système SIC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur) ;
- ❖ Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- ❖ Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;
- ❖ Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (zro2-Y2O3) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc....

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.



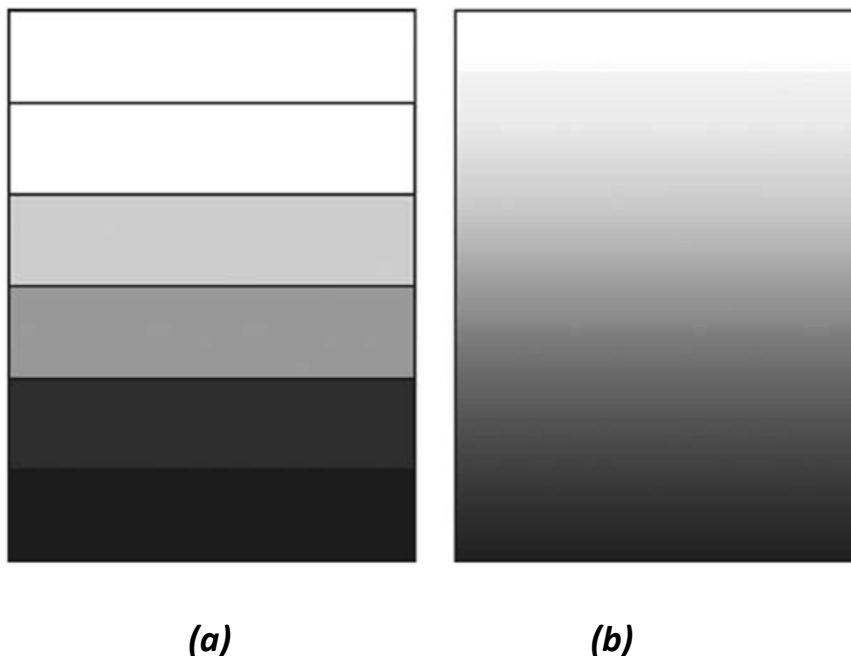
**Figure 1.1** : Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [Yin et al (2004)].

#### 1.4- Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.2 – a) ;
2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure 1.2 – b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur ( $z$ ).



**Figure 1.2 :** Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

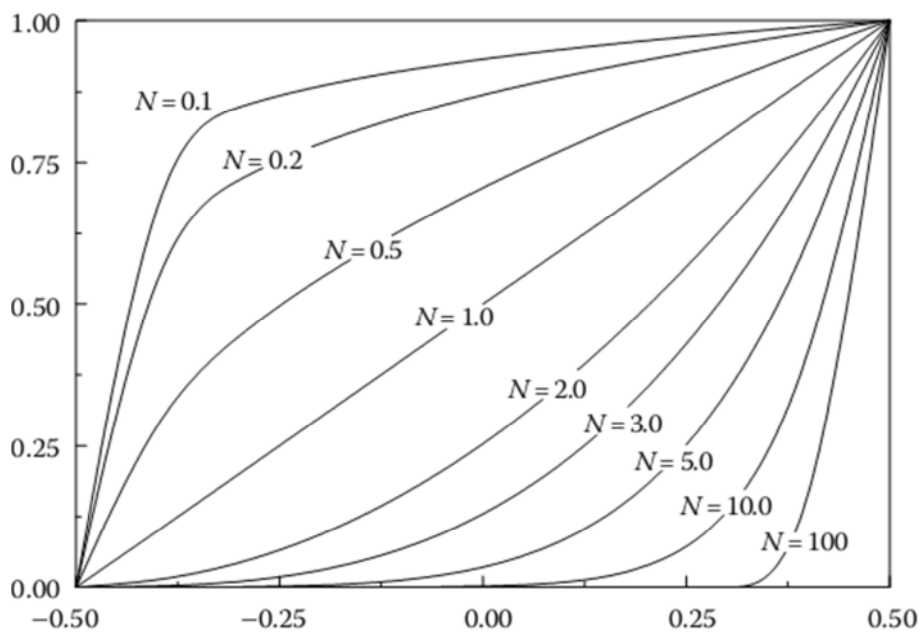


L'expression de fraction volumique est donné par :

$$V_m = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N \tag{1.1}$$

Où  $h$  est l'épaisseur de la plaque et  $N$  ( $0 \leq N \leq \infty$ ) est un exposant de la fraction volumique qui règle la variation du profil du matériau à travers l'épaisseur de la couche FGM.

La figure 1.3 représente la variation de l'exposant de la loi de mélange  $N$  génère un nombre infini de la distribution de la composition.



**Figure 1.3 :** Fraction volumique du matériau le long de l'épaisseur.

Une simple règle de mélange de matériaux composites (modèle de Voigt). Les propriétés effectives des matériaux  $P_j$  de la couche de FGM, comme module de Young  $E_F$ , peuvent alors être exprimées comme suit :

$$V_f = \sum_{j=1} P_j V_{fj} \tag{1.2}$$

Où  $P_j$  et  $V_{fj}$  sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif  $j$ .

La somme des fractions volumiques de tous les matériaux constitutifs est :

$$\sum_{j=1} V_{f_j} = 1 \quad (1.3)$$

Puisque les structures FGM sont employées dans les environnements à hautes températures où des changements importants des propriétés mécaniques des matériaux constitutifs doivent être prévus [Reddy et Chin (1998)], il est essentiel de prendre en compte cette dépendance de la température pour la prévision précise de la réponse mécanique. Ainsi, le module de Young  $E_F$ , le coefficient de Poisson  $\nu_F$ , le coefficient de dilatation thermique, et la conductivité thermique  $\kappa_F$  sont supposés être dépendants.

La température et peuvent être exprimés comme fonction non linéaire de la température [Touloukian (1967)] :

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (1.4)$$

Où  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  et  $P_3$  sont les fonctions de température  $T$ (enK) et sont propres aux matériaux constitutifs.les valeurs typiques pour le module de Young  $E_F$ , coefficient de Poisson  $\nu_F$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha_F$  et le conductivité thermique  $\kappa_F$  des céramiques et des métaux sont donnés dans les tableaux 1 – 4 [Reddy et Chin (1998)]. Des équations 1.1 à 1.3, nous avons (Gibson et autres 1995) :

$$E_F(z, T) = (E_c(T) - E_m(T)) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + E_m(T) \quad (1.5)$$

$$\nu_F(z, T) = (\nu_c(T) - \nu_m(T)) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + \nu_m(T) \quad (1.6)$$

$$\alpha_F(z, T) = (\alpha_c(T) - \alpha_m(T)) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + \alpha_m(T) \quad (1.7)$$

$$\kappa_F(z, T) = (\kappa_c(T) - \kappa_m(T)) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + \kappa_m(T) \quad (1.8)$$

$$\rho_F(z, T) = (\rho_c(T) - \rho_m(T)) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N + \rho_m(T) \quad (1.9)$$

Tableau 1.1 : Module d'élasticité de la céramique et du métal en Pa.

Matériaux	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Zircone	244.27 <sup>E+9</sup>	0	-1.371 <sup>E-3</sup>	1.214 <sup>E-6</sup>	-3.681 <sup>E-10</sup>
Oxyde d'aluminium	349.55 <sup>E+9</sup>	0	-3.853 <sup>E-4</sup>	4.027 <sup>E-7</sup>	-1.673 <sup>E-10</sup>
Nitrite de silicone	348.43 <sup>E+9</sup>	0	-3.070 <sup>E-4</sup>	2.160 <sup>E-7</sup>	-8.946 <sup>E-11</sup>
Ti-6Al-4V	348.43 <sup>E+9</sup>	0	-4.586 <sup>E-4</sup>	0	0
Acier inoxydable	201.04 <sup>E+9</sup>	0	3.079 <sup>E-4</sup>	-6.534 <sup>E-7</sup>	0
Nickel	223.95 <sup>E+9</sup>	0	-2.794 <sup>E-4</sup>	-3.998 <sup>E-9</sup>	0

Tableau 1.2 : Coefficient de dilatation thermique de la céramique et du métal en  $K^{-1}$ .

Matériaux	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Zircone	12.766 <sup>E-6</sup>	0	-1.491 <sup>E-3</sup>	1.006 <sup>E-5</sup>	-6.778 <sup>E-11</sup>
Oxyde d'aluminium	6.8269 <sup>E-6</sup>	0	1.838 <sup>E-4</sup>	0	0
Nitrite de silicone	5.8723 <sup>E-6</sup>	0	9.095 <sup>E-4</sup>	0	0
Ti-6Al-4V	7.5788 <sup>E-6</sup>	0	6.63 <sup>E-4</sup>	-3.147 <sup>E-6</sup>	0
Acier inoxydable	12.330	0	8.086 <sup>E-4</sup>	0	0
Nickel	9.9209 <sup>E-6</sup>	0	8.705 <sup>E-4</sup>	0	0

Tableau 1.3 : Conductivité thermique de la céramique et du métal en  $W m K^{-1}$ .

Matériaux	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Zircone	1.7000	0	1.276 <sup>E-4</sup>	6.648 <sup>E-8</sup>	0
Oxyde d'aluminium	-14.087	-1123.6	-6.227 <sup>E-3</sup>	0	0
Nitrite de silicone	13.723	0	-1.032 <sup>E-3</sup>	5.466 <sup>E-7</sup>	-7.876 <sup>E-11</sup>
Ti-6Al-4V	1.0000	0	1.704 <sup>E-2</sup>	0	0
Acier inoxydable	15.379	0	-1.264 <sup>E-3</sup>	2.092 <sup>E-6</sup>	-7.223 <sup>E-10</sup>
Nickel a	187.66	0	-2.869 <sup>E-3</sup>	4.005 <sup>E-6</sup>	-1.983 <sup>E-9</sup>
Nickel b	58.754	0	-4.614 <sup>E-3</sup>	6.670 <sup>E-7</sup>	-1.523 <sup>E-10</sup>

Tableau 1.4 : Coefficient de poisson de poisson de la céramique.

Matériaux	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Zircone	0.2882	0	$1.133^E-4$	0	0
Oxyde d'aluminium	0.2600	0	0	0	0
Nitrite de silicone	0.2400	0	0	0	0
Ti-6Al-4V	0.2884	0	$1.121^E-4$	0	0
Acier inoxydable	0.3262	0	$-2.002^E-4$	$3.797^E-7$	0
Nickel a	0.3100	0	0	0	0

### 1.5- Analyse thermique

Dans la plupart des applications des structures FGM dans un environnement à hautes températures la phase avec un petit coefficient de conductivité thermique domine la région qui supporte les charges thermiques. Par exemple, en structure FGM (céramique-métal) les particules en céramique (phase en céramique) sont concentrées près de la surface exposée, tandis que la fraction de volume de la phase en métal augmente graduellement vers la surface la plus froide.

Nous supposons que la variation de température se produit dans la direction d'épaisseur seulement, et on assume que le champ de température est constant dans le plan de la plaque. Dans un tel cas, si les fractions de volume des phases constitutives changent seulement dans la direction d'épaisseur, l'acceptation d'un transfert thermique unidimensionnel est justifiée, la distribution de la température le long de l'épaisseur peut être obtenue par :

$$-\frac{d}{dz} \left[ \kappa(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0 \quad (1.10)$$

Cette équation est résolue en imposant les conditions au limites  $T = T_U$  à  $Z = h/2$  et  $T = T_L$  à  $Z = -h/2$ . La solution de cette équation, au moyen d'une série de polynômes, est (Javaheri et Eslami 2002) :

$$T(z) = T_U + (T_L - T_U)\eta(z) \quad (1.11)$$

Où  $T_U$  et  $T_L$  sont les températures aux extrémités de la plaque, et

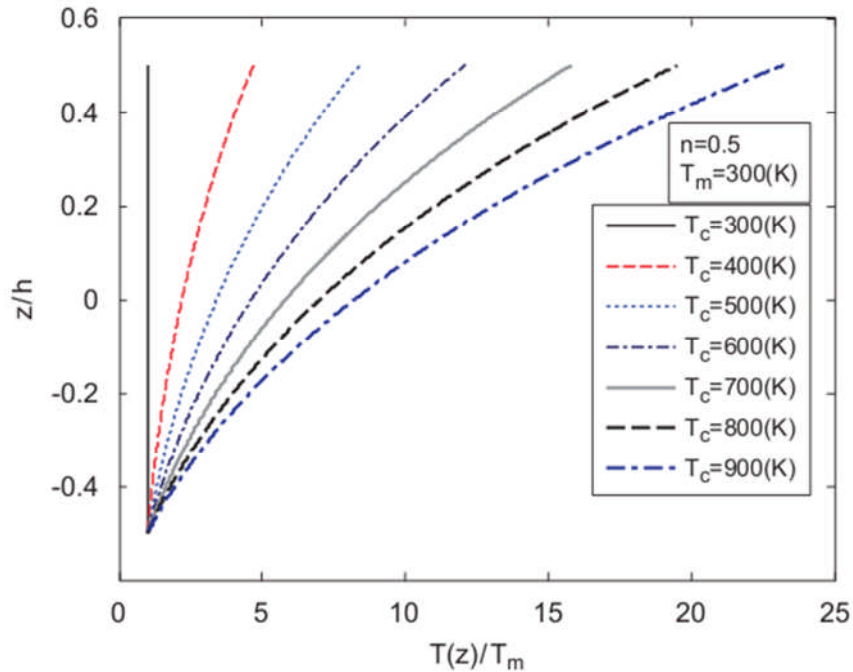
$$\eta(z) = \frac{1}{C} \left[ \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa_{mc}}{(n+1)\kappa_c} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{\kappa_{mc}^2}{(2n+1)\kappa_c^2} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{2n+1} - \frac{\kappa_{mc}^3}{(3n+1)\kappa_c^3} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{3n+1} + \frac{\kappa_{mc}^4}{(4n+1)\kappa_c^4} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{4n+1} - \frac{\kappa_{mc}^5}{(n+1)\kappa_c^5} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{5n+1} \right] \quad (1.12)$$

Et

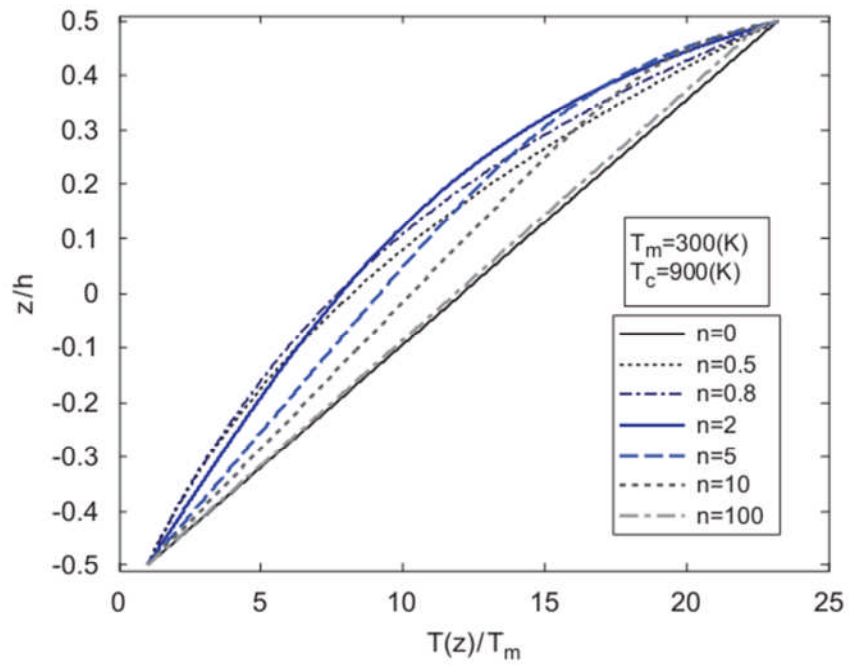
$$C = 1 + \frac{\kappa_{mc}}{(n+1)\kappa_c} + \frac{\kappa_{mc}^2}{(2n+1)\kappa_c^2} - \frac{\kappa_{mc}^3}{(3n+1)\kappa_c^3} + \frac{\kappa_{mc}^4}{(4n+1)\kappa_c^4} - \frac{\kappa_{mc}^5}{(n+1)\kappa_c^5} \quad (1.13)$$

$$\kappa_{mc} = \kappa_m - \kappa_c \quad (1.14)$$

Les figures 1.4 et 1.5 montrent la distribution de la température dans la direction de l'épaisseur d'une plaque FGM **Aluminium – Alumina** pour différentes valeurs de la température  $T$  et la fraction volumique  $N$ .



**Figure 1.4 :** Distribution de la température suivant l'épaisseur pour différentes valeurs de  $T$  de la céramique.



**Figure 1.5 :** Distribution de la température dans l'épaisseur pour différentes valeurs de la fraction volumique  $N$ .

## CHAPITRE 2

# THEORIES DES PLAQUES

### **2.1- Introduction**

La théorie des plaques permet de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. Quatre classes d'équations dans un modèle de mécanique des solides, y compris la théorie des plaques, comportant :

- Les équations du mouvement ;
- Relations déformations-déplacements (et rotations) ;
- Loi de comportement les relations de contrainte-déformations ;
- Et les équations de compatibilité.

Dans ce chapitre nous allons présenter les principales hypothèses de théories des plaques utilisées dans cette étude.

### **2.2- Historique**

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

### **2.3-Définitions et Hypothèses**

Une plaque est un solide tridimensionnel dont une des dimensions, appelée «épaisseur», est petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques. Ce solide particulier comporte généralement un plan de symétrie en  $z=0$  (plan Oxy) appelé «surface de référence» ou «surface moyenne» de la plaque.

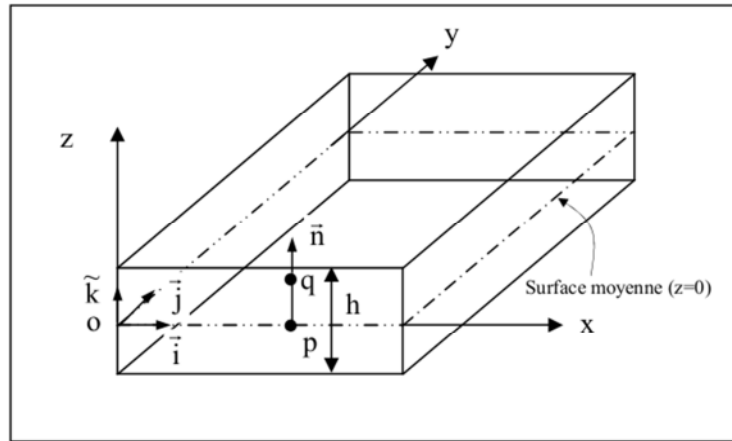


Figure 2.1 : Géométrie d'une plaque.

### 2.3.1- Théorie de Kirchhoff

La théorie classique des plaques [Kirchhoff 1850], est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes (figure 2.2) :

**Hypothèse 1 :** Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.

**Hypothèse 2 :** La contrainte normale  $\sigma_z$  est négligeable devant les autres composantes.

**Hypothèse 3 :** Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan après déformation.

**Hypothèse 4 :** L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

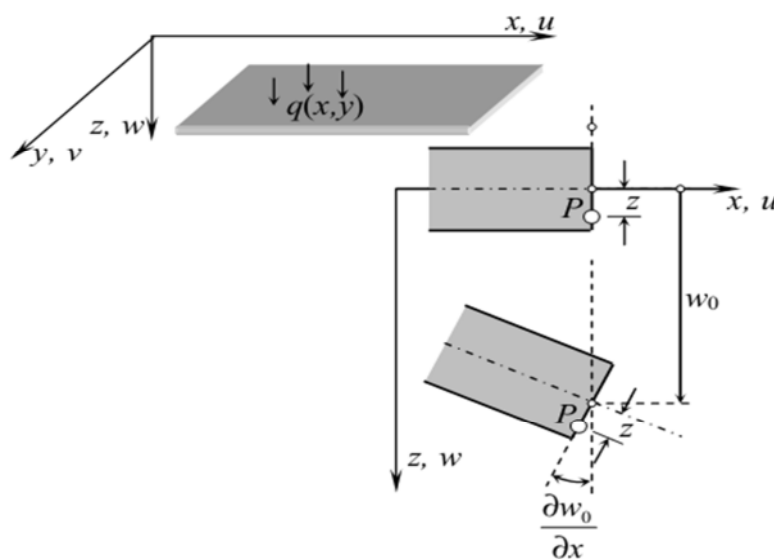


Figure 2.2 : Modèle de Kirchhoff.



La principale limitation de la théorie classique de *Kirchhoff* est que l'on néglige les effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation, or dans la pratique les plaques ont des épaisseurs significatives et il devient nécessaire de tenir compte de ces effets pour décrire leur comportement dynamique.

### 2.3.2- Théorie de Reissner-Mindlin

La théorie des plaques qui permet la prise en compte du cisaillement transversal est connue sous le nom de *Reissner-Mindlin*, dans ce cas, il faut prendre en compte les déformations de cisaillement transversal et alors les fibres normales à la surface moyenne avant déformation ne le restent pas au cours de la déformation (figure 2.3).

Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie des plaques retenue dépend des caractéristiques géométriques. Nous admettons généralement :

Les hypothèses de Mindlin si :

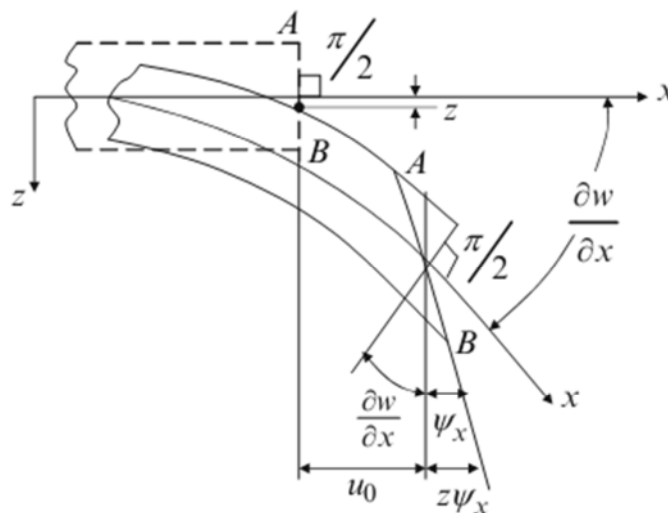
$$1/20 \leq H/L \leq 1/4$$

Et celle de Kirchhoff si :

$$H/L < 1/20$$

Où  $L$  : est une longueur caractéristique dans le plan (x-y).

$H$  : est l'épaisseur de la plaque.



**Figure 2.3 :** Déformations dans le plan (XZ) selon la théorie du premier ordre [Reissner-Mindlin].

Les déformations dues au cisaillement transversal sont l'un des intérêts principaux des plaques épaisses composites. Il existe plusieurs théories des plaques stratifiées, qui incluent des contraintes de cisaillement transversales ; la théorie bien connue est le modèle de Reissner, connue comme la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (*FSDT*).

## 2.4- Relations cinématiques

### 2.4.1- Le champ de déplacements

Dans la théorie de *Reissner-Mindlin* (prise en compte du cisaillement transversal), on se donne un modèle de déplacements basé sur trois variables indépendants : le déplacement transversal  $w(x, y)$  et les deux rotations  $\varphi_r$  et  $\varphi_\theta$ .

Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement est exprimé sous la forme [Mindlin 1951] :

$$\bar{u}(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \quad (2.1)$$

$$\bar{v}(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z\theta_x(x, y, t) \quad (2.2)$$

$$\bar{w}(x, y, z, t) = w(x, y, z) \quad (2.3)$$

Où :  $u, v$  sont les déplacements membranaires,

$w$  est le déplacement flexionnel,

$\theta_x$  et  $\theta_y$  sont les rotations.

### 2.4.2- Relations déformations-déplacements

Les déformations sont des dérivées partielles des déplacements selon l'approche de Lagrange ou d'Euler. Le tenseur de déformations de Lagrange se rapporte également au tenseur de déformation de Green. Dans le contraire, le tenseur de déformation d'Euler est présenté dans le système des coordonnées du corps déformé (ce tenseur s'appelle parfois le tenseur de déformation de Cauchy. En termes de déplacements les tenseur déformations de Green-Lagrange sont données par (Fung 1994) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

Où :  $(i, j = 1, 2, 3)$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  et  $x_3 = z$ .

A partir des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  de *Reissner-Mindlin* nous déterminons les déformations de *Von Karman*. Les hypothèses de *Von Karman* disent que lorsque les déplacements dans le plan ( $u$ ,  $v$ ) sont infinitésimaux par rapport au déplacement transversal  $w$ , les termes non linéaires dépendent de  $u$  et  $v$  peuvent être négligés.

Dans ces conditions, les déformations de Green-Lagrange se réduisent aux déformations de *Von Karman* :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

Où les composantes de tenseur de déformations sont :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \quad (2.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \quad (2.11)$$

$$\chi_x = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\chi_y = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\chi_{xy} = \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

Les expressions des composantes de vecteur de déformation peuvent être écrites sous forme vectorielle en respectant la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + z\chi_{ij} \tag{2.15}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

### 2.4.3- Efforts résultants et moments

Les efforts résultants et les moments agissant sur un élément de plaque (figures 2.4 – 6) :

$$\{N\} \equiv \{N_i\} = \begin{Bmatrix} N_x(x, y) \\ N_y(x, y) \\ N_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \sigma_y(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \tag{2.17}$$

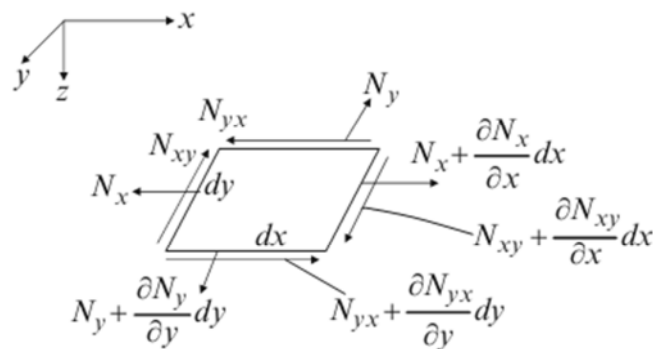


Figure 2.4 : Efforts agissant dans le plan de la plaque.

$$\{M\} \equiv \{M_i\} = \begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \sigma_y(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} z dz \quad (2.18)$$

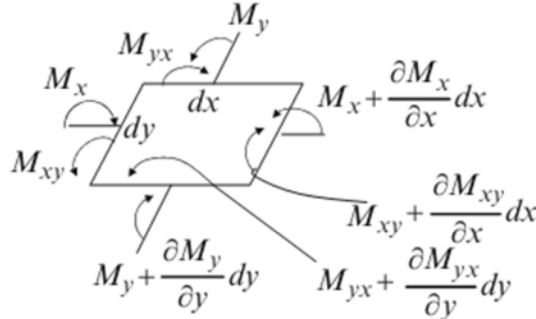


Figure 2.5 : Moments agissant sur un élément de plaque.

$$\{Q\} \equiv \{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y, t) \\ \tau_{yz}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (2.19)$$

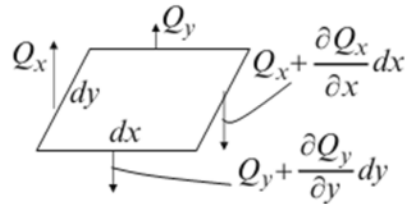
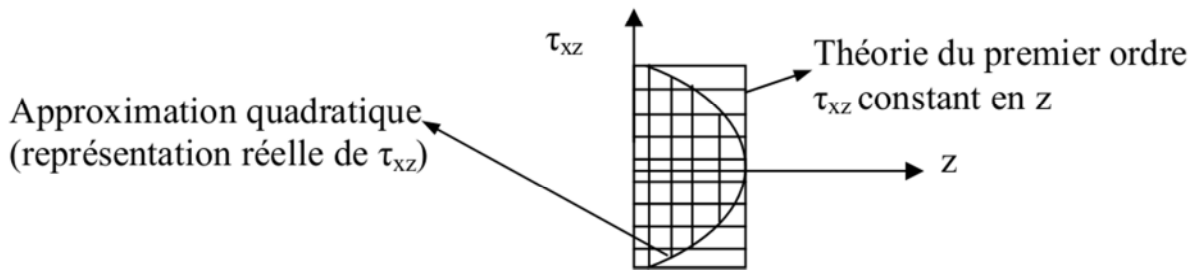


Figure 2.6 : Efforts tranchants dans un élément de plaque.

