

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**



**UNIVERSITE ABOU-BAKR BELKAID**

**Faculté des sciences de l'ingénieur  
Département de Génie Mécanique**



**MEMOIRE DE MAGISTER**

**Option : Machines Thermiques**

**Thème**

**SIMULATION NUMERIQUE DE TRANSFERT THERMIQUE  
LORS DE L'ECOULEMENT D'UN METAL EN VOIE  
DE SOLIDIFICATION**

**Présenté par :  
M<sup>r</sup> GUELLIL HOCINE**

**Sous la direction de :  
M<sup>r</sup> KHADRAOUI YAHIA**

**Suivi par :  
M<sup>r</sup> KORTI. A. NABIL**

**Devant les membres du jury composés de :**

**Président : M<sup>r</sup> AZZI. A (M.C. Université de TLEMCEM)  
Examineurs : M<sup>r</sup> BENEDDRA. A (M.C. Université de MOSTAGANEM)  
M<sup>r</sup> SENOUCI. Z (C.C. U.S.T.ORAN)  
M<sup>r</sup> BENMOUSSA. A (C.C. Université de Tlemcen)**

**Année Universitaire : 2005-2006**

## **REMERCIEMENTS**

*Un grand merci au bon dieu de m'avoir guidé vers le bon chemin de la lumière et du savoir.*

*Je tiens à remercier vivement mes directeurs de recherche, Monsieur Yahia KHADRAOUI et Monsieur Nabil .A KORTI, pour leur suivi, leur assistance et leurs conseils précieux le long de ma formation. Leurs compétences ainsi que leurs expériences dans le domaine m'ont été d'une grande utilité.*

*J'exprime ma reconnaissance à tous les membres du jury d'avoir accepté de lire ce manuscrit et d'apporter les critiques nécessaires à la mise en forme finale de cet ouvrage.*

*Ce travail a été réalisé au laboratoire de l'université de TLEMCEM ABOU BAKR BELKAID et je tiens à remercier les membres du laboratoire pour leur aide et leur compréhension durant toutes les expériences ainsi que l'entreprise ALZINC de GHAZAOUT de nous avoir fourni les matériaux nécessaires aux expériences.*

*Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à toute ma famille pour leur sacrifice et soutien inestimables durant toutes mes études.*

« *On se lasse de tout, excepter de comprendre* »

**GOETHE**

## **Table des matières**

Résumé	
Abstract	
Nomenclature	
Liste des figures	
Listes des tableaux	
Introduction.....	1

### **CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

1.1 Avant propos .....	4
1.2 Méthodes qui suivent le mouvement de l'interface.....	16
1.3 Méthodes à domaine fixe.....	16
1.4 Méthodes qui fixent l'interface.....	16
1.5 Méthode à maillage fixe et à maillage mobile.....	17
1.6 Effets de la convection sur la solidification.....	20

### **CHAPITRE II : ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE**

2.1 Introduction.....	22
2.2 Les principes de base d'une coulée dans un moule.....	22
2.3 Description générale de l'installation.....	23
2.4 Description des expériences.....	24
2.5 Transfert thermique lors de la solidification .....	27
2.6 Description du problème.....	28
2.7 Effets de changement de densité .....	31
2.8 Effets de la convection de la phase liquide.....	32
2.9 La solution exacte des problèmes de changement de phase .....	33
2.10 Méthode implicite appliquée à la conduction de chaleur bidimensionnelle.....	33
2.11 Représentation des valeurs expérimentales sur les graphes.....	38
2.12 Discussion sur les graphes expérimentaux enregistrés.....	42

### **CHAPITRE III : MODELISATION MATHEMATIQUE DU PHENOMENE DE CHANGEMENT DE PHASE**

Introduction.....	43
3.1 Phénomène de changement de phase .....	43
3.2 Théorie de la solidification.....	44
3.3 Modélisation mathématique du phénomène de changement de phase .....	47

3.3.1 Méthode à maillage mobile.....	47
3.3.2 Méthode à maillage fixe.....	48
a Méthode de la capacité effective.....	49
b Méthode enthalpique .....	50
3.4 Modélisation mathématique .....	50

#### **CHAPITRE IV : RESOLUTION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES**

4.1 Généralités.....	57
4.2 Discrétisation du domaine .....	58
4.3 Introduction des conditions aux limites.....	62
4.4 Mise en œuvre d'une simulation en général dans le cas d'une solidification d'un métal .....	63
4.5 Programmation .....	64
4.6 Représentation de l'algorithme .....	65
4.7 La résolution par la méthode TDMA.....	67

#### **CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS**

5.1 Représentation des graphes numériques de l'évolution de la température en fonction du temps.....	70
5.2 Comparaison entre les courbes numérique et expérimentale de l'évolution de la température en fonction du temps .....	74
5.3 Représentation de l'enthalpie en fonction de la température .....	81
5.4 Représentation des isothermes .....	84
5.5 Représentation du front de solidification .....	92
<b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>94</b>
<b>REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>97</b>

## RESUME

*L'objectif de cette recherche est de produire un arrangement de contrôle par les méthodes numériques qui sont assez rapides pour les utiliser en temps réel dans la production. Cet arrangement devrait fournir des conditions aux limites transitoires qui produit un mouvement de surface interfacielle bien défini avec une morphologie désirée correspondante à l'interface solide liquide dans les problèmes de solidification. Dans ce travail, une technique directe de calcul est présentée pour le problème de solidification d'un métal à travers un cylindre suivant deux coordonnées  $(r,z)$  avec un changement de phase en régime instationnaire. Les températures aux limites et celles du milieu sont données par différentes expériences réalisées au laboratoire de l'université de TLEMCEM. Les valeurs des calculs numériques obtenues sont reconfortées par des expériences afin de suivre l'évolution du front mobile de solidification pendant le moment de refroidissement. La méthode des différences finies est utilisée pour la solution numérique de l'équation de la conduction. L'utilisation d'un programme demeure nécessaire pour la performance des formulations proposées. Dans les problèmes pratiques de la solidification, cette méthode peut mener à des résultats stable et significatif.*

## ABSTRACT

*The objective of this research is to produce an arrangement of control by the numerical methods which are enough fast to use them in real time in the production. This arrangement should provide boundary conditions transitory which produces a movement of interfacielle surface well defined with a desired morphology corresponding to the liquid solid interface in the problems of solidification. In this thesis, a direct technique of calculation is presented for the problem of solidification of a metal through a cylinder according to two coordinates  $(r,z)$  with a phase shift in a non stationary mode. The temperatures at the borders and those of the medium are given by various experiments carried out to the laboratory to the University of TLEMCEM. The numerical calculation values obtained are comforted by of the experiments to follow the evolution of the mobile face of solidification during the moment of cooling. The finite differences method is used for the numerical solution of the conduction equation. The uses algorithm remains necessary for the performance of the formulation suggested. In practical problems of solidification, this method can lead to results stable and significant.*

## NOMENCLATURE

$T_s$	la température du solide	[K]
$T_l$	la température du liquide	[K]
$T_f$	la température de fusion	[K]
$T_{amb}$	la température de l'air ambiant	[K]
$T_m$	la température du changement de phase	[K]
$T_0$	la température initiale de refroidissement du métal	[K]
$\lambda_s$	le coefficient de conduction du solide	[J/m.K]
$\lambda_l$	le coefficient de conduction du liquide	[J/m.K]
$\lambda_a$	le coefficient de conduction de l'air	[J/m.K]
$\rho_s$	la masse volumique du solide	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_l$	la masse volumique du liquide	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$C_{ps}$	la capacité calorifique du solide	[J/Kg.K]
$C_{pl}$	la capacité calorifique du liquide	[J/Kg.K]
$C_{eff}$	la capacité effective	[J/Kg.K]
$L_s$	la chaleur latente de solidification	[J/Kg]
$e$	l'épaisseur de la plaque du moule	[m]
$H$	l'enthalpie massique	[J/Kg]
$H_l$	l'enthalpie massique pour la phase liquide	[J/Kg]
$H_s$	l'enthalpie massique pour la phase solide	[J/Kg]
$ds/dt$	vitesse de l'interface mobile	[m/s]
$s(t)$	l'endroit de l'interface solide liquide	[m]
$t$	le temps de refroidissement	[s]
$r,z$	les coordonnées cylindriques	
$R$	le rayon de la pièce cylindrique	[m]
$Z$	la hauteur de la pièce cylindrique	[m]
$\Delta t$	intervalle de temps	[s]
$\Delta r$	le pas du maillage suivant r	[m]
$\Delta z$	le pas du maillage suivant z	[m]
$\alpha$	la diffusivité thermique	[m <sup>2</sup> /s]
$h$	le coefficient de convection dans le liquide	[w/m <sup>2</sup> .K]

$h_1$	coefficient de convection de la paroi horizontale en contact direct de l'air du côté supérieur	[w/m <sup>2</sup> .k]
$h_2$	coefficient de convection de la paroi verticale en contact direct de l'air du côté non isolé.	[w/m <sup>2</sup> .k]
$h_{air}$	coefficient de convection de l'air	[w/m <sup>2</sup> .k]
$f_l$	la fraction liquide	
$\Delta Q$	la quantité de chaleur perdue	[Kj]
$\Phi_{ray}$	le flux de chaleur par rayonnement	[w/m <sup>2</sup> ]
$\Phi_{conv}$	le flux de chaleur par convection	[w/m <sup>2</sup> ]
$\Phi_{cond}$	le flux de chaleur par conduction	[w/m <sup>2</sup> ]
$p_{conv}$	la puissance perdue par convection	[W]
$p_{ray}$	la puissance perdue par rayonnement	[W]
$p_{totale}$	la puissance totale perdue	[W]
$\varepsilon$	l'émissivité thermique	
$\sigma$	la constante de Stefan-Boltzmann	[W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-2</sup> ]
$\mu$	la viscosité cinématique	[m <sup>2</sup> /s]
$\eta$	la viscosité dynamique	[N.s/m <sup>2</sup> ]
$\beta$	le coefficient de dilatation thermique	[1/K]
$A$	la surface totale du cylindre	[m <sup>2</sup> ]
$A_l$	la surface latérale du cylindre	[m <sup>2</sup> ]
$m$	la masse du corps du cylindre	[Kg]
$Gr$	le nombre de Grashof	
$Pr$	le nombre de Prandtl	
$Pr_a$	le nombre de Prandtl de l'air ambiant	
$Pr_p$	le nombre de Prandtl à la paroi	
$Nu$	le nombre de Nusselt	

### Indice inférieur

$l$	le liquide
$s$	le solide
$i$	repère suivant l'axe r
$k$	repère suivant l'axe z

## Liste des figures

Figure (1.1) – Disposition des ailettes sur le tube et représentation de l'interface.....	7
Figure (1.2) – Comparaison entre le procédé numérique et les résultats expérimentaux. ....	7
Figure (1.3) – Représentation du procédé dans une cavité cubique.....	9
Figure (1.4) – Représentation des couches liquides froides et chaudes ainsi que le front de solidification.....	9
Figure (1.5) – Représentation des coordonnées cylindriques et moule métal.....	11
Figure (1.6) – Solidification bidimensionnelle.....	17
Figure (2.1) – Laboratoire de métallurgie et de thermodynamique.....	23
Figure (2.2) – Four à gaz à creuset basculant....	23
Figure (2.3) – Préparation du moule et damage du sable.....	24
Figure (2.4) – Fusion du métal dans le creuset.....	25
Figure (2.5) – Coulée du métal dans le moule.....	25
Figure (2.6) – Schéma expérimental de la coulée dans un cylindre.....	26
Figure (2.7) – Etat du moule après le refroidissement.....	26
Figure (2.8) – Coordonnées (r, z) rattachées au moule.....	28
Figure (2.9) – Solidification bidimensionnelle. Mouvement de l'interface dans la direction de $n$ .....	30
Figure (2.10) – Géométrie et coordonnées du problème .....	31
Figure (2.4a)– Procédé expérimental du zinc pour $z = 20\text{mm}$ .....	38
Figure (2.4b)– Procédé expérimental du zinc pour $z = 40\text{mm}$ .....	38
Figure (2.4c)– Procédé expérimental du zinc pour $z = 60\text{mm}$ .....	39
Figure (2.4d)– Procédé expérimental du zinc pour $z = 80\text{mm}$ .....	39
Figure (2.5a)– Procédé expérimental du plomb pour $z = 20\text{mm}$ .....	40
Figure (2.5b)– Procédé expérimental du plomb pour $z = 40\text{mm}$ ... ..	40
Figure (2.5c)– Procédé expérimental du plomb pour $z = 60\text{mm}$ .....	41
Figure (2.5d)– Procédé expérimental du plomb pour $z = 80\text{mm}$ .....	41
Figure (3.1a)– Courbe de refroidissement lent d'un métal pur en fonction du temps.....	44
Figure (3.1b)– Représentation de l'enthalpie en fonction de la température pour un métal pur.....	45
Figure (3.1c)– Représentation de l'enthalpie en fonction de la température pour un alliage.....	45
Figure (3.2) – Représentation des conditions aux limites sur graphe .....	51

Figure (4.1) – Définitions globale et locale du maillage .....	59
Figure (5.1.1a)– Procédé numérique du zinc pour $z = 20\text{mm}$ .....	70
Figure (5.1.1b)– Procédé numérique du zinc pour $z = 40\text{mm}$ .....	70
Figure (5.1.1c)– Procédé numérique du zinc pour $z = 60\text{mm}$ .....	71
Figure (5.1.1d)– Procédé numérique du zinc pour $z = 80\text{mm}$ .....	71
Figure (5.1.2a)– Procédé numérique du plomb pour $z = 20\text{mm}$ .....	72
Figure (5.1.2b)– Procédé numérique du plomb pour $z = 40\text{mm}$ .....	72
Figure (5.1.2c)– Procédé numérique du plomb pour $z = 60\text{mm}$ .....	73
Figure (5.1.2d)– Procédé numérique du plomb pour $z = 80\text{mm}$ .....	73
Figure (5.2.1) – Comparaison entre les courbes numérique et expérimentale de l'évolution de la température en fonction du temps pour le zinc.....	76
Figure (5.2.2) – Comparaison entre les courbes numérique et expérimentale de l'évolution de la température en fonction du temps pour le plomb.....	78
Figure (5.2.3a) – Comparaison entre la variation de la température du point le plus chaud et le point plus froid pour le zinc.....	80
Figure (5.2.3b) – Comparaison entre la variation de la température du point le plus chaud et le point plus froid pour le plomb.....	80
Figure (5.3) – Représentation de l'enthalpie en fonction de la température pour le plomb.....	81
Figure (5.3a) – Evolution de l'enthalpie en fonction de la température pour le plomb.....	82
Figure (5.3b) – Evolution de l'enthalpie en fonction de la température pour le zinc.....	82
Figure (5.4.1) – Représentation des isothermes du zinc .....	84
Figure (5.4.2) – Représentation des isothermes du plomb.....	88
Figure (5.5) – Représentation du front de solidification.....	92

## Liste des tableaux

Tableau (2.1) – Les données thermo physiques du plomb et du zinc.....	27
Tableau (3.1) – Données de l'air à 15°C.....	55

## Introduction

Le moulage et la coulée dans les fonderies sont rentrés dans le domaine de la métallurgie depuis longtemps. Aujourd'hui, le moulage est devenu une des bases essentielles de la métallurgie pour l'obtention des pièces de formes complexes. Pour cela, toute pièce moulée, doit être disposée et calculée de façon à satisfaire les besoins du consommateur en métallurgie en fonction de la demande. L'utilisation du moulage diffère d'une pièce à une autre, à cause du matériau utilisé, de sa forme, de son mode de refroidissement, de sa température de fusion,...etc.

Dans cette étude, le choix a été orienté vers la solidification de deux matériaux (le zinc et le plomb) de forme cylindrique.

Ce présent projet porte sur la résolution des problèmes de changement de phase à deux dimensions lorsque le seul mode de transfert de chaleur est la conduction. Le passage du liquide au solide est la transformation structurale la plus importante de ce travail. Pour comprendre les microstructures résultant de la solidification, il faut connaître la partie correspondante des diagrammes d'équilibre et étudier l'évolution du système avec la température.

Ce type de problème peut être modélisé par l'équation aux dérivées partielles :

$$\rho.C_{eff}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

Où

$$C_{eff} = \begin{cases} C_{p_l} & \text{pour } T > T_l \\ C_p + \frac{L_s}{T_l - T_s} & \text{pour } T_s \leq T \leq T_l \\ C_{p_s} & \text{pour } T < T_s \end{cases}$$

est une fonction discontinue à  $T = T_f$ . Cette discontinuité marque la séparation entre le solide et le liquide et est appelée interface diphasique. Les propriétés

$\lambda_s, \lambda_l, Cp_s, Cp_l, \rho_s, \rho_l$  sont constantes pour une phase donnée et  $L_s$  est constante.

Cette équation sera résolue par un schéma numérique, discrétisé par la méthode des différences finies. La méthode implicite est utilisée aussi pour la résolution des équations de discrétisation.

Les résultats sont donnés numériquement et expérimentalement, et sont comparés à la fin du chapitre V. A la fin, le comportement du front de solidification durant le refroidissement est représenté pour les deux matériaux.

Le travail a été enchaîné de la manière suivante :

- Une introduction présentant le but du travail : L'étude proposée a pour objectif la détermination de l'évolution de la température pendant le processus expérimental et numérique de la solidification et le comportement du front de solidification lors du refroidissement. La résolution est effectuée par la méthode des différences finies.
- Le chapitre un est rayonné par une recherche bibliographique dans laquelle se présentent les nouvelles technologies, les issues sur la compréhension et les modèles fondamentaux du contrôle et l'optimisation du moulage. Il entame aussi les différentes méthodes numériques de calcul pour aboutir et s'approcher des résultats les plus stables.
- Le chapitre deux est basé sur la formulation du problème théorique. La description et la mise en évidence des expériences puis à la fin la représentation des résultats expérimentaux sous forme de courbes.
- Dans le chapitre trois, la théorie de la solidification est présentée comme étant un phénomène de changement de phase. Aussi la modélisation mathématique et les différentes méthodes de résolution (la méthode enthalpique et la méthode de la capacité effective).
- Le chapitre quatre utilise la méthode des différences finies comme résolution et solution du problème mathématique. A la fin un programme est élaboré pour déterminer l'évolution de la température ainsi la position du front de solidification suivant un système bidimensionnel étudié suivant un régime instationnaire.

- Dans le dernier chapitre (cinq), sont présentés les différents résultats expérimentaux et numériques et puis comparés. Ainsi l'évolution du front de solidification pour les deux matériaux utilisés
- A la fin du travail, une conclusion générale rayonne le prescrit d'une analyse critique des résultats obtenus. Ainsi les difficultés rencontrées lors des expériences et quelques développements futurs envisagés

*CHAPITRE :1*

*ETUDE  
BIBLIOGRAPHIQUE*

# ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

## I.1 AVANT-PROPOS

Les phénomènes de solidification sont le cœur de la plupart des processus de fabrication des produits. Des processus de fabrication conventionnels de la coulée dans les fonderies, la soudure à l'arc électrique, la coulée en lingot, le moulage des pièces de haute qualité, etc..., aux dernières technologies à savoir la croissance en cristal, le traitement laser, et le traitement de plasma. Les phénomènes de solidification jouent un rôle dominant dans le processus aussi bien que l'optimisation des produits. Au-dessus des dernières décennies, il y a eu des progrès significatifs dans la compréhension fondamentale et dans les approches du phénomène de solidification. Ceci a mené à l'amélioration de la qualité du produit et la productivité plus élevée du traitement conventionnel. Sans compter dans ces dernières technologies, les nouvelles avancées dans la compréhension du processus, ont mené au développement de plusieurs autres nouvelles technologies parmi lesquelles on trouve :

Dans le Meeting de Pune en Inde [1] plusieurs issues sont présentées sur la compréhension, les modèles fondamentaux de contrôle, l'optimisation, et les défis pour le millénaire suivant, aussi l'analyse critique de plusieurs paramètres opérationnels et fondamentaux qui affectent le procédé de solidification pendant le moulage de l'acier. Des analyses détaillées sont présentées sur l'effet du moule friction/lubrification, les oscillations et la formation initiale de la coquille sur la productivité et la qualité des billettes d'acier. Le rôle de la chimie en acier sur l'état thermomécanique du front de solidification est discuté aussi.

Les problèmes directs de transfert de chaleur [2] sont habituellement des problèmes mathématiques qui sont définies par une ou plusieurs intégrales couplées des équations différentielles partielles ou ordinaires (liées au principe de conservation), la description complète des coefficients dans ces équations (habituellement liées aux données caractéristiques) et des conditions initiales

pour chacun des champs principaux (telles que la température, la vitesse, ...etc). Ce qui définit les conditions aux limites suffisantes des problèmes actuels. Dans le problème transitoire de conduction de chaleur, les conditions de la température ou du flux de chaleur doivent être appliquées à chaque partie de la frontière. De telles conditions, en plus de la conductivité thermique, la chaleur spécifique, la densité et la température initiale définissent le problème comme étant problème direct de conduction de chaleur. Les problèmes directs s'appellent souvent « les problèmes vers l'avant » impliquant que leur solution peut être calculée d'une étape de temps à l'étape suivante. Les problèmes directs sont caractérisés par l'existence d'une solution unique qui est stable aux perturbations des données (propriétés matérielles, frontière et conditions initiales). Si l'une des données du problème direct est inconnue, le problème inverse survient. Donc le problème inverse résultera si :

- les états de frontière insuffisants sont fournis
- les conditions initiales ne sont pas connues
- quand une limite de source de chaleur n'est pas connue a priori
- quand certaines des données matérielles ne sont pas indiquées.

Pour permettre une solution aux problèmes inverses, des conditions additionnelles devront évidemment être fournies. De telles conditions peuvent, par exemple, inclure l'information partielle des champs inconnus (la température) résultant des données (expérimentales) des capteurs aux différents points du domaine et à travers un temps donné.

Hadamard [2] a classifié les problèmes inverses comme étant des problèmes mal posés de telle manière que les conditions de l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas nécessairement satisfaisantes et la solution peut être instable par rapport aux données d'entrée.

D'autre part, les problèmes inverses réalisés par des données de mesure discrètes (ou des données désirées), sont beaucoup plus pratiques du point de vue technologique que des problèmes directs. Par exemple, beaucoup conçoivent des problèmes où les besoins d'un objectif de conception d'être indiqué avec un choix approprié des conditions d'entrée (variables de conception) qui peuvent

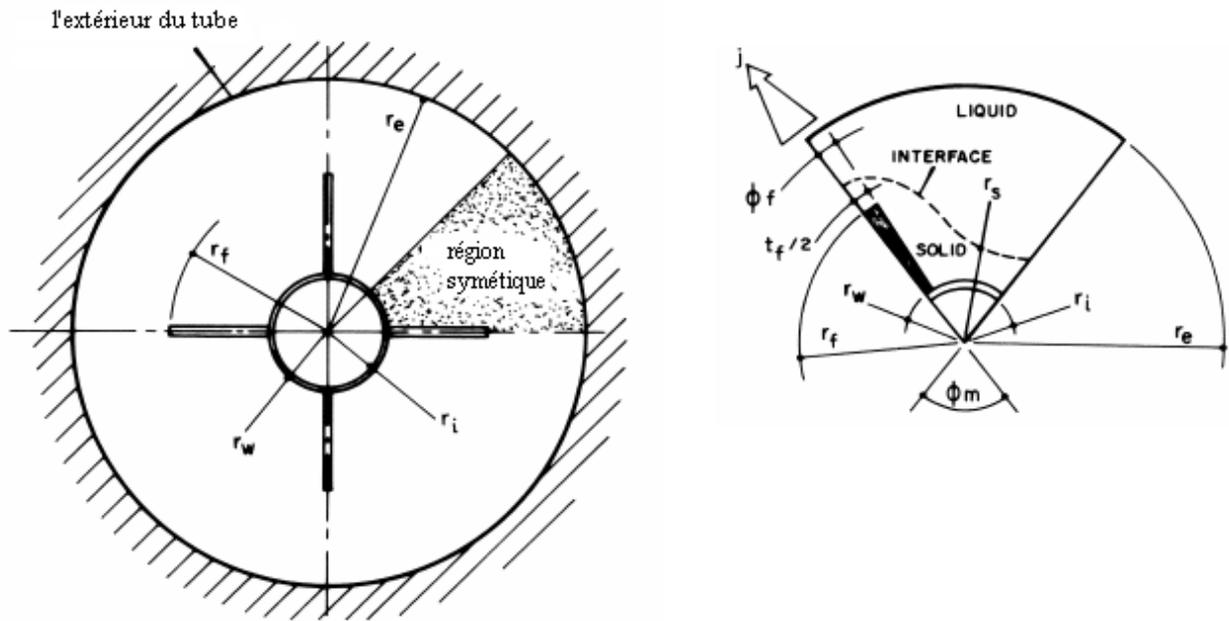
être posés en tant que problèmes inverses. De même, l'utilisation des données expérimentales des mesures de température pour calculer les conditions aux frontières ou aux limites inconnues de source constitue un problème inverse.

Les problèmes inverses ont des implications pratiques dans les systèmes thermiques de transport qui comportent la conduction, la convection et le rayonnement. Dans le rayonnement thermique, par exemple, l'identification de la distribution de la source de rayonnement est stimulée par des applications larges comprenant le contrôle thermique et l'utilisation d'énergie solaire, des moteurs à hautes températures et la technologie des fours.

Ismail K.A.R et al [3,4] présentent sur leur article les résultats d'une recherche numérique et expérimentale qui confirment l'importance des ailettes placées sur un tube avec l'objectif de les employer dans les systèmes thermiques de stockage et voir les effets indésirables de convection naturelle pendant les processus de changement de phase. Ils se sont basés sur des observations expérimentales et les tendances des résultats numériques, ils ont placé quatre ailettes d'épaisseur constante sur un tube métallique, le tout est submergé dans un bain de métal en fusion. Le modèle est basé sur la méthode enthalpique et sur l'approche du volume de contrôle.

Pour valider les procédés numériques du modèle proposé, des expériences ont été réalisées et ont été comparées avec les procédés numériques. Les résultats de cette étude ont un grand intérêt dans l'analyse des systèmes de stockage de chaleur et dans les applications du froid.

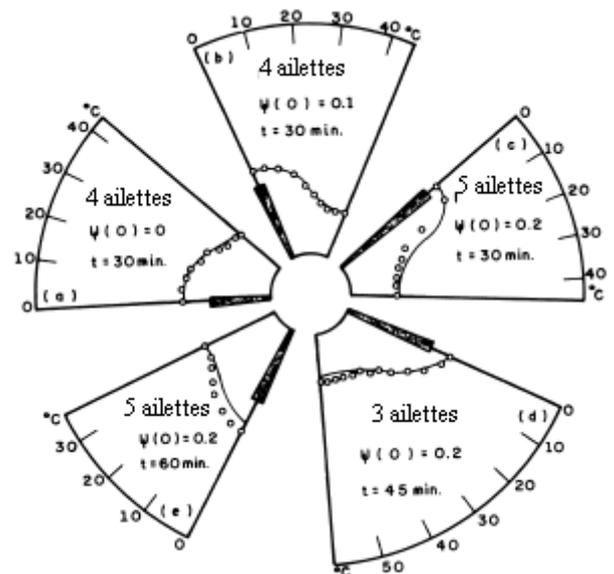
La figure (1.1) représente la disposition des ailettes sur le tube plongé dans un bain de métal en fusion.



**Fig 1.1 : Disposition des ailettes sur le tube et représentation de l'interface**

Ils ont noté que la convection naturelle domine le processus de solidification et l'utilisation des ailettes sur le tube accélèrent la transition de la convection naturelle dans le cas de la conduction pure. Le travail est réalisé sur une solidification bidimensionnelle autour d'un cylindre de telle manière que la résistance thermique de la paroi du tube est négligée.

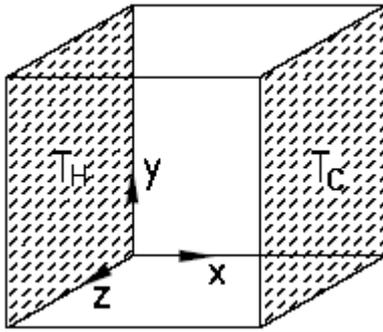
Les résultats ont permis de déterminer les effets de la géométrie de l'ailette sur les performances thermiques d'un tube pendant le processus de solidification.



**Fig 1.2 : Comparaison entre le procédé numérique et les résultats expérimentaux**

Le but principal de Tomasz A, Kowalewski et autre [5] dans leur recherche est de créer un repère expérimental pour le problème de la convection naturelle de l'eau congelée. Ce repère se compose de données transitoires sur la position d'interface, et d'un champ de températures et de vitesse. Les résultats expérimentaux réalisés, sont comparés aux simulations numériques effectuées basées sur un code modifié des différences finies à 3D appelé FREEZE3D (1993). Le phénomène est bien connu par rapport à la non linéarité entre la densité et la température à proximité du point de congélation qui met un point additionnel sur la simulation numérique du problème. Pour cela, il se sont intéressés à la solidification de l'eau (congélation) dans une boîte de forme cubique. Ils considèrent que la densité, la viscosité, la conductivité thermique et la capacité thermique du liquide dépendent de la température. L'expérience a lieu dans un récipient avec deux de ses parois verticales opposées sont assumées comme isotherme. Une des parois verticales est fixée à la température  $T = -10^{\circ}\text{C}$ , au-dessous de la température de congélation du liquide  $T = 0^{\circ}\text{C}$ . La paroi verticale opposée est fixée à la température  $T = 10^{\circ}\text{C}$ . Les autres quatre parois de basse conductivité thermique permettent l'entrée de la chaleur du fluide externe qui entoure la cavité. Pour étudier les effets des conditions aux limites thermiques non idéales de ces dernières parois, deux cas sont considérés. Dans le premier, la cavité est entourée par un jet d'air laminaire à la température  $T$  de  $25^{\circ}\text{C}$  et dans le deuxième cas, un bain d'eau de température constante de  $10^{\circ}\text{C}$  entourant la cavité.

Dans leurs expériences, ils ont pu suivre le déplacement ainsi que le comportement de l'interface de la glace et cela le long de la paroi froide au dessus de la cavité.



Les expériences exécutées montrent que le cas choisi du problème de changement de phase est loin d'être simple et demande des études additionnelles plus détaillées.

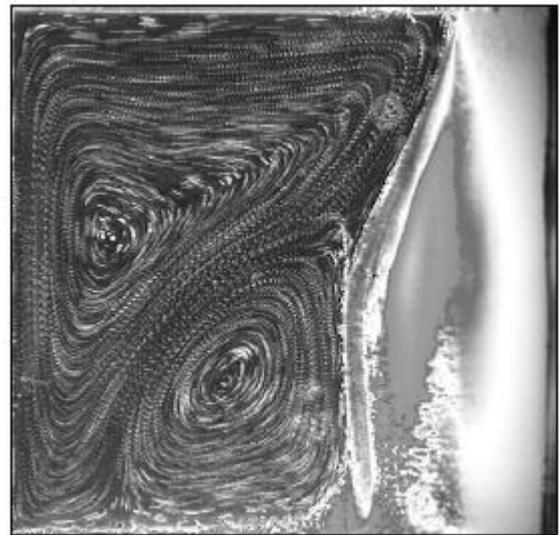
Ils ont pu voir des anomalies distinctes entre les résultats expérimentaux et numériques du comportement général du front de glace produit.

**Fig 1.3 : Représentation du procédé dans une cavité cubique**

Les mesures de la température et des vitesses confirment leurs observations générales, ainsi la circulation du liquide a lieu dans la partie supérieure de la cavité près de celle du liquide chaud.

Dans les travaux similaires [6], l'expérience a été réalisée pour voir l'effet de la convection sur la congélation de l'eau, les plus grands gradients de température ont été observés dans la région inférieure de la cavité.

Marilena Giorgi et autres [7] ont démontré que le procédé de congélation semble être très peu affecté par la convection externe. Ainsi, le transfert de chaleur par convection entre les deux régions semble être limité principalement dans un coin (supérieur) où se heurtent les couches liquides froides et chaudes et où s'intensifie le transfert thermique et où diminue efficacement la croissance de l'interface. La partie restante (inférieure) de l'interface est presque parallèle à la paroi froide et sa forme change très peu avec le temps.



**Fig 1.4 : Représentation des couches liquides froides et chaudes ainsi que le front de solidification**

Marcelo J, et autres [8,9], traitent le même problème en utilisant la méthode conjuguée simultanée des deux conditions aux limites dans les problèmes inverses de convection normale dans les cavités. Des géométries irrégulières dans le domaine physique sont transformées en géométries régulières dans le domaine informatique, en employant un arrangement elliptique de génération numérique de grille. La simulation du problème, a été obtenue par les volumes finis. Les différentes expériences ont été appliquées sur des cavités de formes différentes, incluant une cavité carrée ; une cavité elliptique annulaire et une cavité circulaire annulaire.

Long-Sun CHAO et Wu-Chang DU [10] ont utilisé la solidification à travers un cylindre pour étudier les macro-micro modèles. La méthode des différences finies est utilisée pour résoudre le problème de transfert de chaleur. Après la réalisation de plusieurs expériences, ils ont montré l'effet de la surfusion à l'échelle microscopique ainsi les différentes formes des grains pendant tout le processus de solidification.

Marc Médale et Marc Jaeger [11] ont pu traiter les deux types d'interfaces (fluide-fluide, liquide-solide), en utilisant la technique de suivi d'interfaces résolue par la méthode des éléments finis. Le suivi des fronts de changement de phase est assuré à l'aide de la formulation enthalpique en considérant une zone pâteuse (changement de phase isotherme).

En raison de la formation d'un bain liquide, une des difficultés majeures de la compréhension des problèmes d'interfaces est liée à la coexistence d'une interface mobile « liquide gaz » et d'un front mobile de « fusion solidification ». De nombreux travaux de recherche ont été publiés sur chacun de ces aspects, mais pris séparément. Ils ont présenté dans leur travail ce modèle en mesure de considérer simultanément ces deux types d'interfaces.

A leur application, ils ont présenté l'analyse thermo-hydraulique d'un procédé de soudage sous vide par faisceau d'électrons. Ils considèrent le soudage d'une plaque de grande longueur vis-à-vis de son épaisseur et du diamètre du faisceau d'électrons. La densité surfacique de puissance résultant du bombardement électronique à la surface de la plaque est connue, supposée constante. Les inconnues de ce problème sont le champ de températures dans le

bain de fusion et dans la partie solide de la plaque, le champ de vitesse dans le bain liquide et enfin la déformation de la surface libre. En effet, sous l'action de la pression d'évaporation du métal, la surface libre se creuse en formant un *key hole*. Celui-ci modifie la surface d'application de la source de chaleur et par conséquent la géométrie du bain de fusion. Ces travaux ont été sujet d'autres chercheurs [12,13,14,].

Eduardo N Sousa et autres [15], montrent dans leur travail le rôle important que joue le coefficient transitoire de transfert thermique  $h$  à l'interface du métal/moule. A cet effet, un appareil expérimental refroidi à l'eau a été développé et des expériences sont effectuées sur les alliages de SnPb.



**Fig 1.5 : Représentation des coordonnées cylindriques et moule métal**

Les résultats ont montré une variation de la chaleur le long de l'interface métal/moule provoquée par l'action de la contraction thermique de la solidification liée à l'effet de la gravité. Cet effet est évident avec une structure asymétrique due à la variation du contact thermique du métal/moule le long de la coupe du cylindre.

Tant que la solidification procède, la contraction du métal augmente en formant un espace d'air à l'interface du métal/moule, augmentant par cela la résistance thermique avec la diminution conséquente du flux de chaleur. La connaissance du coefficient transitoire de transfert thermique du métal/moule dans l'analyse du processus de solidification demeure toujours l'agent principal dans toute recherche de changement de phase.

En utilisant la méthode basée sur la solution du problème inverse de la conduction de chaleur et sur la base des mesures de températures aux endroits connus à l'intérieur du corps, le coefficient transitoire de transfert thermique  $h$  à l'interface du métal/moule est exprimé comme une fonction de puissance de temps, représenté par la formule suivante:

$$h = a t^{-n} \quad \text{avec}$$

$t$  le temps de refroidissement

$n$  et  $a$  des constantes qui dépendent de la composition de l'alliage.

Le travail a été enchaîné par Baha'l. Malaeb[16] et J. Banaszek and Y. Jaluria [17].

Thomas G.Brian [18,19] dans sa conférence, présente les modèles mathématiques et leur rôle dans la compréhension et l'amélioration de l'informatique thermique. Ceci a permis d'améliorer les processus, tels que la géométrie optimisée du moule et la conception de refroidissement. Ce qui a poussé à augmenter la puissance des ordinateurs et leurs capacités.

Il a illustré l'histoire du modèle mathématique et à travers quelques exemples, il a pu comparer des contributions anciennes et récentes. A la fin, il conçoit des calculs pour proposer la longueur métallurgique d'une machine de moulage par une simple équation empirique qui peut être résolue à la main :

$$\text{Epaisseur de la coque} = K \sqrt{\text{distance} / \text{vitesse de la coulée}}$$

$K$  est une constante expérimentale.

Brimacombe. J. k et Thomas B.G [20] présentent sur leur document en deuxième partie, le rôle du rayonnement thermique lors de la coulée d'acier en lingots. Ils ont pris en considération l'émissivité du moule et celle du métal solide par la relation

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_m} + \frac{1}{\varepsilon_M} - 1} \quad \text{avec :}$$

$\bar{\varepsilon}$  l'émissivité effective

$\varepsilon_m$  l'émissivité du métal

$\varepsilon_M$  l'émissivité du moule

Les chercheurs dans les travaux [21] s'embarquent sur un programme national pour développer la transmutation d'accélérateur des déchets fortement radioactifs en tant qu'élément d'application avancée d'accélérateur projeté à ses laboratoires nationaux. Ils adhèrent à des efforts internationaux pour évaluer le potentiel de la division et de la transmutation avec les cycles de carburant nucléaire avancés. **La transmutation signifie la transformation nucléaire qui change le contenu du noyau (des protons et/ou des neutrons).** Les efforts de recherche et de développement se concentrent pour coupler les accélérateurs afin d'explorer la transmutation des déchets du carburant nucléaire utilisé et produire des isotopes qui peuvent être exigés pour la sécurité nationale et les applications commerciales.

Xiaolong Wu et autre [21] représentent le processus actuel sur un procédé de coulée sous vide. Le processus se fonde sur l'utilisation des moules de verre de quartz car ce dernier ne se ramollira pas comme il ne se tordra pas quand il est rempli de carburant métallique fondu. La matière de base est inductivement chauffée jusqu'à ce qu'elle soit fondue. Quand la température appropriée est atteinte, le système est évacué par une pompe sous vide et injecté dans des moules. Le processus de moulage prend moins d'une seconde. Une fois remplis, ils sont retirés et refroidis.

E ; Semma ; M. El Ganaoui et autre [22] présentent les résultats d'une simulation numérique de la croissance cristalline horizontale du succinonitrile (SCN). Le changement de phase est pris en compte par une formulation enthalpique permettant la résolution du problème sur un maillage cartésien fixe. L'influence de la convection naturelle dans le bain fondu sur la forme de

l'interface solide/liquide est examinée pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique. Les résultats numériques obtenus sont en bon accord avec les mesures expérimentales disponibles.

L'expérience proposée est considérée comme un problème de benchmark et continue à faire l'objet de travaux numériques impliquant la modélisation des processus de fusion/solidification en présence de la convection naturelle. Le principal défi posé par ce type de problèmes réside dans la non linéarité engendrée par la présence d'une interface dont la forme et la position évoluent dans le temps. L'ensemble des méthodes peut se ramener à deux types de formulations : la formulation orientée vers une adaptation du maillage à la position de l'interface; elle s'applique principalement aux changements de phases isothermes (corps purs). Dans le cas contraire, l'interface solide/liquide n'est plus une surface de discontinuité franche, mais apparente alors, à l'échelle macroscopique, à une zone pâteuse où coexistent les deux phases solide et liquide. Dans ce cas, la formulation à maillage fixe est préférable. Il devient ainsi possible d'établir une formulation globale des équations de conservation sur l'ensemble du domaine d'étude.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec les mesures expérimentales, ce qui confirme la validité du modèle physique et numérique utilisé pour la simulation des phénomènes de changement de phase. Ce travail constitue donc une première approche d'extension des résultats concernant la configuration de Bridgman verticale à la croissance dirigée horizontale.

Ilken. Z et Gunerhan. H [23] ont présenté des relations physiques entre les vitesses des isothermes pour deux problèmes de conduction de chaleur ayant les mêmes conditions aux limites, mais l'un d'entre eux a le changement de phase alors que l'autre ne l'a pas. L'idée principale de cette étude est de trouver une relation mathématique, basée sur des propriétés physiques des phases et des paramètres communs de ces deux différents problèmes. Si de telles relations sont connues, alors il sera possible de trouver la position de l'interface solide-liquide en utilisant des solutions et des relations analytiques, basées sur l'étude de chaque problème seul (avec et sans changement de phase), sur une forme cylindrique et unidimensionnelle en utilisant une résolution par la méthode

enthalpique. Ils ont pu déduire un coefficient appelé le coefficient de régression qui relie les deux problèmes. Il est égal à 0,89 pour des intervalles donnés des nombres de Biot, de Stefan,  $\lambda$  et  $C_p$ .

L'utilisation de ce coefficient a donné des résultats qui sont corrélés avec les solutions analytiques du problème ayant la même géométrie et conditions mais sans changement de phase et les relations étaient statistiquement significatives.

Les problèmes de changement de phase ont suscité beaucoup d'attention dans divers domaines d'industries, tels que la solidification des métaux purs ou des alliages, la formation de fins cristaux utilisés pour les systèmes électroniques, le contrôle thermique des engins spatiaux, etc....Ainsi, la récupération de chaleur rejetée par des procédés industriels, le stockage d'énergie solaire durant le jour et le stockage d'énergie électrique.

Les problèmes de changement de phase se classent dans les problèmes à frontières libres [24,25], une caractéristique qui les rend différents aux problèmes conventionnels de transfert de chaleur. En effet, la présence de l'interface séparant les deux phases dans le domaine de calcul rend les équations de conservation transitoires fortement non linéaires et requiert des traitements spéciaux pour obtenir leur solution. Deux modèles sont largement utilisés : modèle à deux phases et modèle à une seule phase.

Dans le modèle à deux phases, les équations de conservation sont écrites pour chaque phase et couplées par le biais de l'équation de mouvement de l'interface. La solution de ces équations est obtenue par deux types de méthodes :(1) méthodes qui suivent le mouvement de l'interface et (2) méthodes qui la fixent à l'aide de transformation de coordonnées de telle sorte que l'interface dans le nouveau système de coordonnées est fixe. Ces méthodes s'appliquent généralement aux problèmes unidimensionnels alors qu'elles deviennent très compliquées, même impossibles, à implanter aux problèmes multidimensionnels.

Cependant, dans le modèle à une seule phase, les équations de conservation sont écrites dans le domaine en définissant une variable physique continue et l'interface est ignorée. Plusieurs méthodes ont été proposées pour

obtenir leur solution, connues sous le nom des méthodes à domaine fixe ou méthodes enthalpiques. Elles sont les plus utilisées vues leur généralité aux problèmes multidimensionnels et elles ne nécessitent pas de suivre le mouvement de l'interface.

Les techniques numériques appliquées aux problèmes de changement de phase peuvent être divisées en trois groupes selon la formulation du problème.

- méthodes qui suivent le mouvement de l'interface
- méthodes à domaine fixe (méthodes enthalpiques)
- méthodes qui fixent l'interface.

## **I.2 Méthodes qui suivent le mouvement de l'interface**

Dans ces méthodes, les équations de conservation sont écrites en termes de température dans chaque phase, et elles sont couplées par le biais de conditions aux limites à l'interface. Elles sont appelées aussi méthodes à deux régions. Elles s'appliquent principalement aux problèmes unidimensionnels, car elles deviennent très complexes à mettre en œuvre pour les problèmes multidimensionnels.

## **I.3 Méthodes à domaine fixe**

Ces méthodes, appelées aussi méthodes enthalpiques, sont caractérisées par une seule variable continue dans tout le domaine. Elles englobent la méthode de l'enthalpie totale, la méthode de capacité thermique apparente et la méthode de terme source latente. Ces méthodes sont écrites pour tout le domaine de calcul sans tenir compte des conditions de saut à l'interface. Elles peuvent être employées pour résoudre des problèmes multidimensionnels avec changement de phase isotherme ou dans une marge de température.

## **I.4 Méthodes qui fixent l'interface**

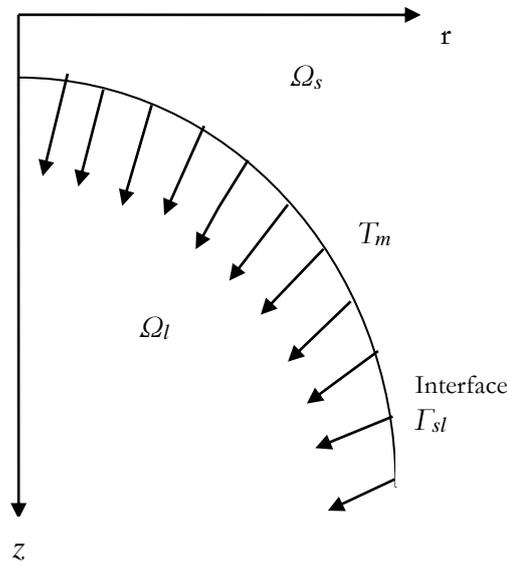
L'immobilisation de l'interface se fait à l'aide d'une transformation de coordonnées de telle sorte que la position de l'interface demeure fixe dans le nouveau système de coordonnées ; les deux phases y occupent des domaines fixes. Dû au fait que l'interface est curviligne, les coordonnées curvilignes

(dites aussi coordonnées naturelles) sont généralement utilisées pour les problèmes multidimensionnels.

### I.5 Méthode à maillage fixe (MF) et méthode à maillage mobile (MM)

Dans la méthode à maillage fixe et la méthode à maillage mobile, les régions solide et liquide sont traitées séparément et l'interface du changement de phase est explicitement utilisée comme frontière mobile.

Pour le cas bidimensionnel (figure 1.6), le problème implique la considération de la conservation de l'énergie dans le domaine en le divisant en



**Fig 1.6 : Solidification bidimensionnelle**

deux domaines distincts  $\Omega_l$  et  $\Omega_s$  où  $\Omega_l + \Omega_s = \Omega$ . La conservation d'énergie est écrite en tant que deux équations séparées dans le liquide ( $\Omega_l$ ) et le solide ( $\Omega_s$ ), respectivement :

$$\rho_l C p_l \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_l \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda_l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1.1)$$

$$\rho_s C p_s \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda_s \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1.2)$$

Lorsque la substance est pure, la température de fusion  $T_f$  est généralement connue et est égale à la température de solidification. Cette condition est exprimée par :

$$T_s = T_f = T_l \quad (1.3)$$

La description complète du problème implique, en plus des conditions initiales et les conditions aux limites externes appropriées, aussi les conditions d'interface sur la frontière du changement de phase,  $T_m$  qui sont :

$$T_f = T_m \quad (1.4)$$

$$-\lambda_l \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_l = \rho_l L \frac{ds}{dt} - \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \quad (1.5)$$

où  $s$  représente la position de l'interface,  $ds/dt$  est la vitesse de l'interface et  $T_m$  représente la température du changement de phase. L'équation (1.5) montre que la chaleur transférée par conduction dans la partie solide est égale à la chaleur passant par l'interface en libérant la chaleur latente à l'interface et à la chaleur venant du liquide par conduction.

Dans la méthode à maillage fixe (MF), l'interface mobile est fixée avec une transformation de coordonnées appropriée et l'interface devient efficacement stationnaire. Pour les problèmes inverses, la position de l'interface est indiquée à priori. Les techniques de formation offrent des avantages significatifs. Cependant, ces méthodes présentent des complications numériques.

La méthode à maillage mobile (MM) implique la déformation et le déplacement des éléments finis ou les treillis des différences finies. La maille se déplace sans interruption pour s'adapter au mouvement de refroidissement de l'interface. Des études ont développé un modèle par la méthode des éléments finis pour l'étude du problème unidimensionnel inverse de transfert thermique de conduction avec le changement de phase. La méthode inverse par les éléments finis a été utilisée pour l'analyse des procédés stationnaires bidimensionnels de soudure à l'arc électrique [11]. Cette méthode peut être

employée pour prévoir la position de l'interface solide liquide comme une fonction de plusieurs variables.

Ces deux méthodes (MM et MF) offrent l'avantage de pouvoir séparer clairement les deux phases le long d'une frontière tracée par la maille de discrétisation. Cependant, les algorithmes mathématiques qui exigent convenablement l'ajustement de la maille, sont généralement très complexes. Ils sont habituellement difficiles à les mettre en application et peuvent rarement être incorporés aux codes numériques existants.

Les méthodes à domaine fixe [25] ne changent pas la maille spatiale initiale de discrétisation. Elles entraînent la solution d'un système continu d'une représentation implicite du changement de phase. Le problème est formulé de telle manière que les conditions de l'interface deviennent implicites sous une nouvelle forme d'équations, qui s'applique sur un domaine fixe entier. Par exemple, dans la méthode de l'enthalpie, une équation simple de conservation d'énergie est écrite pour le domaine entier par:

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1.6)$$

où,  $H$  est la fonction enthalpie et seulement la conduction transitoire de chaleur est considérée. Le changement d'enthalpie est écrit en terme de chaleur spécifique multipliée par le changement de la température.

Des limites alors appropriées de la source de chaleur, ou de chaleur spécifique (apparente) modifiée, sont introduites et une équation différentielle simple est résolue sur le domaine entier (solide liquide). Cette méthode a le grand avantage d'un calcul numérique plus simple et d'une incorporation plus facile dans des codes existants. L'équation discrétisée est obtenue par une approche de volume de contrôle et un arrangement de la progression du temps. La méthode des différences finies est employée pour résoudre cette équation et la valeur de la fraction liquide est employée pour dépister le progrès de l'interface de la phase solide liquide. La détermination de l'étape du temps et du

treillis numérique, est basée sur le mouvement prescrit de l'interface de la phase. La méthode exige de cela à tout moment de faire un pas de l'interface de la phase d'un point de nœud à l'autre point qui suit. Une technique itérative est adoptée de telle manière que la solution fournisse un mouvement indiqué de l'interface de la phase.

## **I.6 Effets de la convection sur la solidification**

Dans plusieurs cas, il est suffisant que des problèmes de changement de phase puissent être analysés avec le transfert thermique par conduction seulement. Cependant, la convection ne peut pas être négligée dans d'autres cas d'intérêt pratique. L'écoulement liquide pendant la solidification affecte la morphologie de l'interface solide liquide, du taux de solidification et de la distribution des températures. Il peut être nécessaire de tenir compte des effets de la convection du problème inverse de solidification.

Les problèmes de transfert de chaleur par convection sont normalement divisés en deux larges catégories, à savoir la convection forcée et la convection naturelle. Dans la convection forcée, le mouvement liquide est dû extérieurement à des pressions appliquées ou aux forces visqueuses. Quand le mouvement du fluide est produit par les forces de poussée qui sont usuellement dues à la température ou au gradient de concentration dans l'écoulement, le processus est appelé convection naturelle ou libre.

Il y a une différence importante entre la convection forcée et naturelle. Dans les cas formels, l'écoulement est extérieurement imposé et est souvent indépendant du champ de températures. Le champ d'écoulement peut être ainsi obtenu indépendant des procédés de transfert de chaleur et alors utilisé dans la détermination du champ de températures. Dans la convection naturelle, l'écoulement et les mécanismes de transfert de chaleur sont typiquement liés, puisque l'écoulement lui-même se déplace grâce à la différence des densités. Comme résultat, le champ d'écoulement ne peut pas être obtenu indépendamment du champ de températures et les deux processus doivent être considérés simultanément. En raison de ces complexités, les écoulements en convection naturelle sont généralement plus difficiles à résoudre (analytiquement et

numériquement) par rapport aux circonstances correspondantes aux écoulements forcés.

Plusieurs étapes ont été éditées sur le calcul numérique du problème direct de la solidification avec la convection naturelle. Une des premières investigations significatives était étudiée par Dipendra. B [4]. Il a résolu un problème axialement symétrique de solidification. Beaucoup d'autres recherches ont développé une méthode des éléments finis dans laquelle est calculé le taux de transfert thermique pour la convection naturelle équilibrée dans une enceinte rectangulaire impliquant les nombres de Rayleigh [5,6]. Seulement peu d'études ont considéré la simulation numérique de la solidification avec les effets de la convection naturelle. Hadamar [2] a publié les résultats de la recherche pour la méthode inverse aux problèmes de solidification et de fusion des métaux.

## *CHAPITRE : 2*

### *ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE*

# **ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE**

## **II.1 Introduction**

Le moulage des pièces est l'une des méthodes promotrices de production dans les fonderies. La conception et le fonctionnement efficaces des machines de la coulée, nécessitent une analyse complète du processus de la coulée dans les moules. Les objectifs dans la majeure partie du travail est l'expérimental qui est basé sur la mesure de la distribution de la température dans les deux phases et de localiser la position de l'interface pendant le moment de la solidification. Les principes de base de la solidification et du transfert thermique nécessitent l'utilisation des méthodes numériques. Dans le changement de phase, la température est supposée constante. Un algorithme sera développé pour prévoir la position du front de solidification à chaque étape. Enfin, les résultats résolus par l'algorithme proposé seront discutés et comparés par les résultats des expériences faites au laboratoire de transfert de chaleur de l'université sur un moule de forme cylindrique.

## **II.2 Les principes de base d'une coulée dans un moule**

La coulée dans un moule est un processus par lequel le métal fondu est solidifié dans un cylindre semi-fini, fini, plaque, billette, galette etc... Avant l'introduction de la coulée dans les années 50, de l'acier a été versé dans des moules stationnaires pour former des "lingots" afin de faciliter le stockage. Depuis ce temps, la coulée s'est évoluée en terme de coulée continue dans la fabrication en série afin d'améliorer le rendement, la qualité, la productivité et l'efficacité économique des pièces moulées. De nos jours, le moulage et la coulée sont devenus un moyen prédominant par lequel beaucoup de pièces et de métaux sont produits dans le monde. Ils sont employés pour solidifier 750 millions de tonnes d'acier, 20 millions de tonnes d'aluminium et plusieurs tonnes d'autres alliages.