Le champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure. Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (Figure.2.7). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théories du premier ordre, des facteurs de corrections doivent être introduits (2.20) :



**Figure.2.7 :** Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).

Les expressions de des efforts tranchants après une correction par un facteur  $k$  appelé facteur de correction de cisaillement transversal sont :

$$\{Q\} \equiv \{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y, t) \\ \tau_{yz}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (2.20)$$

#### 2.4.4- Facteur de correction transversal

$k$  est un facteur corrigeant l’hypothèse de contraintes de cisaillement  $Q_{xz}$  et  $Q_{yz}$  constantes sur l’épaisseur de la plaque dans la théorie de *Mindlin*, en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces libres.

Pour déterminer  $k$ , *Mindlin* considère le problème de la propagation des ondes dans une plaque infinie, problème pour lequel on connaît une solution exacte par la théorie de l’élasticité tridimensionnelle.

*Mindlin* trouve ce facteur dépendant du coefficient de poisson  $\nu$  et les valeurs les plus généralement admises pour  $k$  varient linéairement de  $k = 0,76$  pour  $\nu = 0$  à  $k = 0,91$  pour  $\nu = 0,5$  dans le cas d’un matériau isotrope.

En suivant cette observation et en choisissant  $k$  de façon à évaluer la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement d’une plaque isotrope infinie déterminée par la théorie de l’élasticité et la théorie de *Mindlin*, nous pouvons montrer que le facteur  $k$  est solution d’une équation polynomiale d’ordre 3 telle que :

$$k^3 - 8k^2 + \frac{8(2 - \nu)k}{1 - \nu} - \frac{8}{1 - \nu} = 0 \quad (2.21)$$

$$k = 0,86, \text{ si } \nu = 0,3, k = \pi^2/12 \text{ si } \nu = 0,176$$

Wittrick en 1987 propose une approximation de  $k$  dans le cas d'une plaque simplement supportée :

$$k = \frac{8(2 - \nu)k}{6 - \nu} \quad (2.22)$$

Les résultats de *Reissner-Mindlin* qui supposent une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, donnent :

$$k = \frac{5}{6} \quad (2.23)$$

A ce jour le facteur  $k$ , lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet à discussion. L'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger son influence sur les résultats.

### 2.4.5- Relations contraintes-déformations

Un solide élastique est souvent caractérisé par une relation linéaire entre les tenseurs contraintes et déformations. Cette dépendance est appelée loi de Hooke :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.24)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Dans le cas de la théorie de *Reissner-Mindlin* (FSDT), nous avons un état de contraintes planes et le système est réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Où  $[C]$  est la matrice d'élasticité avec :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2.27)$$

$$C_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (2.28)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu^2)} \quad (2.29)$$

## 2.5- Energie de déformation

L'expression de l'énergie de déformation  $U_p$  d'un solide élastique isotrope en coordonnées cartésiennes est écrite comme suit :

$$U_p = \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (2.30)$$

$$U_p = \frac{1}{2} \int (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) dV \quad (2.31)$$

La substitution de (2.26) dans (2.30) donne :

$$\begin{aligned} U_p = \frac{1}{2} \int \{ & (C_{11}\varepsilon_{xx}^2 + C_{22}\varepsilon_{yy}^2 + 2C_{12}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + C_{66}\gamma_{xy}^2) \\ & + 2(C_{11}\varepsilon_{xx}\chi_x + C_{12}\varepsilon_{xx}\chi_y + C_{12}\varepsilon_{yy}\chi_x + C_{22}\varepsilon_{yy}\chi_y + C_{66}\gamma_{xy}\chi_{xy}) \\ & + (C_{11}\chi_x^2 + C_{22}\chi_y^2 + 2C_{12}\chi_x\chi_y + C_{66}\chi_{xy}^2) + \kappa(C_{44}\gamma_{xz}^2 \\ & + C_{55}\gamma_{yz}^2) \} dV \end{aligned} \quad (2.32)$$

## 2.6- Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique  $T$  d'une plaque épaisse d'un matériau isotrope donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (2.33)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique de la plaque.

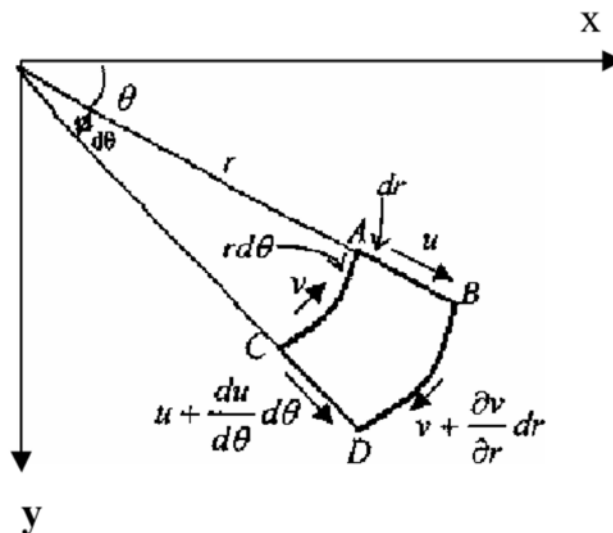


## 2.7- Plaque circulaire

Les plaques circulaires sont des structures très utilisées dans le domaine d'ingénierie telles que les couvertures de becs, des fermetures d'extrémité dans les navires de pression, les diaphragmes de pompe, des disques de turbine ...etc. Cette importance de ces types de plaque nous conduit à faire cette étude sur le comportement de tel type de plaques.

### 2.7.1- Relations cinématiques d'une plaque circulaire

En général, dans les structures circulaires il est plus commode d'utiliser les coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$ . En coordonnées polaires la position d'un point est définie généralement par sa distance à l'origine ou rayon ( $r$ ) et par l'angle ( $\theta$ ) que fait avec l'un des axes du repère cartésien (figure 2.8) :



**Figure.2.8 :** Relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires.

Les coordonnées polaires et cartésiennes sont reliées par les équations :

$$x = r \cos \theta \quad (2.34)$$

$$y = r \sin \theta \quad (2.35)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.36)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (2.37)$$

Les dérivées partielles sont exprimées en fonction de coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.41)$$

Les dérivées par rapport à x et y dans le système cartésien peuvent être transformées en fonction de r et  $\theta$  comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.43)$$

Les composantes du vecteur déplacement par rapport au système cartésien sont :

$$u_x = u_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \quad (2.44)$$

$$v_y = u_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \quad (2.45)$$

$$w_z = w_z \quad (2.46)$$

### 2.7.2- Relations déformations-déplacements

En utilisant l'équation (2.16) et en injectant les équations (2.44 – 46) dans les équations(2.42 – 43), les relations déformations-déplacements et courbures déplacements d'une plaque circulaire épaisse en fonction de coordonnées polaires sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \varphi_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \varphi_r \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \varphi_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

## 2.8- Effet de la température sur les relations constitutives et constantes matérielles

Les conditions d'environnement, telles que la température et l'humidité influent sur l'analyse des structures de deux manières. Premièrement, les relations constitutives contrainte-déformations incluant les effets thermiques contribuent aux contraintes. En conséquence, les équations du mouvement une fois écrites en fonction des déplacements, sont dépendantes des relations constitutives. Le deuxième effet est parfois négligé ou oublié mais il peut être aussi important que des limites dépendantes de l'environnement explicite dans les relations constitutives. C'est l'effet de l'environnement sur les constantes matérielles, telles que les modules d'élasticité et cisaillement, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation thermique.

D'ailleurs, le problème du transfert thermique qui prévoit la distribution de la température dans toute la structure dépend de l'effet de la température sur la conductivité thermique et les conditions aux limites.

Les relations contraintes-déformations sont modifiées en incluant l'effet thermique sur une plaque modérément épaisse (modèle de *Reissner-Mindlin*) :

$$\{\sigma\} = [C](\{\varepsilon\} - \alpha(z, T)\Delta T) \quad (2.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \times \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha(z, T) \\ \alpha(z, T) \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \right) \quad (2.49)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Les expressions exprimant les forces et les moments internes en présence d'un effet thermique sont obtenues par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T)] dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T)] dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T)] z dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T)] z^2 dz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon - \alpha(T)\Delta T \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Lorsque nous avons une variation de température et des propriétés de matériau suivant l'épaisseur, les relations constitutives seront en fonction de z :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T, z)] dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T, z)] z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T, z)] z dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T, z)] z^2 dz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C(T, z)] \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \alpha(T, z) \Delta T(z) dz \quad (2.53)$$

## 2.9- Plaque à gradient fonctionnel

Comme nous avons cité dans le chapitre N° 1 les matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur. Cela veut dire que la variation des propriétés de FGM suivant l'épaisseur influe sur les énergies.

### 2.9.1- Energie de déformation d'une plaque à gradient fonctionnel

L'expression de l'énergie de déformation d'une plaque épaisse à gradient fonctionnel est de la forme :

$$U = \frac{1}{2} \iint \left\{ (A_{11}\varepsilon_{xx}^2 + A_{22}\varepsilon_{yy}^2 + 2A_{12}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + A_{66}\gamma_{xy}^2) \right. \\ \left. + 2(B_{11}\varepsilon_{xx}\chi_x + B_{12}\varepsilon_{xx}\chi_y + B_{12}\varepsilon_{yy}\chi_x + B_{22}\varepsilon_{yy}\chi_y + B_{66}\gamma_{xy}\chi_{xy}) \right. \\ \left. + (D_{11}\chi_x^2 + D_{22}\chi_y^2 + 2D_{12}\chi_x\chi_y + D_{66}\chi_{xy}^2) + \kappa(A_{44}\gamma_{xz}^2 \right. \\ \left. + A_{55}\gamma_{yz}^2) \right\} dx dy \quad (2.54)$$

Avec :

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.55)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.56)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z^2 dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.57)$$

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (2.58)$$

Et :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E_F(z, T)}{1 - \nu_F^2(z)} \quad (2.59)$$

$$C_{12} = \nu_F(z)C_{11} \quad (2.60)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E_F(z, T)}{2(1 + \nu_F(z))} \quad (2.61)$$

### 2.9.1- Energie de déformation d'une plaque à gradient fonctionnel

L'expression de l'énergie cinétique d'une plaque à gradient fonctionnel est :

$$T = \frac{1}{2} \iint \left[ I_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.62)$$

Où :

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, T) dz \quad (2.63)$$

$$I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, T) z^2 dz \quad (2.64)$$

## 2.10- Equations du mouvement

L'équation du mouvement vibratoire libre s'écrit en fonction des dérivées de l'équation de *Lagrange*. Soit  $L$  la fonction de *Lagrange* définie à partir de l'énergie cinétique  $T$  (2.54) et l'énergie de déformation  $U$  (2.62):

$$L = T - U \quad (2.65)$$

La dérivée de cette fonction par rapport aux vecteurs des coordonnées généralisées  $q$  et vitesses généralisée  $\dot{q}$  donne les équations du mouvement vibratoire libre de la plaque :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (2.66)$$

Avec :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = [M] \{\ddot{q}\} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = [K] \{q\} \quad (2.68)$$

Et  $M$  est la matrice masse, et  $K$  est la matrice de rigidité.

## **CHAPITRE 3**

### **VERSION-p DE LA MEF**

#### **3.1- Introduction**

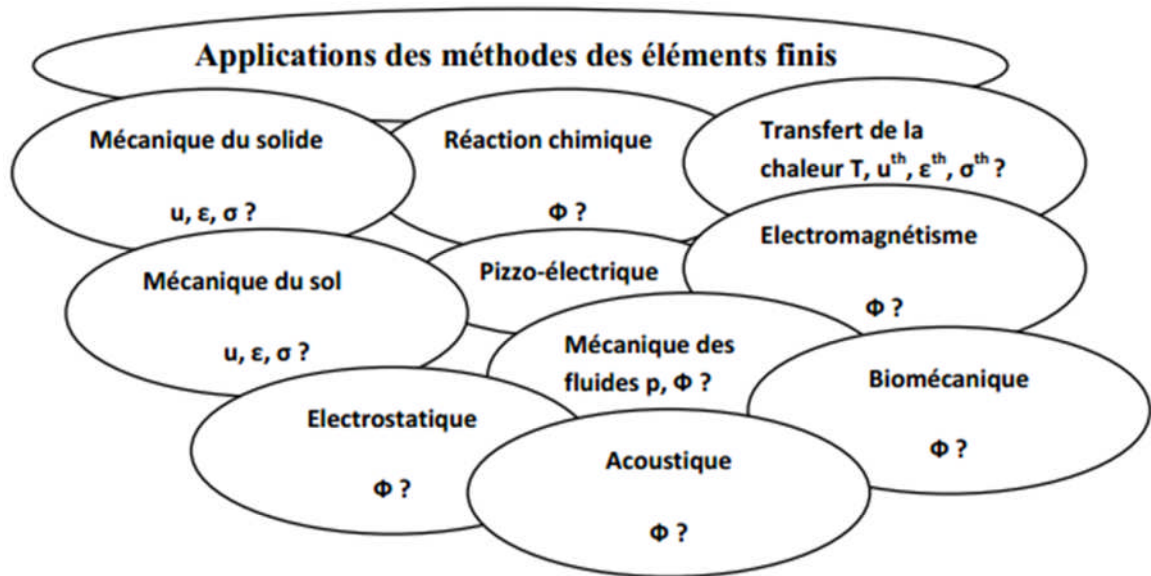
La modélisation physique des systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approchée du problème physique. La Méthode des Éléments Finis (MEF) est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

L'objectif du calcul numérique est de combiner les techniques d'évaluation et d'amélioration de la qualité de la solution. La méthode-p désigne une stratégie de contrôle de l'erreur qui consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant leur taille. Elle s'oppose à la méthode-h qui consiste à faire varier la taille des éléments tout en conservant leur degré d'interpolation. On parlera également de version-h ou -p de la méthode des éléments finis.

Le but de ce chapitre est d'étudier les particularités de la version-p de la méthode des éléments finis afin de les utiliser pour contrôler l'erreur sur la solution et ainsi automatiser les calculs. Cette procédure a deux objectifs : réduire les temps de calcul et minimiser l'intervention de l'utilisateur qui ne doit réaliser que les tâches où il est indispensable (modélisation du problème physique, définition d'une discrétisation de base et interprétation des résultats).

#### **3.2- Domaines d'application**

La méthode des éléments finis est appliquée dans la majorité des domaines de la physique figure 3.1. Cela va de la mécanique à l'électronique, en passant par la thermique et la météorologie. Dans tous ces cas, la formulation reste quasiment identique, mais la nature des champs et les lois de comportement sont adaptées au domaine d'application.



**Figure 3.1** : Domaines d'application de la MEF.

### 3.3- Types de problèmes MEF

La méthode des éléments finis permet la résolution de trois types de problèmes principaux :

- **Problèmes d'équilibre stationnaire**

Dans ce type de problèmes, le comportement est défini en fonction de l'état du système, de la géométrie, du chargement et des conditions aux limites, sous forme d'un système d'équations linéaires en fonction des variables nodales. On trouve dans cette catégorie, l'équilibre statique et les régimes stationnaires d'écoulement, de transfert de chaleur et d'électromagnétisme.

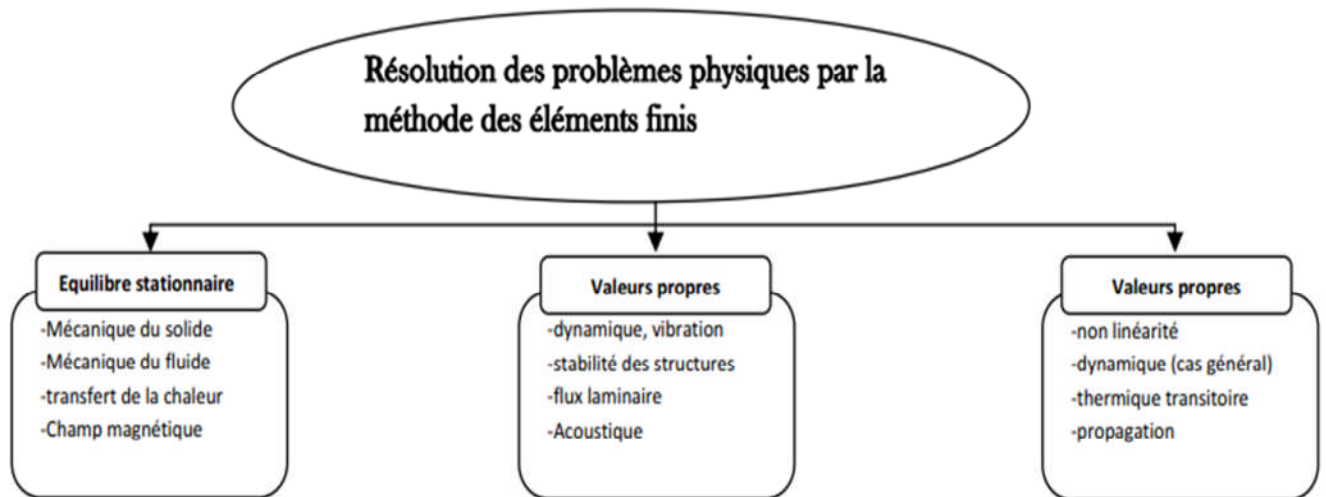
- **Problèmes aux valeurs propres**

Il s'agit des phénomènes de vibration ou d'instabilité d'un état stationnaire. Les modes propres de vibration, le flambage des structures ou l'instabilité des flux laminaires font partie de cette catégorie.



- **Problèmes dépendant du temps**

Lorsque l'état du système dépend de son histoire ou bien des paramètres de sortie, le système devient interdépendant et la résolution directe n'est plus possible. Ce cas inclut le comportement non linéaire (matériaux et géométrie), la dynamique non linéaire (amortissement, rigidité,...), les régimes transitoires et la fissuration des pièces.



**Figure 3.2 :** Différents types des problèmes physiques en éléments finis.

### 3.4- Fondements de la méthode-p

Dès l'apparition de la méthode des éléments finis, beaucoup de chercheurs ont testé des éléments finis de degré d'approximation élevé. Ces éléments sont de formulation totale, c'est-à-dire que chaque fonction de forme est physiquement rattachée à un nœud, ce qui ne permet pas d'en tirer un profit maximum [Beckers 1970] & [Fraeijs de Veubeke & al.1972]. Il faut attendre l'introduction de la formulation hiérarchique [Peano 1975] pour réellement voir la naissance d'une méthode-p efficace. Une approximation par éléments finis

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (3.1)$$

est dite hiérarchique si le passage de  $n$  à  $n+1$  n'altère pas les fonctions de forme  $N_i$  ( $i = 1$  à  $n$ ). Cette formulation présente certains avantages [Zienkiewicz & al. 1983].

- La génération d'une discrétisation initiale peut être mise à profit pour le calcul des solutions raffinées;
- Le système d'équations est mieux conditionné;
- Les solutions obtenues sont moins sensibles aux imprécisions numériques.

### 3.5- Avantages de la méthode- $p$

La méthode- $p$  présente de nombreux attraits [Babuska & Szabo 1982], [Babuska & Suri 1990], [Szabo & Babuska 1991] & [Szabo 1991].

1. Elle est plus précise et sa convergence est plus rapide que celle de la méthode- $h$ . En effet, pour différentes catégories de problèmes, on observe les caractéristiques suivantes. Lorsque la solution exacte est partout analytique (problèmes de Catégorie A), le taux de convergence est exponentiel, alors que celui de la méthode- $h$  n'est qu'algébrique. Pour des problèmes dont la solution exacte contient un nombre fini de points singuliers (problèmes de Catégorie B), le taux de convergence est algébrique, mais il est deux fois plus élevé que celui de la méthode- $h$  lorsque ces points singuliers sont aussi des nœuds-sommets du maillage. Notons que la plupart des problèmes de statique linéaire rencontrés dans la pratique appartiennent à cette catégorie.

La qualité des solutions est peu sensible aux distorsions des éléments, ce qui permet l'utilisation d'éléments aplatis ou de grand rapport de côtés sans trop pénaliser la précision.

Aucun verrouillage numérique dû au quasi incompressibilité de certains matériaux n'est observé. Cependant, lorsque le coefficient de Poisson est plus proche de 0.5, la convergence asymptotique de la méthode- $p$  s'obtient à partir d'un degré plus élevé.

2. Comme une formulation hiérarchique est adoptée pour la représentation des déplacements, la matrice de raideur relative à un degré donné imbrique celles de degrés inférieurs. Ceci permet d'obtenir de manière économique une séquence de solutions au lieu d'une seule solution comme c'est le cas de la méthode- $h$ . Il est donc possible

d'utiliser des techniques d'extrapolation pour le contrôle de la qualité des analyses : les solutions convergent de manière strictement monotone, ce qui permet d'estimer l'énergie potentielle totale exacte du problème à partir de trois solutions consécutives en utilisant une procédure d'extrapolation de *Richardson*. L'erreur globale peut ainsi être estimée.

Il est également possible d'observer la convergence de toute grandeur physique autre que l'énergie, ce qui permet d'évaluer la qualité locale des solutions obtenues et d'éventuellement détecter certaines erreurs liées aux données de modélisation en vérifiant si les solutions convergent ou non.

La géométrie peut être représentée de manière exacte, ce qui évite les erreurs liées à sa modélisation.

3. La tâche de modélisation est réduite car le maillage contient peu d'éléments et peut être directement obtenu par division des volumes, définis par les outils de la C.A.O., en macroéléments (maillages structurés).

### 3.6- Inconvénients de la méthode-p

La méthode-p présente toutefois certaines limitations.

1. Tout d'abord, la méthode-p convient bien pour une analyse détaillée des composantes d'une structure complexe. En effet, dans ce cas le nombre de points singuliers est souvent réduit et l'on bénéficie pleinement de la vitesse de convergence élevée de la méthode. Un champ de contrainte de qualité supérieure est obtenu avec peu de degrés de liberté, ce qui permet une analyse locale précise. Par contre, la méthode-h semble plus adéquate pour obtenir une solution globale car le maillage structuré d'une pièce mécanique comportant plusieurs niveaux de détails est très difficile à réaliser et aboutit souvent à un grand nombre d'éléments.
2. Pour des problèmes dont la solution contient un nombre infini de points singuliers (problèmes de Catégorie C), la méthode-p n'est pas meilleure que la méthode-h du

point de vue de la convergence. A noter que les structures composées de plusieurs matériaux et les structures en régime élasto-plastique font partie des problèmes de la Catégorie C.

3. Pour un même nombre de degrés de liberté, la matrice de raideur relative à la méthode-p est plus dense. Ceci signifie que, pour le même nombre de degrés de liberté, les demandes en mémoire centrale et en temps de calcul seront plus importantes. Mais en choisissant des méthodes de résolution appropriées, le gain de précision l'emporte sur l'augmentation du temps de calcul [Carnevali & al. 1993].
4. Enfin, la méthode - p n'est pas facile à intégrer dans un code existant parce que celui-ci ne prévoit généralement pas d'outils de pré - et post - traitement pour des éléments de degré élevé.

### 3.7- Mise en œuvre de la méthode-p

#### 3.5-1. Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre orthogonaux  $P_i(\xi)$  pour un domaine défini entre  $[-1,1]$  sont définis par :

$$P_0(\xi) = 1 \tag{3.2}$$

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} [(\xi^2 - 1)^n] \quad n = 1, 2, 3 \dots \tag{3.3}$$

Ils sont les solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.4}$$

#### 3.5-1.1. Propriétés des polynômes de Legendre

- *Orthogonalité :*

$$(P_i, P_j) = \int_{-1}^{+1} P_i(\xi)P_j(\xi)d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{2}{2i + 1} & \text{si } i = j \end{cases} \tag{3.6}$$

- Symétrie :

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (3.7)$$

- Formule de récurrence :

$$P_{i+1}(\xi) = \frac{2i+1}{i+1} \xi P_i(\xi) - \frac{n}{n+1} P_{i-1}(\xi) \quad (3.8)$$

- Normalisation :

$$P_i(1) = 1 \quad (3.9)$$

### 3.5-1.2. Polynômes de Legendre déplacés

Contrairement aux polynômes de Legendre définis dans l'intervalle  $[-1,1]$ , les polynômes de Legendre déplacés sont définis dans  $[0,1]$ . la forme de polynômes de Legendre est donnée par :

$$P_i^*(\xi) = P_i(2\xi - 1) \quad (3.10)$$

Les polynômes de Legendre déplacés possèdent les propriétés suivantes :

- Orthogonalité :

$$(P_i, P_j) = \int_0^1 P_i^*(\xi) P_j^*(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2i+1} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.11)$$

- Formule de récurrence :

$$P_{i+1}^*(\xi) = \frac{1}{i+1} [(-2n-1 + (4n+2)\xi) P_i^*(\xi) - n P_{i-1}^*(\xi)] \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

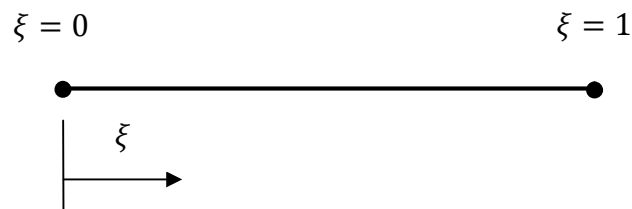
- Normalisation :

$$P_i^*(1) = 1 \quad (3.13)$$

## 3.5-2. Fonctions de formes hiérarchiques

### 3.5-2.1. Élément unidimensionnel

Les fonctions de forme sont dérivées sur la base d'un élément fini hiérarchique unidimensionnel (figure3.1). Pour les problèmes  $C^0$  continus les deux premières fonctions linéaires de formes utilisées dans la méthode –  $h$  – sont maintenues. Les fonctions de forme d'ordre plus supérieur s'annulent en chaque extrémité de l'élément. L'ensemble de fonctions hiérarchiques d'un élément unidimensionnel est produites en utilisant la formule récurrente des polynômes de Legendre déplacés sont :



**Figure 3.3 :** Élément unidimensionnel.

$$N_1(\xi) = 1 - \xi \quad (3.14)$$

$$N_2(\xi) = \xi \quad (3.15)$$

$$N_{i+1}(\xi) = \phi_j^*(\xi) \quad (3.16)$$

Avec :

$\phi_j^*$  sont les modes-bulles construisent à partir de polynômes de Legendre, ces modes sont donnés par la formule suivante :

$$\phi_j^*(\xi) = \sqrt{2j-1} \int_0^\xi P_{j-1}^*(\zeta) d\zeta \quad (3.17)$$

Ces fonctions possèdent les propriétés suivant :

- La nullité aux bornes de l'intervalle

$$\phi_j^*(0) = \phi_j^*(1) = 0 \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

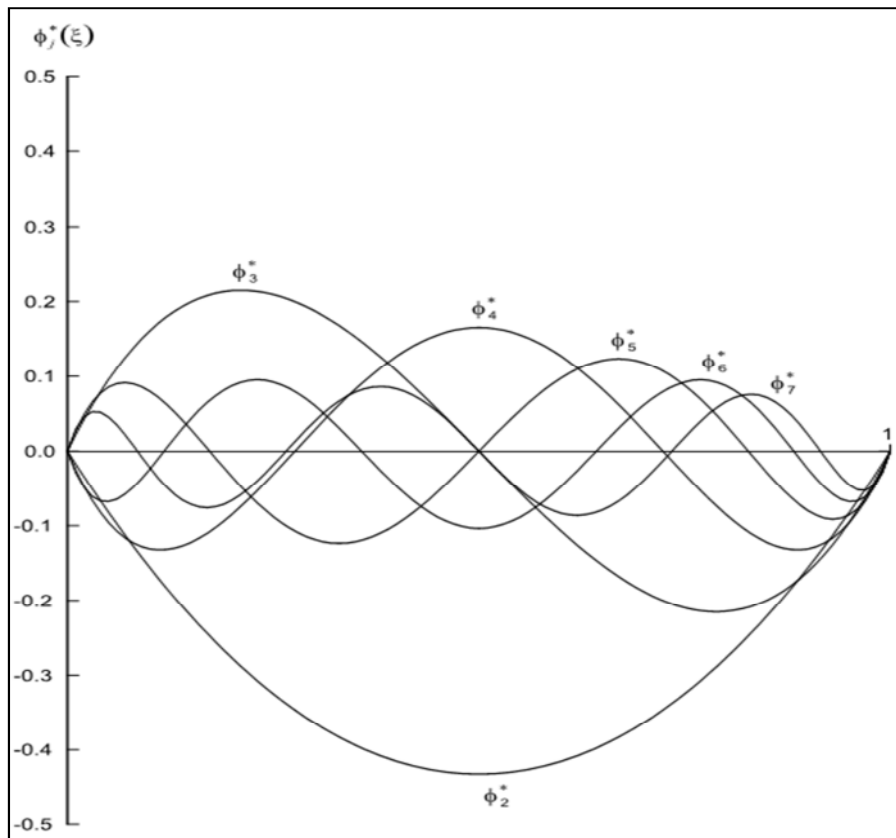
- Orthogonalité des dérivées premières

$$\int_0^1 \frac{\phi_i^*(\xi)}{d\xi} \frac{\phi_j^*(\xi)}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.19)$$

- La nullité des intégrales de degré impair :

$$\int_0^1 \phi_i^*(\xi) d\xi = 0 \quad j = 3, 5, 7, \dots \quad (3.20)$$

Les fonctions  $\phi_i^*(\xi)$  ( $j = 2, 3, \dots, 7$ ) sont tracées explicitement sur la figure 3.4 :



**Figure 3.4 :** Modes bulle  $\phi_i^*(\xi)$  ( $j = 2, 3, \dots, 7$ ).

### 3.5-2.2. Élément bidimensionnel

#### 3.5-2.2.1. Espaces polynômiaux

Pour un domaine carré  $\Omega = \{(\xi, \eta) / 0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$ , il existe trois espaces polynomiaux bidimensionnels couramment utilisés.

##### a) Famille Serendipity ou espace $S^p(\Omega)$ (figure 3.5)

Il correspond à l'ensemble de tous les monômes  $\xi^i \eta^j$  avec  $i, j = 0, 1, \dots, p$  et  $i + j = 0, 1, \dots, p$ . en plus, si  $p = 1$ , le monôme  $\xi, \eta$  et, si  $p \geq 2$ , les monômes  $\xi^p \eta$  et  $\xi \eta^p$ . Ces monômes supplémentaires n'augmentent pas le degré sur les côtés de l'élément de référence.

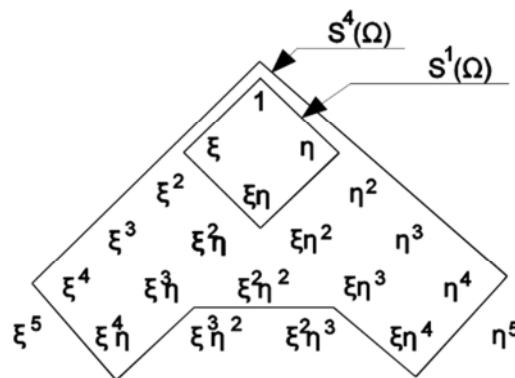


Figure 3.5 : Famille « Serendipity ».

##### b) Famille Lagrange ou espace $S^{p,q}(\Omega)$ (figure 3.6)

Il correspond à l'ensemble des monômes  $\xi^i \eta^j$  avec  $i = 0, 1, \dots, p$  et  $j = 0, 1, \dots, q$ .

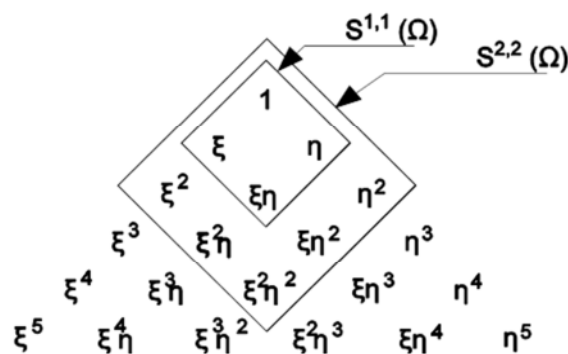


Figure 3.6 : Famille de « Lagrange ».

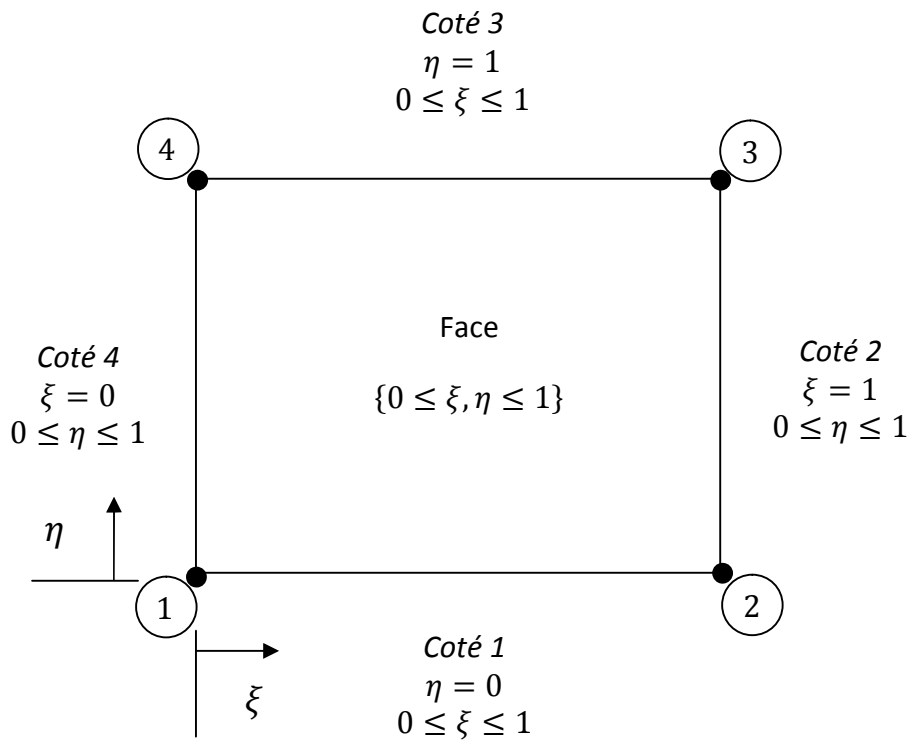


c) *Famille mixte ou espace  $\tilde{S}^{p,q}(\Omega)$*

Il est composé de l'ensemble des monômes communs  $S^p(\Omega)$  et à  $S^{p,q}(\Omega)$ ;  
 formellement :  $\tilde{S}^{p,q}(\Omega) = S^p(\Omega) \cap S^{p,q}(\Omega)$ .

3.5-2.2.2. **Élément 2-D quadrangulaires**

L'intersection de quatre éléments unidimensionnels de directions différentes forme un élément carré (figure 3.7) qui contient quatre nœuds, quatre cotés et une face. Donc un élément quadrilatéral possède trois groupes de fonctions de formes :



**Figure 3.7 :** Élément 2-D quadrangulaire.

✓ **Fonctions de formes nodales :**

Nœud 1 :  $N^{n1}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_1(\eta)$  (3.21)

Nœud 2 :  $N^{n2}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_1(\eta)$  (3.22)

Nœud 3 :  $N^{n3}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_2(\eta)$  (3.23)

Nœud 4 :  $N^{n4}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_2(\eta)$  (3.24)

✓ **Fonctions de formes des cotés :**

Il existe  $(p - 1)$  fonctions de formes pour chaque coté de l'élément :

$$\text{Coté 1 : } N^{c1}(\xi, \eta) = N_1(\eta)N_{i+1}(\xi) \quad (3.25)$$

$$\text{Coté 2 : } N^{c2}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_{i+1}(\eta) \quad (3.26)$$

$$\text{Coté 3 : } N^{c3}(\xi, \eta) = N_2(\eta)N_{i+1}(\xi) \quad (3.27)$$

$$\text{Coté 4 : } N^{c4}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_{i+1}(\eta) \quad (3.28)$$

Avec :  $i=1, \dots, p$

✓ **Fonctions de formes internes :**

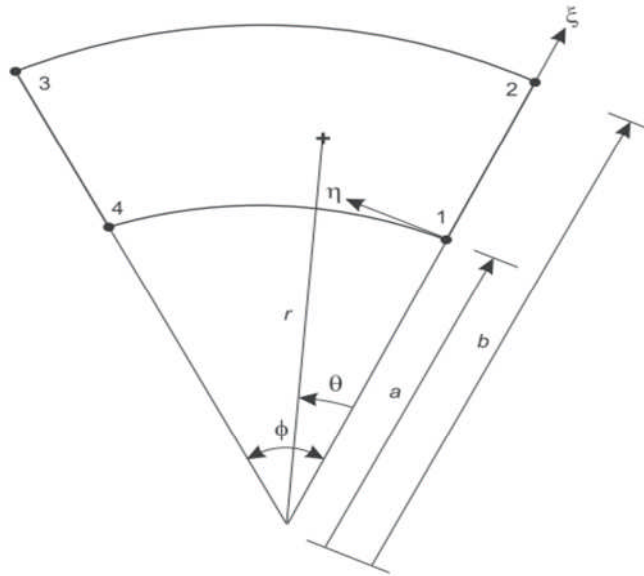
Il existe  $(p - 1)(p - 1)$  fonctions de formes internes correspondantes à la face de l'élément :

$$\text{Face : } N^{int}(\xi, \eta) = N_{i+2}(\xi)N_{j+2}(\eta) \quad (3.29)$$

Avec :  $i, j=1, \dots, p ; i+j=2, \dots, p$ .

**CHAPITRE 4****MODELISATION PAR LA VERSION-P DE LA MEF****4.1- Formulation par élément-p**

Considérons dans figure 4.1 un élément-p d'une plaque annulaire sectorielle, ayant un rayon intérieur  $a$ , un rayon extérieur  $b$ , une épaisseur uniforme  $h$  et un angle de secteur  $\phi$ , par rapport à un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et coordonnées adimensionnelles  $(\xi, \eta)$ .



**Figure 4.1 :** *Elément annulaire sectorielle de référence.*

Le système de coordonnées adimensionnelles  $(\xi, \eta)$  est relié au système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par les relations :

$$\begin{cases} \xi = \frac{r - a}{b - a} \\ \eta = \frac{\theta}{\phi} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\quad (4.2)$$

$$\begin{cases} r = (b - a)\xi + a \\ \theta = \phi\eta \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\quad (4.4)$$

$$\begin{cases} dr = (b - a)d\xi \\ d\theta = \phi d\eta \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\quad (4.6)$$

En utilisant la version-p de la méthode des éléments finis, les déplacements et les rotations d'un point peuvent être exprimés par :

$$u = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (4.7)$$

$$v = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (4.8)$$

$$w = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta-2}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (4.9)$$

$$\varphi_r = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta-1}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (4.10)$$

$$\varphi_\theta = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (4.11)$$

Où  $p$  est le degré du polynôme d'interpolation et  $\beta = l + (k - 1)(p + 1)$ .

$\bar{q}_{2\beta}(t)$  et  $\bar{q}_{2\beta-1}(t)$  sont les vecteurs des déplacements généralisés relatifs aux déplacements membranaires  $u$  et  $v$ , respectivement.

$q_{3\beta}(t)$ ,  $q_{3\beta-1}(t)$  et  $q_{3\beta-2}(t)$  sont les vecteurs des déplacements généralisés relatifs au déplacement flexionnel  $w$  et aux deux rotations  $\varphi_r$  et  $\varphi_\theta$ , respectivement.

Les dérivées partielles des déplacements et des rotations (4.7 – 11) par rapport aux coordonnées locales donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta); \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \quad (4.12.1 - 2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta); \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \quad (4.13.1 - 2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta-2}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta); \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta-2}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \quad (4.14.1 - 2)$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta-1}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta); \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta-1}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \quad (4.15.1 - 2)$$

$$\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta); \quad \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} q_{3\beta}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \quad (4.16.1 - 2)$$

## 4.2- L'énergie de déformation

L'expression de l'énergie de déformation totale d'une plaque épaisse à gradient fonctionnel sous l'effet d'un gradient de température donné par :

$$U = U_p + U_g \quad (4.17)$$

Où  $U_p$  est l'énergie de déformation due aux déformations vibratoires, et  $U_g$  est l'énergie de déformation de flambement due à la variation de température.

Les expressions de  $U_p$  et  $U_g$  sont données par :

$$U_p = \frac{1}{2} \iint \{ (A_{11}\varepsilon_{rr}^2 + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^2 + 2A_{12}\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} + A_{66}\gamma_{r\theta}^2) + 2(B_{11}\varepsilon_{rr}\chi_r + B_{12}\varepsilon_{rr}\chi_\theta + B_{12}\varepsilon_{\theta\theta}\chi_r + B_{22}\varepsilon_{\theta\theta}\chi_\theta + B_{66}\gamma_{r\theta}\chi_{r\theta}) + (D_{11}\chi_r^2 + D_{22}\chi_\theta^2 + 2D_{12}\chi_r\chi_\theta + D_{66}\chi_{r\theta}^2) + \kappa(A_{44}\gamma_{rz}^2 + A_{55}\gamma_{\theta z}^2) \} r dr d\theta \quad (4.18)$$

$$U_g = \frac{1}{2} \iint \{ \sigma_T \varepsilon_T \} r dr d\theta \quad (4.19)$$

Où :

$\sigma_T$  : La contrainte due à variation de la température.

$\varepsilon_T$  : La déformation due au flambement.

En injectant les expressions des déformations-déplacements et courbures-déplacements (2.7-14) dans l'équation (4.18), nous obtenons :

### 4.2.1- L'énergie de déformation due aux efforts vibratoires

La forme développée de l'expression (4.18) est donnée par :

$$\begin{aligned}
U_p = \frac{1}{2} \iint \left\{ & A_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right)^2 + A_{22} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right)^2 \right. \\
& + 2A_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \\
& + A_{66} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\
& + 2 \left( B_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{1}{r} \varphi_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) \right. \\
& + B_{12} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) \\
& + B_{22} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \left( \frac{1}{r} \varphi_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) \\
& + B_{66} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) \\
& + \left( D_{11} \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{1}{r} \varphi_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r} \varphi_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) \right. \\
& + D_{66} \left. \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right)^2 \right) \\
& \left. + \kappa \left( A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \varphi_\theta \right)^2 + A_{55} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \varphi_r \right)^2 \right) \right\} r dr d\theta \quad (4.20)
\end{aligned}$$

L'expression de l'énergie de déformation  $U_p$  peut être écrite sous forme d'une somme de plusieurs termes :

$$U_p = \bar{U} + \hat{U} + \tilde{U} + \check{U} + \tilde{\tilde{U}} + U_3 + U_4 \quad (4.21)$$

Où

$\bar{U}$  : Energie de déformation due aux déplacements membranaires ( $u$  et  $v$ ).

$$\begin{aligned}
\bar{U} = \frac{1}{2} \iint \left\{ & A_{11} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right) + A_{22} \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( \frac{u}{r} \right) + \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right) \right. \\
& + 2A_{12} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{u}{r} \right) \right) \\
& + A_{66} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 - 2 \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{v}{r} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \left( \frac{v}{r} \right) \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right] \left. \right\} r dr d\theta \quad (4.22)
\end{aligned}$$

$\hat{U}$  : Energie de déformation due aux déplacements membranaires et flexionnelle ( $u$ ,  $v$  et  $w$ ).

$$\begin{aligned} \hat{U} = \iint \left\{ A_{11} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + A_{22} \left( \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{u}{r} \right) \right. \\ + 2A_{12} \left( \left( \frac{1}{2r^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{1}{2r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \\ + A_{66} \left[ -2 \left( \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right) \right. \\ \left. \left. + 2 \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{v}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \right\} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

$\tilde{U}$  : Energie de déformation due au déplacement flexionnelle ( $w$ ).

$$\begin{aligned} \tilde{U} = \iint \left\{ A_{11} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^4 \right) + A_{22} \left( \left( \frac{1}{4r^4} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^4 \right) + 2A_{12} \left( \left( \frac{1}{4r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + A_{66} \left( \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right\} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.24)$$

$\check{U}$  : Energie de déformation due aux déplacements-rotations ( $u$ ,  $v$ ,  $\varphi_r$  et  $\varphi_\theta$ ).

$$\begin{aligned} \check{U} = \frac{1}{2} \iint 2 \left\{ B_{11} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) \right) + B_{12} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) \right) \right. \\ + B_{12} \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) + \left( \frac{u}{r} \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) \right) \\ + B_{22} \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) - \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{u}{r} \right) \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) - \left( \frac{u}{r} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) \right) \\ + B_{66} \left( \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\varphi_r}{r} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) \right. \\ + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \left( \frac{\varphi_r}{r} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) - \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{v}{r} \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{v}{r} \right) \left( \frac{\varphi_r}{r} \right) \\ \left. \left. + \left( \frac{v}{r} \right) \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) \right) \right\} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

$\tilde{U}$  : Energie de déformation due aux déplacements flexion-rotations ( $w$ ,  $\varphi_r$  et  $\varphi_\theta$ ).

$$\begin{aligned} \tilde{U} = \frac{1}{2} \iint 2 \left\{ B_{11} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) \right) + B_{12} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) \right. \\ + B_{12} \left( \left( \frac{1}{2r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) \right) \\ + B_{22} \left( \left( \frac{1}{2r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) - \left( \frac{1}{2r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) \right) \\ + B_{66} \left( \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\varphi_r}{r} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) \right\} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.26)$$

$U_3$  : Energie de déformation due aux rotations ( $\varphi_r$ ,  $\varphi_\theta$ ).

$$\begin{aligned} U_3 = U = \frac{1}{2} \iint \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right)^2 + D_{22} \left( \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right. \\ + 2D_{12} \left( \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) - \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) \right) \\ + D_{66} \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\varphi_r}{r} \right) + \left( \frac{\varphi_r}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) - 2 \left( \frac{\varphi_r}{r} \right) \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right)^2 \right\} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.27)$$

$U_4$  : Energie de déformation due au cisaillement transversal.

$$\begin{aligned} U_4 = U = \frac{1}{2} \iint \kappa \left\{ A_{44} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) (\varphi_\theta) + (\varphi_\theta)^2 \right) \right. \\ \left. + A_{55} \left( \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) (\varphi_r) + (\varphi_r)^2 \right) \right\} r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.28)$$



### 4.2.2- L'énergie de déformation de flambement du à la température

Par la supposition que la variation de température se produit dans la direction d'épaisseur seulement, donc le champ de la température est constant dans le plan de la plaque.

Une plaque à gradient fonctionnel sous l'effet de la température se déforme. La loi régissant ce comportement est :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(z)}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Avec :

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \alpha(z)\Delta T(z) \quad (4.30)$$

$\varepsilon_r$  et  $\varepsilon_\theta$  : Les déformations dues aux variations de température.

Et :

$$\gamma_{r\theta} = 0$$

Après le développement de l'équation (4.29) on obtient :

$$\sigma_r = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} [\varepsilon_r + \nu(z)\varepsilon_\theta] \quad (4.31)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} [\varepsilon_\theta + \nu(z)\varepsilon_r] \quad (4.32)$$

En substituant l'équation (4.30) dans (4.31) et (4.32) :

$$\sigma_r = \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \alpha(z)\Delta T(z) \quad (4.33)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \alpha(z)\Delta T(z) \quad (4.34)$$

Donc l'expression de la contrainte due à la température est :

$$\sigma_T = \sigma_r = \sigma_\theta = \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \alpha(z)\Delta T(z) \quad (4.35)$$

Avec :

$$\Delta T(z) = T_m + (T_c - T_m)\eta(z) \quad (4.36)$$

Et

$$\eta(z) = \frac{1}{C} \left[ \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa_{mc}}{(n+1)\kappa_c} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{\kappa_{mc}^2}{(2n+1)\kappa_c^2} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{2n+1} - \frac{\kappa_{mc}^3}{(3n+1)\kappa_c^3} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{3n+1} + \frac{\kappa_{mc}^4}{(4n+1)\kappa_c^4} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{4n+1} - \frac{\kappa_{mc}^5}{(n+1)\kappa_c^5} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{5n+1} \right] \quad (4.37)$$

$$C = 1 + -\frac{\kappa_{mc}}{(n+1)\kappa_c} + \frac{\kappa_{mc}^2}{(2n+1)\kappa_c^2} - \frac{\kappa_{mc}^3}{(3n+1)\kappa_c^3} + \frac{\kappa_{mc}^4}{(4n+1)\kappa_c^4} - \frac{\kappa_{mc}^5}{(n+1)\kappa_c^5} \quad (4.38)$$

$$\kappa_{mc} = \kappa_m - \kappa_c \quad (4.39)$$

L'effort de membranaire induit par la charge thermique par unité de longueur peut être calculé comme :

$$N_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_T dz \quad (4.40)$$

Donc l'expression de l'effort  $N_T$  est :

$$N_T = \sigma_T h = \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \alpha(z) \Delta T(z) h \quad (4.41)$$

Donc :

$$\sigma_T = \frac{N_T}{h} \quad (4.42)$$

Pour obtenir l'expression de l'énergie  $U_g$  en remplaçant les équations (2.7-8) et (4.42) dans (4.19) et en négligeant les déformations dans le plan (u et v), l'énergie  $U_g$  est écrite comme suit :

$$U_g = -N_0 \iint \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right] r dr d\theta \quad (4.43)$$

### 4.3- L'énergie de cinétique

L'expression de l'énergie cinétique  $T$  d'une plaque épaisse à gradient fonctionnel est donnée par l'équation :

$$T = \frac{1}{2} \iint \left[ I_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial t} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (4.44)$$

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, T) dz \quad (4.45)$$

$$I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, T) z^2 dz \quad (4.46)$$

Où  $\rho(z, T)$  est la densité.

### 4.4- Equations du mouvement

Les équations de *Lagrange* permettent d'obtenir les équations du mouvement de la plaque. Soit  $L$  la fonction de *Lagrange* définie par l'énergie cinétique  $T$  et l'énergie de déformation  $U$  :

$$L = T - U \quad (4.47)$$

Où  $L$  est une fonction des coordonnées généralisées  $q$ , des vitesses généralisées  $\dot{q}$  et du temps  $t$ .

La fonctionnelle intégrale de la fonction de Lagrange entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$ , appelée action est définie par :

$$H = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}, q, t) dt \quad (4.48)$$

Qui doit être extrémale si  $\delta H = 0$  (théorème de *Hamilton*) [Dare(1967)]. L'équation régissant du mouvement vibratoire libre peut être dérivée de l'équation de Lagrange qui exige que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (4.49)$$

En introduisant les expressions des coordonnées locales (4.1-6) avec les expressions des dérivées partielles obtenues par les équations (4.12-16), et en les injectant dans les équations des énergies (4.22-28) pour obtenir de nouvelles expressions des énergies en fonction des composantes des vecteurs de déplacements généralisés ( $\{\bar{q}\}, \{q\}$ ) et en fonction des coordonnées locales ( $\xi, \eta$ ).