## II.3 Description générale de l'installation

### 1. Lieu des expériences

Les expériences qui suivent, ont été réalisées à l'université de Tlemcen (ABOU BAKR BELKAID), au laboratoire de métallurgie et de thermodynamique.

Fig 2.1 Laboratoire de métallurgie et de thermodynamique



### 2. Le four

Le four (figure 2.2) à gaz à creuset basculant est conçu pour fondre les métaux au laboratoire. Il est constitué de :

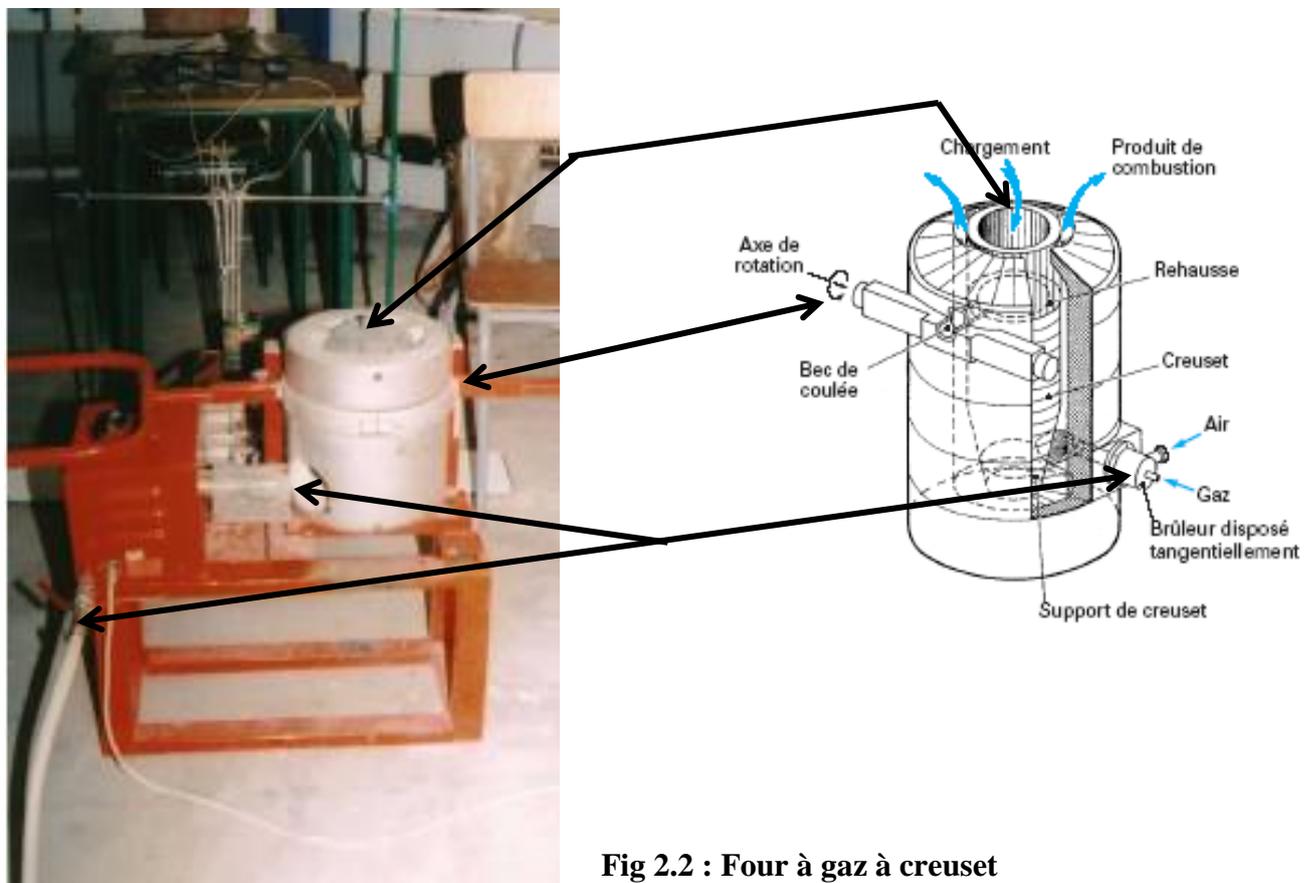


Fig 2.2 : Four à gaz à creuset basculant

- une électrovanne qui régularise le débit du gaz.
- un souffleur de forme cylindrique, refoule l'air à une vitesse constante.
- un brûleur où circule le mélange air gaz.
- un récipient de fusion (creuset) fabriqué en fonte, utilisé pour fondre quelques métaux de basse température ( $<1200^{\circ}\text{C}$ , comme le plomb, le zinc, l'aluminium et le cuivre).
- un calorifugeage en terre réfractaire entourant le récipient en laissant un vide afin que la flamme puisse lécher toutes les parois du récipient.

### 3. Le moule

La fonction principale du moule est d'établir une coquille solide suffisamment dure pour supporter le noyau liquide à l'entrée. Le moule est sous forme d'une structure cylindrique ouverte, d'une épaisseur négligeable ( $e = 0,02\text{mm}$ ) fabriquée d'un alliage d'acier de grande pureté pour fournir une surface de fonctionnement plus dure et pour éviter le collage du métal par l'interface métal liquide, qui peut autrement faciliter les fissures extérieures sur le produit.



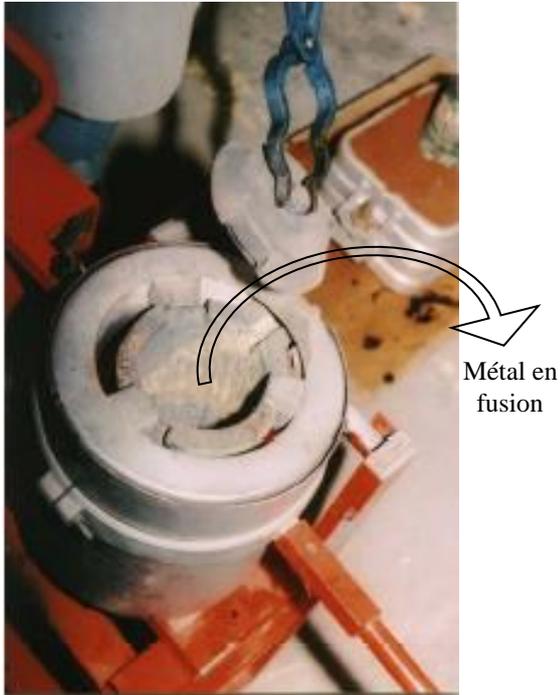
**Fig 2.3 Préparation du moule et damage du sable**

## II.4 Description des expériences

### Mise en évidence :

- Du métal pur posé dans le creuset (figure 2.4) pour se fondre pendant une certaine durée (de 15 à 25 minutes, le temps nécessaire pour la fusion du plomb et du zinc).
- Après le moment de la fusion, le métal liquide sera versé dans le moule (figure 2.5) à une température supérieure à la température de fusion.
- Les bouts des capteurs sont placés à une distance constante sur un même niveau (suivant l'axe  $r$ ) et variables suivant l'axe  $z$ , (figure 2.6).

- Le métal commence à se refroidir jusqu'à ce qu'il atteigne une température  $T_0$  qui représente la température initiale du métal liquide au début de l'expérience.
- Une fois le liquide est versé dans le moule; à l'instant  $t = 0$ , la température

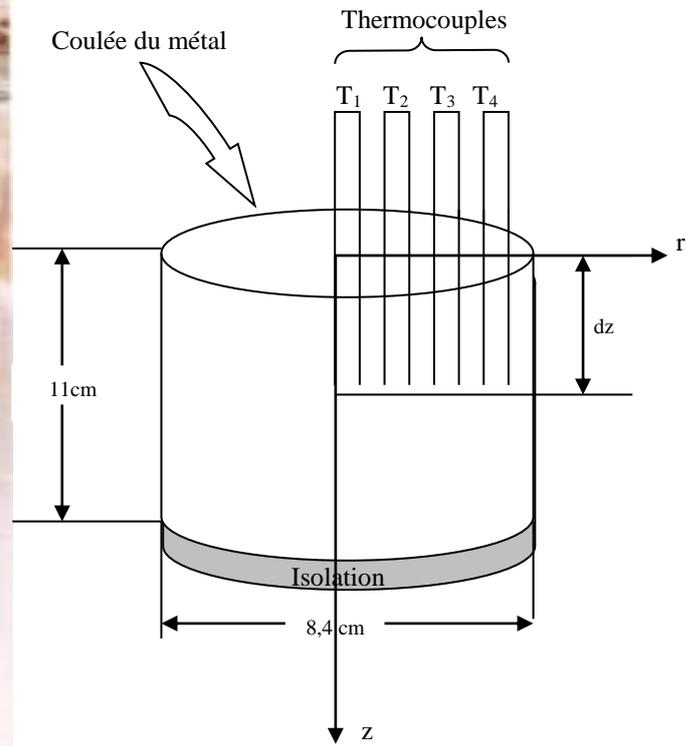


**Fig 2.4 Fusion du métal dans le creuset**



**Fig 2.5 Coulée du métal dans le moule**

de la surface du moule est maintenue à une température  $T_a$  de l'ambiance, qui est plus basse que la Température  $T_m$  de la coulée et est maintenue à cette température pendant les périodes  $t > 0$ .



**Fig 2.6 : Schéma expérimental de la coulée dans un cylindre**

La position des capteurs de température par rapport à l'axe  $z$  est :

- $T_1$  à l'axe
- $T_2$  à  $1/3$  de l'axe
- $T_3$  à  $2/3$  de l'axe
- $T_4$  à l'extrémité

**Fig 2.7 Etat du moule après le refroidissement**



Les propriétés thermo physiques du zinc et du plomb sont représentées sur le tableau (2.1) [28,35]

Matériaux	Température de fusion (K)	$\lambda_s$ W/mK	$\lambda_l$ W/mK	$\rho_s$ Kg/m <sup>3</sup>	$\rho_l$ Kg/m <sup>3</sup>	$C_{ps}$ J/Kg°C	$C_{pl}$ J/Kg°C	Ls J/Kg
<b>Plomb</b>	601	29,773	16,747	11 340	11 315	142	143,12	23 865
<b>Zinc</b>	693	101,181	90	7 135	7 130	461	510,57	112 206

**Tableau (2.1). Les données thermo physiques du plomb et du zinc**

## II.5 Transfert thermique lors de la solidification

Par nature, la solidification d'un métal est principalement un processus d'extraction de chaleur. La conversion du métal fondu dans un solide, enveloppe les formes suivantes de la chaleur :

- surchauffe du liquide entrant dans le moule.
- la chaleur latente de fusion au front de solidification du liquide transformé en solide.
- la chaleur sensible (se refroidissant au-dessous de la température du solidus) de la coquille solide.

Cette chaleur est extraite par une combinaison des mécanismes de transfert de chaleur suivants :

- la convection à travers le liquide.
- pour la conduction, le gradient de températures à l'intérieur de la coquille se dirige du front de solidification vers la surface extérieure qui est plus froide.
- le transfert thermique par rayonnement, conduction et convection s'effectue à l'extérieur.

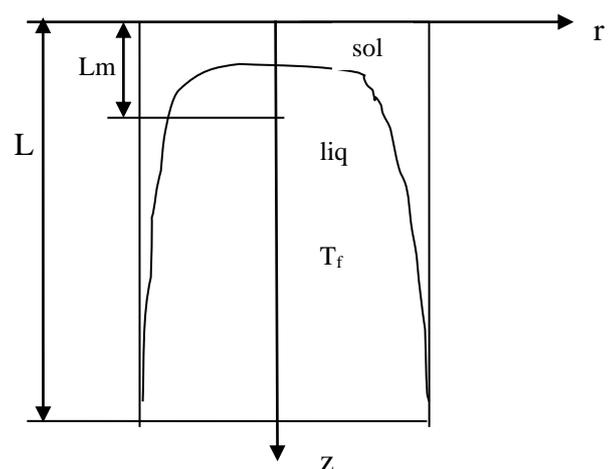
Le transfert de chaleur limite non seulement la production maximum de produit, mais également influe profondément sur la qualité du moule, en

particulier en ce qui concerne la formation des fissures intérieures des surfaces. En partie, c'est parce que les métaux se dilatent et se contractent pendant les périodes du chauffage ou du refroidissement. C'est-à-dire, le changement brusque dans le gradient de température à travers la coquille solide, résulte des changements brusques de l'extraction extérieure de la chaleur causant une dilatation thermique différentielle et la génération des contraintes de tension. Les fissures peuvent se former dans la coquille solide selon l'importance de la contrainte, relativement à la contrainte de la rupture du métal et la contrainte admissible avant la solidification. La quantité de chaleur extraite de la coquille permet de résister à la force de poussée due à la pression ferrostatique qui est aussi due à l'effet de la température sur les propriétés mécaniques du métal. Par conséquent, l'analyse du transfert thermique du processus de la coulée continue ne devrait pas être négligée dans la conception et l'opération d'une coulée lors d'un moulage.

## II.6 Description du problème

Les suppositions de base suivantes ont été faites par la formulation du modèle mathématique suivant :

- Le processus de la coulée dans le moule est à l'état continu.
- L'équilibre cylindrique est considéré ainsi la symétrie radiale est assumée.
- La dissipation d'énergie due aux frottements internes à l'état liquide est négligée.



**Fig 2.8 : Coordonnées (r-z) rattachées au moule**

Le développement du modèle mathématique est basé sur l'équation générale de la conduction de chaleur exprimée en coordonnées cylindriques :

$$\rho.Cp.\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad (2.1)$$

$r, z$  sont les coordonnées cylindriques représentées sur la figure(2.8).

Tenant compte des suppositions ci-dessus, ainsi la conduction de chaleur est importante suivant les deux directions. En augmentant les dérivées partielles par rapport au rayon  $R$  et l'axe  $Z$ , et en considérant le matériel comme isotrope ( $\lambda$  constant dans l'équation (2.1)), alors :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < r < R \quad \text{et} \quad 0 < z < L \quad (2.2)$$

i) à la surface isolée ( $z = L, 0 \leq r \leq R$ )

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=L} = 0 \quad (2.3)$$

ii) sur la surface du cylindre exposée directement à l'air:

$$h_1(T - T_{amb}) = -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.4)$$

iii) à la surface latérale ( $r = R$  et  $0 \leq z \leq L$ ) :

$$h_2(T - T_{amb}) = -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.5)$$

### Problème de solidification :

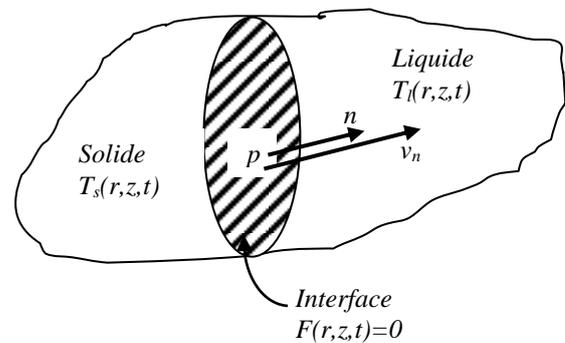
Un liquide ayant un simple changement de phase de température  $T_m$  est confiné à une région semi infinie  $0 < x < \infty$ . Au début, le liquide est à une température uniforme  $T_i$  qui est plus élevée que la température  $T_m$  de changement de phase et  $T_f$  la température de la fusion. Une fois le liquide est

versé dans le moule et à l'instant  $t = 0$ , la température de la surface de frontière (du moule) est maintenue à une température  $T_a$  de l'ambiance, qui est plus basse que la température  $T_m$  du métal liquide et est maintenue à cette température pendant les périodes  $t > 0$ . La solidification commence sur la surface de frontière  $z = 0$  et  $r = R$  et l'interface solide liquide se déplace dans la direction de  $z$  et négative de  $r$ .

$s(t)$  est la position de l'interface solide liquide qui n'est pas connue à priori, par conséquent elle doit être déterminée comme partie de la solution. Les indices  $s$  et  $l$  se réfèrent, respectivement, aux phases solide et liquide. Par conséquent, le problème implique trois inconnues, à savoir,  $T_s(z, r, t)$ ,  $T_l(z, r, t)$ , et  $s(t)$ . L'équation additionnelle régissant  $s(t)$  est déterminée en considérant un bilan énergétique à l'interface  $s(t)$ , indiqué dans l'équation (1.5) comme :

$$\left( \begin{array}{c} \text{Flux de chaleur par} \\ \text{conduction à travers} \\ \text{la phase solide} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flux de chaleur par} \\ \text{conduction à travers} \\ \text{la phase liquide} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{La chaleur latente libérée pendant} \\ \text{la solidification par unité de} \\ \text{surface de l'interface} \end{array} \right)$$

Les phases liquides et solides sont séparées par l'interface définie par l'équation  $F(r, z, t) = 0$  [27]



**Fig 2.9: Solidification bidimensionnelle. Mouvement de l'interface dans la direction de  $n$**

$F(r, z, t)$  représente la position de l'interface

La continuité de la température à l'interface donne :

$$T_s(r, z, t) = T_l(r, z, t) = T_m \text{ avec } F(r, z, t) = 0$$

\* à l'interface liquide solide ( $r = r_i$  et  $z = z_i$ ) :

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial n} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial n} = \rho L_s v_n \quad \text{avec} \quad F(r, z, t) = 0 \quad (2.6)$$

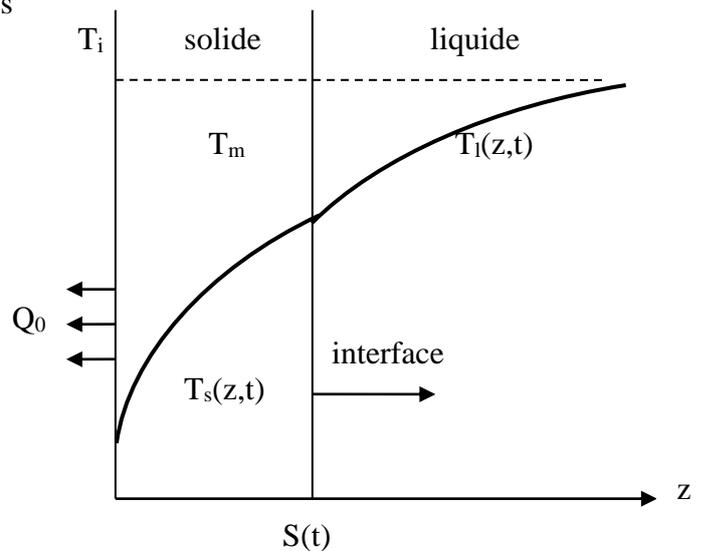
$v_n = \frac{ds(t)}{dt}$  et  $n$  représente la normale au point étudié de l'interface.

L'équation de l'interface prend la forme [27] :

$$\left[ 1 + \left( \frac{\partial s}{\partial r} \right)^2 \right] \cdot \left[ \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial z} \right] = \rho L_s \frac{\partial s}{\partial z} \quad \text{à} \quad z = s(r, t) \quad (2.7)$$

## II.7 Effets de changement de densité.

La différence de densité des phases à l'interface pendant le changement de phase provoque le mouvement liquide à travers l'interface. Habituellement  $\rho_s > \rho_l$  excepté pour l'eau, le bismuth, et l'antimoine, pour lequel  $\rho_s < \rho_l$ . L'illustration de l'effet de changement de densité, est présentée pour le cas unidimensionnel de solidification sur la figure (2.9) [27].



**Fig 2.9 : Géométrie et coordonnées du problème de solidification unidimensionnelle**

La vitesse  $v_z$  de l'interface est dans la direction de  $z$ , et pour  $\rho_s > \rho_l$ , le mouvement du liquide est dans la direction opposée. Le bilan énergétique à l'interface tenant compte des divers modes de transfert d'énergie diffusif et convectif devient [27] :

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial z} = (\rho_l H_l - \rho_s H_s) v_z - \rho_l H_l v_l \quad \text{à } z = s(t) \quad (2.8)$$

$v_z$  : vitesse de l'interface

$v_l$  : vitesse du liquide à l'interface

$H_s, H_l$ : les enthalpies par unité de masse du matériel pour les phases solide et liquide à l'interface

L'équation de conservation de masse à l'interface peut être écrite sous la forme :

$$(\rho_l - \rho_s) v_z = \rho_l v_l \quad (2.9)$$

$$\text{d'où } v_l = -\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} v_z \quad (2.10)$$

en remplaçant  $v_l$  par sa valeur donnée par l'équation (2.10) dans l'équation (2.8), l'équation devient:

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial z} = \rho_s L_s v_z \quad (2.11)$$

où  $L_s = H_l - H_s$  chaleur latente de solidification

## II.8 Effets de la convection de la phase liquide.

On considère le problème de solidification illustré dans la figure (2.9). Si le transfert thermique à partir de la phase liquide à l'interface solide liquide est commandé par convection, et par conséquent la diffusion dans la phase liquide est négligée, l'équation du bilan énergétique à l'interface (2.11) prend la forme :

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial n} - h(T_\infty - T_m) = \rho_s L_s \cdot \frac{ds(t)}{dt} \quad (2.12)$$

où  $h$  est le coefficient de transfert thermique du côté liquide,  $T_\infty$  est la température du liquide et  $T_m$  est la température des points de fusion à l'interface.

## II.9 La solution exacte des problèmes de changement de phase

La solution exacte des problèmes de changement de phase est limitée à peu de situations idéalisées pour des raisons indiquées précédemment. Elles sont principalement utilisées pour les cas des régions unidimensionnelles infinies ou semi infinies et des conditions aux limites simples, telles que la température prescrite à la surface de frontière. Les solutions exactes sont obtenues si le problème admet une solution de similitude permettant aux deux variables indépendantes  $z$  et  $t$  dans une similitude simple de variable  $z/t^{1/2}$  [15,29]. Quelques solutions exactes peuvent être trouvées dans de différentes références.

## II.10 Méthode implicite appliquée à la conduction de la chaleur bidimensionnelle

Dans les méthodes des différences finies, nous trouvons les méthodes explicites, implicites, Crank-Nicolson, et combinées.

L'équation de la conduction de chaleur transitoire bidimensionnelle sans génération d'énergie dans le système de coordonnées cylindriques est représentée par :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

où  $T \equiv T(r, z, t)$ , sujet de quelques frontières indiquées et conditions initiales. La discrétisation de cette équation différentielle est représentée par la notation

$$T(r, z, t) = T(i\Delta r, k\Delta z, n\Delta t) \equiv T_{i,k}^{n+1} \quad (2.13)$$

Puis, l'approximation des différences finies de l'équation (2.2) à un point de la grille  $(r, z)$  par la méthode implicite employant la discrétisation progressive du temps, et espace- central (FTCS), donne :

$$\frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{T_{i-1,k}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1} + T_{i+1,k}^{n+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{T_{i+1,k}^{n+1} - T_{i-1,k}^{n+1}}{2\Delta r} + \frac{T_{i,k-1}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1} + T_{i,k+1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} \right] \quad (2.14)$$

Cette expression est réarrangée sous la forme :

$$T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n = \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta r)^2} \left( T_{i-1,k}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1} + T_{i+1,k}^{n+1} + \frac{1}{2i} T_{i+1,k}^{n+1} - \frac{1}{2i} T_{i-1,k}^{n+1} \right) + \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta z)^2} (T_{i,k-1}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1} + T_{i,k+1}^{n+1})$$

$$T_{i,k}^{n+1} = T_{i,k}^n + R_r \left( T_{i-1,k}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1} + T_{i+1,k}^{n+1} + \frac{1}{2i} T_{i+1,k}^{n+1} - \frac{1}{2i} T_{i-1,k}^{n+1} \right) + Z_z (T_{i,k-1}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1} + T_{i,k+1}^{n+1}) \quad (2.15)$$

où

$$R_r = \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta r)^2} \quad \text{et} \quad Z_z = \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta z)^2} \quad (2.16)$$

L'équation (2.15) fournit l'expression implicite pour la détermination de  $T$  lorsque le niveau de connaissance des températures est  $n + 1$  d'un point de la grille au niveau du temps précédent  $n$ . Si la température est prescrite sur toutes les frontières, le nombre d'équations est égal au nombre de températures inconnues de la grille; par conséquent le problème est soluble.

Pour des états de frontières dérivées, tels que la convection ou le flux prescrit de la chaleur, les températures aux nœuds de frontière ne sont pas connues. Pour de tels cas, des relations additionnelles sont développées en discrétisant les conditions de frontière. La discrétisation des termes dérivatifs en conditions de frontière peut être faite à l'un ou l'autre par la différence d'un côté en employant une formule régressive ou progressive qui est seulement précise du premier ordre. Une discrétisation précise du second ordre de l'état de frontière est possible en présentant un nœud fictif et en employant une formule de différence centrale. Alternativement, l'approche de volume de contrôle et le principe de conservation peuvent être employés pour développer l'approximation des différences finies pour les conditions aux limites.

**Stabilité.** L'application de la méthode de Fourier de stabilité est utilisée pour démontrer que la forme implicite est inconditionnellement stable.

La solution numérique  $T_N$  est la somme de la solution exacte du problème  $T_E$ , plus la limite d'erreur, donnée sous la forme :

$$T_N = T_E + E$$

Pour obtenir des résultats significatifs de la solution de l'équation de différence (2.15), le critère de stabilité lié à elle devrait être établi. L'équation (2.15) se réécrit sous la forme [33]:

$$E_{j,k}^{n+1} = E_{j,k}^n + R_r \left( E_{j-1,k}^{n+1} - 2E_{j,k}^{n+1} + E_{j+1,k}^{n+1} + \frac{1}{2j} E_{j+1,k}^{n+1} - \frac{1}{2j} E_{j-1,k}^{n+1} \right) + Z_z \left( E_{j,k-1}^{n+1} - 2E_{j,k}^{n+1} + E_{j,k+1}^{n+1} \right) \quad (2.17)$$

$$E(j\Delta r, k\Delta z, n\Delta t) \equiv E_{j,k}^n = \exp(\mathcal{G}\Delta t) \cdot \exp(i\beta_m j\Delta r) \cdot \exp(i\eta_m k\Delta z)$$

L'indice de la variable espace  $i$  est remplacé par  $j$  pour le distinguer de la valeur imaginaire  $i$ , qui apparaîtra dans l'analyse. Les termes d'erreur  $E_{j,k}^n$  sont représentés par :

$$E_{j,k}^n = \xi^n \exp(i\beta_m j\Delta r) \exp(i\eta_m k\Delta z) \quad (2.18a)$$

$$E_{j\pm 1,k}^{n+1} = \xi^n \exp(i\beta_m (j \pm 1)\Delta r) \cdot \exp(i\eta_m k\Delta z) \quad (2.18b)$$

$$E_{j,k\pm 1}^{n+1} = \xi^n \exp(i\beta_m j\Delta r) \cdot \exp(i\eta_m (k \pm 1)\Delta z) \quad (2.18c)$$

$$E_{j,k}^{n+1} = \xi^{n+1} \exp(i\beta_m j\Delta r) \cdot \exp(i\eta_m k\Delta z) \quad (2.18d)$$

$$\xi \equiv \exp(\nu\Delta t) \quad (2.19)$$

$i = \sqrt{-1}$ ,  $\beta_m$  et  $\eta_m$  sont les modes de Fourier et  $\mathcal{G}$  la variable complexe.

En raison de la définition de  $\xi$ , le terme d'erreur  $\varepsilon_{j,k}^n$  ne s'accroît pas quand  $t$  augmente, ceci permet d'écrire :

$$|\xi| \leq 1 \quad (2.20)$$

En remplaçant les valeurs des termes d'erreur des équations (2.18) dans l'équation (2.17) et après réarrangement :

$$\xi = 1 + R_r \left[ \exp(-i\beta_m \Delta r) + \exp(i\beta_m \Delta r) - 2 + \frac{1}{2j} \exp(i\beta_m \Delta r) - \frac{1}{2j} \exp(-i\beta_m \Delta r) \right] + Z_z [\exp(-i\eta_m \Delta z) + \exp(i\eta_m \Delta z) - 2] \quad (2.21)$$

Qui peut être écrite sous la forme :

$$\xi = 1 - 2R_r (1 - \cos(\beta_m \Delta r) + \frac{1}{4j} \sin(\beta_m \Delta r)) - 2Z_z (1 - \cos(\eta_m \Delta z)) \quad (2.22)$$

$$\text{Avec } \cos b = \frac{1}{2} [\exp(-ib) + \exp(ib)] \text{ et } \sin b = \frac{1}{2} [\exp(-ib) - \exp(ib)]$$

L'application de l'équation du critère de stabilité (2.20) sur l'équation (2.22), donne :

$$-1 \leq [1 - 2R_r (1 - \cos(\beta_m \Delta r) + \frac{1}{4j} \sin(\beta_m \Delta r)) - 2Z_z (1 - \cos(\eta_m \Delta z))] \leq 1$$

Qui doit satisfaire toutes les valeurs de  $\beta_m$  et  $\eta_m$ . Le côté droit est toujours satisfait. Pour satisfaire le côté gauche dans la plupart des conditions strictes, il faut avoir :

$$1 - \cos(\beta_m \Delta r) + \frac{1}{4j} \sin(\beta_m \Delta r) = 2 \quad \text{et} \quad 1 - \cos(\eta_m \Delta z) = 2 ; \text{ qui donnent}$$

$$-1 \leq [1 - 4R_r - 4Z_z] \quad (2.23)$$

Ou bien

$$(R_r + Z_z) \leq \frac{1}{2} \quad (2.24)$$

Ou bien

$$\left[ \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta z)^2} \right] \leq \frac{1}{2} \quad (2.25)$$

Si le maillage est purement carré, alors  $\Delta r = \Delta z \Rightarrow R_r = Z_z$

$$R_r = Z_z \leq \frac{1}{4} \text{ ou bien } \left[ \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta z)^2} \right] \leq \frac{1}{4}$$

(2.26)

Pour la stabilité nous avons besoin de  $|\xi| \leq 1$ , et cette condition est satisfaite pour toutes les valeurs positives de  $r$  et  $z$ . Par conséquent, l'approximation implicite des différences finies est stable pour toutes les valeurs de l'étape de temps  $\Delta t$ . Cependant, il faut que le pas de temps  $\Delta t$  doive être maintenu petit pour obtenir des résultats suffisamment près de la solution exacte de l'équation des différences partielles.

## II.11 Représentation des valeurs expérimentales sur les graphes

Après la réalisation des expériences, les valeurs de l'allure de refroidissement du zinc et du plomb sont représentées sur les figures suivantes :

### A/ Métal concerné : le zinc

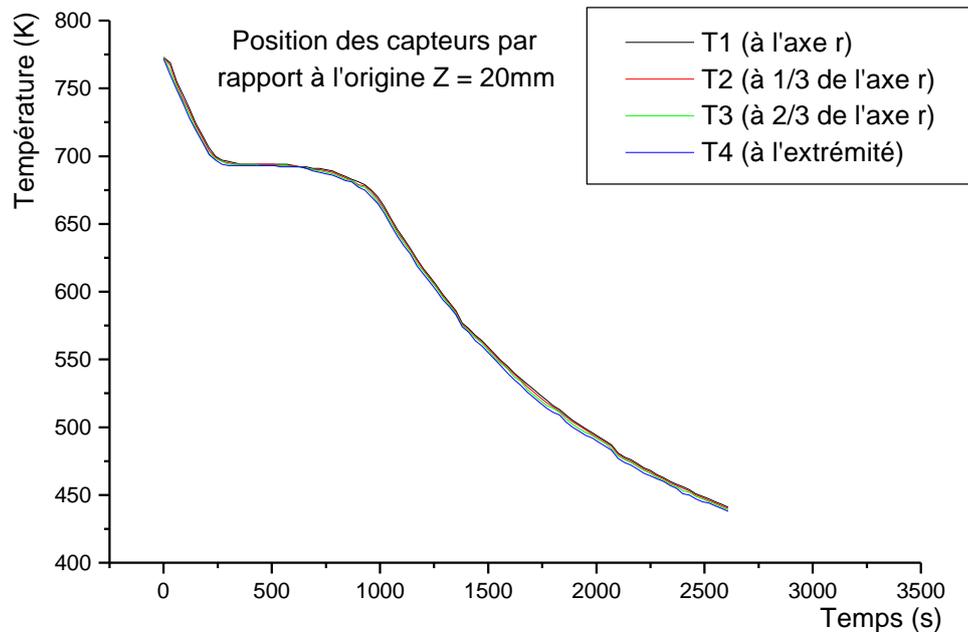


Fig (2.4a) Procédé expérimental du zinc pour Z = 20mm

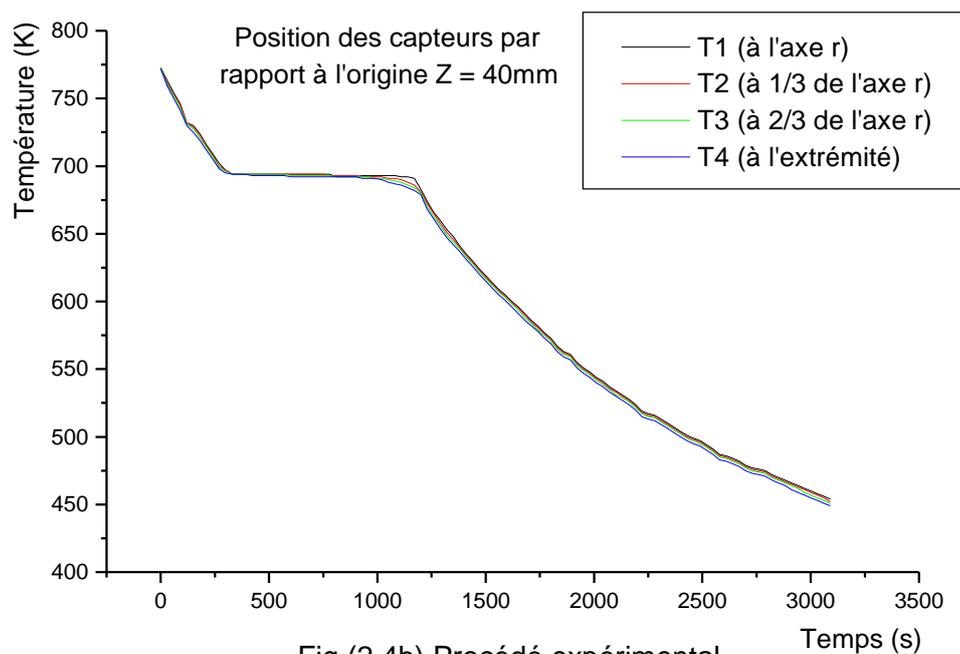


Fig (2.4b) Procédé expérimental du zinc pour Z = 40mm

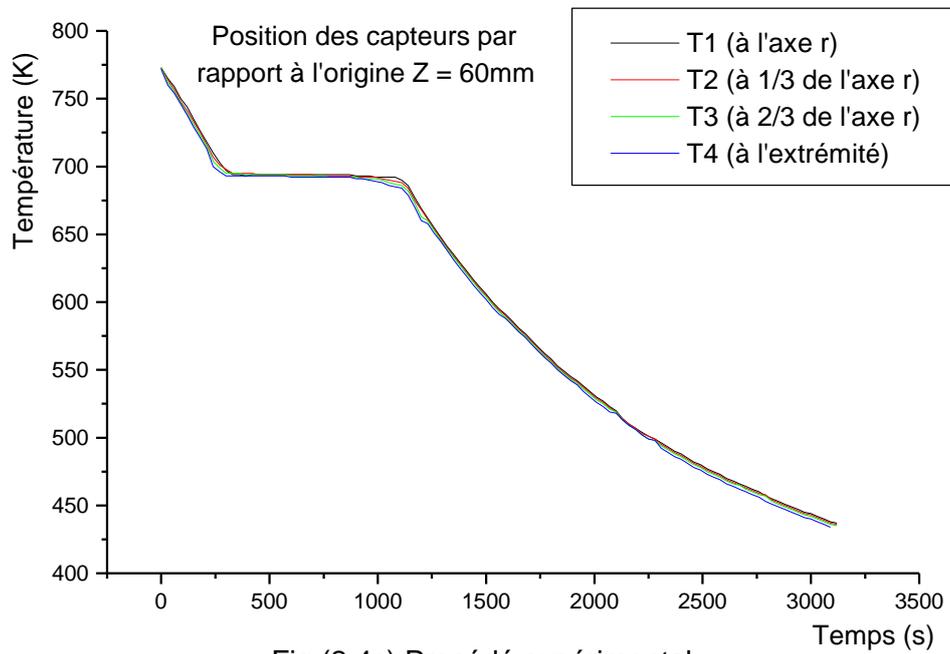


Fig (2.4c) Procédé expérimental du zinc pour  $Z = 60\text{mm}$

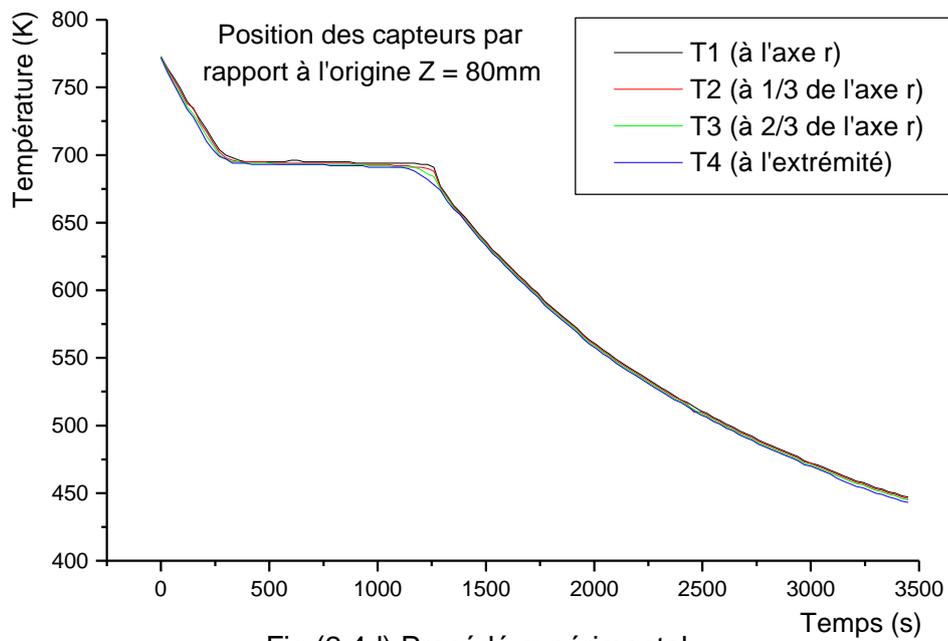


Fig (2.4d) Procédé expérimental du zinc pour  $Z = 80\text{mm}$

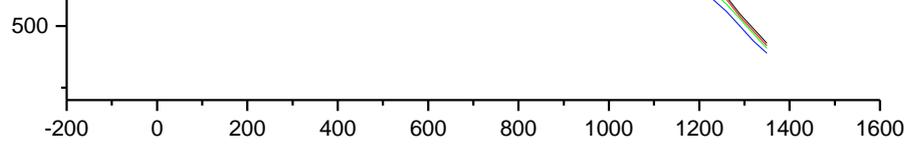


Fig (2.5a) Procédé expérimental du plomb pour Z=20mm

**B/ Métal concerné : le plomb**

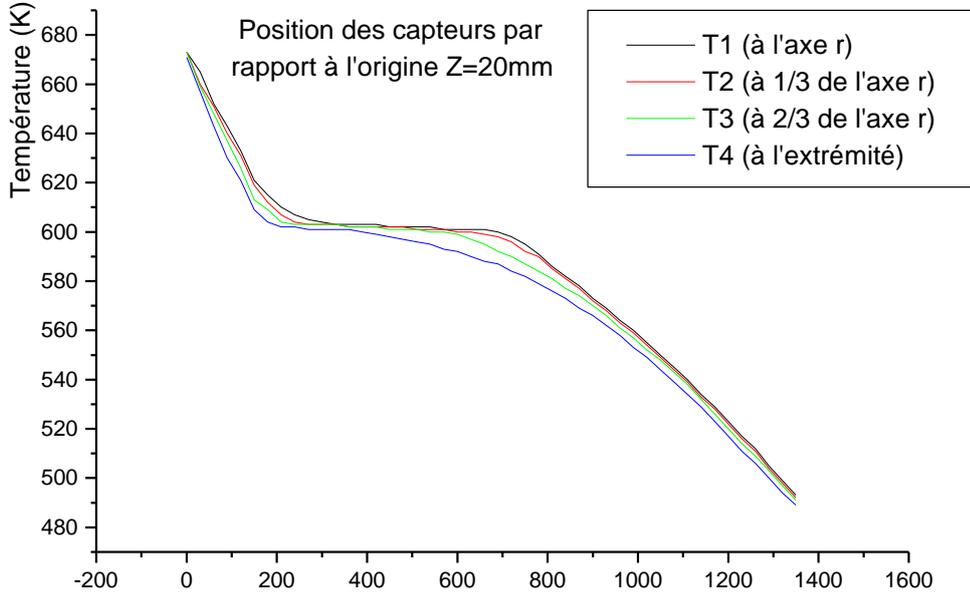


Fig (2.5a) Procédé expérimental du plomb pour Z=20mm

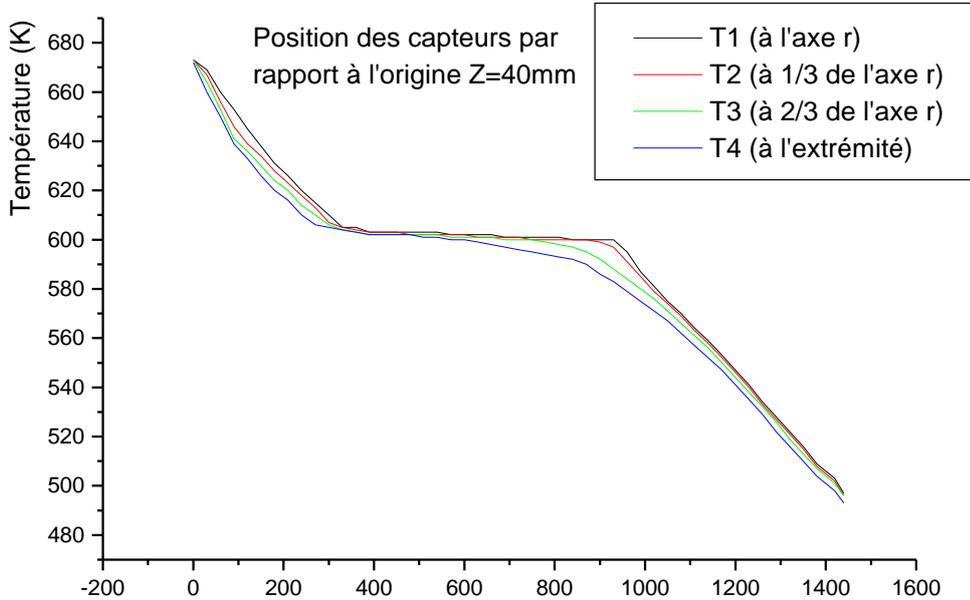
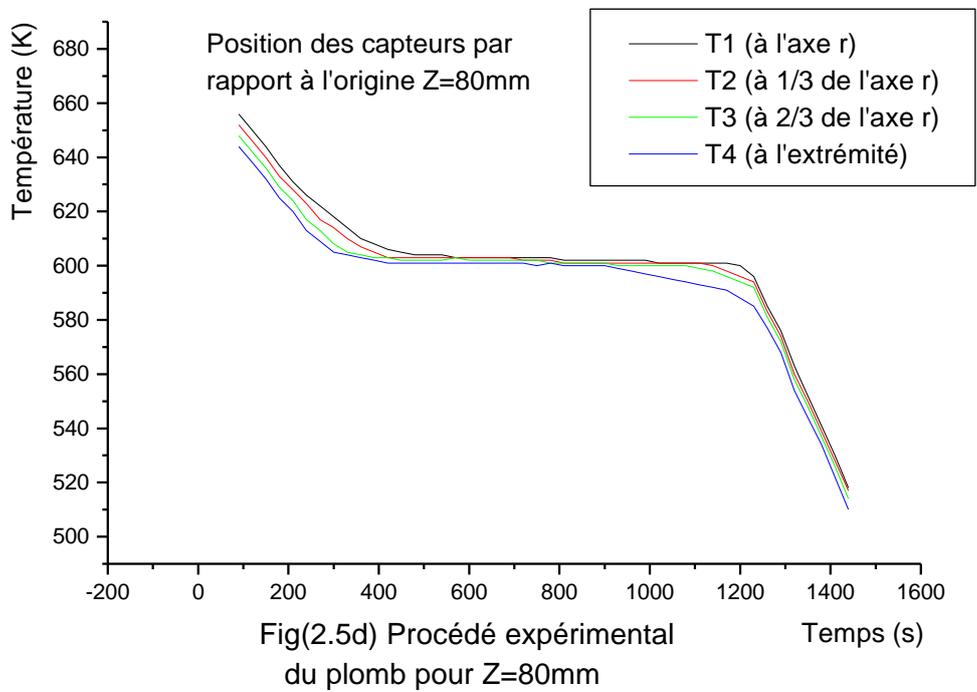
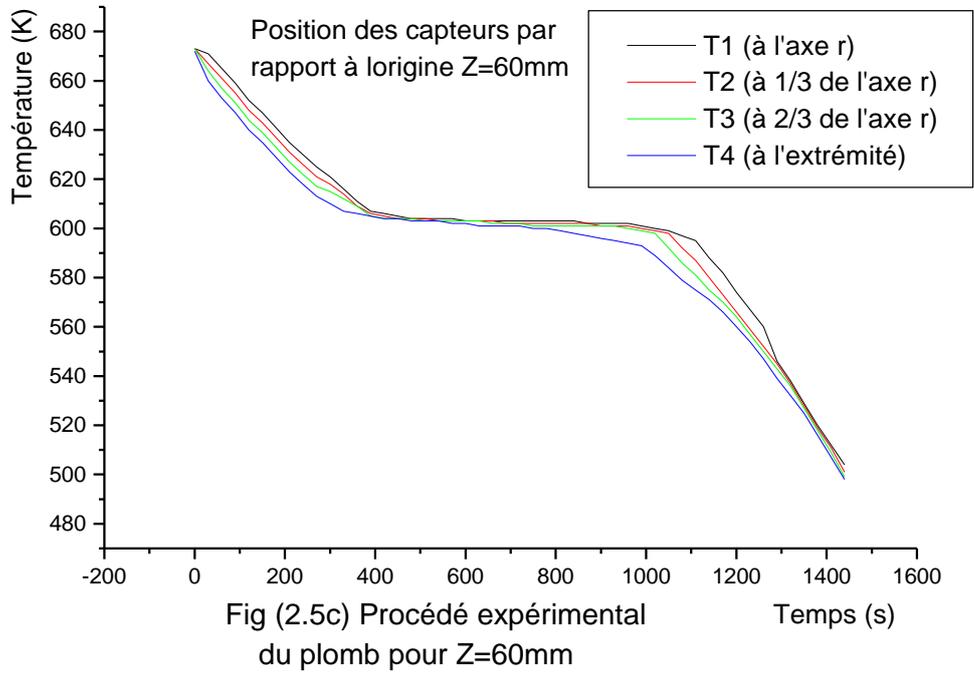


Fig (2.5b) Procédé expérimental du plomb pour Z=40mm



## II.13 Discussion sur les graphes expérimentaux enregistrés

Les figures (2.4a,b,c,d) et (2.5a,b,c,d) représentent l'évolution de la température en fonction du temps des quatre thermocouples respectivement aux positions  $z = (20, 40, 60, 80\text{mm})$  et  $r = (1, 1/3, 2/3, R)$  pour le zinc et le plomb. Le palier de solidification est bien clair à la température 693K pour le zinc et la température 601K pour le plomb qui correspondent à la température de fusion du métal coulé. Cela confirme que le changement de phase d'un métal pur s'effectue à une température constante. Soit  $T_1$  la température du thermocouple imposé à l'axe du moule, le début de la solidification du zinc sur le palier de solidification concernant cette température est 694K pour le temps  $t = 330\text{s}$ . La température à la fin de la solidification sur le palier est 692K pour le temps  $t = 660\text{s}$ , (soit une durée de 330s). Le début de la solidification du plomb sur le palier de solidification concernant cette température est 604K pour le temps  $t = 210\text{s}$ . La température à la fin de la solidification sur le palier est 599K pour le temps  $t = 490\text{s}$ , (soit une durée de 280s). Ce palier diminue de longueur en se dirigeant vers l'extérieur, due à la cinétique de refroidissement qui est plus importante à l'extérieur.

Sur les figures (2.4), le début de solidification du zinc à  $t = 330\text{s}$  pour la position  $Z = 20\text{mm}$ . Ce temps augmente à  $t = 420, 510$  et  $780\text{s}$  pour les positions  $Z = 40, 60$  et  $80\text{mm}$ .

La même remarque est portée sur les figures (2.5), le début de solidification du plomb à  $t = 210\text{s}$  pour la position  $Z = 20\text{mm}$ . Ce temps augmente à  $t = 250, 330$  et  $390\text{s}$  pour les positions  $Z = 40, 60$  et  $80\text{mm}$ . Ceci est dû au refroidissement de la surface libre et de la condition d'isolation appliquée au fond du moule.

# *CHAPITRE :3*

## *MODELISATION MATHEMATIQUE DU PHENOMENE DE CHANGEMENT DE PHASE*

# **MODELISATION MATHEMATIQUE DU PHENOMENE DE CHANGEMENT DE PHASE**

## **Introduction :**

Le transfert de chaleur considérée est lié à un changement de phase, particulièrement de la phase liquide au solide (solidification). Dans ce travail, nous allons analyser les deux matériaux expérimentés, à savoir le zinc et le plomb. La génération d'énergie interne (effet joule) et la convection du fluide sont éliminées par contre le rayonnement thermique est pris en considération.

Lors de la solidification, le matériau en phase liquide ou solide possède un comportement différent. D'une phase à l'autre, il y a un changement abrupt des caractéristiques physiques de la substance. En plus, les modes de transmission de chaleur sont différents, la chaleur étant transmise non seulement par conduction, mais également, par convection dans la phase liquide. Pour bien cerner ce problème, il est essentiel de connaître la position de la frontière séparant les deux phases, appelée ainsi interface diphasique.

## **III.1 Phénomène de changement de phase**

Un changement de phase entraîne l'addition ou la soustraction de quantités considérables d'énergie thermique à une température constante ou quasi-constante.

Lorsqu'un matériau subit une transformation liquide solide (une solidification), l'énergie est libérée sous forme d'enthalpie massique de solidification (appelée la chaleur latente de solidification), puisque l'enthalpie de la phase solide est plus basse (donc les liaisons entre les atomes conduisent à un niveau plus bas). Ainsi, lors de la solidification, la température diminue d'abord légèrement en dessous du point de fusion (surfusion) pour que les atomes se stabilisent et ensuite remontent assez proche de la température de fusion théorique, jusqu'à ce que la solidification soit complète.

**Remarque :** La solidification prend des formes variables suivant qu'il s'agit d'un métal pur ou d'un alliage et selon le régime de refroidissement.

La transformation s'effectue à la température de cristallisation et à pression constante. La quantité de chaleur à enlever au cours de la solidification est donnée par :

$$Q = m.L_s \quad (3.1)$$

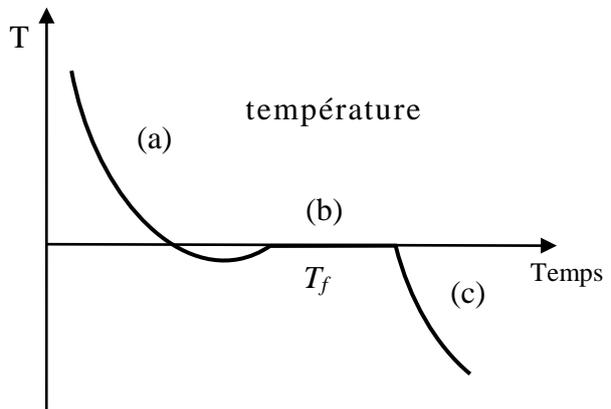
$m$  : Masse du matériau

$L_s$  : Chaleur latente de solidification

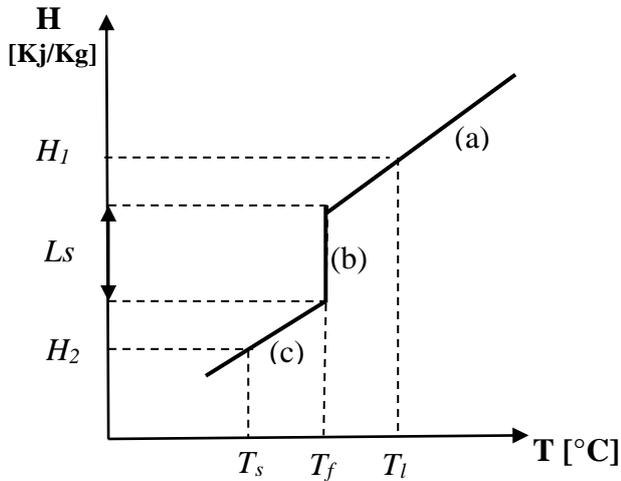
### III.2 Théorie de solidification

#### III.2.1 Solidification d'un métal pur

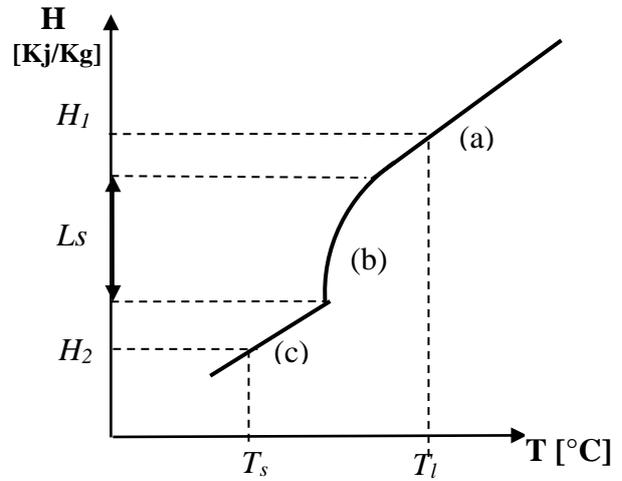
Soit un métal pur en état de fusion à une température  $T_l$  supérieure à la température de fusion figure (3-1). Pendant la solidification, la température descend progressivement suivant le palier (a), puis se stabilise durant le changement de phase à la  $T_f$  suivant le palier (b), dans lequel le métal est partiellement solidifié. Le métal continue à se refroidir et passe de la température  $T_f$  à la température  $T_s$  suivant le palier (c), où il sera complètement solidifié.