Après la substitution des relations des énergies, les équations de *Lagrange* donnent les équations du mouvement :

$$\bar{\mathbf{M}}_{\alpha,\beta} \frac{d^2 \bar{\mathbf{q}}_\beta}{dt^2} + \bar{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} \bar{\mathbf{q}}_\beta + [\hat{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} + \check{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta}] \mathbf{q}_\beta = 0 \quad (4.50)$$

$$\mathbf{M}_{\alpha,\beta} \frac{d^2 \mathbf{q}_\beta}{dt^2} + [\mathbf{K}_{\alpha,\beta} + \mathbf{K}_{g_{\alpha,\beta}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} + \check{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta}] \mathbf{q}_\beta + [2\hat{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} + \check{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta}] \bar{\mathbf{q}}_\beta = 0 \quad (4.51)$$

Où

$$\bar{\mathbf{M}}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{2\alpha-1,2\beta-1} & 0 \\ 0 & \bar{M}_{2\alpha,2\beta} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{M}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} M_{3\alpha-2,3\beta-2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{3\alpha-1,3\beta-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$\bar{\mathbf{M}}_{\alpha,\beta}$  et  $\mathbf{M}_{\alpha,\beta}$  sont les matrices masse membranaires et flexionnel respectivement, ces matrices peuvent être obtenues par :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{\mathbf{q}}_\alpha} \right) = \bar{\mathbf{M}}_{\alpha,\beta} \quad (4.54)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \right) = \mathbf{M}_{\alpha,\beta} \quad (4.55)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta-1} & \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta} \\ \bar{K}_{2\alpha,2\beta-1} & \bar{K}_{2\alpha,2\beta} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$\bar{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta}$  : est la matrice de rigidité linéaire extensionnelle, les composantes de cette matrice peuvent être obtenues :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{\alpha}} = \bar{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} \quad (4.57)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{2\alpha-1,3\beta-2} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{2\alpha,3\beta-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$\hat{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta}$  : est la matrice de rigidité non linéaire de couplage extension – flexion :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{\alpha}} = \hat{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} \quad (4.59)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{3\alpha-2,3\beta-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta}$  : est la matrice de rigidité non linéaire flexionnelle :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_{\alpha}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} \quad (4.61)$$

$$\check{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \check{K}_{2\alpha-1,3\beta-1} & \check{K}_{2\alpha-1,3\beta} \\ 0 & \check{K}_{2\alpha,3\beta-1} & \check{K}_{2\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$\check{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta}$  : est la matrice de rigidité linéaire de couplage extension – rotation :

$$\frac{\partial \check{U}}{\partial \check{\mathbf{q}}_{\alpha}} = \check{\mathbf{K}}_{\alpha,\beta} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} K_{3\alpha-2,3\beta-2} & K_{3\alpha-2,3\beta-1} & K_{3\alpha-2,3\beta} \\ K_{3\alpha-1,3\beta-2} & K_{3\alpha-1,3\beta-1} & 0 \\ K_{3\alpha,3\beta-2} & 0 & K_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$\mathbf{K}_{\alpha,\beta}$  : est la matrice de rigidité linéaire due au cisaillement transversal :

$$\frac{\partial U_3}{\partial \mathbf{q}_{\alpha}} = \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{3\alpha-1,3\beta-1} & K_{3\alpha-1,3\beta} \\ 0 & K_{3\alpha,3\beta-1} & K_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$\mathbf{K}_{\alpha,\beta}$  : est la matrice de rigidité linéaire flexionnelle due aux rotations :

$$\frac{\partial U_4}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{K}_{g_{\alpha,\beta}} = \begin{bmatrix} K_{g_{3\alpha-2,3\beta-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$\mathbf{K}_{g_{\alpha,\beta}}$  : est la matrice de rigidité de flambement due à la variation de la température :

$$\frac{\partial U_g}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = \mathbf{K}_{g_{\alpha,\beta}} \quad (4.69)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_\beta = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_{2\beta-1} \\ \bar{\mathbf{q}}_{2\beta} \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{q}_\beta = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{3\beta-2} \\ \mathbf{q}_{3\beta-1} \\ \mathbf{q}_{3\beta} \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\alpha = i + (j - 1)(p + 1) \quad (i, j = 1, 2, \dots, p + 1)$$

Les expressions (4.72-74) sont utilisées pour réduire la taille des expressions des composantes des matrices masses et de rigidité :

$$I(\tau)_{i,j}^{\delta,\gamma} = \int_0^1 \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right)^\tau g_i^\delta g_j^\gamma d\xi \quad (4.72)$$

$$I(\tau)_{i,j,k}^{\delta,\gamma,\lambda} = \int_0^1 \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right)^\tau g_i^\delta g_j^\gamma g_k^\lambda d\xi \quad (4.73)$$

$$I(\tau)_{i,j,k,l}^{\delta,\gamma,\lambda,\mu} = \int_0^1 \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right)^\tau g_i^\delta g_j^\gamma g_k^\lambda g_l^\mu d\xi \quad (4.74)$$

Où  $\delta, \gamma, \lambda, \mu$  : sont les degrés de dérivation ( $\delta, \gamma, \lambda, \mu = 0, 1$ ).

$\tau$  : est une constante ( $\tau = -3, -2, -1, 0, 1$ ).

Les coefficients non nuls des matrices  $\bar{\mathbf{M}}, \mathbf{M}, \bar{\mathbf{K}}, \mathbf{K}_g, \hat{\mathbf{K}}, \check{\mathbf{K}}, \mathbf{K}, \tilde{\mathbf{K}}$  sont obtenues, les expressions de ces composantes sont données dans l'annexe A et B.

En appliquant les conditions aux limites aux systèmes (4.50) et (4.51), et en ignorant les lignes et les colonnes correspondantes aux degrés de libertés restreints, nous obtenons les équations régissant le mouvement libre :

$$\bar{\mathbf{M}} \frac{d^2 \bar{\mathbf{q}}}{dt^2} + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}} + [\hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}] \mathbf{q} = 0 \quad (4.75)$$

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_g + \tilde{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}] \mathbf{q} + [2\hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}] \bar{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.76)$$

Dans le cas où les cotés de la plaque sont fixés, les déplacements membranaires deviennent beaucoup plus petits par rapport aux déplacements flexionnels. Dans ce cas, l'inertie membranaire peut être négligée [Han. Petyt (1997)]. Les équations du mouvement deviennent :

$$\bar{\mathbf{q}} = -\bar{\mathbf{K}}^{-1} [\hat{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}}] \mathbf{q} \quad (4.77)$$

En injectant l'équation (4.77) dans l'équation (4.76), nous obtenons :

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_g - \check{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}} + \check{\mathbf{K}} - 2\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} - 2\hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{K}} - \check{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}] \mathbf{q} = 0 \quad (4.78)$$

Les matrices  $\mathbf{K}, \mathbf{K}_g, \check{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{K}}$ , et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont des fonctions linaires de  $\mathbf{q}$ , tandis que les matrices les matrices  $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}$  sont des fonctions quadratiques de  $\mathbf{q}$ .

Nous supposons que le mouvement est périodique, donc l'expression de  $\mathbf{q}$  sera :

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} \cos(\omega t) \quad (4.79)$$

Où  $\mathbf{Q}$  est l'amplitude, et  $\omega$  est la pulsation.

L'insertion de (4.77) dans (4.78) donne une équation de la forme :

$$\mathbf{F}(\omega, t) = \mathbf{0} \quad (4.80)$$

En appliquant la méthode d'équilibrage harmonique et en intégrant sur la période, nous obtenons :

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{F}(\omega, t) \cos(\omega t) dt$$

$$= \left[ -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_g - \tilde{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} + \frac{3}{4} \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right] \mathbf{Q} = 0 \quad (4.81)$$

Le problème non linéaire généralisé de valeurs propres (4.81) est résolu itérativement en utilisant la méthode de linéarisation des modes. Dans la première itération, nous imposons  $\mathbf{Q} = 0$ . Dans les itérations successives, les matrices de rigidités non linéaire  $\hat{\mathbf{K}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont évaluées à partir des vecteurs propres correspondants à une amplitude spécifique au point qui a la plus grande amplitude. Des valeurs précises pour les coordonnées non dimensionnelles  $\xi_0$  et  $\eta_0$  du point de l'amplitude maximum peuvent être trouvées en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

L'amplitude maximale  $W_{max}$  atteinte pendant un cycle est donnée par :

$$W_{max} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \mathbf{q}_{3\beta-2} g_k(\xi_0) g_l(\eta_0) \quad (4.82)$$

Le problème généralisé linéaire résultant de valeur propre résultant est résolu pour les fréquences et les modes associés en utilisant n'importe quelle technique connue. Le procédé d'itération est continué jusqu'à ce qu'une valeur convergée pour la fréquence dans l'exactitude prescrite (par exemple  $10^{-5}$ ) soit obtenue.



## CHAPITRE 5

### TECHNIQUES DE PROGRAMMATION

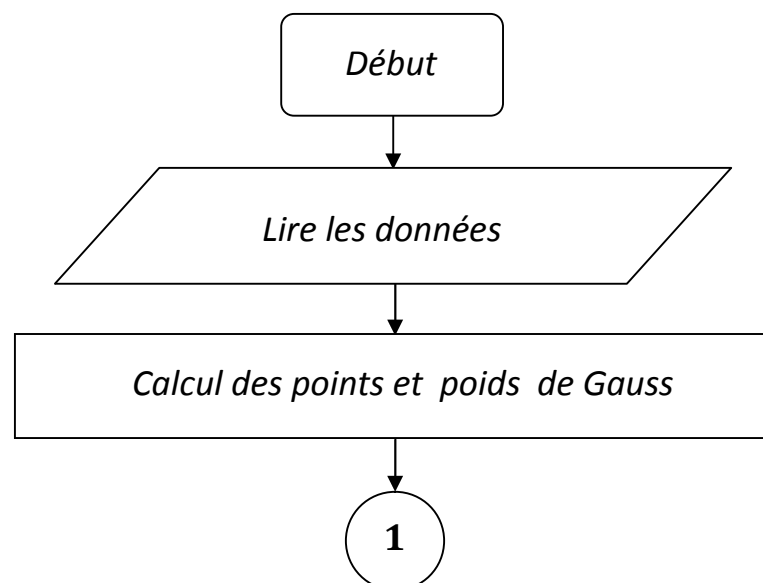
#### 5.1- Introduction

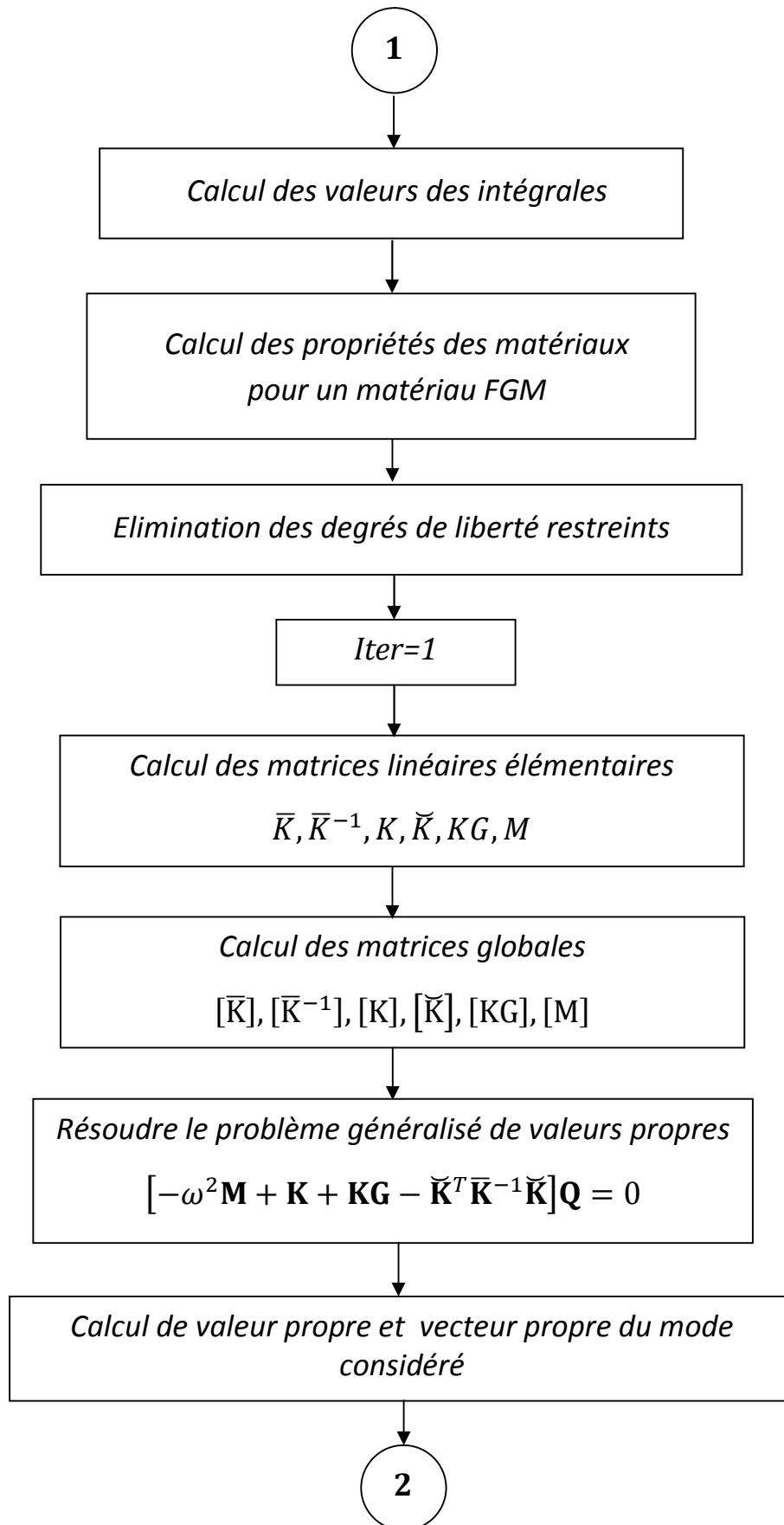
Dans les chapitres précédents, une formulation théorique concernant la version  $-p$  des éléments finis a été présentée. Un code de calcul basé sur cette méthode pour résoudre un problème de vibration non linéaire des plaques annulaires sectorielles à gradient fonctionnels dans un environnement à haute température, en tenant compte de l'effet du cisaillement transversal à été développé.

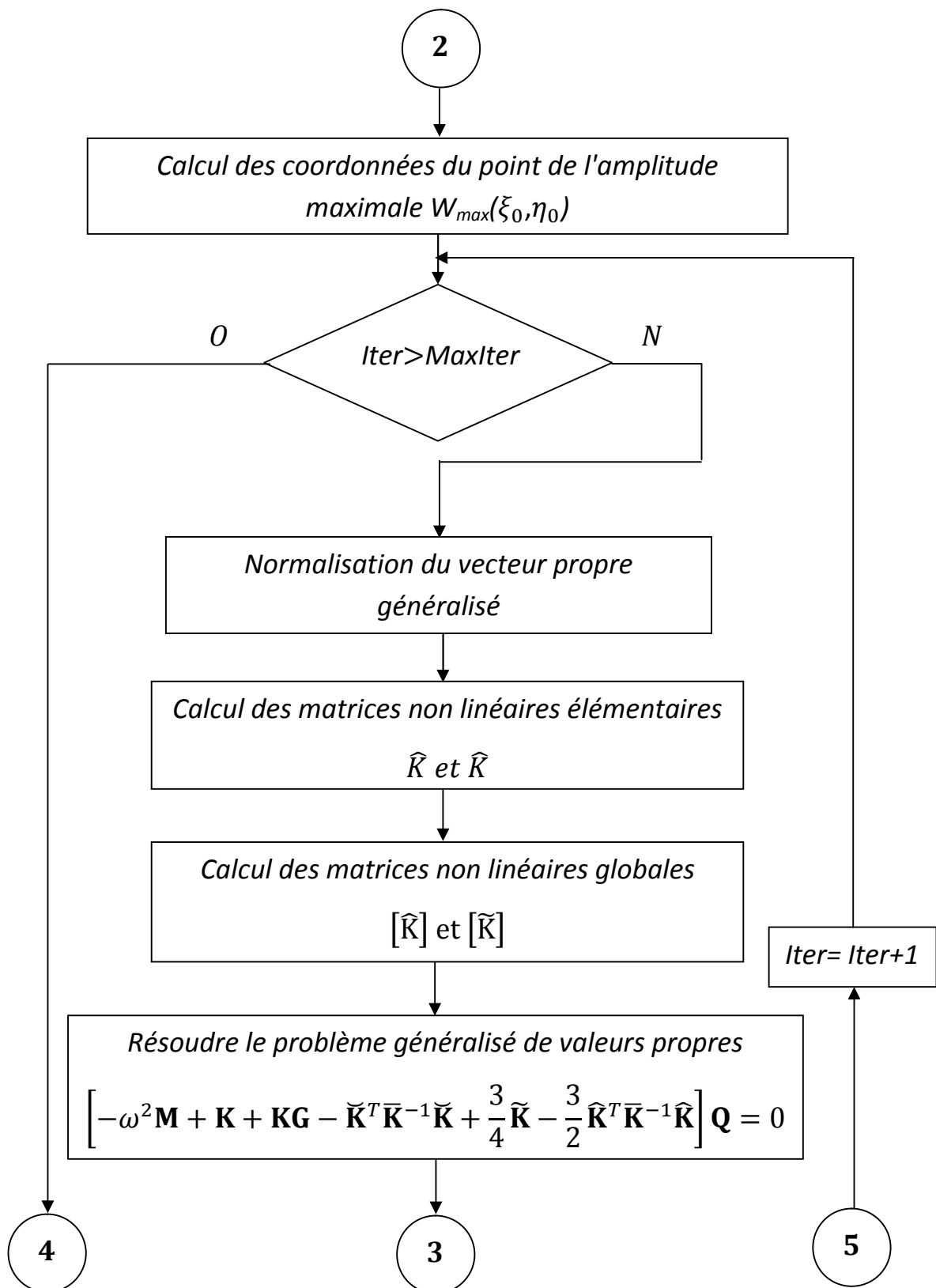
#### 5.2- Logiciels et matériel utilisés

Pour la résolution du problème en utilisant le FORTRAN 90 pour la programmation, le MATLAB 7.6 pour le calcul des fonctions de forme et les intégrales, et Origin 8 pour le traçage des courbes et les graphes. Le matériel utilisé pour la programmation est PC avec un processeur Core2 Duo (2.0 GHz) et 2 Go de RAM.

#### 5.3- Organigramme du programme principal







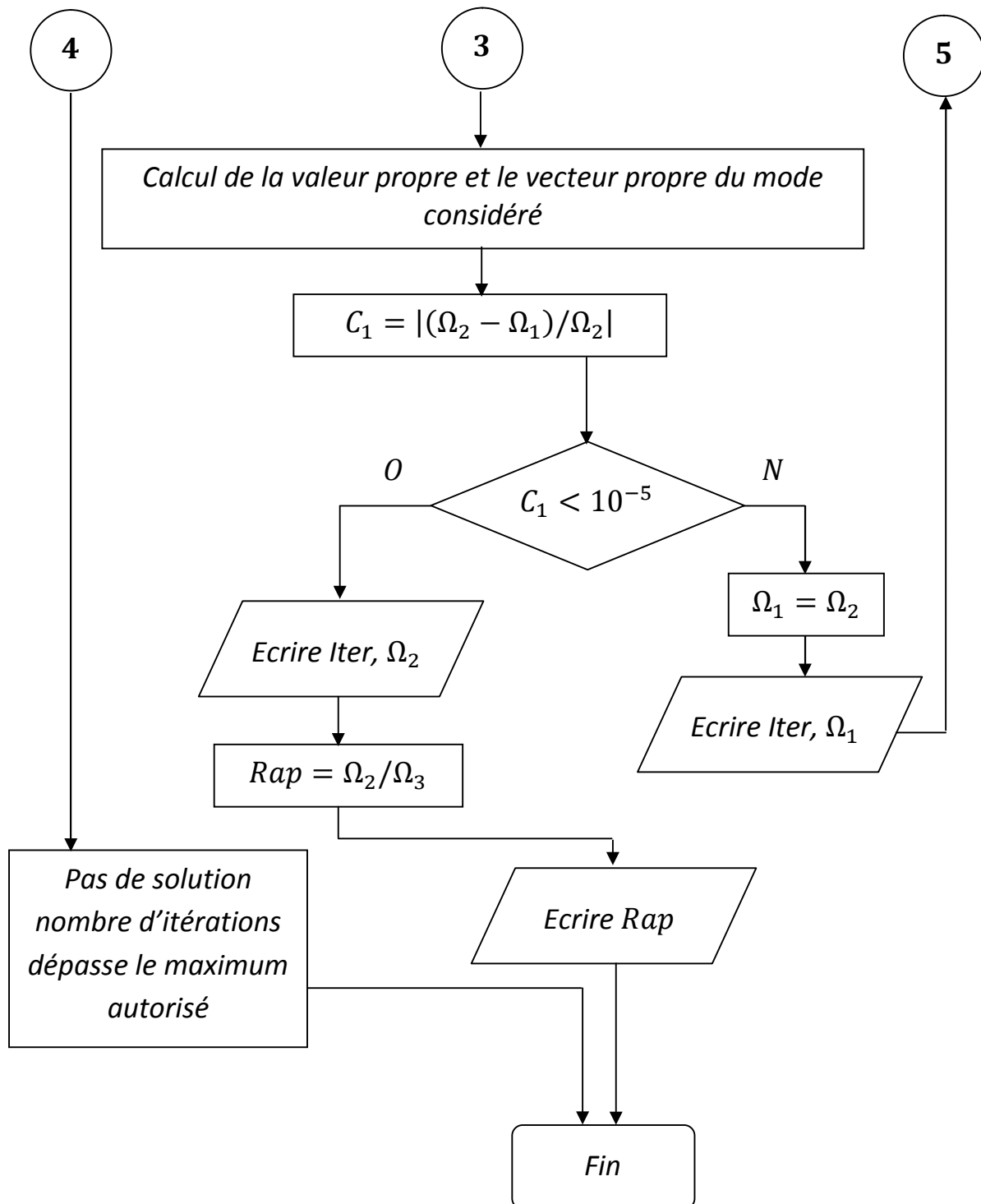


Figure 5.1 : Organigramme du programme principal.

## 5.4- Description des sous – programme

Les sous programmes (SUBROUTINES) sont des séquences d'instruction appelables d'un point quelconque du programme. Elle peut être appelée depuis le programme principal ou depuis un autre sous programme ou fonction.

Notre programme contient les sous programme suivants :

- *S/P INPUT*
- *S/P GAUSS*
- *S/P INTEG*
- *S/P CONSTS*
- *S/P BOUNDC*
- *S/P STIFF1*
- *S/P INVERT*
- *S/P STIFF2*
- *S/P STIFFG*
- *S/P STIFF3*
- *S/P MASS*
- *S/P STIFF4*
- *S/P JACOBI*
- *S/P MAXAMP*
- *S/P MODE*
- *S/P STIFF5*
- *S/P STIFF6*
- *S/P STIFF7*
- *S/P STIFF*
- *S/P SORT*

### 5.4-1. S/P INPUT

Le S/P INPUT est un module d'entrée des données. Il doit transmettre suffisamment d'informations aux autres modules pour pouvoir résoudre le problème. Les données peuvent être divisées en deux catégories :

- Les données nécessaires pour définir la géométrie de la structure et la façon dont elle est fixée dans l'espace (connections des nœuds et cotés, dimensions des éléments, conditions aux limites).
- Les informations concernant les propriétés des matériaux qui doivent être prescrites.

#### 5.4-1.1. Paramètre des éléments

NN	: Nombre total de nœuds.
NE	: Nombre total de cotés.
NRN	: Nombre de nœuds restreints.
NRE	: Nombre de cotés restreints.
NMODE	: Numéro de mode spécifique.
IP	: Degré du polynôme de l'élément-p.

#### 5.4-1.2. Paramètre physiques

DTC	: Température de la céramique.
DTM	: Température du métal.
SC	: Facteur de correction transversal.
PLI	: Exposant de la fraction volumique.
WS	: Amplitude spécifique.

#### 5.4-1.3. Paramètre géométriques

A	: Rapport du diamètre intérieur du diamètre extérieur (a / b).
H	: Epaisseur de la plaque.
PHI	: Angle de secteur de la plaque.

#### 5.4-2. S/P GAUSS

C'est un sous – programme qui calcule les abscisses des points et les poids correspondants de Gauss nécessaires pour l'intégration numérique.

### 5.4-3. S/P INTEG

Les fonctions de forme sont calculées symboliquement par un programme MATLAB. Les intégrales données dans les expressions des matrices de rigidité et de masse élémentaires sont calculées par le sous – programme INTEG.

### 5.4-4. S/P CONSTS

En se basant sur la règle de mélange citée dans le chapitre 1, le sous – programme CONSTS permet de calculer les propriétés effectives d'un matériau FGM et effort dus à la température.

### 5.4-5. S/P BOUNDC

Pour la résolution du problème généralisé de valeurs propres les conditions aux limites doivent être prises en compte. Dans ce sous – programme une boucle avec un test d'élimination des degrés de liberté restreints existe. La valeur 1 est introduite lorsque le degré de liberté est fixe et s'il est libre la valeur correspondante est 0.

### 5.4-6. Construction des matrices linéaires : $\bar{K}, \bar{K}^{-1}, K, KG, \check{K}, M$

Les composantes des matrices de rigidités et de masse linéaires calculées dans le chapitre 3 sont calculées à partir des sous programmes suivants :

- S/P STIFF1 : Calcul de la matrice de rigidité linéaire membranaire  $\bar{K}$ .
- S/P INVERT : Calcul de la matrice de rigidité linéaire membranaire inverse  $\bar{K}^{-1}$ .
- S/P STIFF2 : Calcul de la matrice de rigidité linéaire flexionnelle  $K$ .
- S/P STIFFG : Calcul de la matrice de rigidité géométrique  $K_g$ .
- S/P STIFF3 : Calcul de la matrice de rigidité de couplage  $\check{K}$ .
- S/P MASS : Calcul de la matrice masse  $M$ .

### 5.4-7. S/P STIFF4

Ce sous – programme permet de calculer la somme des matrices linéaires dans :

$$[K + KG - \check{K}^T \bar{K}^{-1} \check{K}]$$

**5.4-8. S/P JACOBI**

C'est un sous programme qui permet le calcul des valeurs et vecteurs propres. Il utilise l'algorithme de JACOBI pour résoudre :

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{G} - \tilde{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}] \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

**5.4-9. S/P MAXAMP**

Pour calculer les valeurs précises des coordonnées non dimensionnelles  $\xi_0$  et  $\eta_0$  du point de l'amplitude maximale  $W_{max}(\xi_0, \eta_0)$  nous utilisons le sous – programme MAXAMP qui utilise la méthode de Newton-Raphson.

**5.4-10. S/P MODE**

Après la détermination des coordonnées de l'amplitude maximale. Le sous – programme MODE fait la normalisation des vecteurs propres à chaque itération en utilisant le rapport des amplitudes  $W_s / W_{max}$ .

**5.4-11. Construction des matrices non linéaires :  $\tilde{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{K}}$** 

Les composantes des matrices de rigidité non linéaires calculées dans le chapitre 3 sont calculées à partir de sous programmes suivants :

- S/P STIFF5 : Calcul de la matrice de rigidité non linéaire membranaire  $\hat{\mathbf{K}}$ .
- S/P STIFF6 : Calcul de la matrice de rigidité non linéaire flexionnelle  $\tilde{\mathbf{K}}$ .

**5.4-12. S/P STIFF7**

L'assemblage des matrices de rigidité non linéaire se fait en appliquant les conditions aux limites en ignorant les lignes et les colonnes liées aux degrés de liberté restreints dans les matrices globales par le sous – programme STIFF7.

$$\left[ \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right]$$



**5.4-13. S/P STIFF**

Ce sous – programme permet de calculer la somme des matrices de rigidité linéaires et non linéaire pour permettre de résoudre :

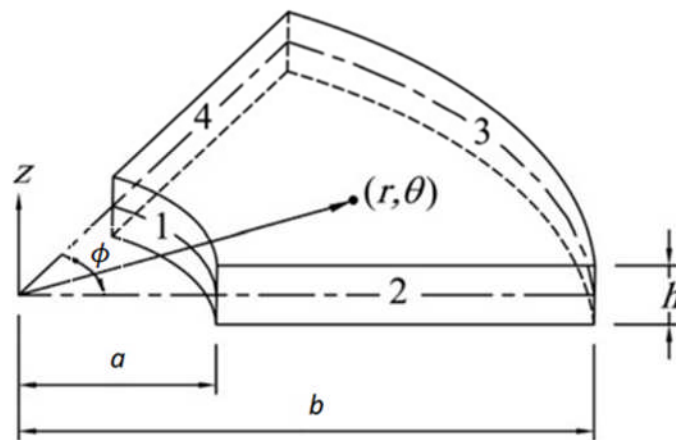
$$\left[ -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{G} - \check{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{K}} + \frac{3}{4} \tilde{\mathbf{K}} - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \right] \mathbf{Q} = 0$$

**5.4-14. S/P SORT**

Le sous programme SORT permet de classer les valeurs propres et vecteurs propres associés par ordre croissant.