**Fig (3.1.a) : Courbe de refroidissement lent d'un métal pur en fonction du temps**



**Fig (3.1.b) : Représentation de l'enthalpie en fonction de la température pour un métal pur**



**Fig (3.1.c) : Représentation de l'enthalpie en fonction de la température pour un alliage**

Chaque palier représente un état spécifique du métal et la variation d'enthalpie dans chaque palier est donnée comme suit [30] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Palier (a) : } dH = C_{pl} dT & \text{pour } T > T_f \\ \text{Palier (b) : } dH = L_s & \text{pour } T = T_f \\ \text{Palier (c) : } dH = C_{ps} dT & \text{pour } T < T_f \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$H$  est une fonction discontinue à  $T = T_f$ . Cette discontinuité marque la séparation entre le liquide et le solide et est appelée interface diphasique.

Pour que le métal soit complètement solidifié il faut lui enlever la quantité d'énergie  $\Delta H$  suivante :

$$\Delta H = C_{pl} (T_l - T_f) + L_s + C_{ps} (T_f - T_s) \quad (3.3)$$

Dans sa forme liquide, le métal possède la chaleur latente  $L_S$  par unité de masse plus la chaleur sensible :  $Cp_l (T_l - T_f) + L_S$ .

Pour un métal pur figure (3.1.b), l'enthalpie est reliée à la température par les équations suivantes [30,31] :

$$\Delta H = \begin{cases} Cp_l \Delta T + L_S & \text{pour } T > T_f \\ Cp_s \Delta T & \text{pour } T < T_f \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour un alliage, figure (3.1.c), où la solidification prend place à travers un intervalle de solidification ( $T_l - T_s$ ), l'enthalpie est reliée à la température par les équations suivantes [30,31] :

$$\Delta H = \begin{cases} Cp_l \Delta T + L_S & \text{pour } T > T_f \\ Cp \Delta T + f_l \cdot L_S & \text{pour } T_s \leq T \leq T_l \\ Cp_s \Delta T & \text{pour } T < T_f \end{cases} \quad (3.5)$$

$f_l$ : désigne la fraction liquide représentée par l'équation (3.11) dans ce qui suit.

Dans le procédé de solidification ou de fusion, la température évolue dans chacune des phases et les interfaces diphasiques se déplacent. Le fait de parler ici de plusieurs interfaces diphasiques, car l'imagination qu'il y ait plusieurs fronts de solidification et/ou de fusion. Par la suite, la présence d'un seul front, bien que plusieurs fronts puissent être présents. Le déplacement de l'interface diphasique ne peut pas être suivi en ne considérant que l'évolution de la température pour certains points du domaine, la transmission de la chaleur étant dépendante du déplacement de l'interface et inversement.

### III.3 Modélisation mathématique du phénomène de changement de phase

Généralement la résolution des problèmes de transfert de chaleur avec le changement de phase, appartient aux problèmes dits à frontière mobile, et la solution recherchée consiste à déterminer le champ de températures dans les deux phases liquide et solide ainsi la position de l'interface.

La difficulté fait que la position de l'interface solide liquide où est définie la condition de Stefan est elle-même une inconnue du problème.

Il existe en général deux approches pour analyser les problèmes de changement de phase : La méthode à maillage mobile (variable dans le temps), et la méthode à maillage fixe.

#### III.3.1 Méthode à maillage mobile

Dans cette méthode, les équations de transfert de chaleur sont résolues séparément dans la région liquide et la région solide, la position de l'interface est obtenue par la résolution de l'équation du bilan à l'interface (condition de Stefan), qui provient de la chute d'enthalpie du système (dégagement de la chaleur latente  $L_s$ ) à la température de fusion  $T_f$ .

La température  $T$  dans les deux phases liquide et solide, est gouvernée par les équations générales suivantes :

*Dans la région liquide*

$$\rho_L \cdot C_{pL} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \lambda_L \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_L \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.6)$$

*Dans la région solide*

$$\rho_s \cdot C_{ps} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \lambda_s \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_s \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.7)$$

A l'interface liquide solide, les deux équations (3.6) et (3.7) sont couplées avec la condition de Stefan :

$$T_l = T_s = T_f$$

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial n} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial n} = \rho L_s v_n$$

Cette approche est adaptée dans le cas d'un métal pur où le changement de phase s'effectue à une température constante.

### **Remarque**

Cette méthode donne généralement une bonne précision dans le cas d'une solidification unidimensionnelle, mais elle est très complexe dans le cas multidimensionnel où l'équation du front de solidification devient plus complexe [24,29].

### **III.3.2 Méthode à maillage fixe**

Dans cette méthode, une autre équation permet de décrire les deux phases. Donc il n'est pas nécessaire de considérer les deux phases liquide et solide séparément.

Pendant le calcul, le maillage reste fixe et les équations gouvernant le transfert de chaleur dans la région liquide et la région solide sont résolues simultanément malgré la discontinuité du gradient de températures à l'interface.

L'avantage de ces méthodes réside dans la simplicité et la facilité de mettre en oeuvre même dans le cas multidimensionnel.

### a- Méthode de la capacité effective

L'enthalpie totale d'un matériau peut être exprimée par :

$$H = \begin{cases} Cp_l \cdot T + Ls & \text{pour } T > T_f \\ Cp \cdot T + f_l \cdot Ls & \text{pour } T_s \leq T \leq T_l \\ Cp_s \cdot T & \text{pour } T < T_f \end{cases} \quad (3.8)$$

L'équation (3.8) peut se simplifier comme suit:

$$H = CpT + f_l \cdot Ls \quad (3.9)$$

Avec  $f_L = 1$  dans la région liquide,  $f_L = 0$  dans la région solide et  $0 \leq f_L \leq 1$  dans la région pâteuse où coexiste les deux phases. Si la chaleur latente varie linéairement avec la température, ceci permet de poser l'approximation suivante :

$$f_l = \begin{cases} 1 & \text{pour } T > T_l \\ \frac{T - T_s}{T_l - T_s} & \text{pour } T_s \leq T \leq T_l \\ 0 & \text{pour } T < T_s \end{cases} \quad (3.10)$$

La capacité calorifique effective est définie par [34] :

$$\partial H = C_{eff} \partial T \quad (3.11)$$

$$C_{eff} = \begin{cases} Cp_l & \text{pour } T > T_l \\ Cp + \frac{Ls}{T_l - T_s} & \text{pour } T_s \leq T \leq T_l \\ Cp_s & \text{pour } T < T_s \end{cases} \quad (3.12)$$

L'équation prendra la forme suivante:

$$\rho \cdot C_{eff} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.13)$$

### Remarque

Cette méthode introduit l'effet de la chaleur latente sur la capacité calorifique du matériau dans un petit intervalle de température au voisinage de la température de fusion.

### **b- Méthode enthalpique**

Cette méthode traite l'enthalpie comme variable dépendante de la température, et l'équation de la chaleur est écrite en fonction de l'enthalpie et de la température.

Le modèle de transfert thermique adopté est basé sur la formulation d'enthalpie qui est la plus adoptée à la résolution numérique des problèmes de changement de phase. Sachant que l'enthalpie est donnée par l'équation (3.9).

$$H = C_p.T + f_l.L_S$$

Ainsi l'équation d'énergie dans sa forme enthalpique est représentée par :

$$\rho \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.14)$$

Après réarrangement l'équation devient :

$$\rho.C_P \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \rho L_S \cdot \frac{\partial f_L}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.15)$$

### **III.4 Modélisation mathématique**

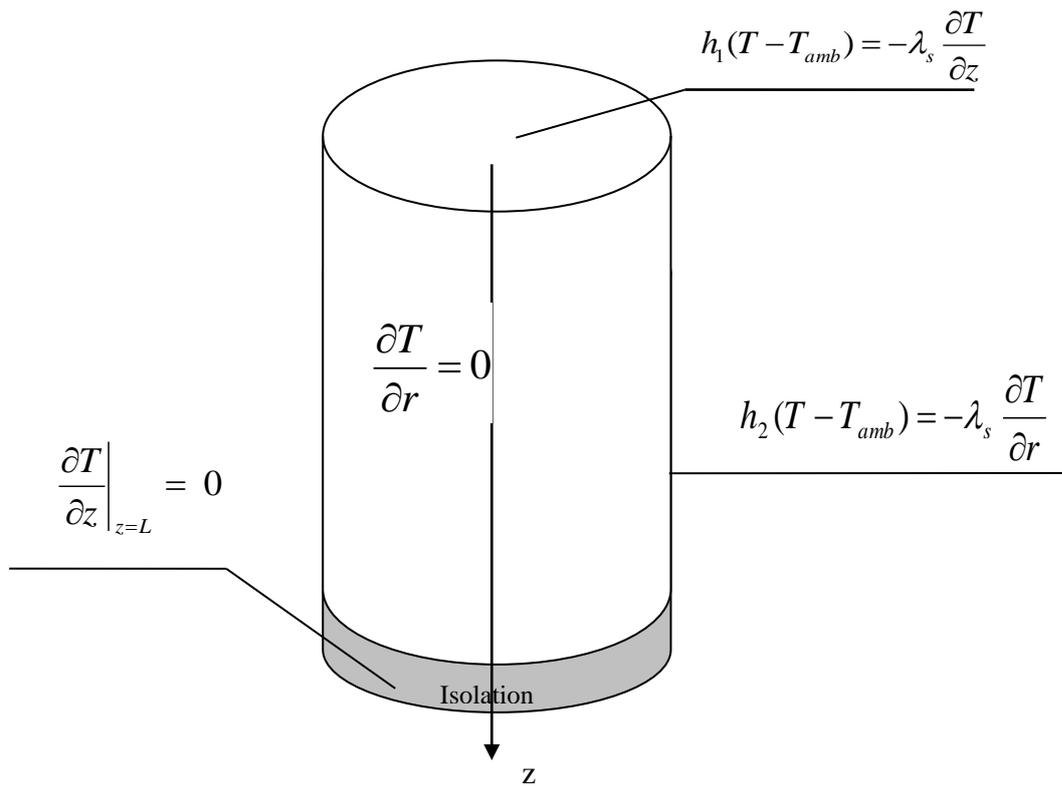
Pour achever ce travail, le choix d'une méthode numérique est primordial. Ce choix est basé sur la méthode de la capacité effective.

Le refroidissement d'un métal liquide en voie de solidification dans une forme de section cylindrique, peut être formulé selon la méthode enthalpique

comme un problème aux valeurs limites dans lequel l'équation gouvernante est l'équation de l'énergie, en régime instationnaire dans un milieu bidimensionnel

- **Conditions aux limites**

Les conditions aux limites sont représentées sur la figure suivante:



**Fig(3.2). Représentation des conditions aux limites sur graphe**

$$\rho.C_{eff} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.18)$$

Cette équation exprime l'évolution de la température suivant les directions  $r$  et  $z$  pour un régime instationnaire. Pour que le phénomène soit décrit complètement, il faut que la solution satisfasse les conditions aux limites suivantes :

- 1) Température constante au temps initial
- 2) Condition de symétrie
- 3) Condition de transfert par convection
- 4) Condition adiabatique

### 1- Condition initiale

Le moule étant rempli en métal liquide à la température constante.

Pour  $z = 0$  et  $0 \leq r \leq R$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (3.19)$$

$T_0$  : Température du métal liquide à l'état initial.

### 2- Condition de symétrie

La condition de symétrie du champ de températures par rapport à l'axe  $z$  est représentée par :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq L \quad (3.20)$$

### 3- Condition adiabatique

Pendant l'expérience, le moule est isolé du bas par le sable, le système est considéré adiabatiquement isolé.

donc : 
$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right| = 0 \quad \text{pour } z = L \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq R \quad (3.21)$$

### 4-Condition de transfert de chaleur par convection

i) Sur la surface du cylindre:

$$h_1(T - T_{amb}) = -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.22)$$

ii) Sur la surface latérale ( $r = R$  et  $0 \leq z \leq L$ ) :

$$h_2(T - T_{amb}) = -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.23)$$

$h_1$  : désigne le coefficient de convection en contact direct avec l'air ambiant du côté supérieur.

$h_2$  : désigne le coefficient de convection en contact direct avec l'air ambiant du côté non isolé.

## 5- Convection et rayonnement

Dans ce travail, en plus du transfert par convection, le transfert par rayonnement est considéré. Lors du refroidissement d'un corps cylindrique en métal, au contact de l'air ambiant, il faut faire intervenir les relations suivantes :

- Quantité de chaleur perdue

$$\Delta Q = m.C_p.\Delta T$$

- Puissance totale perdue

$$P_{totale} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = m.C_p. \frac{dT}{dt} \quad (3.24)$$

- Puissance perdue par rayonnement

$$P_{ray} = \Phi_{ray} . A = A . \varepsilon . \sigma . (T^4 - T_{amb}^4) \quad (3.25)$$

- Puissance perdue par convection

$$P_{conv} = \Phi_{conv} . A = A . h . (T - T_{amb}) \quad (3.26)$$

- Puissance perdue par conduction

$$P_{cond} = \Phi_{cond} \cdot A_l = \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)} \cdot \lambda \cdot (T - T_{amb}) \quad (3.27)$$

- Les compléments de base

$$m = \rho \cdot v = \pi \cdot \rho \cdot r^2 \cdot l$$

$$A = 2\pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r^2$$

- La conduction dans l'air est négligeable (équation 3.27). La transmission de chaleur se fait essentiellement par convection et par rayonnement,

Le bilan  $P_{totale} = P_{conv} + P_{ray}$ , permet d'écrire :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{A \cdot h}{m \cdot Cp} (T - T_{amb}) + \frac{A \cdot \varepsilon \cdot \sigma}{m \cdot Cp} (T^4 - T_{amb}^4) \quad (3.28)$$

Pour le côté droit de l'équation [32], DROITE REG de EXCEL est utilisée :

$$\frac{m \cdot Cp}{A} \frac{dT}{dt} = h + \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^2 + T_{amb}^2) \cdot (T + T_{amb}) \quad (3.29)$$

Avec  $h_{conv} = h$  pour la convection et  $h_{ray} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^2 + T_{amb}^2) \cdot (T + T_{amb})$  pour le rayonnement.

## 5- Calcul du coefficient de transfert par convection

### a- Pour la paroi verticale

1/ si  $10^3 < Gr \cdot Pr < 10^9$  la convection est libre [33]

$$Nu = 0,76 (Gr_a \cdot Pr_a)^{0,25} \left( \frac{Pr_a}{Pr_p} \right)^{0,25} \quad (3.30)$$

2/ si  $Gr.Pr > 10^9$  la convection est dite forcée

$$Nu = 0,15 (Gr_a \cdot Pr_a)^{0,33} \left( \frac{Pr_a}{Pr_p} \right)^{0,25} \quad (3.31)$$

3/ Pour la paroi verticale les relations suivantes sont à utiliser :

Pour l'air :  $\left( \frac{Pr_a}{Pr_p} \right) \approx 1$

Le nombre de Grashof  $Gr$  est :  $Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot d^3}{\nu^2}$

Le nombre de Prandtl  $Pr$  est :  $Pr = \frac{C_p \cdot \eta}{\lambda} = \frac{\mu}{\alpha}$

Le coefficient de transfert par convection pour la paroi verticale est :  $h_2 = Nu \cdot \frac{\lambda}{d}$

4/ pour la paroi horizontale, le coefficient de transfert par convection doit être augmenté de 30%, ce qui donne :  $h_1 = 1,3h_2$ .

$T_{amb}$ (°K)	$\beta$ ( $K^{-1}$ )	$\eta$ ( $N$ $s/m^2$ )	$\nu$ ( $m^2/s$ )	Pr	$\lambda_a$ ( $w/m.K$ )	$\frac{g \cdot \beta}{\nu^2}$ ( $1/K.m^3$ )
288	$3,41 \cdot 10^{-3}$	$15,7 \cdot 10^{-6}$	$18,24 \cdot 10^{-6}$	0,71	0,0251	$1,36 \cdot 10^8$

**Tableau (3.1). Données de l'air à 15°C**

**Exemple de calcul**

$$Gr.Pr = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_p - T_{amb}) \cdot d^3}{\nu^2} Pr = \frac{9,81 \cdot 3,41 \cdot 10^{-3} \cdot (693 - 288) \cdot (0,082)^3}{(15,7 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0,71 \quad (3.32)$$

$$Gr.Pr = 2,15 \cdot 10^7 \Rightarrow 10^3 < 2,15 \cdot 10^7 < 10^9$$

La convection est libre d'où Nusselt prend la forme de :

$$Nu = 0,76 (Gr_a \cdot Pr_a)^{0,25} \left( \frac{Pr_a}{Pr_p} \right)^{0,25} = 0,76 \cdot (2,15 \cdot 10^7)^{0,25} \cdot 1$$

D'où (3.33)

$$Nu = 51,75$$

\* Pour la paroi verticale

$$h_2 = Nu \frac{\lambda_a}{d} = \frac{51,75 \cdot 0,0251}{0,082} \quad d'où \quad h_2 = 15,84 \text{ w/m}^2 \cdot K \quad (3.34)$$

\* Pour la paroi horizontale (latérale)

$$h_1 = 1,3 h_2 = 21 \text{ w/m}^2 \cdot K \quad (3.35)$$

## 6- Calcul du coefficient de transfert par rayonnement

$$h_{ray} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^2 + T_{amb}^2) (T + T_{amb})$$

$$\varepsilon = 0,8$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ w/m}^2 \cdot K^4$$

$$h_{ray} = 0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (693^2 + 288^2) \cdot (693 + 288)$$

(3.36)

$$h_{ray} = 25,06 \text{ w/m}^2 \cdot K$$

# *CHAPITRE : 4*

## *RESOLUTION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES*

## **RESOLUTION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES**

### **IV.1 Généralités**

Les solutions analytiques des problèmes de transfert thermique sont généralement possibles seulement aux géométries simples, aux états de frontière simples ou aux valeurs extrêmes de certains paramètres pour les solutions asymptotiques. Néanmoins, de telles solutions jouent un rôle important dans l'analyse de transfert thermique en fournissant la perspicacité dans les problèmes complexes qui peuvent être simplifiés dans certaines conditions, en fournissant des solutions exactes aux nouveaux problèmes de transfert thermique qui impliquent des géométries simples, et comme contrôle partiel sur d'autres arrangements de solution pour des problèmes complexes.

La solution analytique des problèmes non linéaires n'a été obtenue que dans des cas très particuliers tels que le problème de la progression d'un front plan de solidification (problème de Stefan).

Les méthodes analytiques sont cependant insuffisantes même dans les configurations unidimensionnelles. Le développement des simulations numériques a permis d'apporter des solutions à des problèmes plus complexes afin de s'approcher à des concepts de la qualité totale.

Une des techniques numériques largement utilisée pour résoudre les équations est la méthode des différences finies. La méthode des différences finies fournit une solution seulement aux points discrets et est donc seulement une approximation de la solution exacte. Cependant, la représentation du problème seulement en un nombre fini de points, simplifie le procédé de solution et effectue plusieurs calculs arithmétiques plutôt qu'un calcul complexe. D'une manière générale, si des points discrets sont employés dans le calcul des différences finies, la solution sera proche de la solution exacte mais des calculs

plus arithmétiques seront exigés. Pour accomplir la solution des différences finies il faut également représenter les conditions aux limites et la condition initiale. Cette dernière consiste à subdiviser le domaine de calcul, où l'inconnue est recherchée en un nombre fini de sous domaines de différentes formes (triangulaire, rectangulaire...) dit éléments. La solution approximative de  $N$  éléments représente des points particuliers des éléments, dit nœuds. Puis on transforme l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations aux différences finies.

La simulation numérique permet de modéliser le comportement d'un matériau métallique coulé dans un moule dès les premiers instants de remplissage et ceci jusqu'à la fin du refroidissement du solide dans son empreinte.

La discrétisation des problèmes est obtenue en découpant le domaine étudié en maillage de forme et de dimensions adaptées à chaque problème.

La recherche du champ de températures en chaque nœud est faite à partir des formules aux différences finies utilisées pour représenter les dérivées de la température aux nœuds. Ces formules sont déduites directement à partir du développement de Taylor.

La difficulté dans la solution par les éléments finis, réside dans la complexité et l'exécution du maillage. Alors que la méthode des différences finies est plus simple dans sa formulation, un maillage par élément parallélépipédique est facile à mettre en œuvre.

Donc, vu la géométrie symétrique du cylindre et pour des raisons de simplicité, les équations du problème seront résolues par la méthode des différences finies.

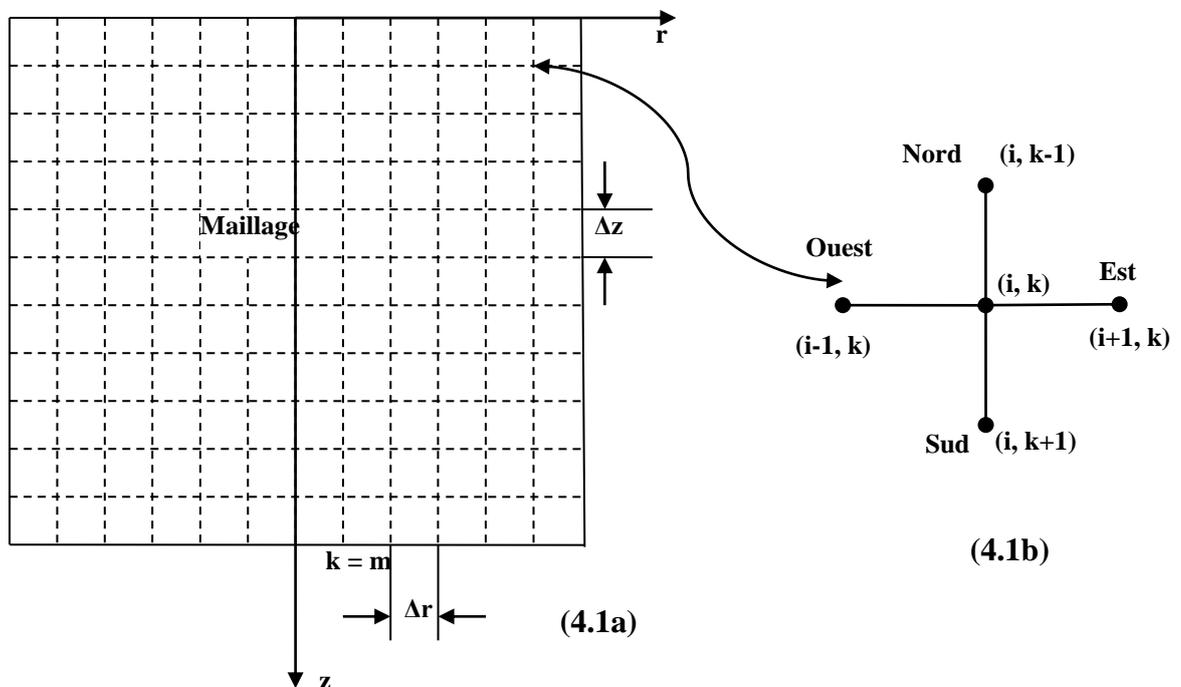
## **IV.2 Discrétisation du domaine**

L'équation (3.18) sera résolue par la méthode des différences finies dont la procédure et la discrétisation du domaine sur lequel il est souhaitable de connaître la cinématique du front de solidification et sont discutés ci-dessous.

La figure (4.1a) représente la coupe d'un métal dans un moule à l'état liquide dont il est défini le domaine de calcul superposé au maillage sur lequel

seront effectués les calculs. Il s'agit d'une forme rectangulaire sur l'ensemble du domaine liquide solide, qui tient compte de la géométrie et de la symétrie de la pièce fondue (par rapport à l'axe  $z$ ) avec des pas en  $r$  et en  $z$ , soient  $\Delta r$  et  $\Delta z$  entre deux nœuds différents (figure (4.1a)). Plus ultérieurement, le choix de la position de ces dernières coordonnées est critique pour l'obtention des résultats fiable et précis.

Le choix d'un maillage cartésien dont les pas  $\Delta z$  et  $\Delta r$  sont constants. Sur la figure (4.1b), est représenté l'ordre de numérotation des points du maillage et la nomenclature pour les désigner par rapport à leurs voisins. Il est facilement modifiable et peut être appliqué à toute forme de moule à enveloppe cylindrique.



**Fig (4.1) : Définitions globales et locales du maillage**

Dans le maillage générique présenté, les dérivées premières avec une précision du deuxième ordre dans les trois schémas possibles s'écrivent sous la forme de :

$$\text{Différences à droite :} \quad \frac{\partial T}{\partial r} \approx \frac{-3T_{i,k}^n + 4T_{i+1,k}^n - T_{i+2,k}^n}{2\Delta r} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{-3T_{i,k}^n + 4T_{i,k+1}^n - T_{i,k+2}^n}{2\Delta z} \quad (4.2)$$

$$\text{Différences centrées :} \quad \frac{\partial T}{\partial r} \approx \frac{T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n}{2\Delta r} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{T_{i,k+1}^n - T_{i,k-1}^n}{2\Delta z} \quad (4.4)$$

$$\text{Différences à gauche :} \quad \frac{\partial T}{\partial r} \approx \frac{3T_{i,k}^n - 4T_{i-1,k}^n - T_{i-2,k}^n}{2\Delta r} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{3T_{i,k}^n - 4T_{i,k-1}^n - T_{i,k-2}^n}{2\Delta z} \quad (4.6)$$

Dans les dernières expressions,  $T_{i,k}$  utilisée sert à désigner la valeur approchée de  $T(r,z)$  au point  $(i,k)$  du maillage.