**CHAPITRE 6****RESULTATS ET VALIDATION NUMERIQUE****6.1. Introduction**

L'élément fini version- $p$  de plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel développé dans ce travail devra être validé par comparaison des résultats avec la littérature (figure 6.1).



**Figure 6.1** : Plaque annulaire sectorielle.

Dans ce chapitre, nous considérons les modèles isotropes et FGM avec quelques tests standards connus dans la littérature. Il s'agit essentiellement de faire une étude paramétrique sur les performances, en précision sur les déplacements en variant plusieurs paramètres. Le tableau 6.3 donne les différentes propriétés de trois types de matériaux à gradient fonctionnel utilisé dans ce travail. Les résultats sont donnés pour le paramètre de fréquence  $\Omega_L$  exprimé en fonction de la fréquence propre de vibration, par :

$$\text{Matériau isotrope :} \quad \Omega_L = wb\sqrt{\rho/E} \quad (6.1)$$

$$\text{Matériau à gradient fonctionnel :} \quad \Omega_L = wb\sqrt{\rho_m/E_m} \quad (6.2)$$

## 6.2. Plaque isotrope

### 6.2.1. Convergence et validation

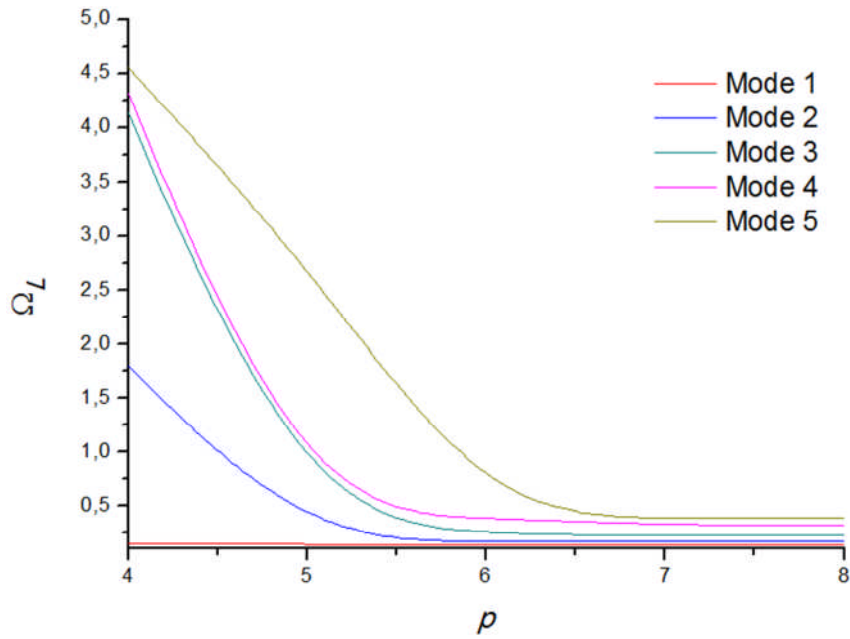
Dans cette partie, une étude de convergence de paramètres de fréquence d'une plaque annulaire sectorielle mince ( $h/b=0.005, 0.1$ ) encastrée et simplement appuyée avec un rapport de rayon interne/externe ( $a/b=0.5$ ), des angles de secteur ( $\phi=45^\circ, 90^\circ$ ) et un coefficient de Poisson ( $\nu=0.3$ ). Les résultats obtenus du mode fondamental en fonction du degré du polynôme d'interpolation  $p$  sont mentionnées et comparés avec d'autres résultats dans les tableaux 6.1-2 et figures 6.1-3.

**Tableau.6.1 :** Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire  $\Omega_L$  d'une plaque annulaire sectorielle encastrée avec,  $\phi = 90^\circ$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $h/b = 0,005$ ,  $\nu = 0,3$ .

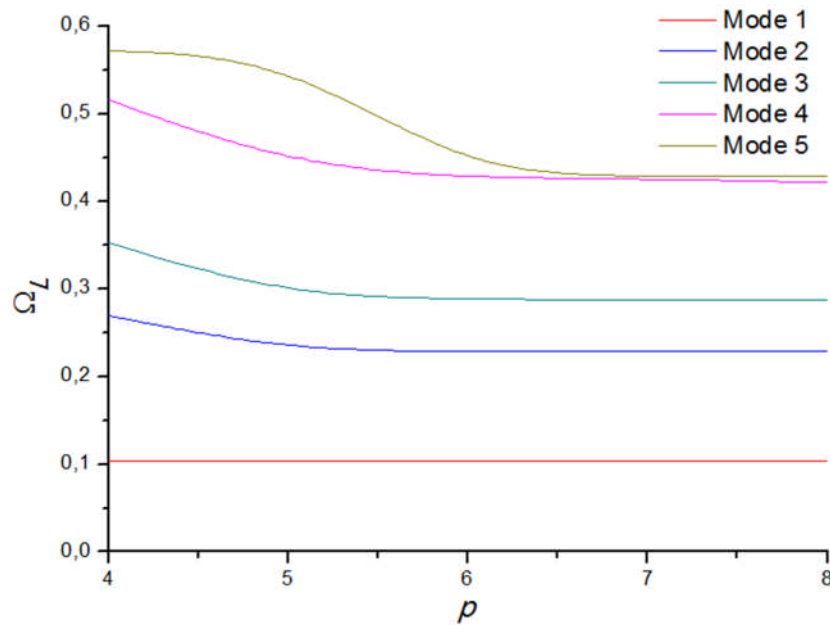
Mode	$p$					Liew et Lui (2000)
	4	5	6	7	8	
1	0.152	0.145	0.144	0.144	0.144	0.144
2	1.798	0.175	0.174	0.174	0.174	0.174
3	4.128	0.398	0.231	0.231	0.228	0.227
4	4.318	0.444	0.388	0.319	0.319	0.305
5	4.554	2.769	0.421	0.383	0.383	0.382

**Tableau.6.2 :** Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire  $\Omega_L$  d'une plaque annulaire sectorielle simplement appuyée avec,  $\phi = 45^\circ$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $h/b = 0,005$ ,  $\nu = 0,3$ .

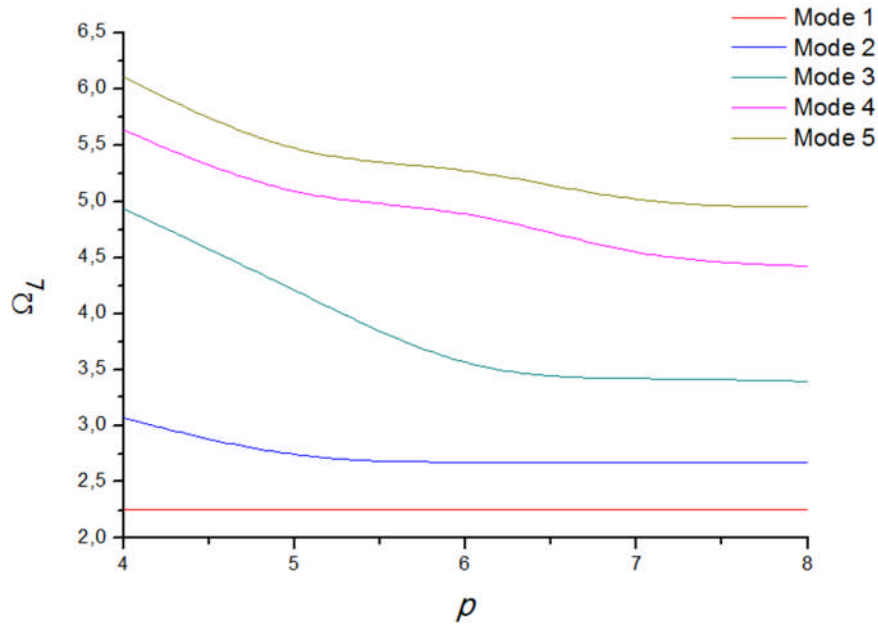
Mode	$p$					Liew et Lui (2000)
	4	5	6	7	8	
1	0.104	0.103	0.103	0.103	0.103	0.103
2	0.269	0.229	0.229	0.228	0.228	0.228
3	0.352	0.291	0.288	0.287	0.287	0.287
4	0.516	0.442	0.426	0.426	0.421	0.421
5	0.572	0.564	0.430	0.429	0.429	0.428



**Figure 6.2 :** Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire  $\Omega_L$  d'une plaque isotrope mince encadrée ( $h/b=0.005$ ).



**Figure 6.3 :** Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire  $\Omega_L$  d'une plaque isotrope mince simplement appuyée ( $h/b=0.005$ ).



**Figure 6.4 :** Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaire  $\Omega_L$  d'une plaque isotrope modérément épaisse encastrée ( $h/b=0.1$ ).

Les figures 6.2-4 représentent les résultats obtenus des paramètres de fréquence linéaires de deux types de plaques isotropes mince ( $h/b=0.005$ ) et modérément épaisse ( $h/b=0.1$ ) respectivement, avec des conditions aux limites différentes. Les allures montrent la convergence rapide des résultats lorsque nous augmentons le degré du polynôme d'interpolation  $p$  ( $p=4, \dots, 8$ ), et que la convergence est plus stable dans le cas des conditions aux limites simplement appuyée.

Les graphes 6.5-7 représentent graphes de contours des trois premières modes d'une plaque annulaire sectorielle encastrée avec ( $a/b = 0.5, 0.001$ ) pour différents angles de secteur ( $\phi = 30^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$ ). Les contours montrent un changement clair des modes de vibrations lorsque  $a/b$  et  $\phi$  changent.

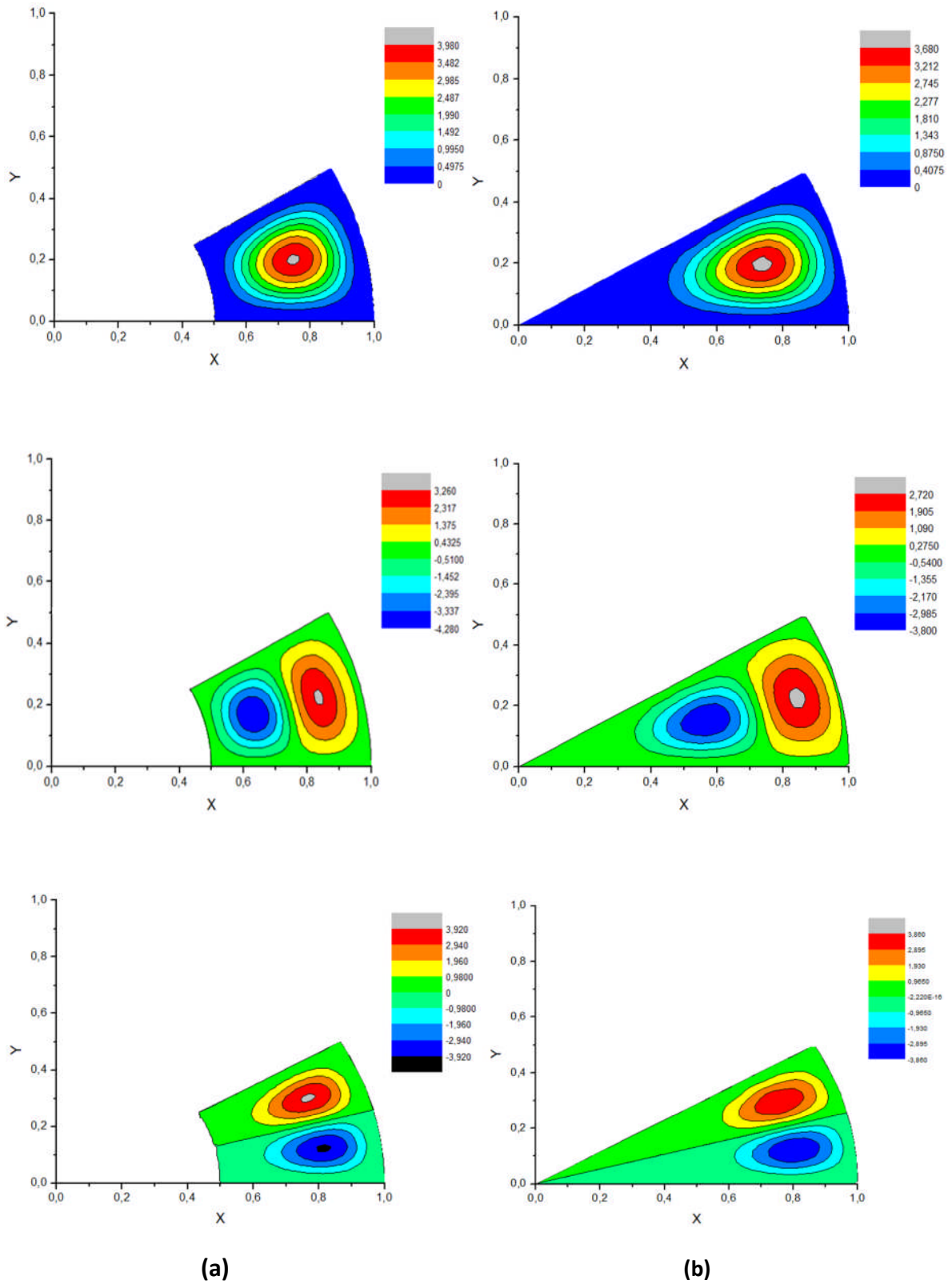


Figure 6.5 : Contours des trois premières modes d'une plaque annulaire sectorielle encastrée avec  $\phi = 30^\circ$  : a)  $a/b = 1/2$  ; b)  $a/b = 0.001$ .

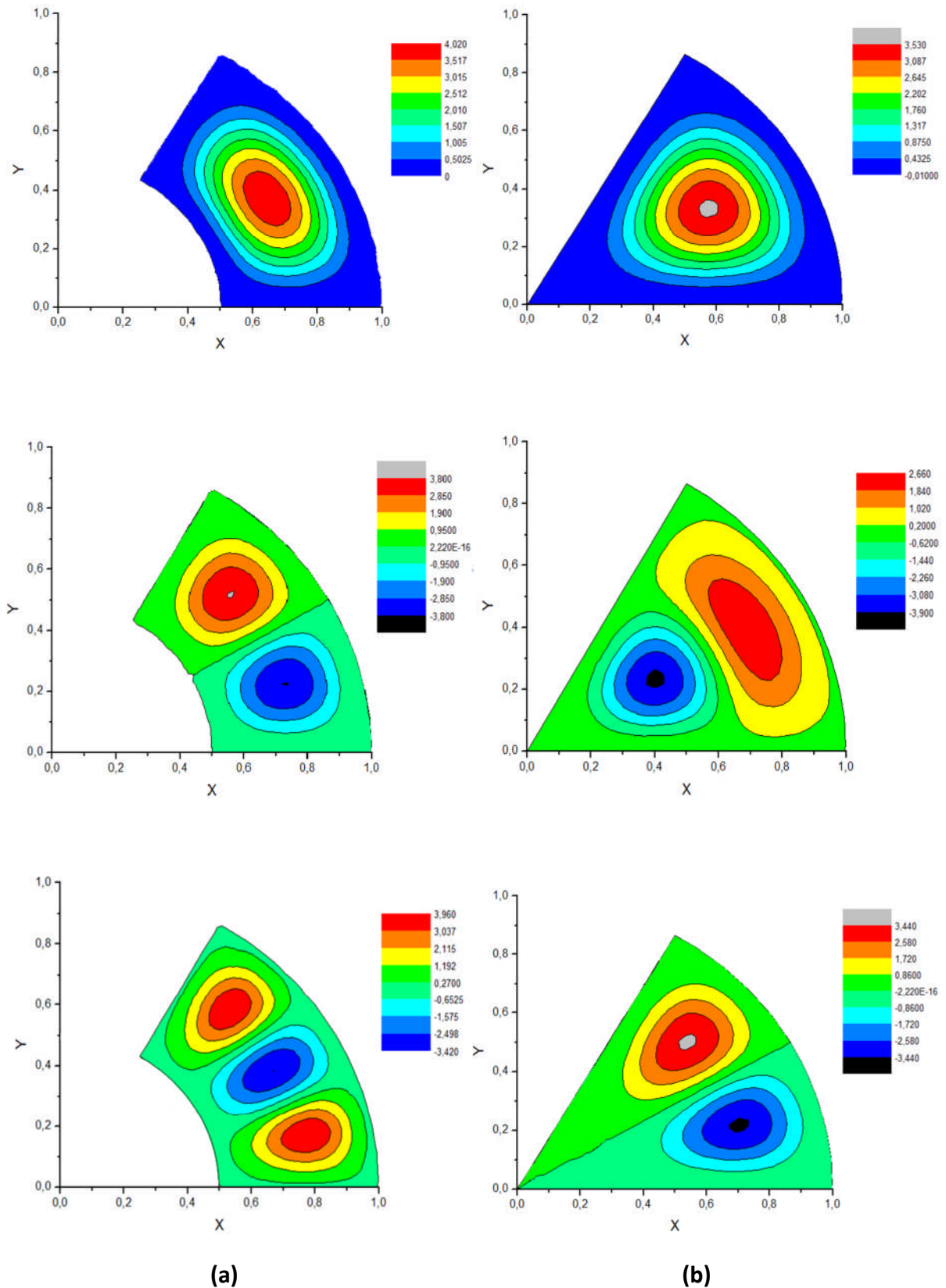


Figure 6.6 : Contours des trois premières modes d'une plaque annulaire sectorielle encastree avec  $\phi = 60^\circ$  : a)  $a/b = 1/2$  ; b)  $a/b = 0.001$ .

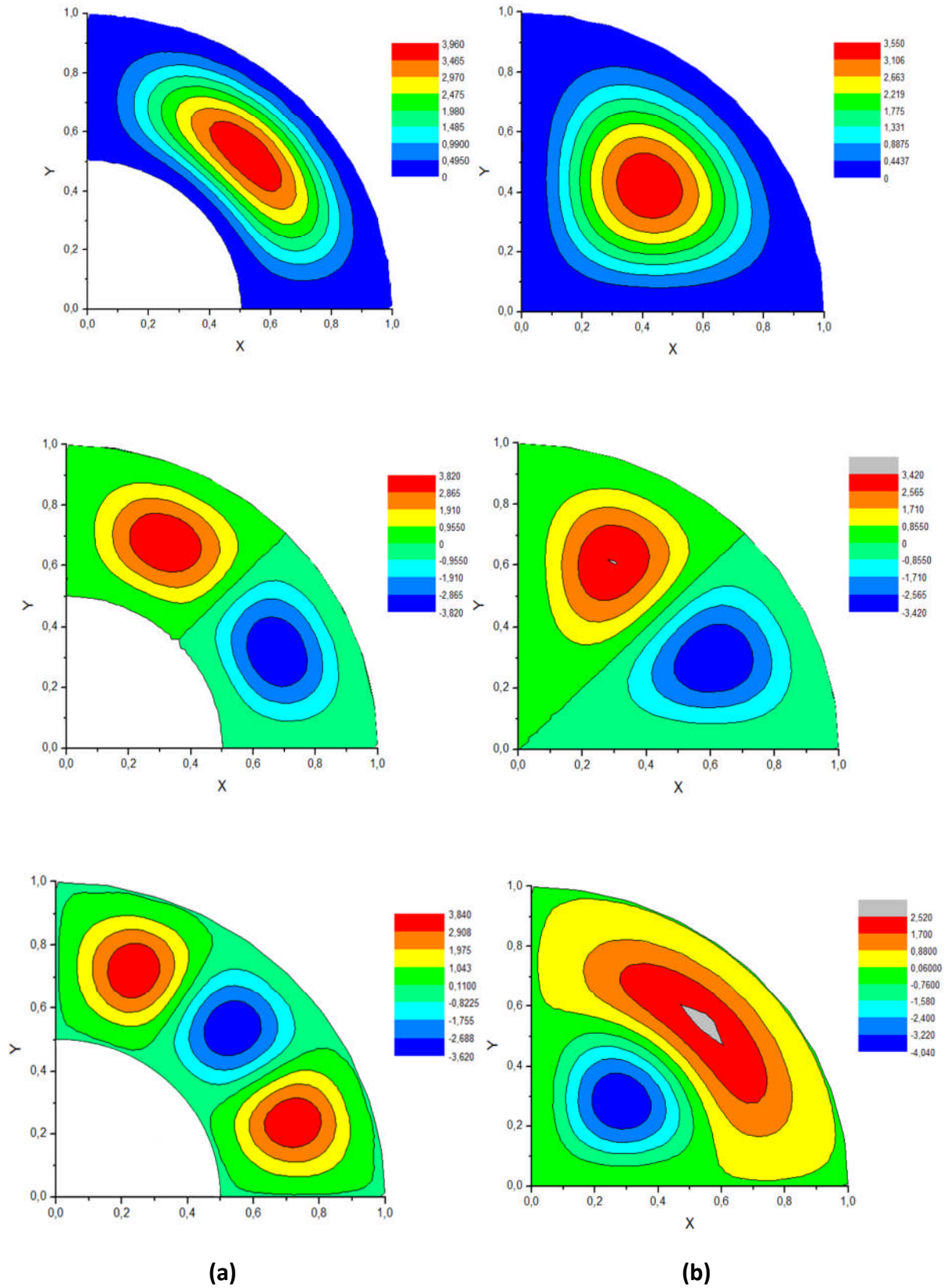


Figure 6.7 : Contours des trois premières modes d'une plaque annulaire sectorielle encastrée avec  $\phi = 90^\circ$  : a)  $a/b = 1/2$  ; b)  $a/b = 0.001$ .



### 6.3. Plaque à gradient fonctionnel

Dans cette section, une étude de la convergence et l'influence de plusieurs paramètres sur la vibration linéaire et non linéaire et le flambement du à la variation de la température d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel est présentée. L'exemple de trois types de matériaux FGM est considéré (tableau 6.3) dans cette étude avec différents mélanges en variant l'exposant  $n$ .

Les effets des conditions aux limites, indice de la loi de mélange, épaisseur de la plaque, angle de secteur, rapport de rayons interne/externe, type de matériau, et variation de la température dans sont discutés en détail.

**Tableau.6.3 :** Propriétés de mélange pour 3 types d'un FGM [Zhao et al. (2009)].

Constituants	Propriétés				
	$E_M/E_C$ (GPa)	$\nu_M/\nu_C$	$\rho_M/\rho_C$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\kappa_M/\kappa_C$ (W/mK)	$\alpha_M/\alpha_C$ (1/C)
Aluminium(Al)/Alumina( $Al_2O_3$ )	70/380	0.3/0.3	2707/3800	204/10.4	$23 \times 10^{-6}/7.4 \times 10^{-6}$
Aluminium(Al)/Zirconia( $ZrO_2$ )	70/151	0.3/0.3	2707/3000	204/2.09	$23 \times 10^{-6}/10 \times 10^{-6}$
Ti-6Al-4V/Aluminium oxide	105.7/320.2	0.298/0.26	4429/3750	6.112/64.99	$6.9 \times 10^{-6}/7.2 \times 10^{-6}$

- **FGM 1:** Aluminium (Al) / Alumina ( $Al_2O_3$ ).
- **FGM 2:** Aluminium (Al)/ Zirconia ( $ZrO_2$ ).
- **FGM 3:** Ti-6Al-4V / Aluminium oxide.

#### 6.3.1 Etude des vibrations linéaires

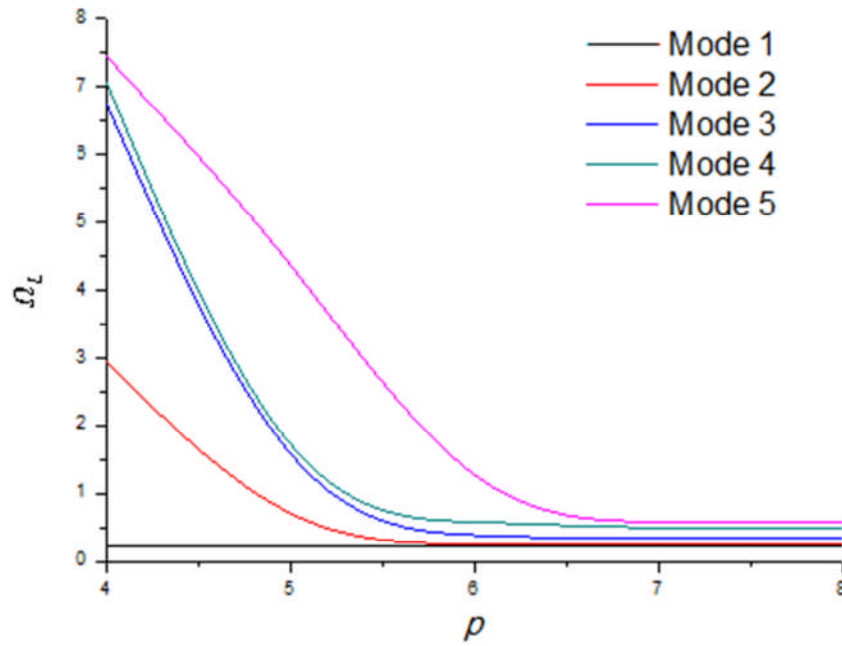
##### 6.3.1.1 Validation

L'étude de la convergence d'une plaque à gradient fonctionnel **Aluminium(Al)/Alumina( $Al_2O_3$ )** est faite dans cette section pour des plaques minces ( $h/b=0.005$ ) et modérément épaisses ( $h/b=0.05$ ) encastées et simplement appuyées. Les résultats dans les tableaux 6.4 et 6.5 montrent la convergence des cinq premiers modes de paramètres de fréquences linéaires.

En comparant les résultats obtenus (tableau 6.4) avec ceux de [Belalia et Houmat (2012)], nous remarquons que les résultats sont presque les mêmes pour différentes valeurs de l'exposant  $n$  avec une erreur qui varie entre (0 et 4,67%). Ainsi, la variation de la valeur de l'exposant  $n$  a une influence remarquable sur les valeurs de paramètres de fréquence.

**Tableau.6.4 :** Paramètres de fréquence linéaire  $\Omega_L$  pour une plaque à gradient fonctionnel encadrée avec,  $\phi = 90^\circ$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $h/b = 0,005$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ .

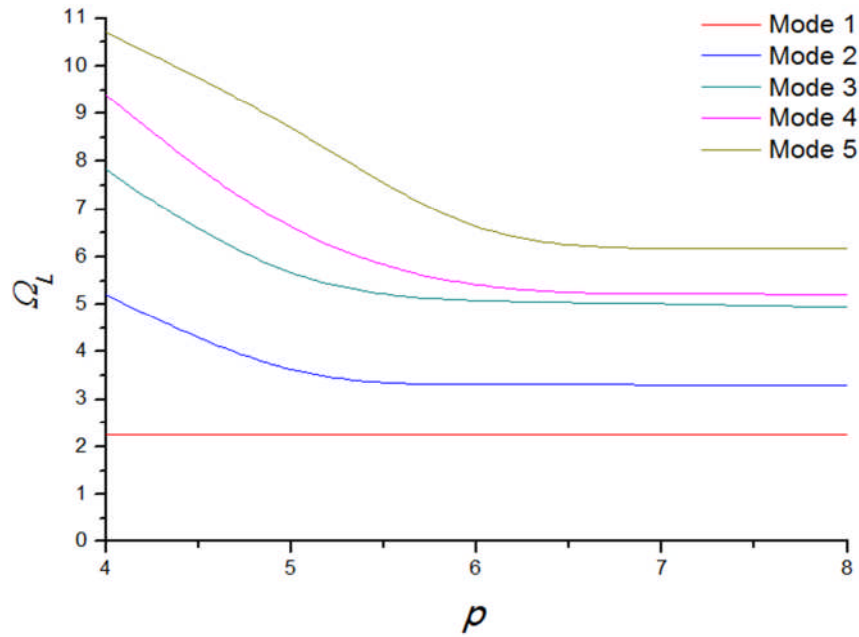
$n$	Mode	$\rho$					Belalia Houmat (2012)
		4	5	6	7	8	
<b>Céramique</b> $n=0$	1	0.299	0.284	0.283	0.283	0.283	0.283
	2	3.535	0.343	0.342	0.342	0.342	0.341
	3	8.117	0.783	0.454	0.453	0.448	0.447
	4	8.491	0.873	0.764	0.628	0.628	0.600
	5	8.955	5.444	0.827	0.753	0.752	0.752
<b>0.5</b>	1	0.255	0.241	0.240	0.240	0.240	0.241
	2	3.171	0.291	0.290	0.289	0.289	0.289
	3	7.282	0.665	0.384	0.384	0.379	0.379
	4	7.619	0.744	0.647	0.532	0.532	0.512
	5	8.034	4.882	0.701	0.637	0.637	0.640
<b>1</b>	1	0.230	0.217	0.216	0.216	0.216	0.221
	2	2.938	0.262	0.261	0.261	0.261	0.264
	3	6.748	0.600	0.346	0.346	0.342	0.345
	4	7.060	0.673	0.583	0.479	0.479	0.468
	5	7.444	4.523	0.632	0.574	0.574	0.589
<b>10</b>	1	0.189	0.181	0.180	0.180	0.180	0.183
	2	2.092	0.219	0.218	0.218	0.218	0.219
	3	4.803	0.498	0.289	0.289	0.285	0.287
	4	5.023	0.552	0.486	0.400	0.400	0.388
	5	5.299	3.224	0.526	0.479	0.479	0.487
<b>Métal</b> $n=100$	1	0.152	0.145	0.144	0.144	0.144	0.144
	2	1.798	0.175	0.174	0.174	0.174	0.174
	3	4.128	0.398	0.231	0.231	0.228	0.228
	4	4.318	0.444	0.388	0.319	0.319	0.305
	5	4.554	2.769	0.421	0.383	0.383	0.382



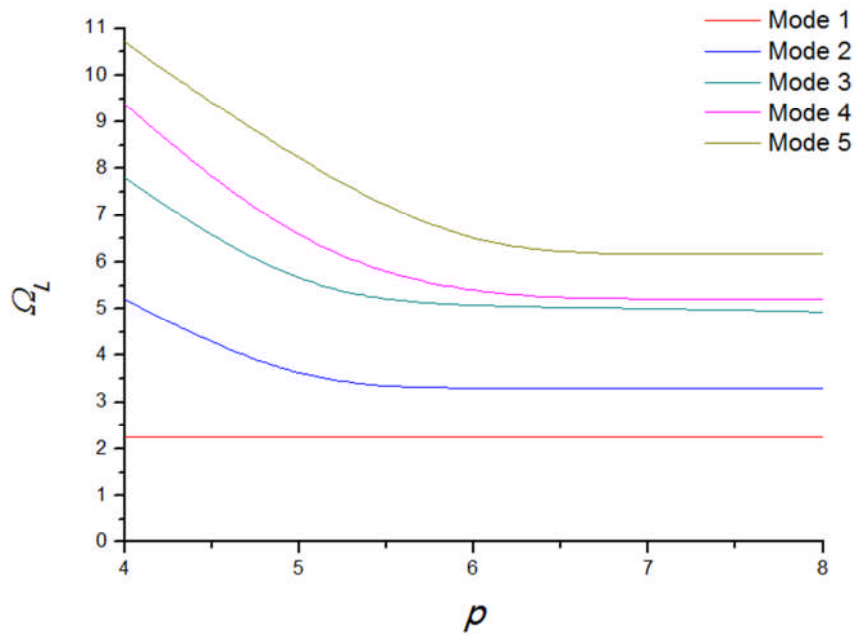
**Figure 6.8 :** Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaires d’une plaque annulaire sectorielle mince à gradient fonctionnel encastrée ( $h/b=0.005$ ).

**Tableau.6.5 :** Paramètres de fréquence linéaire  $\Omega_L$  pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastrée avec,  $\phi = 60^\circ$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $h/b = 0,05$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $n = 1$ .

$\Delta T$	Mode	$\rho$				
		4	5	6	7	8
<b>0°C</b>	1	2,254	2,249	2,247	2,247	2,247
	2	5,206	3,323	3,317	3,305	3,305
	3	7,822	5,288	5,057	5,024	4,945
	4	9,388	6,288	5,253	5,223	5,22
	5	10,711	8,812	6,213	6,179	6,178
<b>300°C</b>	1	2,249	2,243	2,241	2,241	2,241
	2	5,201	3,316	3,309	3,298	3,297
	3	7,817	5,282	5,049	5,015	4,936
	4	9,382	6,225	5,247	5,216	5,213
	5	10,706	8,117	6,205	6,172	6,170



**Figure 6.9 :** Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaires d'une plaque modérément épaisse à gradient fonctionnel encadrée ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ).



**Figure 6.10 :** Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences linéaires d'une plaque à gradient fonctionnel encadrée ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=300^\circ\text{C}$ ).

Les graphes (6.8-10) montrent que l'augmentation du degré  $p$  du polynôme d'interpolation est nécessaire pour la stabilité de convergence pour la plaque mince ( $h/b=0.005$ ) et modérément épaisse ( $h/b=0.05$ ) notamment pour les modes  $\geq 2$ . Une

remarque générale concernant les résultats obtenus est que la convergence est toujours atteinte pour des différents rapports géométriques. Et ceci implique que la méthode utilisée donne des bons résultats.

### 6.3.2. Etude paramétrique

Une étude paramétrique sur les paramètres de fréquences linéaires d'une plaque annulaires sectorielle épaisse avec différents angles de secteur, rapports de rayon interne/externe, températures, et types de matériaux FGM est présentée dans cette partie.

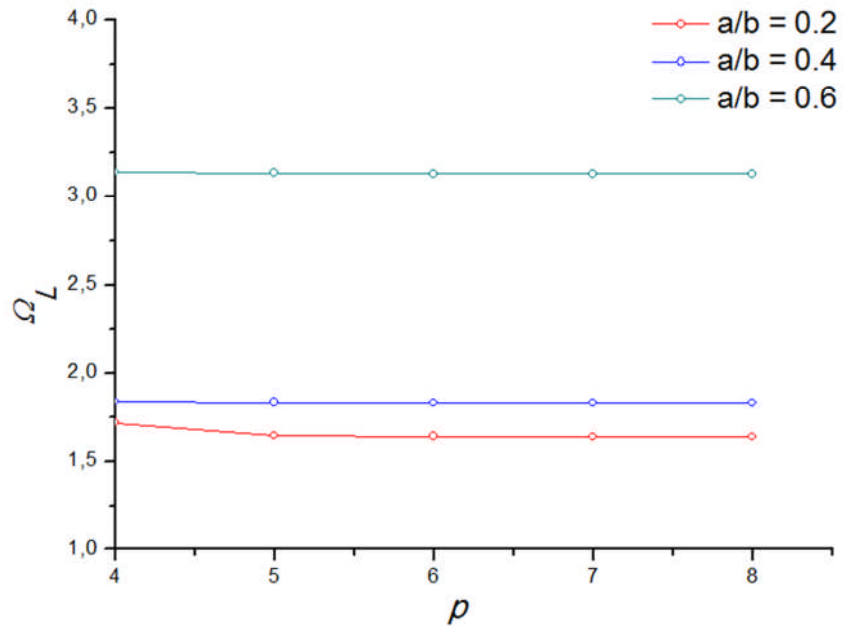
Les valeurs de l'angle de secteur, rapport de rayon interne/externe, et température sont égales à ( $\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  et), ( $a/b = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6$ ), ( $\Delta T = 300^\circ\text{C}, 400^\circ\text{C}, 500^\circ\text{C}, 600^\circ\text{C}$ ). Les résultats dans les tableaux montrent la convergence jusqu'à trois chiffres significatifs. Basé sur les résultats dans ces tableaux les remarques suivantes peuvent être faites

#### 6.3.2.1 Influence du rapport a/b

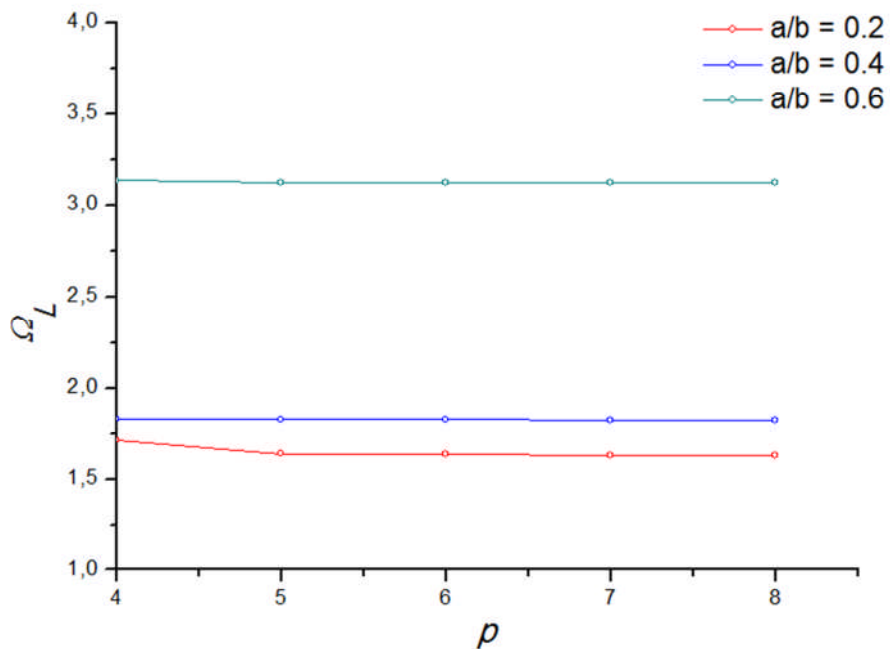
Pour une plaque à gradient fonctionnel encadrée, la convergence des paramètres de fréquence de la plaque avec trois différents rapports de rayon interne/externe pour deux différentes températures est montrée dans le tableau 6.6.

**Tableau.6.6 :** Paramètres de fréquence linéaire  $\Omega_L$  pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encadrée avec :  $\phi = 60^\circ$ ,  $h/b = 0,05$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $n = 1$ .

$\Delta T$	$a/b$	$\rho$				
		4	5	6	7	8
$0^\circ\text{C}$	0.2	1,716	1,643	1,638	1,636	1,636
	0.4	1,836	1,833	1,831	1,831	1,830
	0.6	3,138	3,131	3,127	3,127	3,127
$300^\circ\text{C}$	0.2	1,712	1,639	1,634	1,632	1,632
	0.4	1,831	1,827	1,826	1,825	1,825
	0.6	3,133	3,125	3,122	3,122	3,121



**Figure 6.11:** Convergence des paramètres de fréquence linéaires d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents rapports de rayons ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ , FGM1).



**Figure 6.12:** Convergence des paramètres de fréquence linéaires d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents rapports de rayons ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=300^\circ\text{C}$ , FGM1).

Les graphes 6.11 et 6.12 montrent que l'augmentation du rapport  $a/b$  de 0.2 à 0.6 augmente les paramètres de fréquences indépendamment de l'angle de secteur, donc l'effet du rapport  $a/b$  de sur le paramètre de fréquence n'est pas significatif dans le cas où  $a/b$  varie entre 0.2 et 0.5. L'effet devient signifiant lorsque de  $a/b > 0.5$ , et dans cette gamme, les paramètres de fréquence pour la plupart des modes de vibration augmentent.

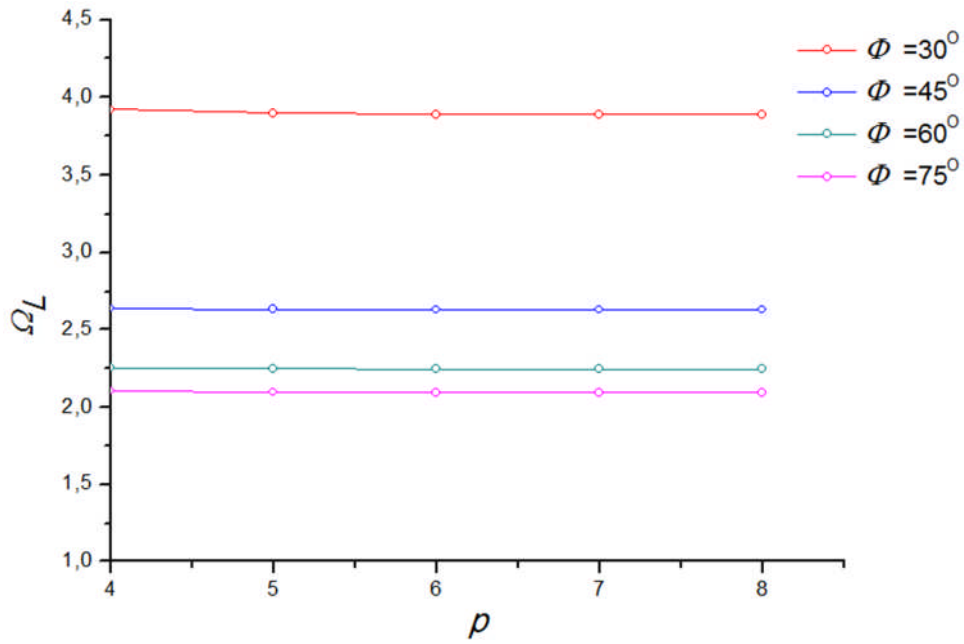
### 6.3.2.2 Influence de l'angle de secteur

Pour une plaque à gradient fonctionnel encadrée, et pour différents angles  $\phi$  les résultats des paramètres de fréquences pour le mode fondamental (tableau 6.7) montrent une convergence rapide lorsque  $p$  augmente.

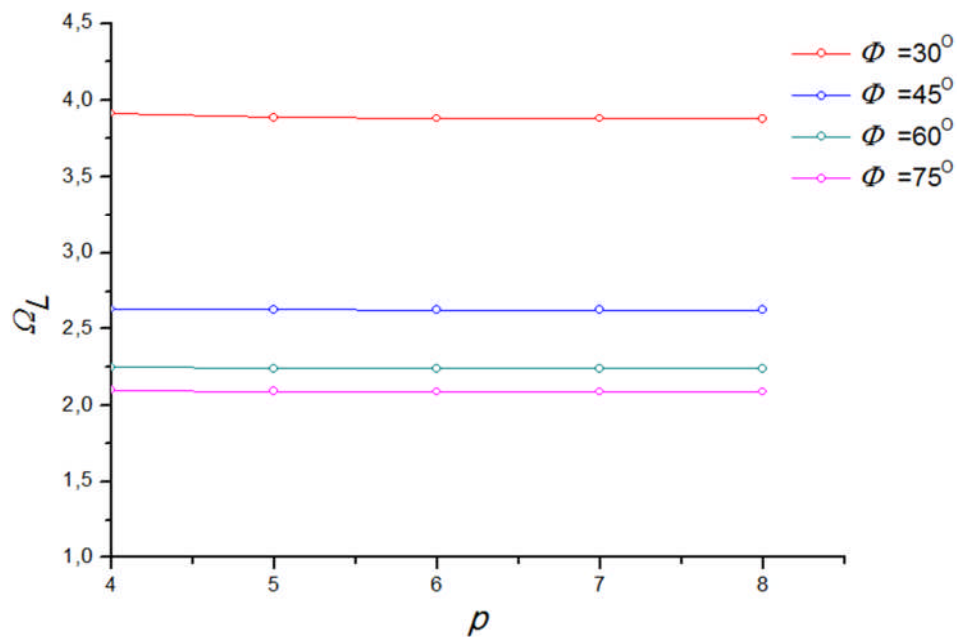
**Tableau.6.7 :** Paramètres de fréquence linéaires  $\Omega_L$  pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec,  $a/b = 0.5$ ,  $h/b = 0.05$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$ .

$\Delta T$	$\phi$	$p$				
		4	5	6	7	8
<b>0°C</b>	30°	3,920	3,894	3,888	3,887	3,887
	45°	2,640	2,637	2,634	2,634	2,634
	60°	2,254	2,249	2,247	2,247	2,247
	75°	2,106	2,098	2,096	2,096	2,096
<b>300°C</b>	30°	3,913	3,887	3,882	3,881	3,880
	45°	2,633	2,631	2,628	2,628	2,627
	60°	2,249	2,243	2,241	2,241	2,241
	75°	2,101	2,093	2,091	2,091	2,090

Les graphes 6.13 et 6.14 montrent la convergence des paramètres de fréquences linéaires d'une plaque ( $h/b=0.05$ ,  $n=1$ ,  $k = \pi^2/12$ ) avec ( $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $300^\circ\text{C}$ ) et l'angle  $\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ . D'après les allures des courbes, nous remarquons que les paramètres de fréquences augmentent lorsque l'angle  $\phi$  diminue, et qu'il n'y a pas une grande influence de la température sur les résultats.



**Figure 6.13:** Convergence des paramètres de fréquence linéaires d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents angles de secteurs ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ , FGM1).



**Figure 6.14:** Convergence des paramètres de fréquence linéaires d'une plaque à gradient fonctionnel avec différents angles de secteurs ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=300^\circ\text{C}$ , FGM1).

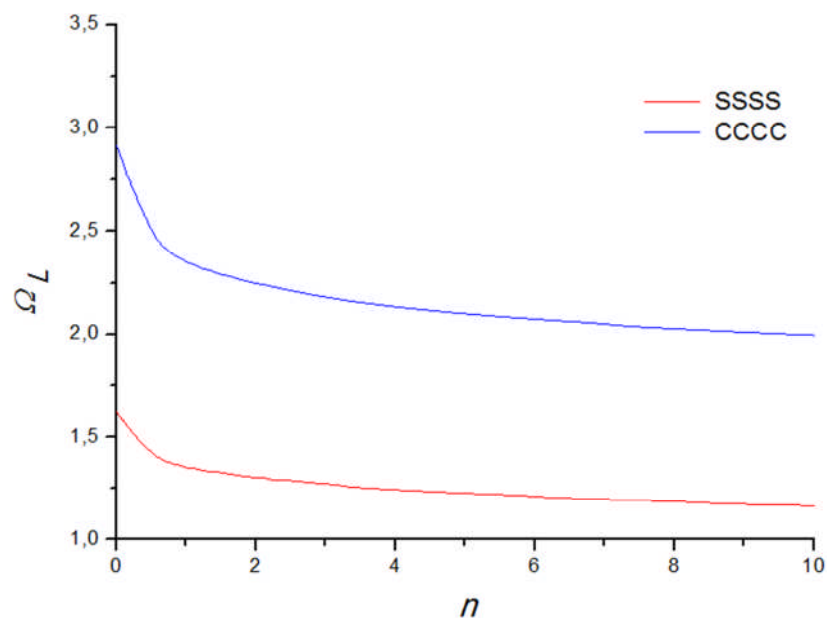


### 6.3.2.3 Influence des conditions aux limites

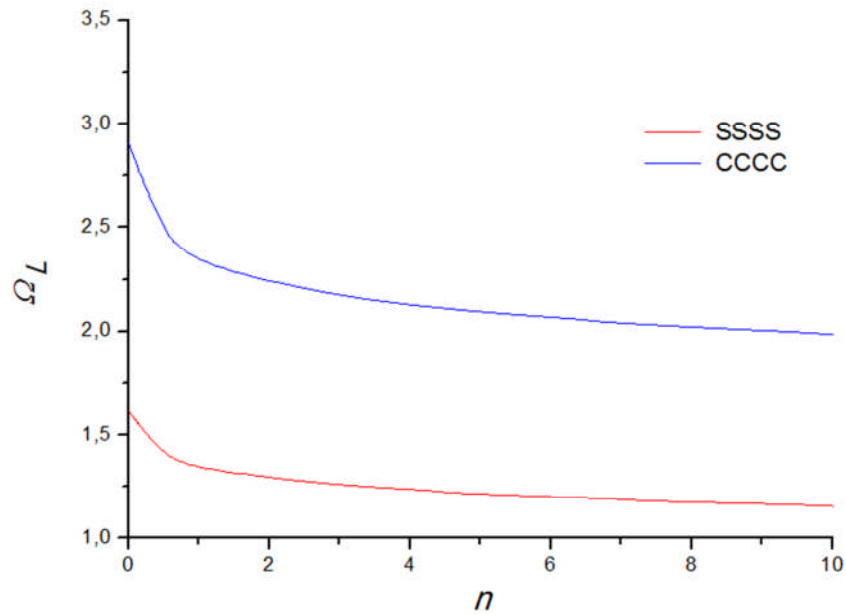
Pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel, avec différentes conditions aux limites, nous notons par SSSS une plaque simplement appuyée et CCCC pour une plaque encastree. Les résultats des paramètres de fréquences pour le mode fondamental sont montrés dans le tableau 6.8 en fonction de l'exposant  $n$ .

**Tableau.6.8 :** Paramètres de fréquence linéaires  $\Omega_L$  pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec,  $a/b = 0.5$ ,  $h/b = 0.05$ ,  $\phi = 60^\circ$ ,  $\nu = 0.3$ .

$\Delta T$		$n$				
		0	0.5	1	10	100
0°C	SSSS	1.623	1.410	1.313	1.077	0.872
	CCCC	2.913	2.485	2.247	1.836	1.557
300°C	SSSS	1.616	1.403	1.305	1.068	0.862
	CCCC	2.908	2.480	2.241	1.829	1.551



**Figure 6.15:** Comparaison des paramètres de fréquence linéaire d'une plaque à gradient fonctionnel avec différentes conditions aux limites ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ , FGM1).



**Figure 6.16:** Comparaison des paramètres de fréquence linéaires d'une plaque à gradient fonctionnel avec différentes conditions aux limites ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=300^\circ\text{C}$ , FGM1).

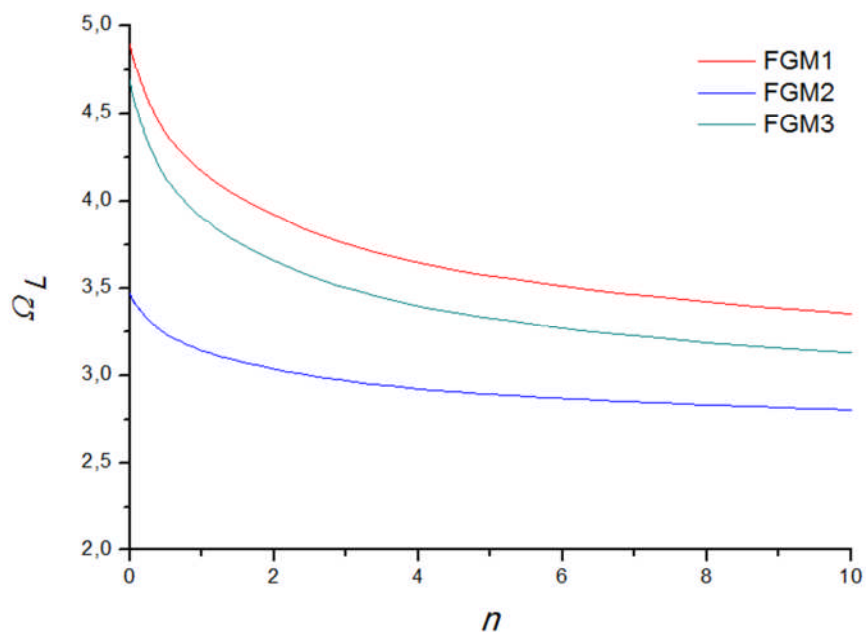
Les courbes 6.15 et 6.16 représentent la variation de paramètres de fréquences en fonction de l'exposant  $n$  pour différents conditions aux limites. D'après ces figures nous remarquons la grande influence des conditions aux limites sur la vibration des plaques annulaires sectorielles.

#### 6.3.2.4 Influence de nuance FGM

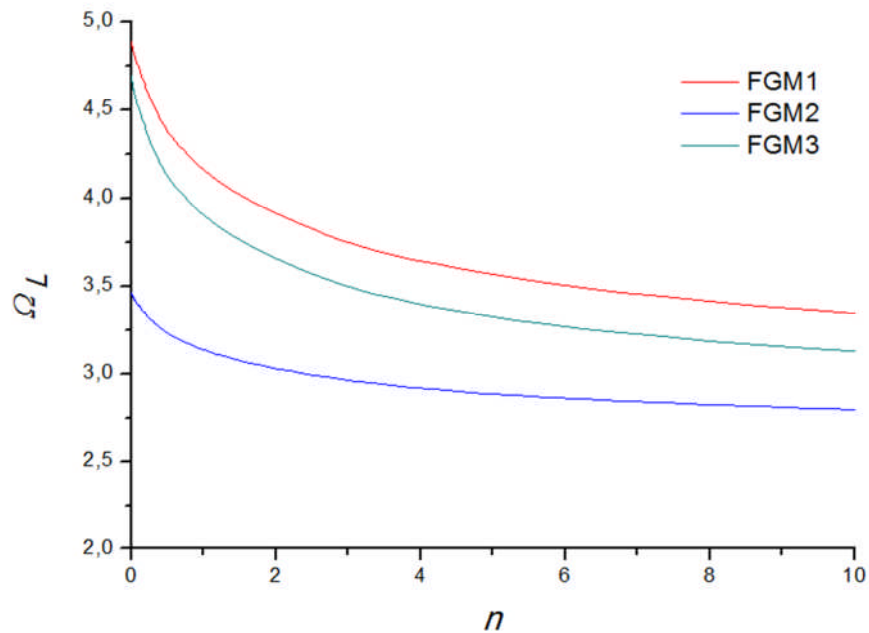
Dans cette partie, une étude des paramètres de fréquences linéaires d'une plaque annulaire sectorielle encastrée pour différents types de matériaux FGM est présentée. Les résultats obtenus (tableau 6.9) montrent la variation des paramètres de fréquences linéaires en fonction de l'exposant  $n$  ( $n = 0, 0.01, 0.1, 1, 10$ ) et avec la température  $\Delta T$  ( $\Delta T = 0^\circ\text{C}$  et  $300^\circ\text{C}$ ).

**Tableau.6.9 :** Paramètres de fréquence linéaires  $\Omega_L$  pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastée avec :  $a/b = 0.5$  ,  $h/b = 0.1$ ,  $\phi = 60^\circ$  ,  $\nu = 0.3$ .