De la même façon, les dérivées deuxièmes avec une précision du deuxième ordre mais, dans ce cas, rien que le schéma des différences centrées est utilisé, car elles apparaissent dans l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \approx \frac{T_{i-1,k}^n - 2T_{i,k}^n + T_{i+1,k}^n}{(\Delta r)^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{i,k-1}^n - 2T_{i,k}^n + T_{i,k+1}^n}{(\Delta z)^2} \quad (4.8)$$

Puis, l'approximation des différences finies de l'équation (3.18) à un point de la grille  $(r,z)$  par la méthode implicite simple employant la discrétisation progressive du temps, et espace- central (FTCS) :

$$\rho_{i,k} \cdot C_{P_{i,k}} \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n}{\Delta t} = \lambda_{i,k} \left[ \frac{T_{i-1,k}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1} + T_{i+1,k}^{n+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{T_{i+1,k}^{n+1} - T_{i-1,k}^{n+1}}{2\Delta r} + \frac{T_{i,k-1}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1} + T_{i,k+1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} \right] \quad (4.9)$$

Tels que :

$$A_{i,k}^{n+1} = \frac{\lambda_{i,k} \cdot \Delta t}{\rho_{i,k} \cdot C_{P_{i,k}} \cdot (\Delta r)^2}$$

$$B_{i,k}^{n+1} = \frac{\lambda_{i,k} \cdot \Delta t}{\rho_{i,k} \cdot C_{P_{i,k}} \cdot (\Delta z)^2} \quad (4.10)$$

$$AW_{i,k}^{n+1} = A_{i,k}^{n+1} \cdot \frac{(2i-1)}{2i}$$

$$AE_{i,k}^{n+1} = A_{i,k}^{n+1} \cdot \frac{(2i+1)}{2i}$$

$$AN_{i,k}^{n+1} = B_{i,k}^{n+1} ; AS_{i,k}^{n+1} = B_{i,k}^{n+1} ; AP_{i,k}^{n+1} = 2A_{i,k}^{n+1} + 2B_{i,k}^{n+1} + 1$$

$$SU_{i,k}^{n+1} = T_{i,k}^n$$

L'équation (4.9) prend la forme :

$$AE_{i,k}^{n+1} \cdot T_{i-1,k}^{n+1} + AW_{i,k}^{n+1} \cdot T_{i+1,k}^{n+1} + AN_{i,k}^{n+1} \cdot T_{i,k-1}^{n+1} + AS_{i,k}^{n+1} \cdot T_{i,k+1}^{n+1} = AP_{i,k}^{n+1} \cdot T_{i,k}^{n+1} - SU_{i,k}^{n+1} \quad (4.11)$$

## Fonctions thermo physiques

Les propriétés thermo physiques dépendent de la température

- la capacité calorifique

$$C_{p_{i,k}} = C_{p_s} + f_{L_{i,k}} (C_{p_l} - C_{p_s})$$

- la masse volumique

$$\rho_{i,k} = \rho_s + f_{L_{i,k}} (\rho_l - \rho_s) \quad (4.12)$$

- la conductivité thermique

$$\lambda_{i,k} = \lambda_s + f_{L_{i,k}} (\lambda_l - \lambda_s)$$

- la fraction liquide

$$f_{L_{i,k}} = \frac{T_{i,k} - T_s}{T_l - T_s}$$

### IV.3 Introduction des conditions aux limites

1/ condition initiale

$$\left\{ \begin{array}{l} T(r, z, 0) = T_0 \\ T_0 : \text{Température du métallique à l'état} \\ \text{initial} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

2/ condition de symétrie

La condition de symétrie du champ de température par rapport à l'axe z est représentée par :

$$\text{pour } r = 0 \text{ et } 0 \leq z \leq L \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ T_{(1,k)} = T_{(2,k)} ; k = 1, m \end{array} \right. \quad (4.14)$$

3/ condition adiabatique

Le moule est isolé du bas par le sable

$$z = L \text{ et } 0 \leq r \leq R$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right| = 0 \text{ donc } T_{(i,m)} = T_{(i,m-1)} \text{ avec } i = 1, n-1 \quad (4.15)$$

4/ condition de transfert de chaleur par convection

Soient  $Bi_1$  et  $Bi_2$  tels que :

$$Bi_1 = \frac{h_1 \Delta z}{\lambda_s} \text{ et } Bi_2 = \frac{h_2 \Delta r}{\lambda_s} \quad (4.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sur la surface du cylindre} \\ -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial z} = h_1(T - T_{amb}) \quad 0 < r < R \\ -\lambda_s \frac{T_{i,k} - T_{i-1,k}}{\Delta z} = h_1(T - T_{amb}) \Leftrightarrow T_{(i,k)} = \frac{T_{(i,k-1)} + Bi_1 \cdot T_{amb}}{1 + Bi_1} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A la surface latérale} \\ -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial r} = h_2(T - T_{amb}) \quad r = R \text{ et } 0 \leq z \leq L \\ -\lambda_s \frac{T_{i,k} - T_{i,k-1}}{\Delta r} = h_2(T - T_{amb}) \Leftrightarrow T_{(i,k)} = \frac{T_{(i-1,k)} + Bi_2 \cdot T_{amb}}{1 + Bi_2} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

#### IV.4 Mise en œuvre d'une simulation en général dans le cas d'une solidification d'un métal

- Définition de la géométrie.
- Maillage spatial de la géométrie précédente qui sera ainsi découpée en éléments simples.
- Discrétisation temporelle qui, pour obtenir des résultats fiables, devra être la plus fine possible au détriment du temps de calcul.
- Mise en place des conditions initiales.
- Mise en place des conditions aux limites (conditions de flux ou de température imposées aux frontières extérieures).
- Données thermo physiques (conductivité thermique, capacité thermique, masse volumique, enthalpie massique de solidification,...).

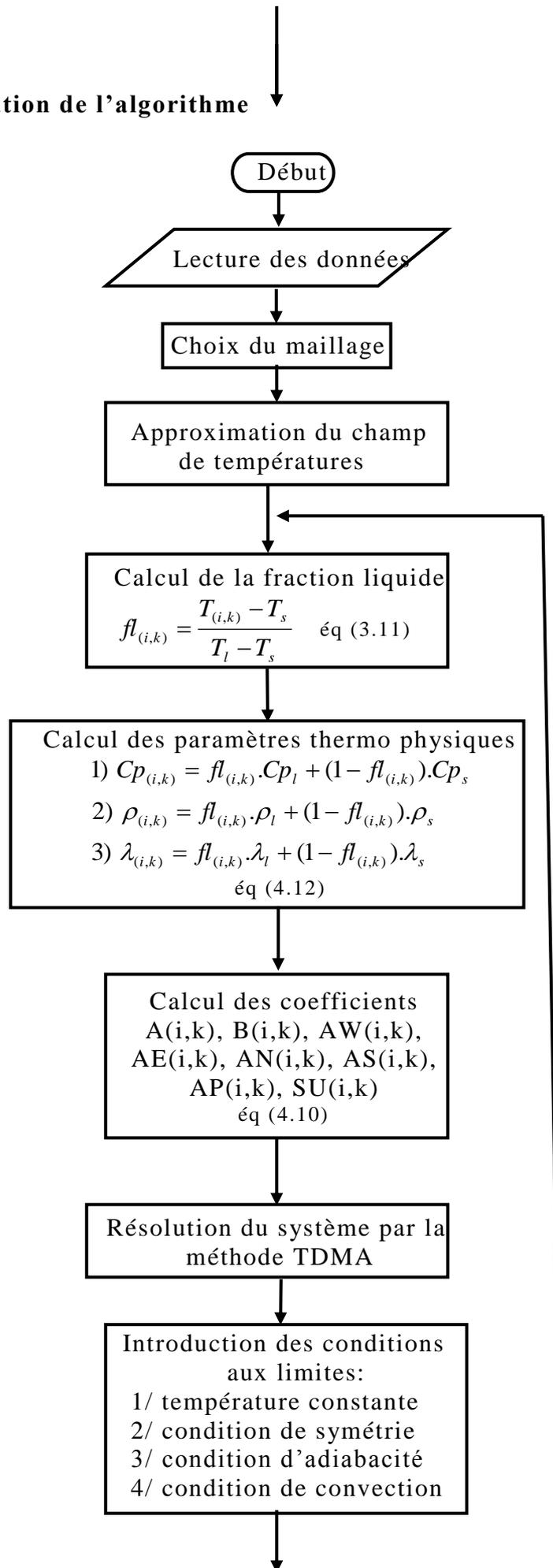
## IV.5 Programmation

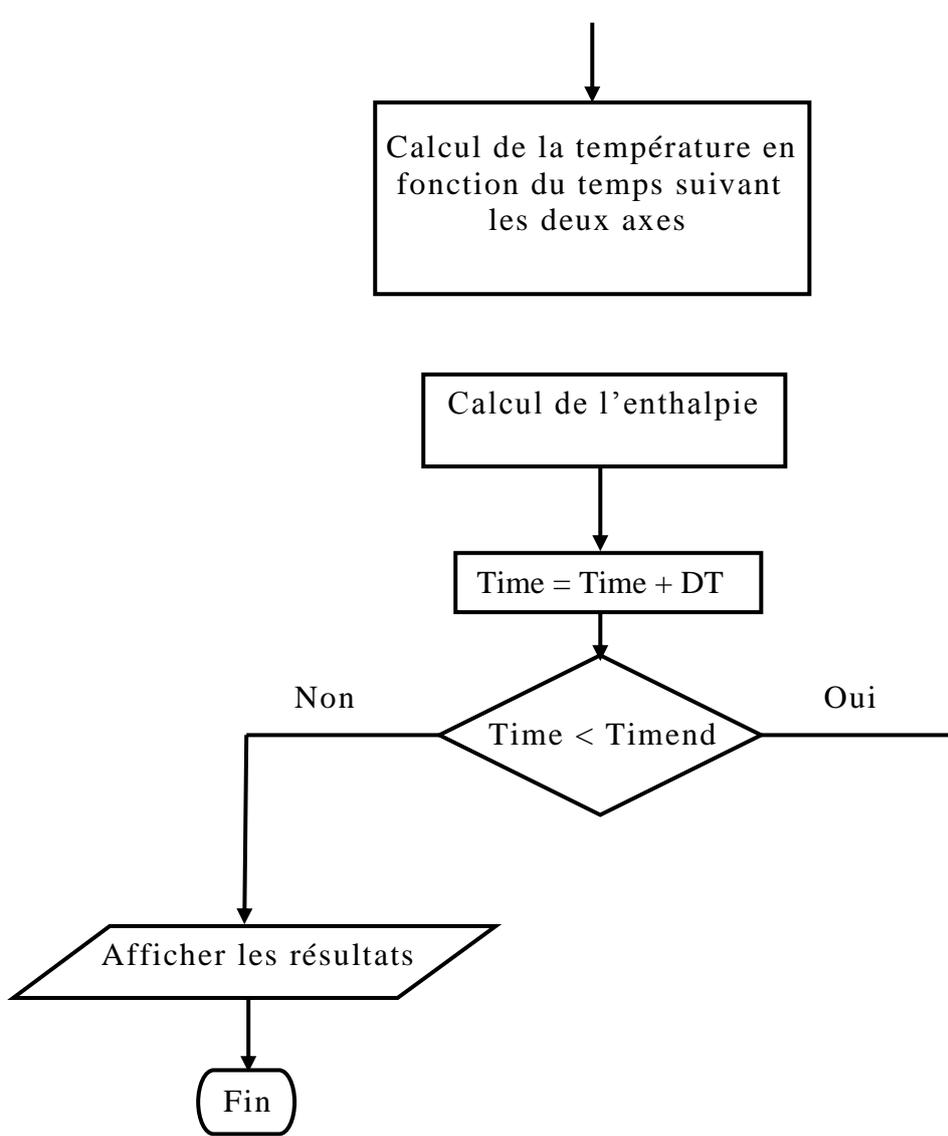
L'utilisation d'un programme demeure nécessaire pour déterminer l'évolution de la température ainsi que la position du front de solidification suivant un système bidimensionnel en un régime instationnaire. Un programme en fortran a été élaboré pour résoudre le problème de solidification par la méthode des différences finies.

Le programme principal se constitue essentiellement de :

- 1- Lecture des données
- 2- Choix du maillage
- 3- Approximation du champ de température
- 4- Calcul de la fraction liquide
- 5- Calcul des paramètres thermo physiques
- 6- Calcul des coefficients  $A_{(i,k)}^{n+1}$
- 7- Résolution du système par la méthode TDMA
- 8- Introduction des conditions aux limites
- 9- Calcul de l'enthalpie
- 10- Affichage des résultats.

## IV.6 Représentation de l'algorithme





#### IV-7 La résolution par la méthode TDMA :

Les équations discrétisées du paragraphe III.4 conduisent à un système de matrice à coefficients tridiagonaux. La résolution de ce système utilise un algorithme particulièrement efficace appelé algorithme de Thomas ou algorithme de la matrice tridiagonale TDMA.

$$\begin{cases} a_1\phi_1 = b_1\phi_2 + d_1 \\ a_2\phi_2 = b_2\phi_3 + c_2\phi_1 + d_2 \\ a_3\phi_3 = b_3\phi_4 + c_3\phi_2 + d_3 \\ \vdots \\ a_n\phi_n = c_n\phi_n + d_n \end{cases}$$

La forme matricielle est :  $[A][\phi] = [D]$

Avec

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & a_3 & -b_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -c_n & a_n \end{bmatrix}$$

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix}$$

La première équation du système permet d'avoir  $\phi_1 = f(\phi_2)$

La deuxième équation du système permet d'avoir  $\phi_2 = f(\phi_3)$

La troisième équation du système permet d'avoir  $\phi_3 = f(\phi_4)$

.....

La (n - 1)<sup>ème</sup> équation du système permet d'avoir  $\phi_{n-1} = f(\phi_n)$

En remplaçant la dernière valeur  $\phi_n = f(\phi_n)$  donne  $\phi_n$  puis l'opération continue par substitution inverse jusqu'à l'obtention de  $\phi_1$ .

Ce processus de calcul peut être donné par une formule de récurrence de la forme :

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i$$

Avec :  $P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i \cdot P_{i-1}}$  et  $Q_i = \frac{d_i + c_i \phi_{i-1}}{a_i - c_i \cdot P_{i-1}}$

La TDMA consiste alors à :

1. calculer  $P_1 = \frac{b_1}{a_1}$  et  $Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$
2. calculer  $P_i$  et  $Q_i$  pour  $i = 2, 3, \dots, n$ .
3. obtenir  $\phi_n = Q_n$
4. utiliser l'équation  $\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i$  pour obtenir  $\phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \phi_{n-3}, \dots, \phi_3, \phi_2$  et  $\phi_1$ .

*CHAPITRE :5*

*RESULTATS  
ET  
DISCUSSIONS*

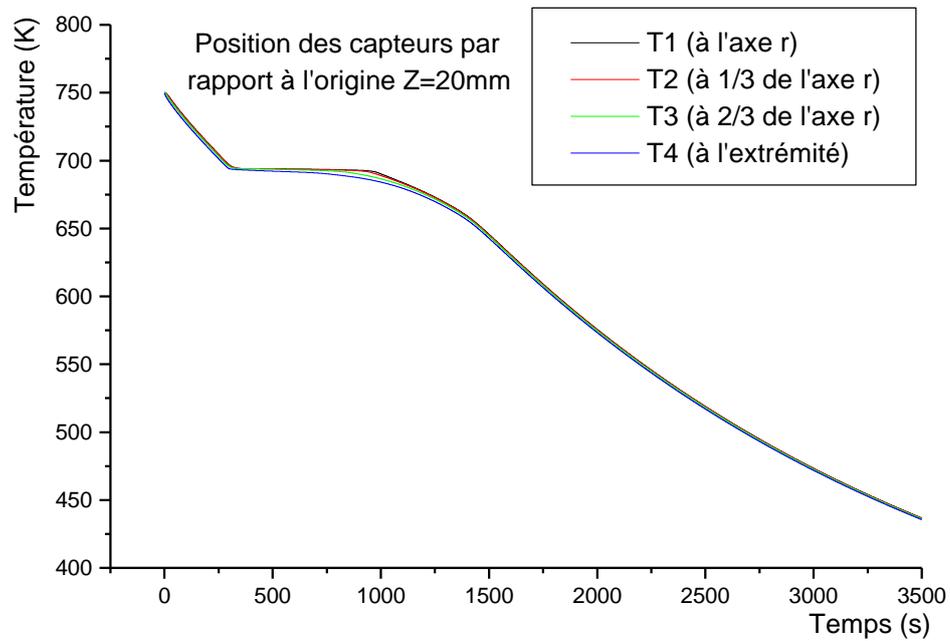
## RESULTATS ET DISCUSSIONS

Dans ce travail, deux modèles ont été élaborés pour étudier le procédé de solidification. Le modèle expérimental et le modèle numérique. Les matériaux d'essai sont : le plomb et le zinc. Les constantes utilisées dans ces deux modèles sont énumérées dans le tableau (2.1). Dans le modèle expérimental, l'étape de temps est considérée pour chaque 30 secondes. Cependant, pour le modèle numérique, le nombre de nœuds de la grille uniforme utilisés dans le calcul pour les deux matériaux est 40 x 110 pour un pas de temps  $\Delta t = 0.05s$ . Le temps final de calcul pour le plomb et le zinc est respectivement 1440 et 3500s.

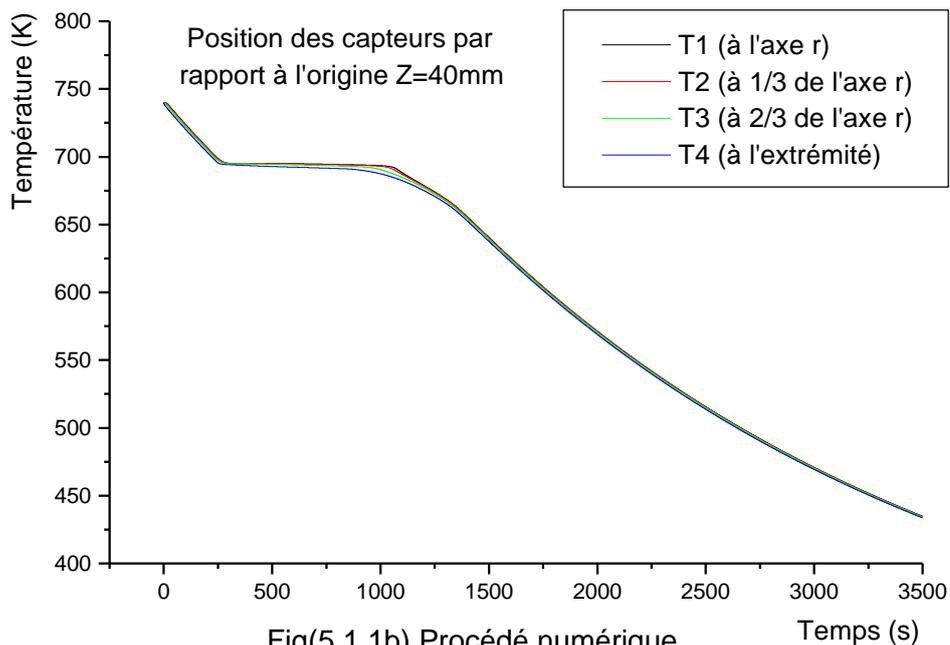
Le procédé expérimental de l'évolution de la température en fonction du temps est représenté à la fin du chapitre 2. Le procédé utilisant le calcul numérique est représenté sur les graphes des figures (5.1 et 5.2). Le palier de solidification est aussi bien clair à la température 693K pour le zinc et la température 601K pour le plomb qui correspondent à la température de fusion du métal coulé. Cela confirme que le changement de phase d'un métal pur s'effectue à une température constante. Les courbes simulées sont bien continues par rapport à celles représentant le procédé expérimental, car l'intervalle de temps utilisé au calcul numérique ( $\Delta t = 0.05s$ ) est plus important que celui utilisé durant l'expérience ( $\Delta t = 30s$ ), ainsi le raffinement du maillage qui joue aussi un rôle important dans la continuité des graphes.

## V.1 Représentation des graphes numériques de l'évolution de la température en fonction du temps

### V.1.1 Le zinc



Fig(5.1.1a) Procédé numérique pour Z=20mm



Fig(5.1.1b) Procédé numérique pour Z=40mm

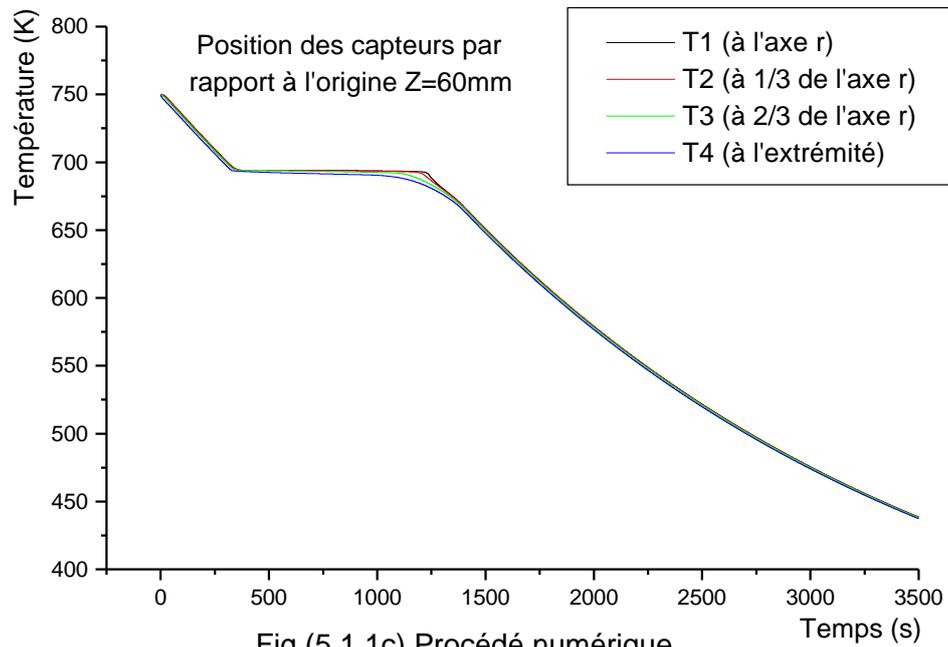


Fig (5.1.1c) Procédé numérique pour Z=60mm

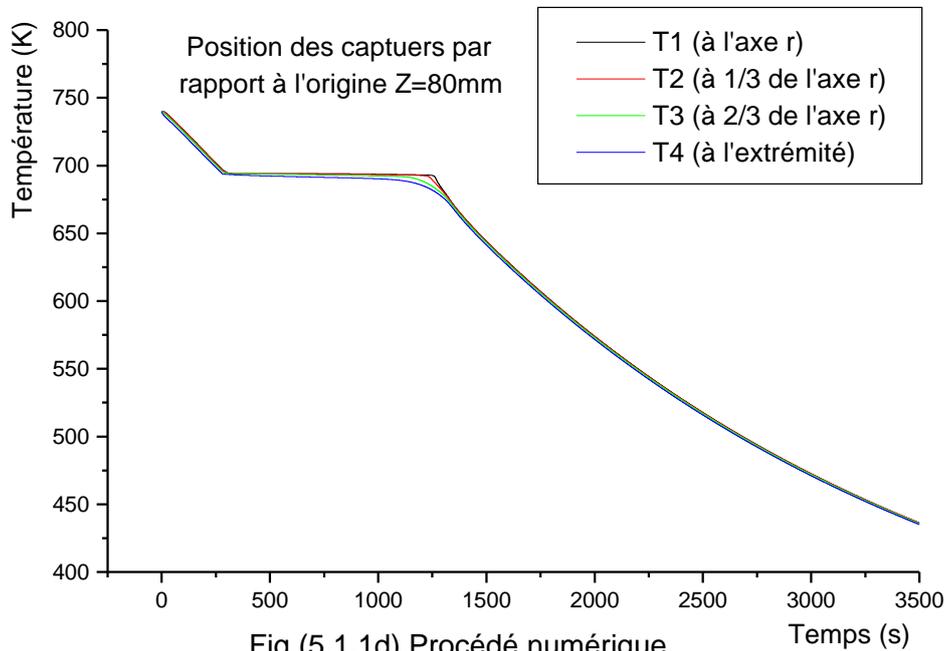
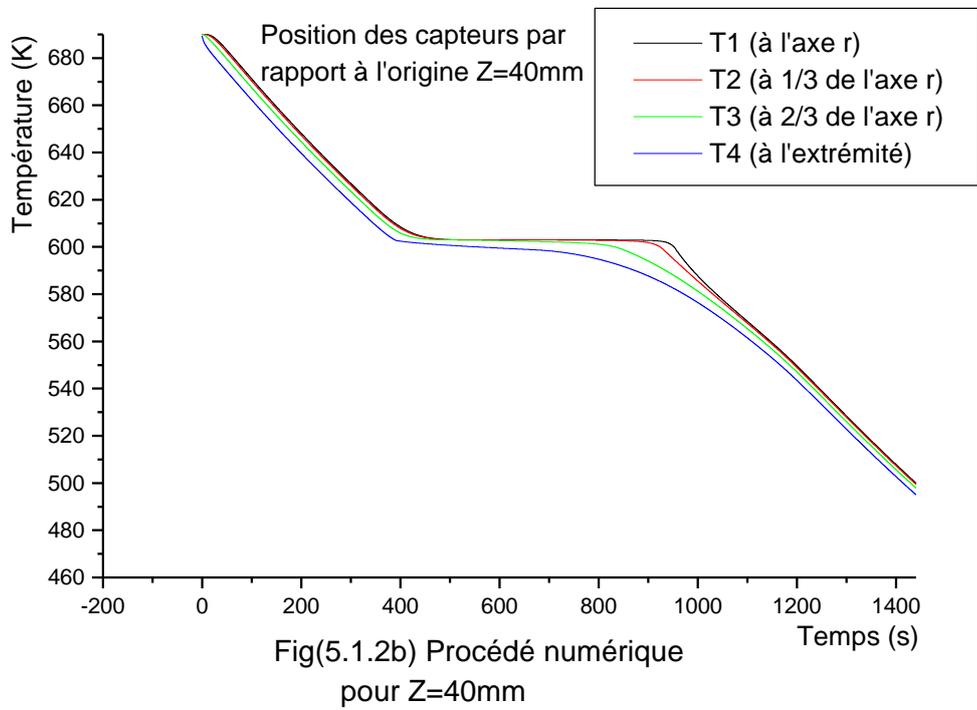
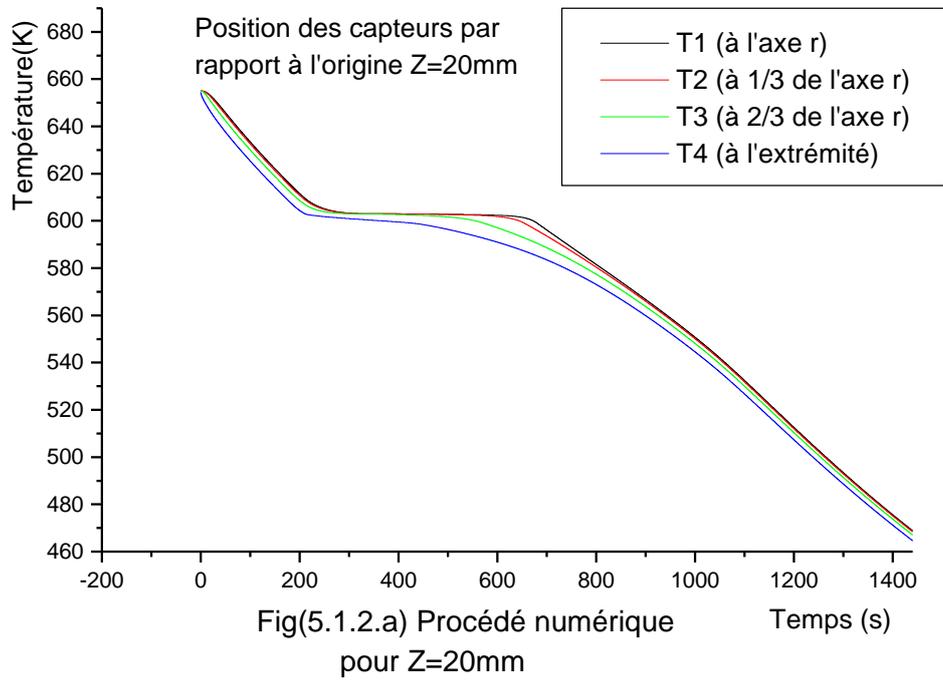
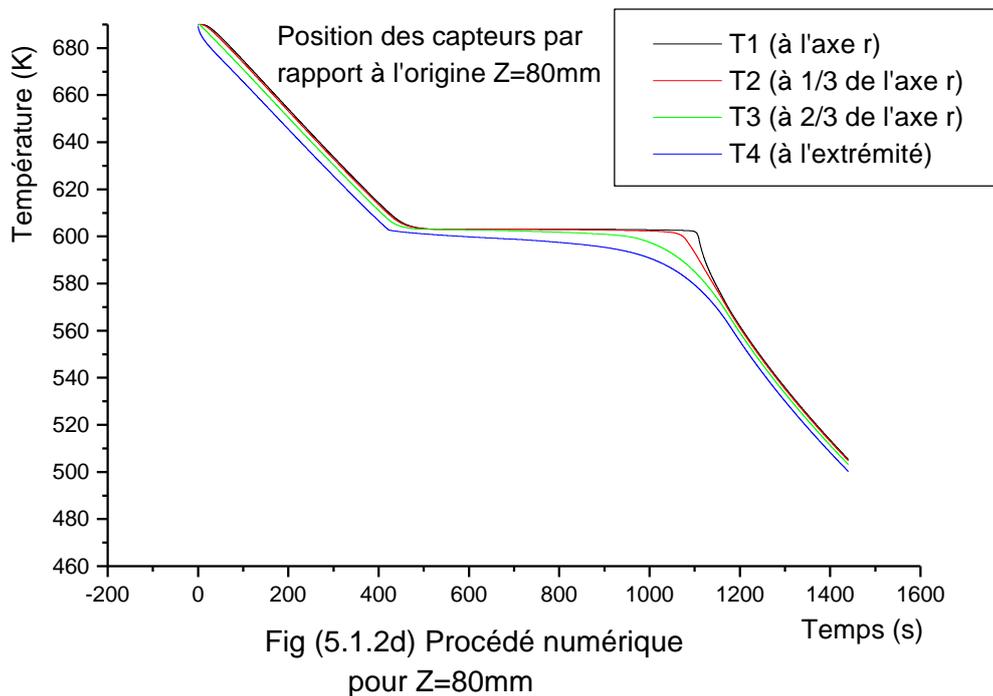
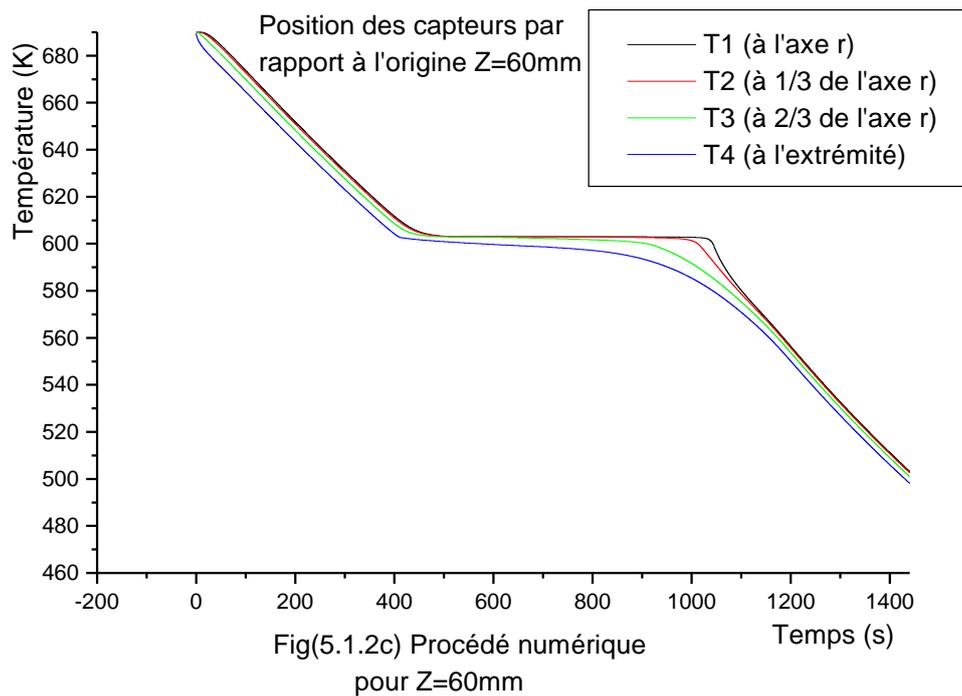