$\Delta T$		$n$				
		0	0,01	0,1	1	10
0°C	FGM 1	4,89	4,873	4,727	3,842	3,029
	FGM 2	3,469	3,459	3,381	2,998	2,674
	FGM 3	4,693	4,67	4,482	3,565	2,828
300°C	FGM 1	4,885	4,868	4,722	3,836	3,022
	FGM 2	3,464	3,455	3,377	2,993	2,667
	FGM 3	4,689	4,666	4,478	3,564	2,828



**Figure 6.17:** Paramètres de fréquence linéaires du mode fondamental pour différents types de matériaux FGM ( $h/b=0.1$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ).



**Figure 6.18:** Paramètres de fréquence linéaires du mode fondamental pour différents types de matériaux FGM ( $h/b=0.1$ ,  $\Delta T=300^\circ$ ).

Les graphes 6.17 et 6.18 montrent que les courbes présentent les mêmes allures pour les deux températures. Les fréquences relatives aux matériaux FGM1 et FGM3 sont proches par rapport au matériau FGM2. Les paramètres de fréquence diminuent lorsque  $n$  augmente. C'est l'effet de la densité du céramique qui explique l'approche entre les résultats relatifs aux matériaux FGM1 et FGM3.

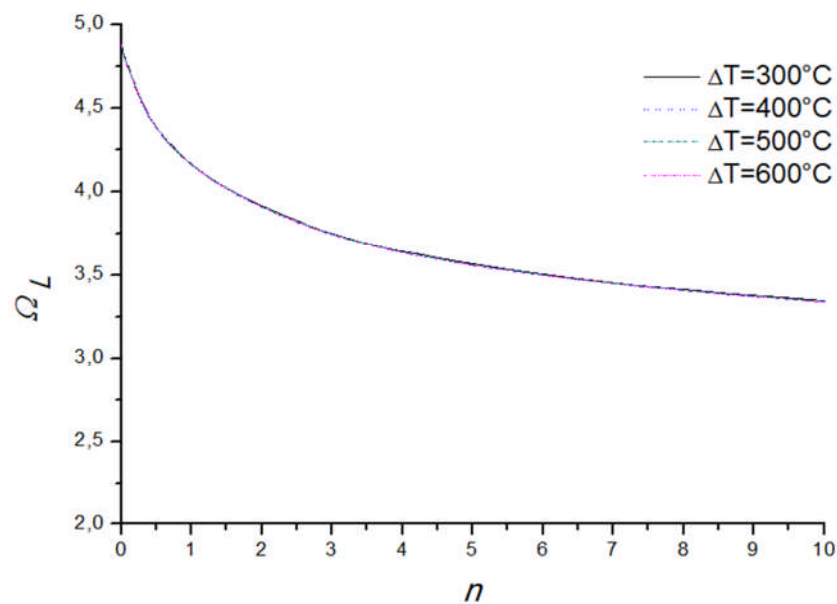
### 6.3.2.5 Influence de la température

Le tableau 6.10 présente la variation des paramètres de fréquence du premier mode pour différentes valeurs de la température ( $\Delta T = 300^\circ\text{C}$ ,  $400^\circ\text{C}$ ,  $500^\circ\text{C}$ ,  $600^\circ\text{C}$ ) en fonction de l'exposant  $n$  pour une plaque annulaire sectorielle encastrée avec ( $h/b = 0.1$ ,  $a/b = 0.5$ ,  $\phi = 60$ ) et pour deux types de matériaux FGM. Les valeurs de  $\Delta T$  sont en fonction de  $T_c$  (Température de la céramique) et  $T_m$  (Température du métal).

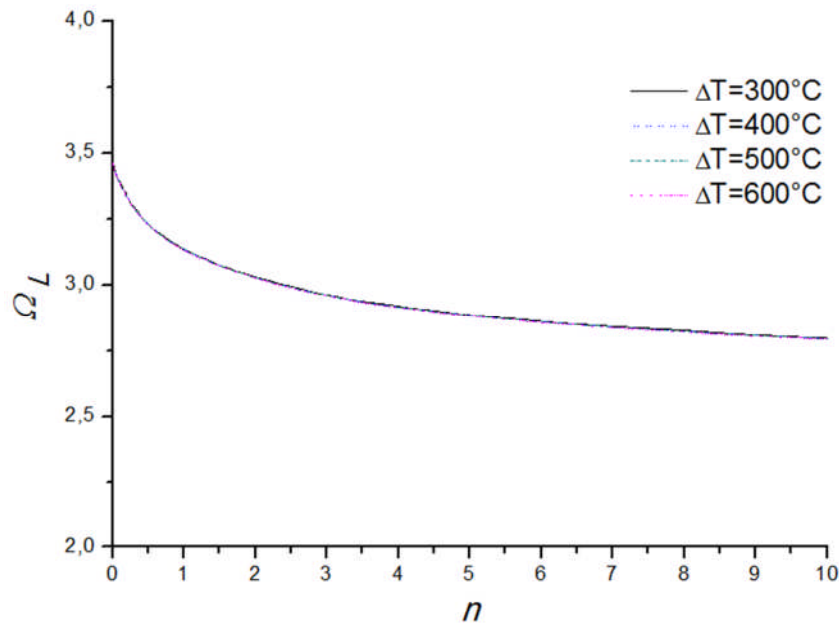
A partir de tableau 6.10 et les figures 6.19 et 6.20 nous remarquons la faible influence de la température sur les paramètres de fréquence. Les courbes sont confondues pour les deux types de matériaux FGM1 et FGM2 avec  $n = 0, 0.01, 0.1, 1$  et  $10$ .

**Tableau.6.10:** Paramètres de fréquence linéaires  $\Omega_L$  pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel avec encastrée avec :  $a/b = 0.5$   $h/b = 0.1$ ,  $\phi = 60^\circ$ .

	$\Delta T$	$n$				
		0	0,01	0,1	1	10
<b>FGM 1</b>	300°C	4,885	4,868	4,722	3,836	3,022
	400°C	4,883	4,866	4,720	3,834	3,020
	500°C	4,882	4,865	4,719	3,832	3,017
	600°C	4,881	4,863	4,717	3,830	3,015
<b>FGM 2</b>	300°C	3,464	3,455	3,377	2,993	2,667
	400°C	3,463	3,454	3,375	2,992	2,665
	500°C	3,462	3,452	3,374	2,991	2,664
	600°C	3,460	3,451	3,372	2,989	2,662



**Figure 6.19:** Paramètres de fréquences linéaires du mode fondamental d’une plaque à gradient fonctionnel encastrée pour différentes températures ( $h/b=0.1$ , FGM 1).



**Figure 6.20:** Paramètres de fréquences linéaires du mode fondamental d'une plaque à gradient fonctionnel encadrée pour différentes températures ( $h/b=0.1$ , FGM 2).

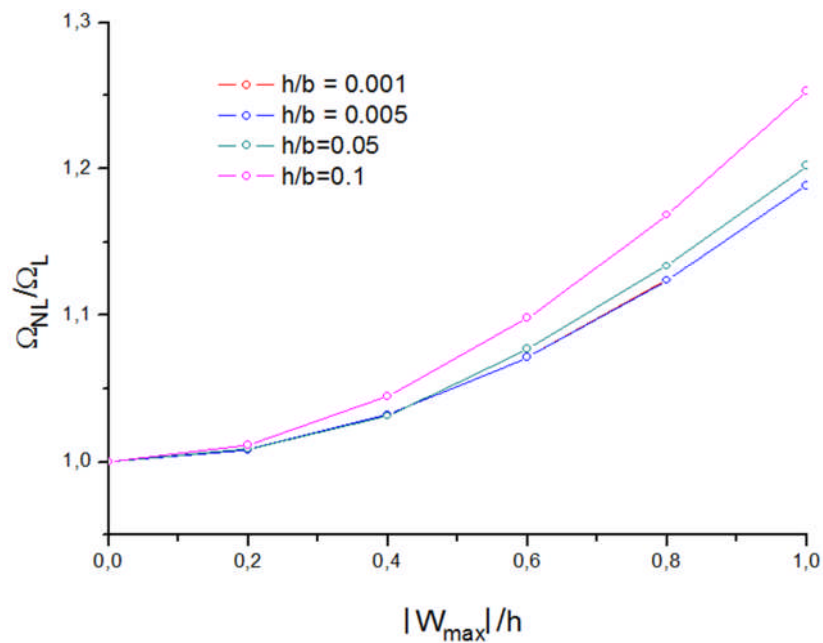
### 6.3.3. Etude de vibration non linéaire

La convergence des fréquences non-linéaires dépend de la convergence des fréquences linéaires. Dans la première partie, nous constatons une bonne convergence des résultats de la vibration linéaire de la plaque. Dans cette section, une étude de la convergence des vibrations non-linéaires est présentée. Par la même occasion, une étude paramétrique avec l'influence de plusieurs paramètres sur les fréquences non-linéaires est abordée. Les mêmes caractéristiques géométriques de la plaque utilisée dans la section précédente sont maintenues.

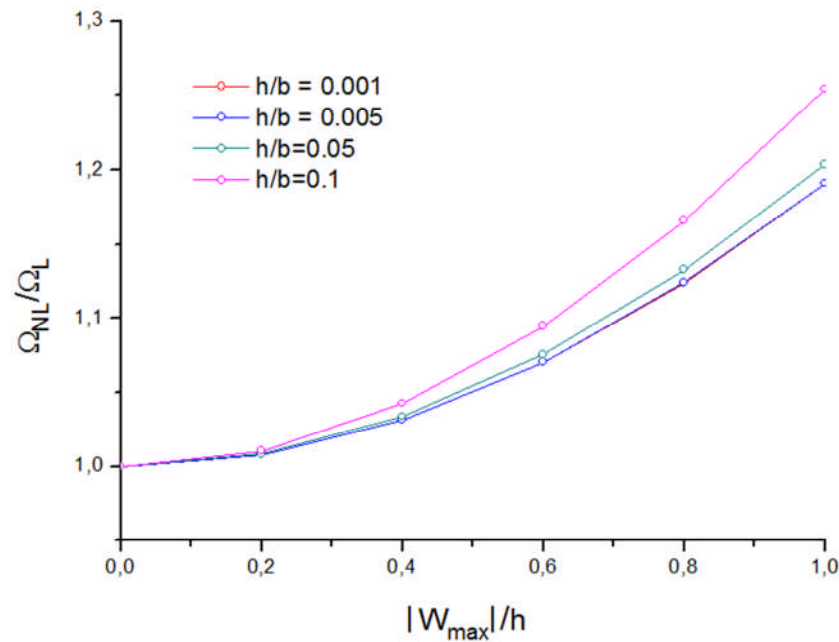
Le tableau 6.11 donne les rapports des paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires  $\Omega_{NL}/\Omega_L$  en fonction de l'amplitude maximale adimensionnelle  $|W_{max}|/h$  pour le mode fondamental des plaques annulaires sectorielles encadrées. Quatre rapports d'épaisseur  $h/b = 0.001, 0.005, 0.05$  et  $0.1$  et deux angles de secteur  $\phi = 60^\circ$  et  $90^\circ$  sont considérés pour le mélange FGM2.

**Tableau.6.11:** Rapports des paramètres de fréquence non-linéaires aux fréquences linéaires  $\Omega_{NL}/\Omega_L$  pour le mode fondamental des plaques annulaires sectorielles à gradient fonctionnel avec :  $a/b = 0.5, \nu = 0.3$ .

$\phi$	$h/b$	$ W_{max} /h$				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$60^\circ$	0.001	1.00817	1.03232	1.07142	1.12397	1.18827
	0.005	1.00817	1.03231	1.07137	1.12385	1.18800
	0.05	1.00891	1.03150	1.07733	1.13362	1.20193
	0.1	1.01142	1.04484	1.09813	1.16854	1.25332
$90^\circ$	0.001	1.00795	1.03165	1.07066	1.12423	1.19124
	0.005	1.00795	1.03165	1.07068	1.12425	1.19124
	0.05	1.00856	1.03403	1.07581	1.13291	1.20386
	0.1	1.01076	1.04273	1.09506	1.16632	1.25440



**Figure 6.21:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastree (FGM2,  $a/b=0.5, \Delta T=0^\circ C, n=1, \phi = 60^\circ$ ).



**Figure 6.22:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastré (FGM2,  $a/b=0.5$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 90^\circ$ ).

Dans le domaine des vibrations non linéaires des structures ces courbes sont connues sous le nom de « courbes d'épine dorsale ». Dans ces courbes, l'amplitude de la vibration est dépendante de la fréquence. Le comportement de durcissement qui caractérisé par des fréquences croissantes est clairement vu dans les figures (6.21 et 6.22).

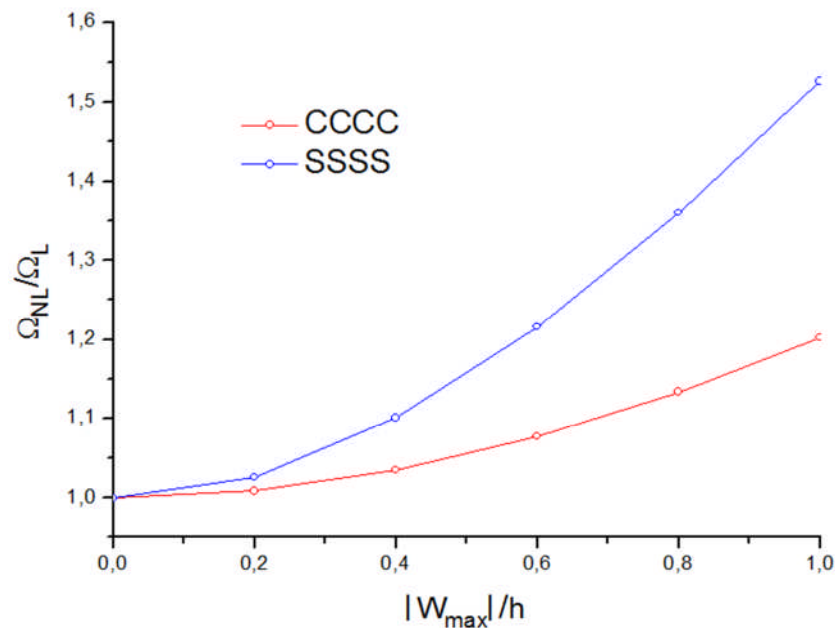
Les effets des conditions aux limites, angle de secteur, rapport de rayons interne/externe, rapport épaisseur/rayon externe, du type de matériaux FGM, et de l'augmentation de la température sur les courbes d'épine dorsale sont alors étudiés. Les rapports de paramètres de fréquences non-linéaires aux fréquences linéaires  $\Omega_{NL}/\Omega_L$  sont calculés en fonction de l'amplitude maximale adimensionnelle  $|W_{max}|/h$  pour les modes fondamentaux des plaques annulaires sectorielle à gradient fonctionnel encastrées avec différents paramètres géométriques et physiques.

Les valeurs des paramètres géométriques ( $h/b = 0.001, 0.005, 0.05, 0.1$ ), ( $\varphi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ ), ( $a/b = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6$ ), température ( $\Delta T = 300^\circ\text{C}, 400^\circ\text{C}, 500^\circ, 600^\circ\text{C}$ ) et trois types de matériaux FGM sont choisis. Les courbes résultantes d'épine dorsale sont montrées dans les figures 6.23 - 27.



### 6.3.3.1. Influence des conditions aux limites

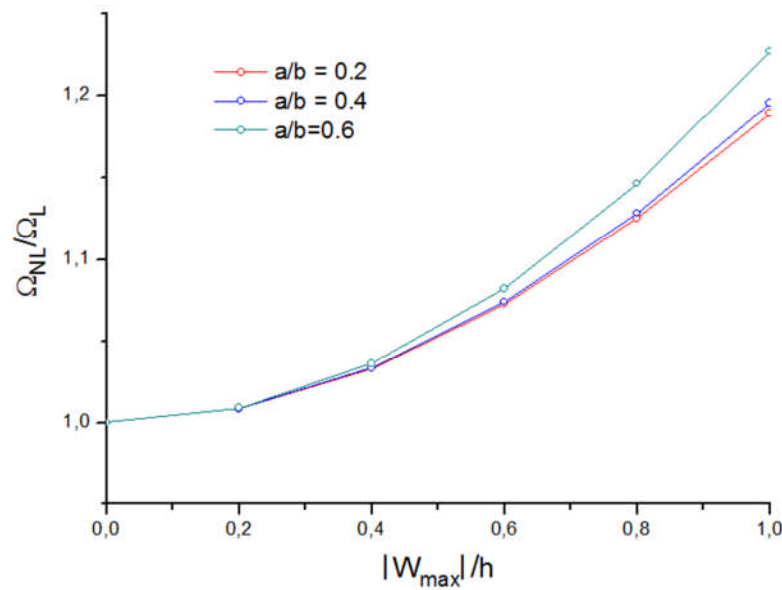
La figure 6.23 représente le rapport amplitude maximale/épaisseur ( $|W_{\max}|/h$ ) en fonction du rapport de paramètre de fréquence non linéaire sur le paramètre de fréquence linéaire ( $\Omega_{NL}/\Omega_L$ ). Deux conditions aux limites sont considérées, encastées et simplement appuyée.



**Figure 6.23:** Courbes d'épine dorsale du mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel (FGM2,  $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 60^\circ$ ).

### 6.3.3.2. Influence du rapport de rayons

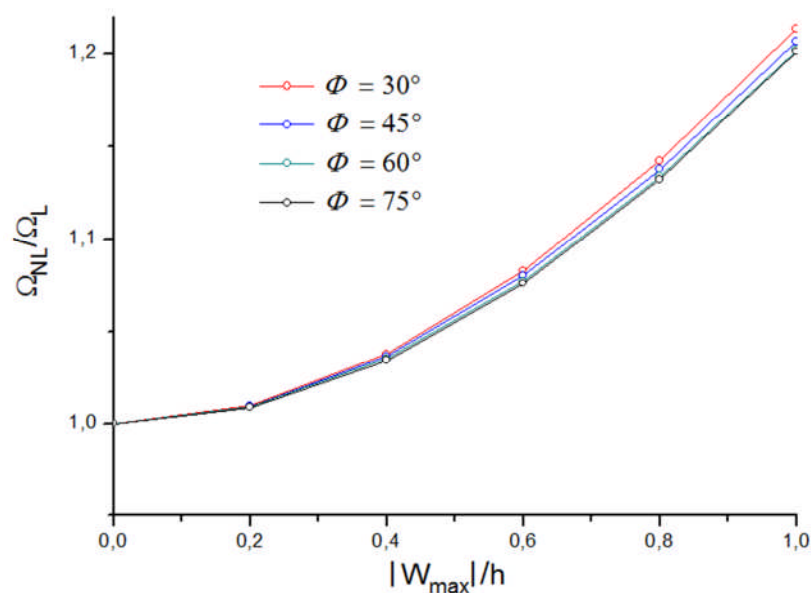
La figure 6.24 représente la variation de rapport de paramètre de fréquence du mode fondamental en fonction de l'amplitude maximale d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel (FGM2) pour différents rapports de rayons  $a/b$ . Les courbes montrent que l'augmentation du rapport de rayons conduit à une augmentation de l'effet de durcissement.



**Figure 6.24:** Courbes d'épine dorsale du mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastré (FGM2,  $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 90^\circ$ ).

### 6.3.3.3. Influence de l'angle de secteur

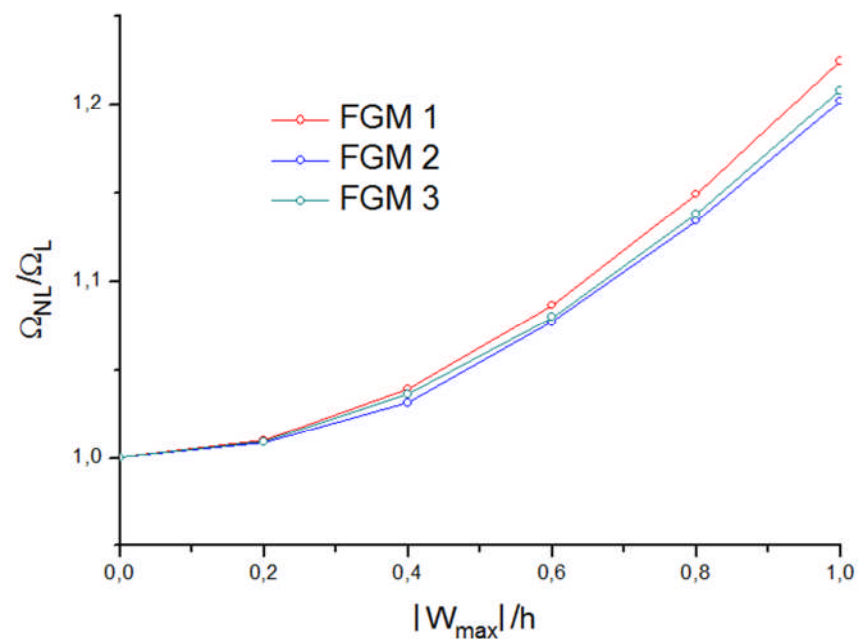
Un autre paramètre géométrique est étudié, il s'agit de l'angle de secteur de la plaque. La figure 6.25 montre l'influence de ce paramètre sur les courbes d'épines dorsales, les allures montrent une légère influence sur le comportement de durcissement.



**Figure 6.25:** Courbes d'épine dorsale du mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastré (FGM2,  $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $a/b=0.5$ ,  $n=1$ ).

### 6.3.3.4. Influence de nuance

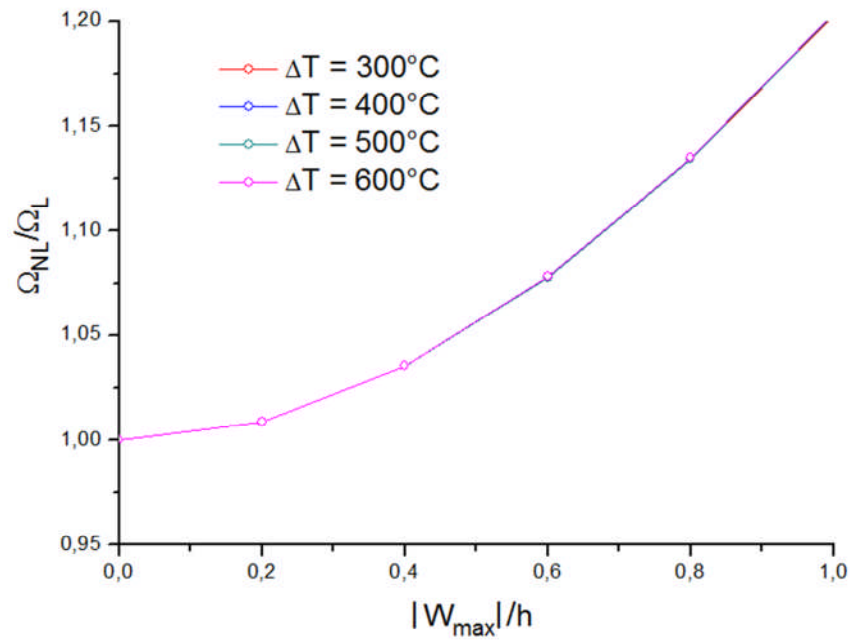
Dans la figure 6.26 nous remarquons que le comportement de durcissement est plus important dans le cas de FGM1. Pour les cas de FGM2 et FGM3, le durcissement est presque le même pour des variations similaires des paramètres. Ce comportement des matériaux à gradient fonctionnels provient principalement de la variation des paramètres physiques de ces matériaux et la loi de mélange.



**Figure 6.26:** Courbes d'épine dorsale du mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastree ( $h/b=0.05$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $a/b=0.5$ ,  $n=1$ ,  $\phi = 60^\circ$ ).

### 6.3.3.5. Influence de la température

Considérons maintenant l'effet de la température sur les courbes d'épine dorsale (figure 6.27). Le graphe montre une légère variation avec l'augmentation de température et les courbes sont presque les mêmes pour les quatre températures. Donc nous pouvons dire qu'il n'y a pas une grande influence de la température sur le comportement non linéaire des plaques annulaires sectorielles à gradient fonctionnel.



**Figure 6.27:** Courbes d'épine dorsale pour le mode fondamental d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel encastré ( $h/b=0.05$ ,  $a/b=0.5$ ,  $n=1$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ,  $\phi = 60^\circ$ ).

Donc le comportement de durcissement pour une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel peut augmenter ou diminuer en fonction des paramètres géométriques et physiques.

## **CONCLUSION GENERALE**

Dans ce travail de recherche, le comportement vibratoire non linéaire des plaques annulaires sectorielles à gradient fonctionnel dans un environnement thermique est étudié en se basant sur la théorie du premier ordre des plaques. Les effets de cisaillement transversal, inertie de rotation, et non-linéarité géométrique sont prises en compte. Les propriétés des matériaux sont supposées être indépendantes de la température et varient continuellement selon une loi de puissance de la fraction du volume des constituants. En se basant sur la théorie non linéaire des plaques de Von Karman et la méthode des éléments finis hiérarchique, les équations du mouvement sont obtenues. Les équations non-linéaires du mouvement sont transformées du domaine temporel au domaine fréquentiel par la méthode d'équilibrage harmonique. Les équations non-linéaires résultantes sont résolues itérativement par la méthode du mode linéarisé actualisé.

Les fréquences linéaires et non-linéaires sont déterminées. Une série de plaques annulaires sectorielles FGM sont traitées. Le cas d'une plaque isotrope a également été montré. Les résultats pour les fréquences linéaires ont illustré la convergence rapide et la haute précision de la méthode utilisée.

Des comparaisons sont faites avec d'autres méthodes et montrent un très bon accord. Ces résultats peuvent servir à valider d'autres méthodes. Une étude paramétrique en fonction des paramètres géométriques, type de matériau, constante de matériau  $n$ , température, conditions aux limites, et épaisseur de la plaque est menée. Quelques conclusions générales peuvent être citées :

- Les paramètres géométriques des plaques annulaires sectorielles (rapport des rayons, angle de secteur, épaisseur, et conditions aux limites influent sur le comportement vibratoire linéaire.
- Les types de matériaux à gradient fonctionnel traités dans ce travail montrent une grande influence sur les paramètres de fréquence linéaires lorsque l'exposant de la fraction volumique varie.
- L'effet de l'augmentation de la température montre une faible influence sur les comportements vibratoires linéaires et non linéaires de la plaque à gradient fonctionnel.

- L'étude paramétrique non linéaire en termes de la géométrie, conditions aux limites, et propriétés des matériaux FGM montrent que le comportement de durcissement d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel augmente ou diminue en fonction de ces paramètres.

## ANNEXE A

- **Calcul de la matrice de rigidité extensionnelle**

Dans cette annexe nous allons montrer le développement de la matrice de rigidité extensionnel  $\bar{K}$  lorsque nous injectons toute les inconnues, dans l'équation (4.22) on remplace les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par les coordonnées adimensionnelles  $(\xi, \eta)$  en respectant les équations (4.1-6), l'expression de l'énergie devient :

$$\begin{aligned}
 \bar{U} = \iint \left\{ & A_{11} \left( \left( \frac{\partial u}{(b-a)\partial\xi} \right)^2 \right) \right. \\
 & + A_{22} \left( \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{\partial v}{\phi\partial\eta} \right)^2 + 2 \frac{1}{[(b-a)\xi + a]^2} \frac{1}{\phi} \left( \frac{\partial v}{\partial\eta} \right) (u) \right. \\
 & + \left. \left( \frac{u}{[(b-a)\xi + a]} \right)^2 \right) \\
 & + 2A_{12} \left( \left( \frac{\partial u}{(b-a)\partial\xi} \right) \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{\partial v}{\phi\partial\eta} \right) \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\partial u}{(b-a)\partial\xi} \right) \left( \frac{u}{[(b-a)\xi + a]} \right) \right) \\
 & + A_{66} \left[ \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{\partial u}{\phi\partial\eta} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{\partial u}{\phi\partial\eta} \right) \left( \frac{\partial v}{(b-a)\partial\xi} \right) \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\partial v}{(b-a)\partial\xi} \right)^2 \right. \\
 & - 2 \left( \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{\partial u}{\phi\partial\eta} \right) \left( \frac{v}{[(b-a)\xi + a]} \right) \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\partial v}{(b-a)\partial\xi} \right) \left( \frac{v}{[(b-a)\xi + a]} \right) \right) + \left. \left( \frac{v}{[(b-a)\xi + a]} \right)^2 \right] \left. \right\} [(b-a)\xi \\
 & + a] (b-a) d\xi \phi d\eta
 \end{aligned}$$

Après la substitution des coordonnées polaires par les coordonnées adimensionnelles, on remplace maintenant les et les déplacements et les rotations par les équations (4.7-11), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \bar{U} \\
&= \iint \left\{ A_{11} \left( \left( \frac{1}{(b-a)} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta) \right)^2 \right) \right. \\
&+ A_{22} \left( \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{1}{\phi} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\
&+ 2 \frac{1}{[(b-a)\xi + a]^2} \frac{1}{\phi} \left( \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \right) \left( \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \right) \\
&+ \left. \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \right)^2 \right) \\
&+ 2A_{12} \left( \left( \frac{1}{(b-a)} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta) \right) \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{1}{\phi} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \right) \right. \\
&+ \left. \left( \frac{1}{(b-a)} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta) \right) \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \right) \right) \\
&+ A_{66} \left[ \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{1}{\phi} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\
&+ 2 \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{1}{\phi} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \right) \left( \frac{1}{(b-a)} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta) \right) \\
&+ \left. \left( \frac{1}{(b-a)} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta) \right)^2 \right. \\
&- 2 \left( \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \frac{1}{\phi} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta-1}(t) g_k(\xi) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} \right) \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \right) \right. \\
&+ \left. \left( \frac{1}{(b-a)} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} g_l(\eta) \right) \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \right) \right) \\
&+ \left. \left( \frac{1}{[(b-a)\xi + a]} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \bar{q}_{2\beta}(t) g_k(\xi) g_l(\eta) \right)^2 \right] \Big\} [(b-a)\xi + a] (b-a) d\xi \phi d\eta
\end{aligned}$$



En utilisant l'équation de Lagrange (4.48) on dérive  $\bar{U}$  par rapport au vecteur déplacement (4.69) :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{q}_{2\alpha-1}} \\
&= A_{11} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right) \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&+ A_{22} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t) \\
&+ A_{22} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&+ A_{12} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t) \\
&+ A_{12} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&+ A_{12} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi g_i(\xi) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&+ A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \frac{1}{\phi} \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&+ A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 g_i(\xi) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t) \\
&- A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{q}_{2\alpha}} \\
&= A_{22} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \frac{1}{\phi} \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t) \\
&+ A_{22} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&+ A_{12} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 g_i(\xi) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&+ A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&+ A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right) \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t) \\
&- A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \bar{q}_{2\beta-1}(t) \\
&- A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \phi \int_0^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \partial g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t) \\
&- A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \phi \int_0^1 g_i(\xi) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \partial g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t) \\
&+ A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \phi \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \partial g_l(\eta) d\eta \right) \bar{q}_{2\beta}(t)
\end{aligned}$$

Ces équations sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta-1} & \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta} \\ \bar{K}_{2\alpha,2\beta-1} & \bar{K}_{2\alpha,2\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_{2\beta-1} \\ \bar{\mathbf{q}}_{2\beta} \end{Bmatrix}$$

Donc les composantes de la matrice de rigidité élémentaire extensionnelle  $[\bar{K}]$  sont données par :

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{2\alpha-1,2\beta-1} = & A_{11} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right) \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \\
& + A_{22} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \\
& + A_{12} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \\
& + A_{12} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi g_i(\xi) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \\
& + A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \frac{1}{\phi} \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{2\alpha-1,2\beta} = & A_{22} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \\
& + A_{12} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \\
& + A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 g_i(\xi) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} g_l(\eta) d\eta \right) \\
& - A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} g_l(\eta) d\eta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{2\alpha,2\beta-1} = & A_{22} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} g_l(\eta) d\eta \right) \\
& + A_{12} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 g_i(\xi) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} g_l(\eta) d\eta \right) \\
& + A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \\
& - A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{2\alpha,2\beta} = & A_{22} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \frac{1}{\phi} \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_l(\eta)}{\partial \eta} d\eta \right) \\
& + A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \int_0^1 \phi \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right) \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 g_j(\eta) g_l(\eta) d\eta \right) \\
& + A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \phi \int_0^1 \left( \frac{(b-a)}{[(b-a)\xi + a]} \right) g_i(\xi) g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \partial g_l(\eta) d\eta \right) \\
& - A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \phi \int_0^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} g_k(\xi) d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \partial g_l(\eta) d\eta \right) \\
& - A_{66} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{p+1} \left( \phi \int_0^1 g_i(\xi) \frac{\partial g_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^1 g_j(\eta) \partial g_l(\eta) d\eta \right)
\end{aligned}$$

Pour une forme réduite nous remplaçons les intégrales dans les expressions des composantes de la matrice de rigidité extensionnel par les expressions des intégrales suivantes :

$$I(\tau)_{i,j}^{\delta,\gamma} = \int_0^1 \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right)^\tau g_i^\delta g_j^\gamma d\xi$$

$$I(\tau)_{i,j,k}^{\delta,\gamma,\lambda} = \int_0^1 \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right)^\tau g_i^\delta g_j^\gamma g_k^\lambda d\xi$$

$$I(\tau)_{i,j,k,l}^{\delta,\gamma,\lambda,\mu} = \int_0^1 \left( \xi + \frac{a}{(b-a)} \right)^\tau g_i^\delta g_j^\gamma g_k^\lambda g_l^\mu d\xi$$

Où

$\delta, \gamma, \lambda, \mu$  : sont les degrés de dérivation ( $\delta, \gamma, \lambda, \mu = 0$  ou  $1$ ).

$\tau$  : est un constante ( $\tau = -3, -2, -1, 0, 1$ )

Donc les composantes de la matrice de rigidité extensionnels dans une forme plus lisibles sont écrites comme suit :

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta-1} & \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta} \\ \bar{K}_{2\alpha,2\beta-1} & \bar{K}_{2\alpha,2\beta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta-1} = \phi & \left[ A_{11} I(1)_{i,k}^{1,1} I(0)_{j,l}^{0,0} + A_{22} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,0} + A_{12} I(0)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,0} \right. \\ & \left. + A_{12} I(0)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{0,0} + \frac{A_{66}}{\phi^2} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2\alpha,2\beta-1} = A_{22} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,0} + A_{12} I(0)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,1} + A_{66} I(0)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{1,0} \\ - A_{66} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2\beta-1,2\alpha} = A_{22} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,0} + A_{12} I(0)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{1,0} + A_{66} I(0)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,1} \\ - A_{66} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2\alpha-1,2\beta-1} = \phi & \left[ \frac{A_{22}}{\phi^2} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,1} + A_{66} I(1)_{i,k}^{1,1} I(0)_{j,l}^{0,0} + A_{66} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,0} \right. \\ & \left. - A_{66} I(0)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,0} - A_{66} I(0)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{0,0} \right] \end{aligned}$$

## ANNEXE B

### 1. Matrice de rigidité $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{3\alpha-2,3\beta-2} & K_{3\alpha-2,3\beta-1} & K_{3\alpha-2,3\beta} \\ K_{3\alpha-1,3\beta-2} & K_{3\alpha-1,3\beta-1} & K_{3\alpha-1,3\beta} \\ K_{3\alpha,3\beta-2} & K_{3\alpha,3\beta-1} & K_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix}$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta-2} = \phi \kappa \left[ A_{44} I(1)_{i,k}^{1,1} I(0)_{j,l}^{0,0} + \frac{A_{55}}{\phi^2} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,1} \right]$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta-1} = -\kappa A_{55} (b-a) I(0)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,0}$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta} = \phi \kappa (b-a) A_{44} I(1)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,0}$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-2} = -\kappa A_{55} (b-a) I(0)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,1}$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-1} = \phi \kappa (b-a)^2 A_{55} I(1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,0} \\ + \phi \left[ \frac{D_{22}}{\phi^2} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,1} + D_{66} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,0} + D_{66} I(1)_{i,k}^{1,1} I(0)_{j,l}^{0,0} \right. \\ \left. - D_{66} I(0)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,0} - D_{66} I(0)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{0,0} \right]$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta} = -D_{22} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,0} - D_{12} I(0)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{1,0} + D_{66} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,1} - D_{66} I(0)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,1}$$

$$K_{3\alpha,3\beta-2} = \phi \kappa (b-a) A_{44} I(1)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{0,0}$$

$$K_{3\alpha,3\beta-1} = -D_{22} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,1} - D_{12} I(0)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,1} + D_{66} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,0} - D_{66} I(0)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{1,0}$$

$$K_{3\alpha,3\beta} = \phi \kappa (b-a)^2 A_{44} I(1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,0} \\ + \phi \left[ D_{11} I(1)_{i,k}^{1,1} I(0)_{j,l}^{0,0} + D_{22} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{0,0} + D_{12} I(0)_{i,k}^{0,1} I(0)_{j,l}^{0,0} \right. \\ \left. + D_{12} I(0)_{i,k}^{1,0} I(0)_{j,l}^{0,0} + \frac{D_{66}}{\phi^2} I(0)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,1} \right]$$

### 2. Matrice de rigidité linéaire de couplage extension-rotation $[\hat{K}]$

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} \hat{K}_{2\alpha-1,3\beta-2} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{2\alpha,3\beta-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{2\alpha-1,3\beta-1} = -B_{12}I(0)_{i,k}^{1,0}I(0)_{j,l}^{0,1} - B_{22}I(-1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{0,1} + B_{66}I(-1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{1,0} - B_{66}I(0)_{i,k}^{0,1}I(0)_{j,l}^{1,0}$$

$$\tilde{K}_{2\alpha-1,3\beta} = \phi \left[ B_{11}I(1)_{i,k}^{1,1}I(0)_{j,l}^{0,0} + B_{12}I(0)_{i,k}^{1,0}I(0)_{j,l}^{0,0} + B_{12}I(0)_{i,k}^{0,1}I(0)_{j,l}^{0,0} + B_{22}I(-1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{0,0} + \frac{B_{66}}{\phi^2}I(-1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{1,1} \right]$$

$$\tilde{K}_{2\alpha,3\beta-1} = \phi \left[ -\frac{B_{22}}{\phi^2}I(-1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{1,1} + B_{66}I(0)_{i,k}^{1,0}I(0)_{j,l}^{0,0} - B_{66}I(1)_{i,k}^{1,1}I(0)_{j,l}^{0,0} - B_{66}I(-1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{0,0} + B_{66}I(0)_{i,k}^{0,1}I(0)_{j,l}^{0,0} \right]$$

$$\tilde{K}_{2\alpha,3\beta} = B_{12}I(0)_{i,k}^{0,1}I(0)_{j,l}^{1,0} + B_{22}I(-1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{1,0} + B_{66}I(0)_{i,k}^{1,0}I(0)_{j,l}^{0,1} - B_{66}I(-1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{0,1}$$

### 3. Matrice masse [M]

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{M}_{2\alpha-1,2\beta-1} & 0 \\ 0 & \bar{M}_{2\alpha,2\beta} \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{3\alpha-2,3\beta-2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{3\alpha-1,3\beta-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix}$$

$$M_{2\alpha-1,2\beta-1} = I_0\phi(b-a)^2I(1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{0,0}$$

$$M_{3\alpha-2,3\beta-2} = M_{2\alpha,2\beta} = M_{2\alpha-1,2\beta-1}$$

$$M_{3\alpha-1,3\beta-1} = M_{3\alpha,3\beta} = I_2\phi(b-a)^2I(1)_{i,k}^{0,0}I(0)_{j,l}^{0,0}$$

### 4. Matrice de rigidité extension-flexion [\hat{K}]

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} \hat{K}_{2\alpha-1,3\beta-2} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{2\alpha,3\beta-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K}_{2\alpha-1,3\beta-2} = \frac{\phi}{2(b-a)} \left[ A_{11}\hat{I}(1)_{i,k,m}^{1,1,1}\hat{I}(0)_{j,l,n}^{0,0,0} + \frac{A_{22}}{\phi^2}\hat{I}(-2)_{i,k,m}^{0,0,0}\hat{I}(0)_{j,l,n}^{0,1,1} + \frac{A_{12}}{\phi^2}\hat{I}(-1)_{i,k,m}^{1,0,0}\hat{I}(0)_{j,l,n}^{0,1,1} + A_{12}\hat{I}(0)_{i,k,m}^{0,1,1}\hat{I}(0)_{j,l,n}^{0,0,0} - \frac{A_{66}}{\phi^2}\hat{I}(-1)_{i,k,m}^{0,1,0}\hat{I}(0)_{j,l,n}^{1,0,1} - \frac{A_{66}}{\phi^2}\hat{I}(0)_{i,k,m}^{0,0,1}\hat{I}(0)_{j,l,n}^{1,1,0} \right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{2\alpha,3\beta-2} = \frac{\phi}{2(b-a)} & \left[ \frac{A_{22}}{\phi^3} \hat{I}(-2)_{i,k,m}^{0,0,0} \hat{I}(0)_{j,l,n}^{1,1,1} + \frac{A_{12}}{\phi} \hat{I}(0)_{i,k,m}^{0,1,1} \hat{I}(0)_{j,l,n}^{1,0,0} + \frac{A_{66}}{\phi} \hat{I}(-1)_{i,k,m}^{0,1,0} \hat{I}(0)_{j,l,n}^{0,0,1} \right. \\ & \left. + \frac{A_{66}}{\phi} \hat{I}(-1)_{i,k,m}^{0,0,1} \hat{I}(0)_{j,l,n}^{0,1,0} - \frac{A_{66}}{\phi} \hat{I}(0)_{i,k,m}^{1,1,0} \hat{I}(0)_{j,l,n}^{0,0,1} - \frac{A_{66}}{\phi} \hat{I}(0)_{i,k,m}^{1,0,1} \hat{I}(0)_{j,l,n}^{0,1,0} \right] \end{aligned}$$

### 5. Matrice de rigidité flexionnelle $[\tilde{K}]$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{3\alpha-2,3\beta-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{3\alpha-2,3\beta-2} = \frac{\phi}{2(b-a)^2} & \left[ A_{11} \tilde{I}(1)_{i,k,m,r}^{1,1,1,1} \tilde{I}(0)_{j,l,n,s}^{0,0,0,0} + \frac{A_{22}}{\phi^4} \tilde{I}(-3)_{i,k,m,r}^{0,0,0,0} \tilde{I}(0)_{j,l,n,s}^{1,1,1,1} \right. \\ & \left. + \frac{(A_{12} + 2A_{66})}{\phi^2} \tilde{I}(-1)_{i,k,m,r}^{1,1,0,0} \tilde{I}(0)_{j,l,n,s}^{0,0,1,1} + \frac{(A_{12} + 2A_{66})}{\phi^2} \tilde{I}(-1)_{i,k,m,r}^{0,0,1,1} \tilde{I}(0)_{j,l,n,s}^{1,1,0,0} \right] \end{aligned}$$

### 6. Matrice de rigidité due à la variation de température $[K_g]$

$$[K_g] = \begin{bmatrix} K_{g_{3\alpha-2,3\beta-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{g_{3\alpha-2,3\beta-2}} = -N_0 \phi \left[ I(1)_{i,k}^{1,1} I(0)_{j,l}^{0,0} + \frac{1}{\phi^2} I(-1)_{i,k}^{0,0} I(0)_{j,l}^{1,1} \right]$$



ANNEXE C

- *Exemple d'un fichier de donnée*

PLAQUE ANNULAIRE SECTORIELLE MATERIAU FGM (E-E-E-E)

8 4 4 1 .05 .5 75. 1. 300. 30. .05 .8225

1 1 1 1 1 1

2 1 1 1 1 1

3 1 1 1 1 1

4 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1

2 1 1 1 1 1

3 1 1 1 1 1

4 1 1 1 1 1

- *Exemple d'un fichier de sortie*

PLAQUE ANNULAIRE SECTORIELLE MATERIAU FGM (E-E-E-E)

BASIC PARAMETERS

IP NRN NRE NMODE H A PHI PLI DTC DTM WS SC

8 4 4 1 .50E-01 .50E+00 .75E+02 .10E+01 .30E+03 .30E+02 .50E-01 .82E+00

RESTRAINED NODES

NODE R1 R2 R3 R4 R5

1 1 1 1 1 1

2 1 1 1 1 1

3 1 1 1 1 1

4 1 1 1 1 1

RESTRAINED EDGES

EDGE	R1	R2	R3	R4	R5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1

NUMBER OF EQUATIONS = 147

LINEAR FREQUENCY PARAMETER

2.090

XI0	ETA0
.484	.500

ITER NONLINEAR TO LINEAR FREQUENCY RATIO

9	1.22514
---	---------

NONLINEAR TO LINEAR FREQUENCY RATIO

1.22514

## Références

ABDIZADEH, H., (1997).

**Elaboration et caractérisation de composites duplex «composites laminaires tri-couches à base d'alumine».**

*Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I-France, 212p.*

ALLAHVERDIZADEH, A., NAEI, M.H., BRAHAMI, M.N., (2008b).

**Vibration amplitude and thermal effects on nonlinear behavior of thin circular functionally graded plates.**

*Int. J. Mech. Sci. 50, 445-454.*

ALLAHVERDIZADEH, A. NAEI, M.H. NIKKHAH BAHRAMI, M., (2008).

**Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates.**

*Journal of Sound and Vibration 310, 966 – 984.*

BIRMAN, V., (2011).

**Plate Structures.**

*Springer Dordrecht Heidelberg London.*

BELALIA, S.A. HOUMAT, A., (2012).

**Nonlinear free vibration of functionally graded shear deformable sector plates by a curved triangular p-element.**

*European Journal of Mechanics A/Solids 35, 1-9.*

CHORFI, S.M. HOUMAT, A., (2010).

**Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form.**

*Composite Structures 92, 2573 – 2581.*

DELLA CROCE, L. VENINI, P., (2004).

**Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates.**

*Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193, 705–725.*

GOLMAKANI, M.E. KADKHODAYAN, M., (2011).

**Nonlinear bending analysis of annular FGM plates using higher-order shear deformation plate theories.**

*Composite Structures 93, 973–982.*

GOLMAKANI, M.E. KADKHODAYAN, M., (2011).

**Large deflection analysis of circular and annular FGM plates under thermo-mechanical loadings with temperature-dependent properties.**

*Composites: Part B 42, 614–625.*

HAN, W. PETYT, M., (1995).

**Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method-ii: 1st mode of laminated plates and higher modes of isotropic and laminated plates.**

*Computers & Structures Vol. 63, No. 2. pp. 309 – 318.*

HOUMAT, A., (1997).

**An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations.**

*Journal of Sound and Vibration 206(2), 201 – 215.*

HOUMAT, A., (2004).

**Three-dimensional hierarchical finite element free vibration analysis of annular sector plates.**

*Journal of Sound and Vibration 276, 181–193.*

HOUMAT, A., (2008).

**Large amplitude free vibration of shear deformable laminated composite annular sector plates by a sector p-element.**

*International Journal of Non-Linear Mechanics 43, 834 – 843.*

HOUMAT, A., (2009).

**A sector elliptic p-element applied to membrane vibrations.**

*Thin-Walled Structures 47, 172– 177.*

HUI-SHEN SHEN., (2009).

**Functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells.**

ISBN 978-1-4200-9256-1.

HOSSEINI-HASHEMI, SH. ROKNI DAMAVANDI TAHER, H. AKHAVAN, H., (2010).

**Vibration analysis of radially FGM sectorial plates of variable thickness on elastic foundations.**

*Composite Structures 92, 1734–1743.*

JOMEHZADEH, E. SAIDI, A.R. ATASHIPOUR, S.R., (2009).

**An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates.**

*Materials and Design 30, 3679 – 3685.*

KOIZUMI, M., (1992).

**The concept of FGM, ceramic transaction, functionally graded materials.**

*Functionally Graded Materials, 34, 3-10.*

KIEBACK, B. NEUBRAND, A. RIEDEL, H., (2003).

**Processing techniques for functionally graded materials.**

*Materials Science and Engineering A 362, 81–105.*

MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R., (1992).

**Functionally gradient ceramics by sequential slip casting materials letters.**

*Vol. 14, p.333-35.*

MIYAMOTO, Y. NIINO, M. KOIZUMI, M., (1996).

**FGM research programs in Japan —from structural to functional uses.**

*Functionally Graded Materials, Pages 1-8.*

MOUSAVI, S.M. TAHANI, M., (2012).

**Analytical solution for bending of moderately thick radially functionally graded sector plates with general boundary conditions using multi-term extended Kantorovich method.**

*Composites: Part B 43, 1405 –1416.*

MULLER, P. MOGNOL, P. HASCOET, J.Y., (2013).

**Modeling and control of a direct laser powder deposition process for Functionally Graded Materials (FGM) parts manufacturing.**

*Journal of Materials Processing Technology 213, 685 – 692.*

NIE, G.J. ZHONG, Z., (2007).

**Vibration analysis of functionally graded annular sectorial plates with simply supported radial edges.**

*Composite Structures 84, 167–176.*

NIE, G.J. ZHONG, Z., (2007).

**Axisymmetric bending of two-directional functionally graded circular and annular plates.**

*Acta Mechanica Sinica 20, 289-295.*

NIE, G.J. ZHONG, Z., (2010).

**Dynamic analysis of multi-directional functionally graded annular plates.**

*Applied Mathematical Modelling 34, 608–616.*

NOSIER, A. FALLAH, F., (2009).

**Non-linear analysis of functionally graded circular plates under asymmetric transverse loading.**

*International Journal of Non-Linear Mechanics 44, 928 – 942.*

RIBEIRO, P. PETYT, M., (1999).

**Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method.**

*Composite Structures 46, 197 – 208.*

REDDY, J.N. WANG, C.M. KITIPORNCHAI, S., (1999).

**Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates.**

*Eur. J. Mech. A/Solids 18, 185 - 199.*

SHI, P. C.Y. DONG., (2012).

**Vibration analysis of functionally graded annular plates with mixed boundary conditions in thermal environment.**

*Journal of Sound and Vibration.*

TALHA, M. SINGH, B.N., (2011).

**Large amplitude free flexural vibration analysis of shear deformable FGM plates using nonlinear finite element method.**

*Finite Elements in Analysis and Design* 47, 394–401.

VENTSEL, E. KRAUTHAMMER, T., (2001).

**Thin Plates and Shells : Theory, Analysis, and Applications.**

*Marcel Dekker.*

WATARI, F. YOKOYAMA, A. SASO, F. UO, M. KAWASAKI, T., (1996).

**Fabrication and properties of functionally graded dental implant.**

*Composites: Part B* 28B, 5-11.

WATREMETZ, B., (2005).

**Modèle thermomécanique 3d d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multi- grilles. Application aux moules d'injection de polymères.**

*Thèse de doctorat. L'institut national des sciences appliquées de Lyon.*

YUKI, M., MURAYAMA, T. & IRISAWA, T., (1991).

**Temperature gradient sintering of PSZ/MO functionally gradient material by laser beam heating.**

*First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, p. 203.*

ZIENKIEWICZ, O.C. Taylor, R.L. Zhu, J.Z., (2005).

**The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth edition.**

*Elsevier Butterworth-Heinemann.*

ZIENKIEWICZ, O.C. Taylor, R., (2005).

**The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics Sixth edition.**

*Elsevier Butterworth-Heinemann.*

إن صياغة الاهتزازات الغير الخطية للصفائح الحلقية القطاعية المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفيا في بيئة حرارية تعتمد أساسا على معادلات *فون كرممان* و طريقة العناصر المحدودة -*p*. نعتبر أن سمك الصفيحة ثابت و أن خصائص المواد تتغير بشكل مستمر باتجاه السمك وفقا لقانون القوة لجزء من حجم المكونات. يتم تحويل المعادلات غير الخطية للحركة من المجال الزمني إلى المجال الترددي بطريقة التوازن المتناسق. يتم حل المعادلات الحركية غير الخطية بطريقة التكرار الخطي من اجل تحديد الترددات الخطية و غير الخطية. تتم مقارنة النتائج العددية المتحصل عليها مع النتائج المنشورة لتأثيرات تركيب المواد و درجة الحرارة على خاصية الاهتزازات على هذا النوع من الألواح.

**كلمات البحث:** تأثير السعة و درجة الحرارة؛ طريقة العناصر المحدودة -*p*، المواد المتدرجة وظيفيا ، سميكة لوحة القطاع الحلقي؛ معادلات *فون كرممان* ، والاهتزاز الحرة الخطية و غير الخطية.

---

**Abstract**

The non-linear vibration of thick functionally graded annular sector plate in a thermal environment is formulated in terms of Von Karman dynamic equations and the hierarchical finite element method. The plate thickness is constant and the properties of the material are assumed to vary continuously according to a power law of the volume fraction of the components. The non-linear equations of motion are transformed from the time domain to the frequency domain by the harmonic balance method. The resulting non-linear equations are solved iteratively by the method of linearized fashion updated. Linear and nonlinear frequencies are determined. The numerical results are compared with the published results of the effects of material composition and temperatures on the vibration characteristic of the plate are examined.

**Key words:** effect of amplitude and temperature; *p*-version of the finite element method; functionally gradient material, thick annular sector plate; Von Karman equations, linear free vibration and non-linear.

---

**Résumé**

La vibration non-linéaire d'une plaque annulaire sectorielle épaisse à gradient fonctionnel dans un environnement thermique est formulée en fonction des équations de Von Karman et la méthode des éléments finis hiérarchiques. L'épaisseur de la plaque est constante et les propriétés du matériau sont supposées varier continuellement selon une loi de puissance de la fraction du volume des constituants. Les équations non-linéaires du mouvement sont transformées du domaine temporel au domaine fréquentiel par la méthode d'équilibrage harmonique. Les équations non-linéaires résultantes sont résolues itérativement par la méthode du mode linéarisé actualisé. Les fréquences linéaires et non-linéaires sont déterminées. Les résultats numériques sont comparés avec les résultats publiés les effets de la composition du matériau et de la température sur les caractéristique vibratoires de la plaque sont examinés.

**Mots clés :** effet de l'amplitude et température ; la version-*p* de la méthode des éléments finis ; matériau à gradient fonctionnel ; plaque annulaire sectorielle épaisse ; équations de Von Karman ; vibration libre linéaires et non-linéaires.

---