Fig (5.1.1d) Procédé numérique pour Z=80mm

**Fig(5.1.1) Evolution de la température en fonction du temps. Procédé numérique appliqué sur le zinc.**

## V.1.2 Le plomb



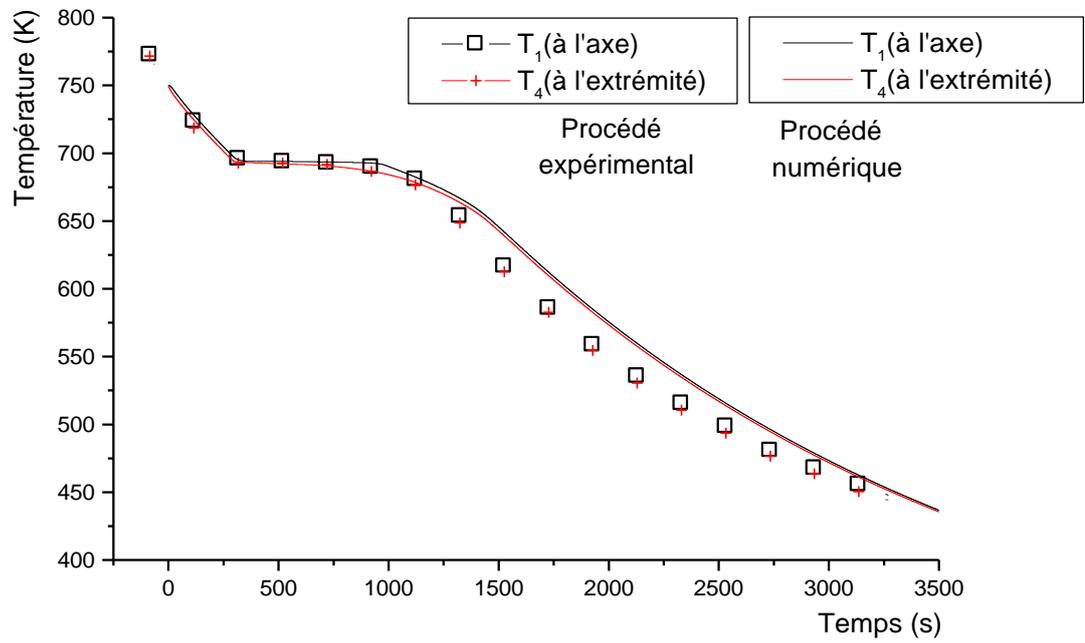


**Fig(5.1.2) Evolution de la température en fonction du temps. Procédé numérique appliqué sur le plomb.**

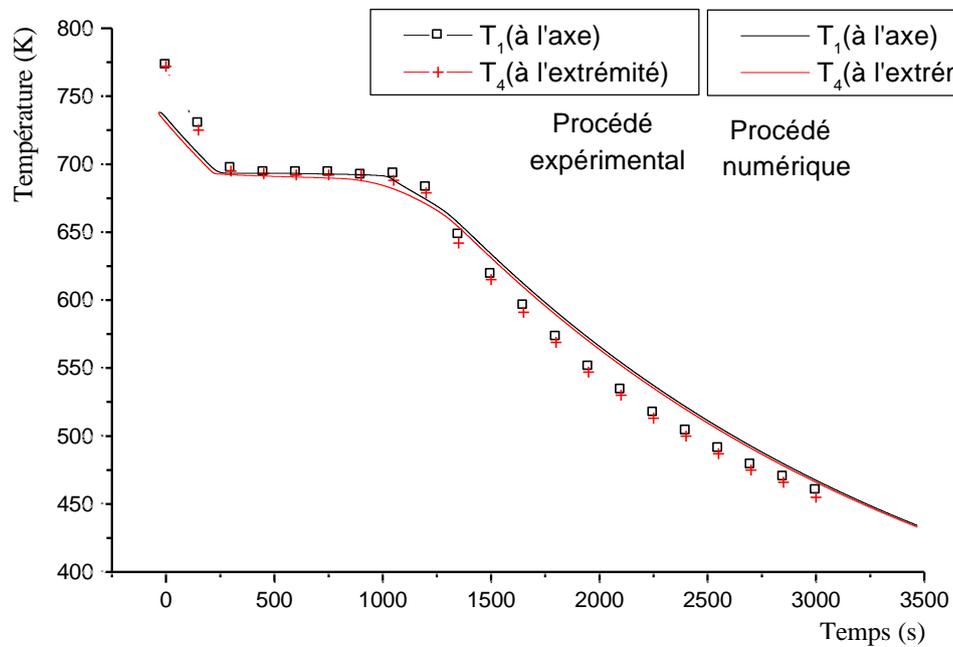
## **V.2 Comparaison entre les courbes numérique et expérimentale de l'évolution de la température en fonction du temps**

Pour pouvoir comparer les courbes expérimentales et les courbes numériques, l'utilisation de deux mesures (entre le capteur situé au centre  $T_1$  et celui situé à l'extrémité  $T_4$ ) est nécessaire pour donner plus de clarté aux graphes et pouvoir faire des remarques et donner des conclusions.

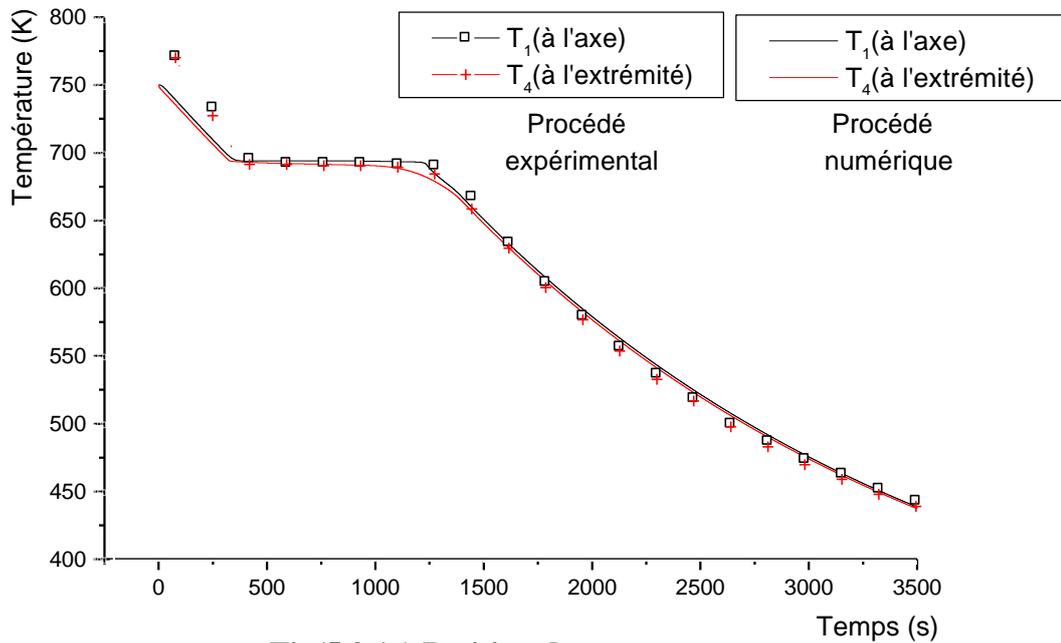
## V.2.1 Le zinc



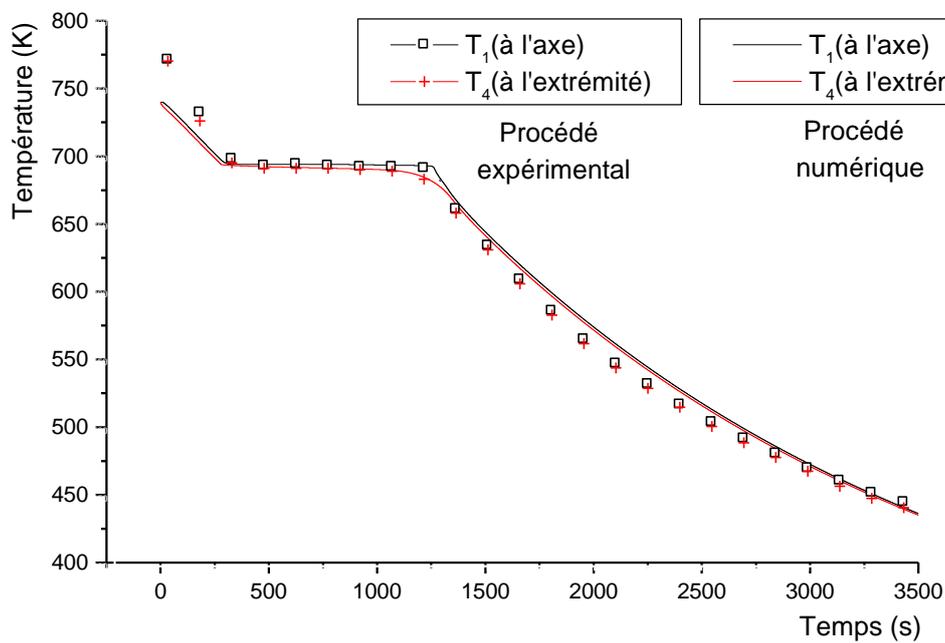
**Fig(5.2.1a).Position des capteurs par rapport à l'origine  $z = 20\text{mm}$**



**Fig(5.2.1b).Position des capteurs par rapport à l'origine  $z = 40\text{mm}$**



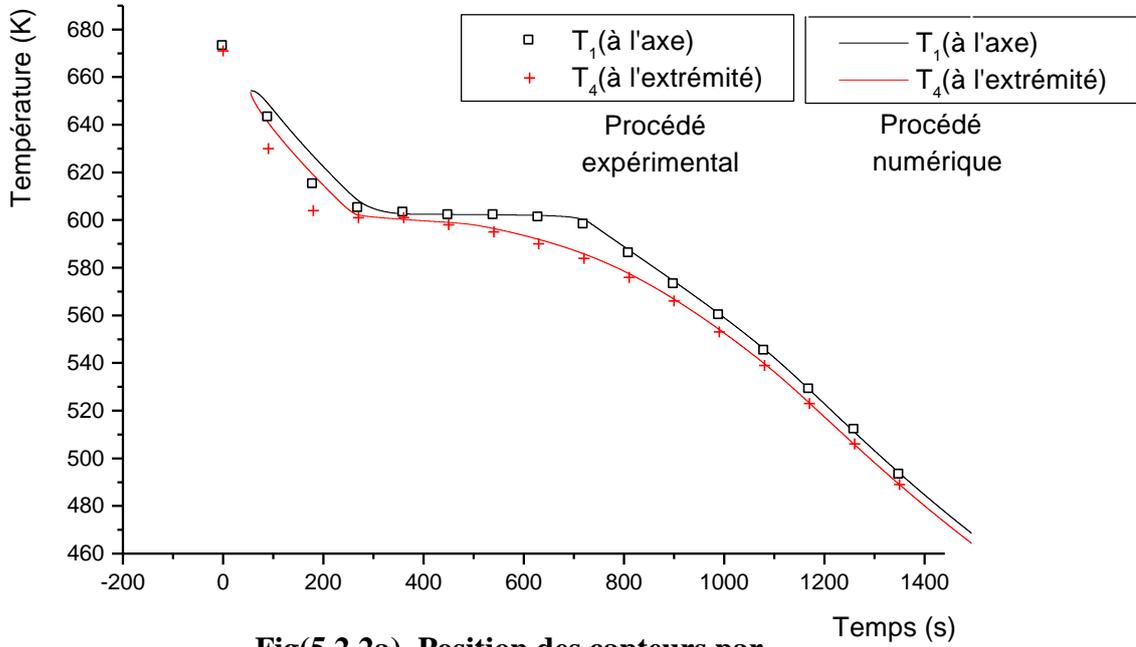
**Fig(5.2.1c). Position des capteurs par rapport à l'origine  $z = 60\text{mm}$**



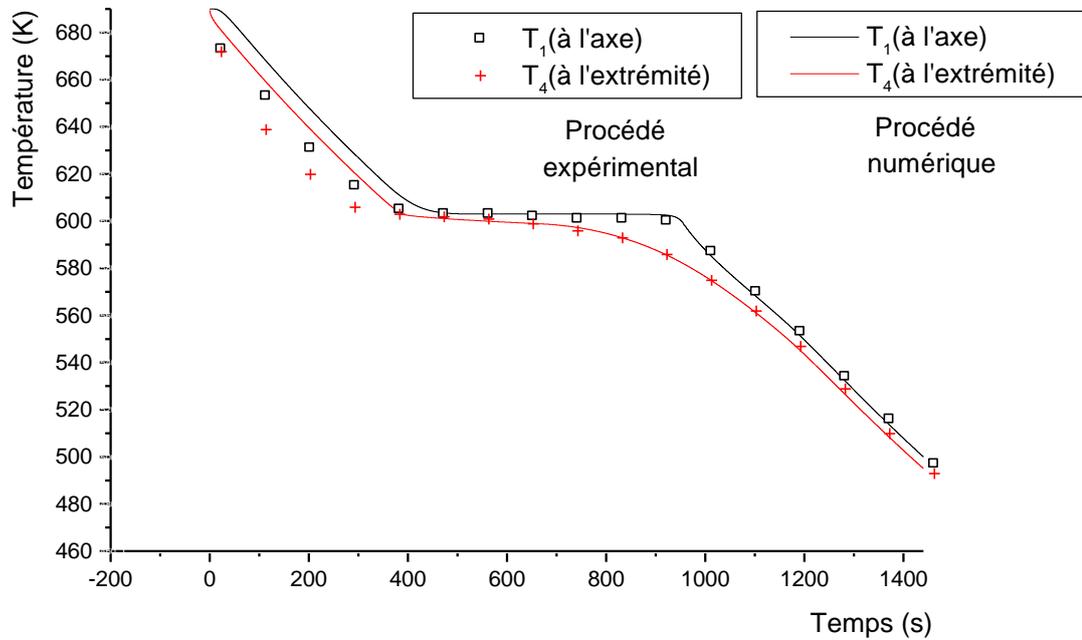
**Fig(5.2.1d). Position des capteurs par rapport à l'origine  $z = 80\text{mm}$**

**Fig(5.2.1). Comparaison entre les courbes numérique et expérimentale de l'évolution de la température en fonction du temps. Procédé appliqué sur le zinc.**

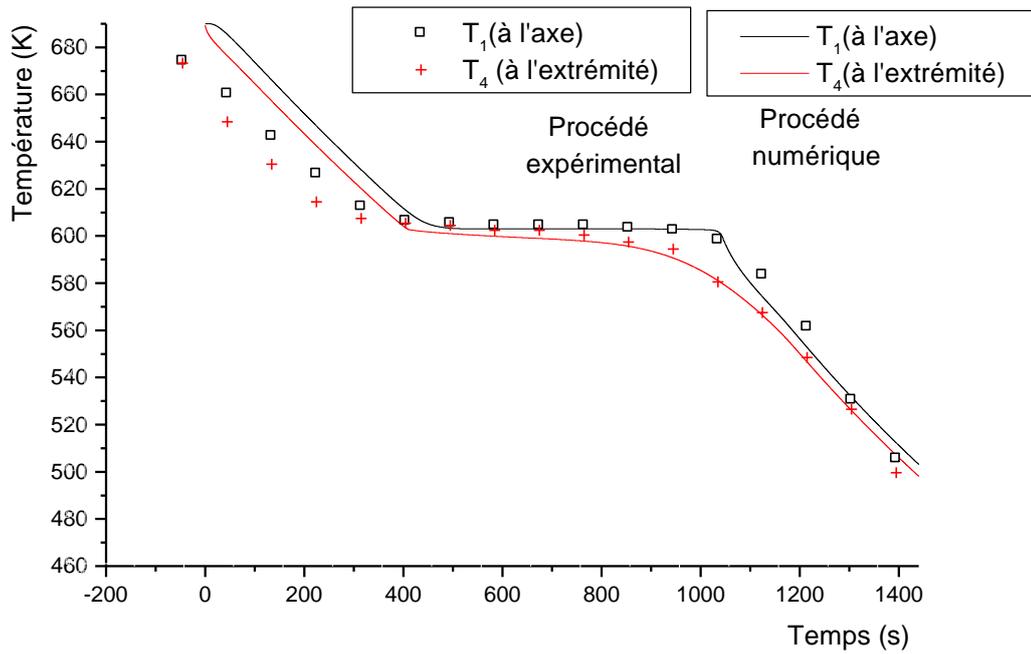
## V.2.2 Le plomb



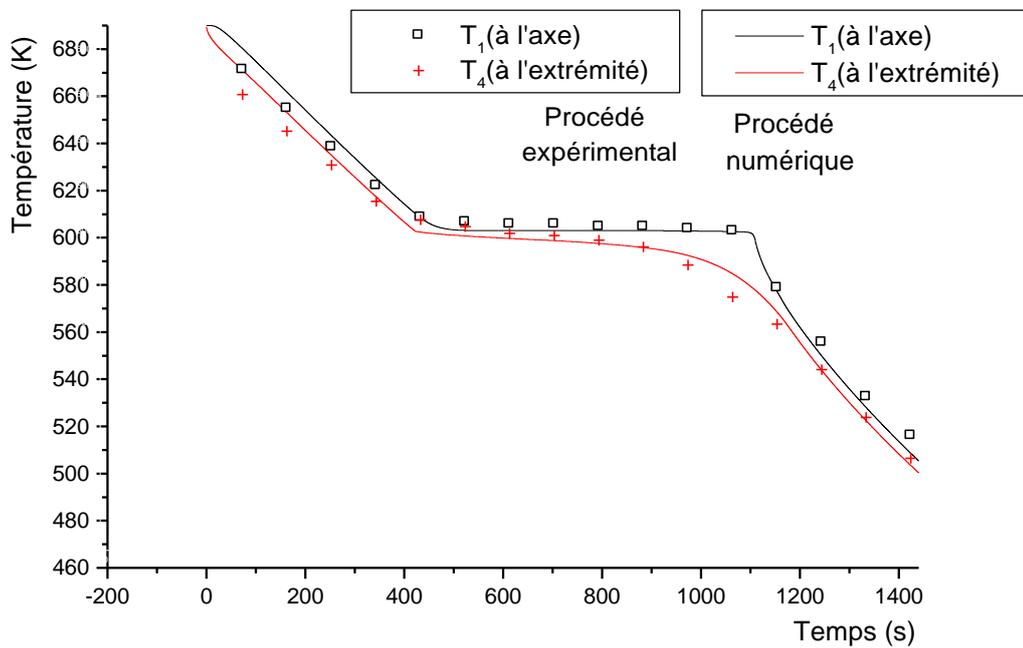
**Fig(5.2.2a).** Position des capteurs par rapport à l'origine  $z = 20\text{mm}$



**Fig(5.2.2b).** Position des capteurs par rapport à l'origine  $z = 40\text{mm}$



**Fig(5.2.2c). Position des capteurs par rapport à l'origine  $z = 60\text{mm}$**



**Fig(5.2.2d). Position des capteurs par rapport à l'origine  $z = 80\text{mm}$**

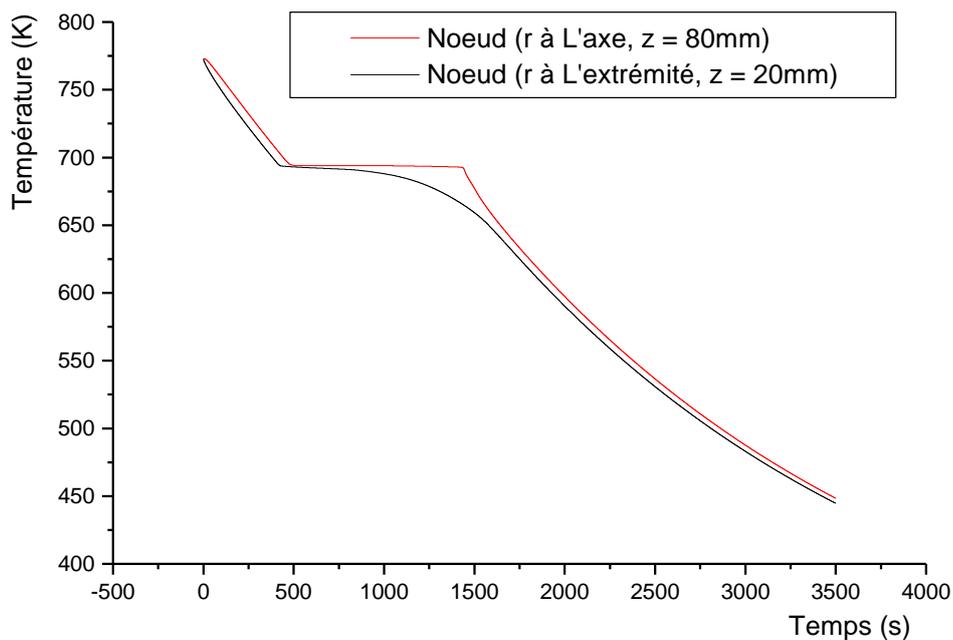
**Fig(5.2.2). Comparaison entre les courbes numérique et expérimentale de l'évolution de la température en fonction du temps. Procédé appliqué sur le plomb.**

### V.2.3 Commentaire

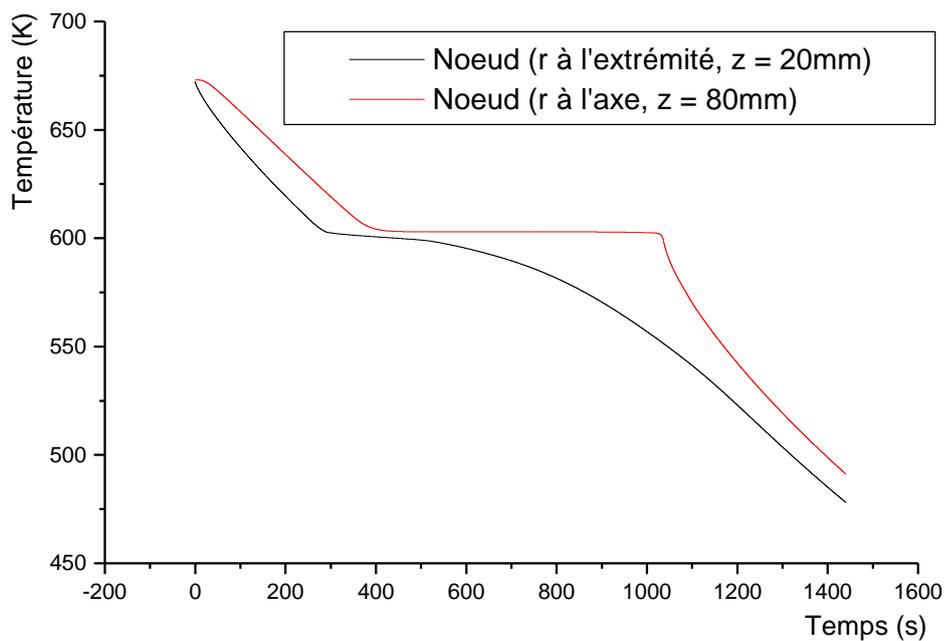
- Les figures (5.2.1(a,b,c,d) et 5.2.2(a,b,c,d)) représentent la comparaison entre les courbes de refroidissement numérique et expérimentale calculées au point de référence (20, 40, 60 et 80mm sur l'axe z) et (0, R/3, 2R/3 et R sur l'axe r).
- Les deux cas de figures (expérimentale et numérique) montrent l'évolution de la température lors du refroidissement.
- Les calculs numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux effectués au laboratoire.
- Le profil calculé des températures est identique au profil expérimental. Un faible décalage subsiste d'une part au niveau du plomb et d'autre part dans la région liquide du métal. Ceux-ci est du essentiellement au fait que le matériau concerné (le plomb) n'est pas pur (source non fiable), alors que le zinc a été ramené directement de l'usine de production de zinc (ALZINC size à Ghazaout). Le deuxième cas concerne le décalage dans la zone liquide, cela est du au fait que la convection du métal lui même en phase liquide est négligée.
- Pour les mêmes coordonnées et conditions, le plomb se réchauffe et se refroidit rapidement par rapport au zinc. Cette remarque est déduite directement sur le début et la fin du palier de solidification (c'est-à-dire la longueur du palier).Ce phénomène est du à la diffusivité thermique du plomb qui est trois fois plus faible que celle du zinc.

Donc en conclusion : un métal qui a une diffusivité thermique plus faible se réchauffe et se refroidit plus rapidement qu'un métal qui a une diffusivité plus élevée.

Vu l'encombrement des courbes, le choix de la température en fonction du temps dans le nœud le moins chaud ( $r$  à l'extrémité,  $z = 20\text{mm}$ ) et le nœud le plus chaud ( $r$  à l'axe,  $z = 80\text{mm}$ ) demeure nécessaire pour la clarté de la différence dans les courbes. Les figures suivantes les représentent.

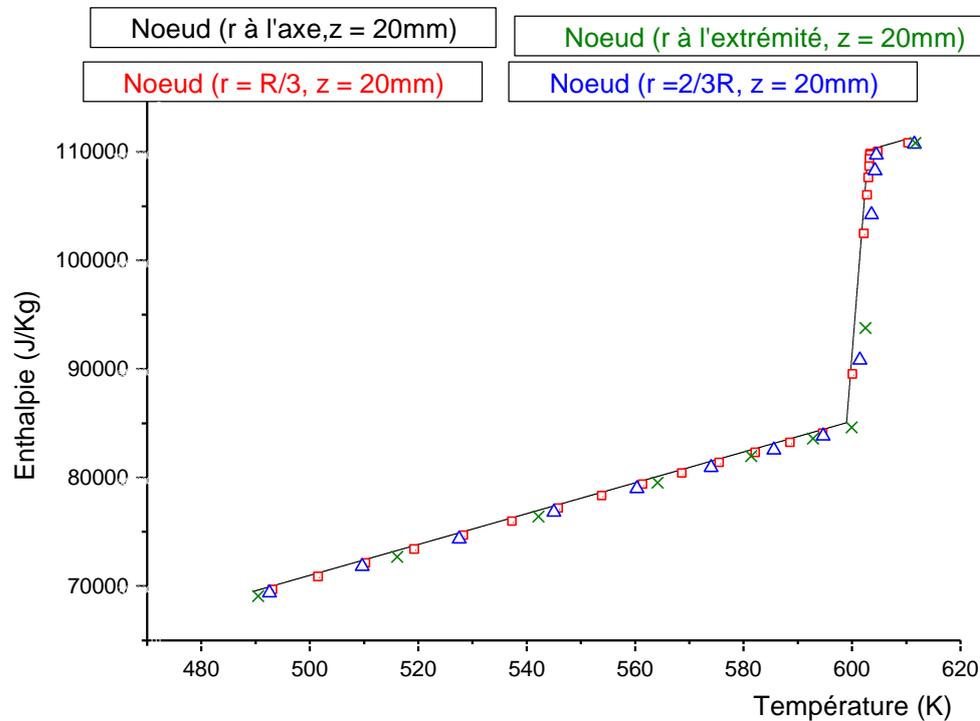


Fig(5.2.3a) Comparaison entre la variation de la température du point le plus chaud et le point le plus froid: le zinc



Fig(5.2.3b) Comparaison entre la variation de la température du point le plus chaud et le point le plus froid: le plomb.

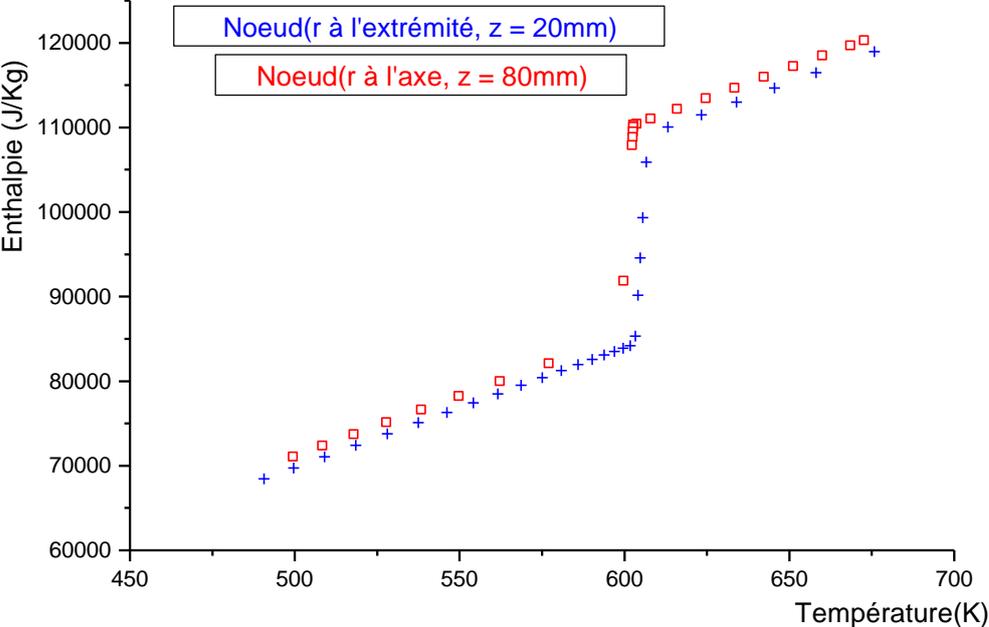
### V.3 Représentation de l'enthalpie en fonction de la température



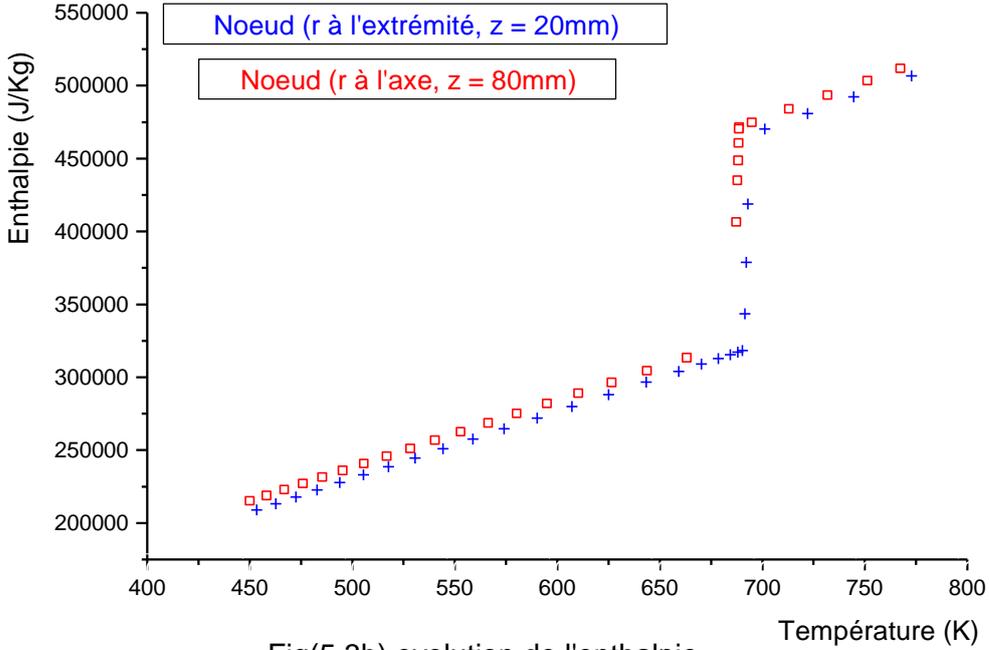
**Fig(5.3) Représentation de l'enthalpie en fonction de la température pour le plomb.**

- Le graphe suivant montre l'évolution de l'enthalpie en fonction de la température. L'allure de la courbe est presque la même pour les quatre nœuds. Ceci est dû à la petite distance qui existe entre les points sur le rayon ( $R = 41\text{mm}$ ) où sont placés les capteurs.
- Si la distance entre les capteurs était plus importante, la courbe donnera des courbes distantes pour chaque nœud et ceci facilite la comparaison. Or cela demeure impossible puisque le laboratoire ne dispose pas de quantités importantes de métal.
- Le palier de solidification apparaît bien clair entre 108000 et 80500 (J/Kg) pour une température constante qui n'est que la température de solidification  $T = 603\text{K}$ .
- A la fin de la solidification, la courbe reprend son allure (en fonction de la température) pour continuer son refroidissement.

Le choix de l'enthalpie entre le nœud (r à l'extrémité, z= 20mm) le moins chaud et le nœud (r à l'axe, z = 80mm) le plus chaud, facilite aussi la clarté des courbes représentées sur les graphes. Les figures suivantes les représentent.



Fig(5.3a) Evolution de l'enthalpie en fonction de la température pour le plomb.



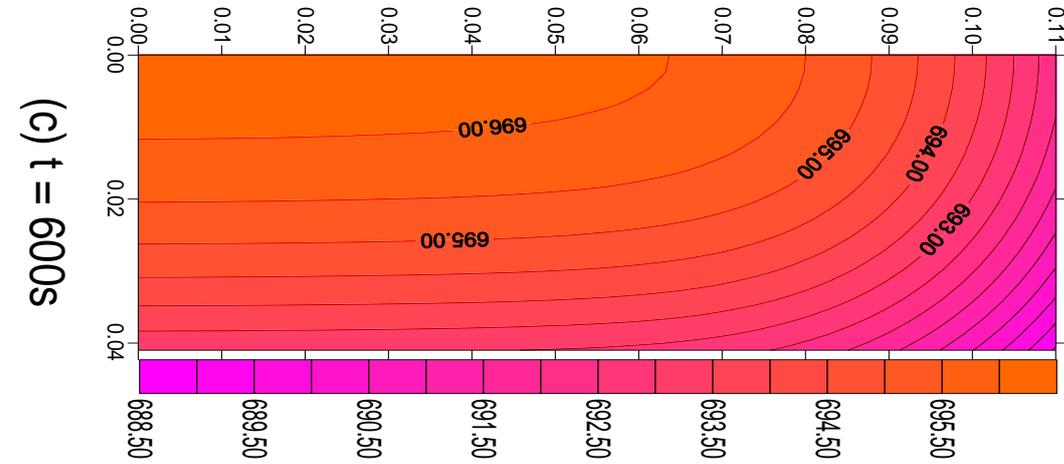
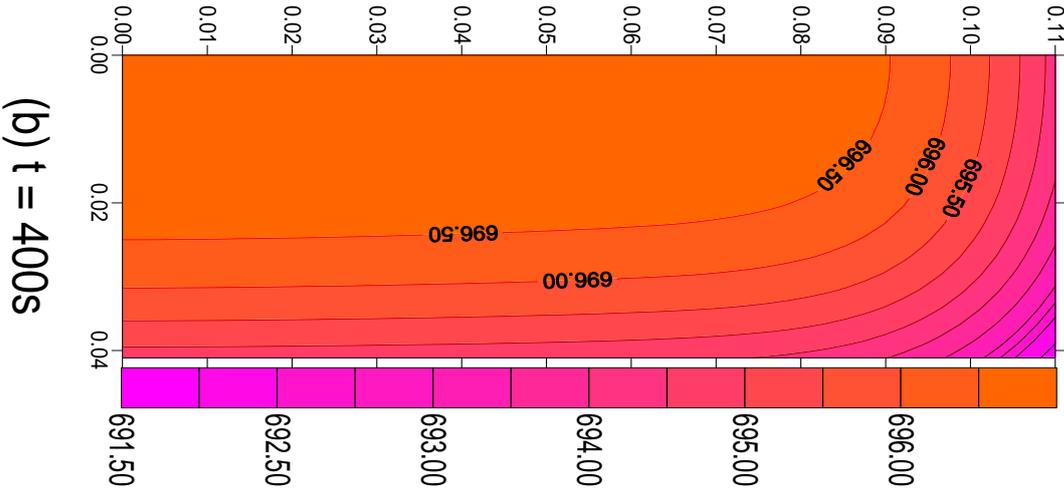
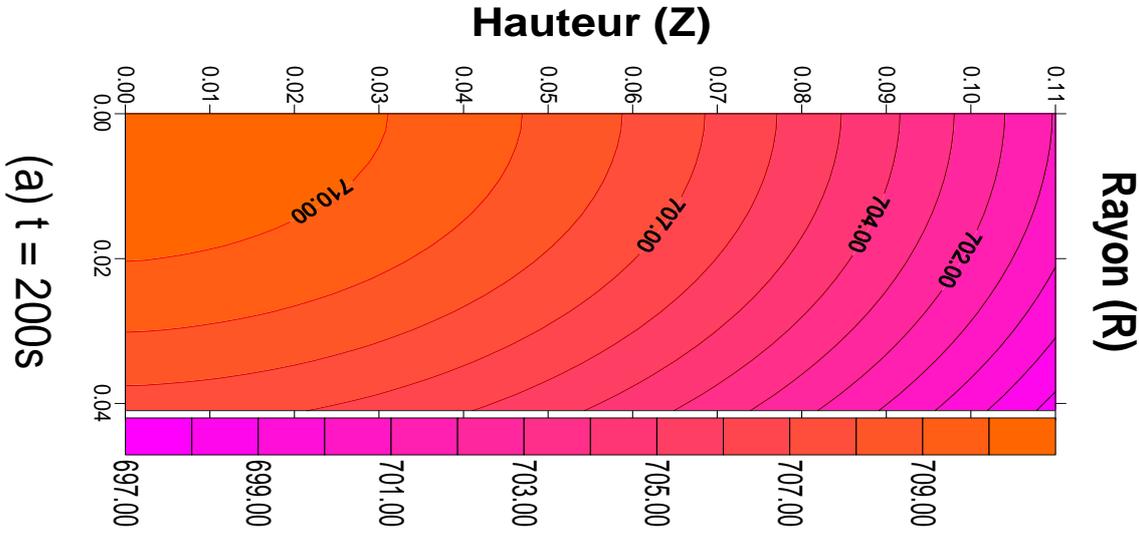
Fig(5.3b) evolution de l'enthalpie en fonction de la température pour le zinc.

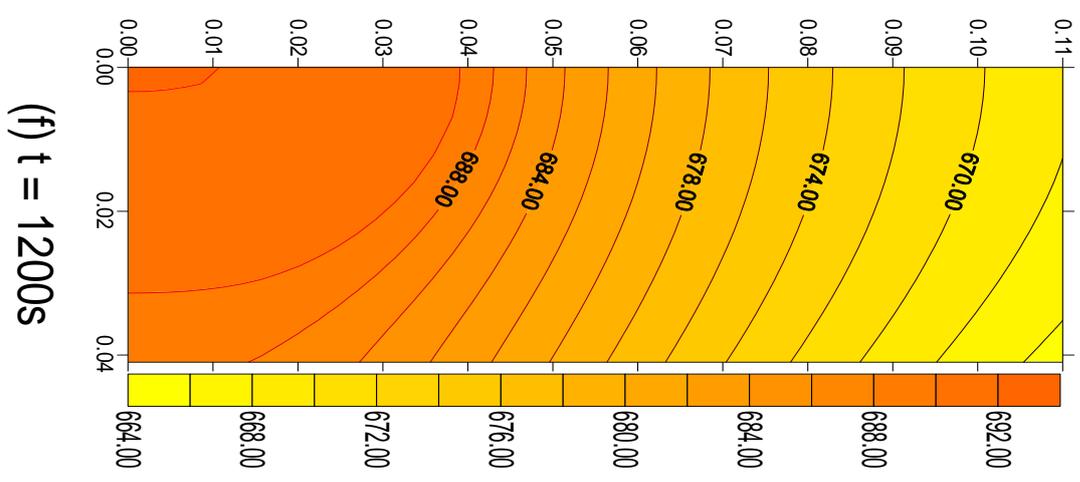
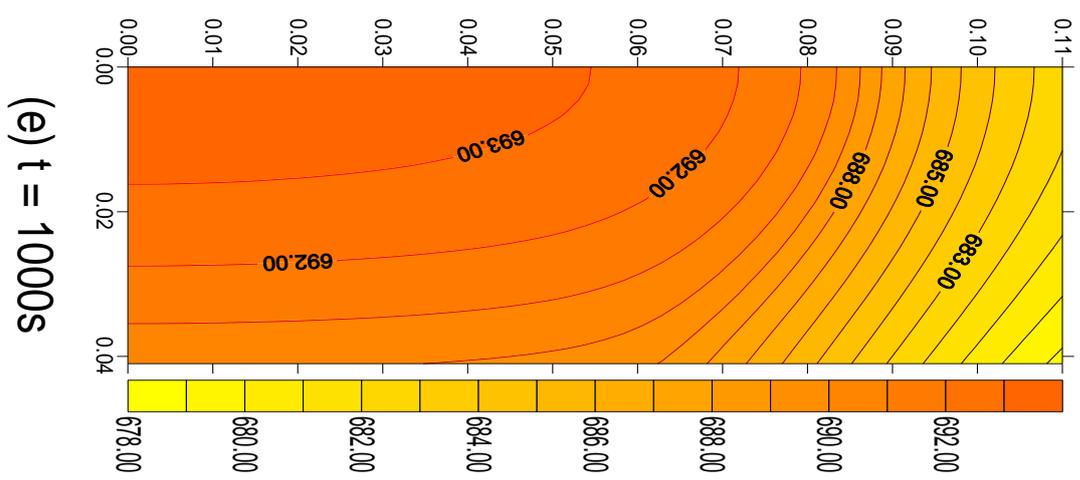
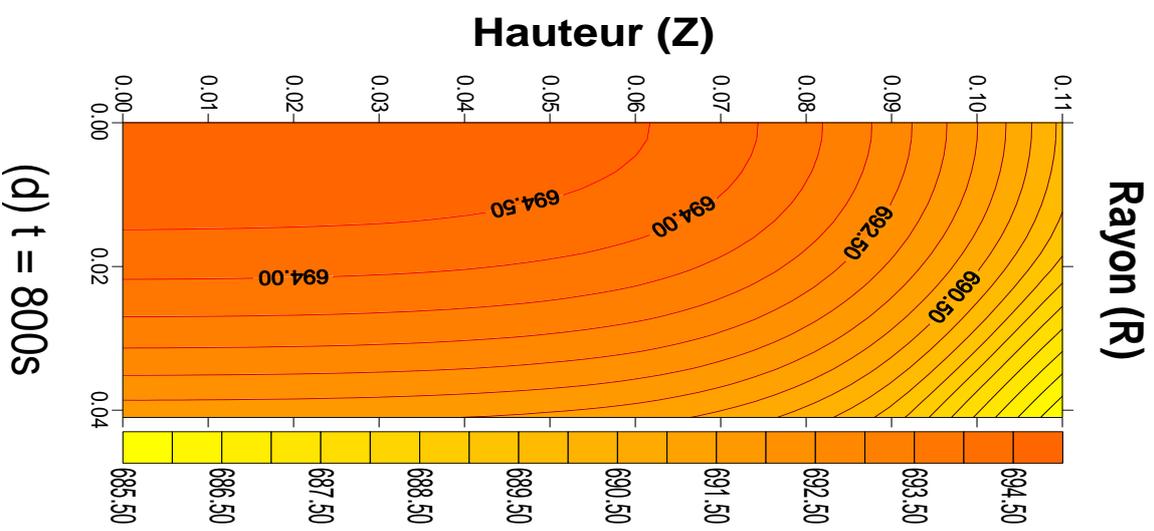
## **Remarque**

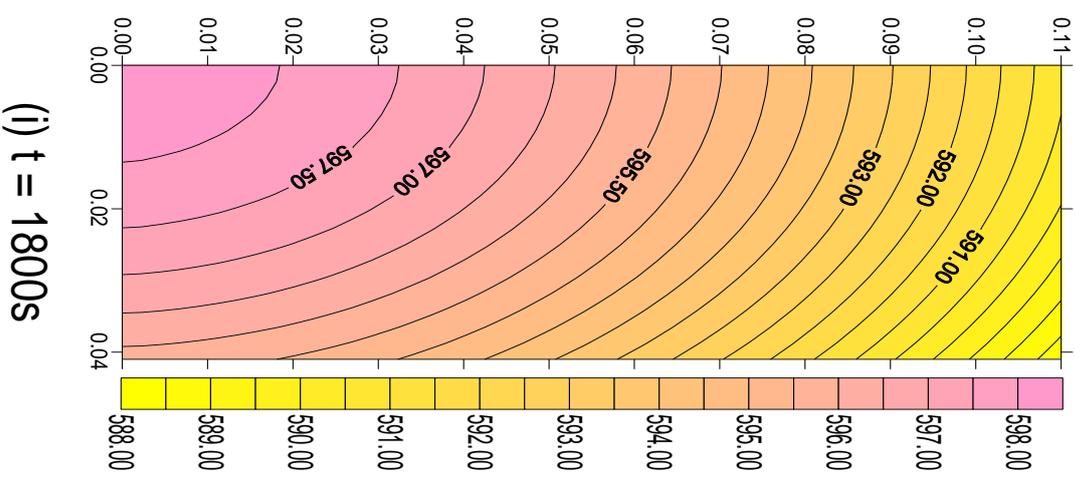
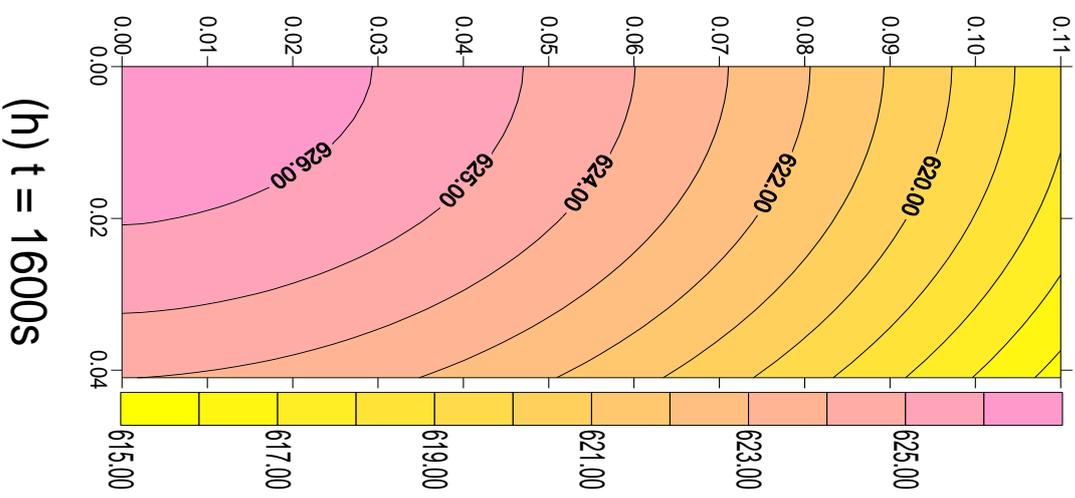
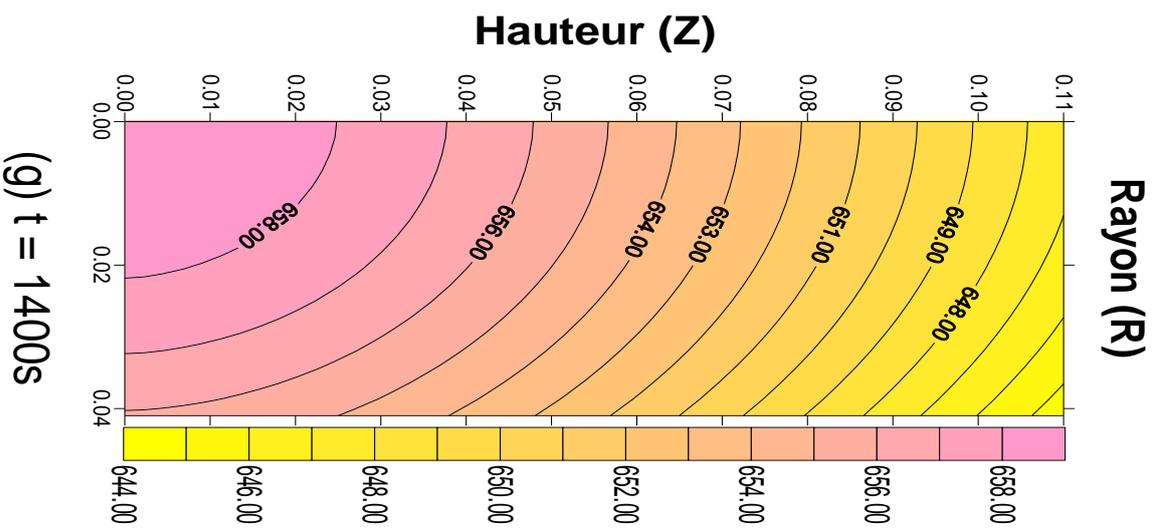
Comme la différence entre le point le plus chaud et le point le plus froid est de quelques millimètres, la différence entre les enthalpies n'est pas assez importante. Pour cela, il aurait été préférable d'utiliser un moule de rayon important (3 fois le rayon que celui considéré dans les expériences) donne une différence importante de l'enthalpie entre les deux points.

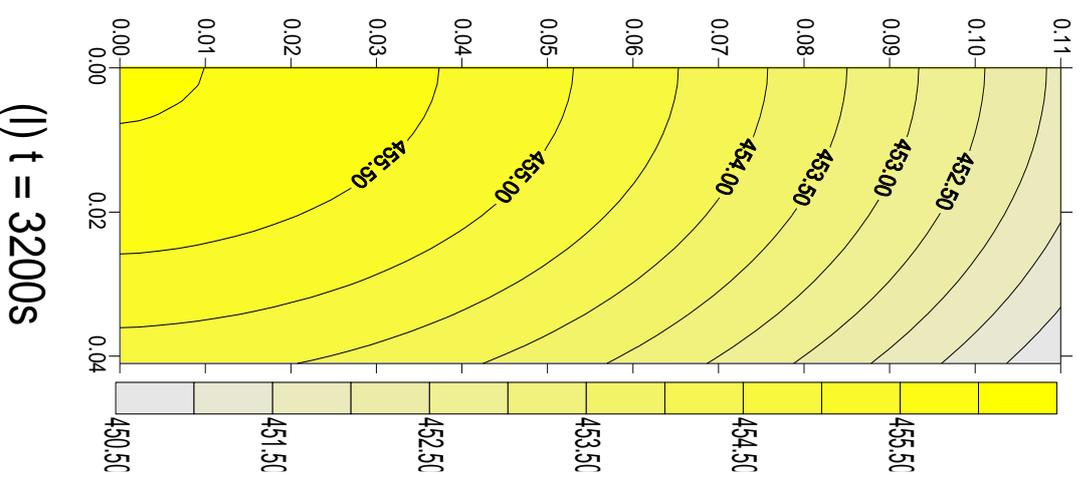
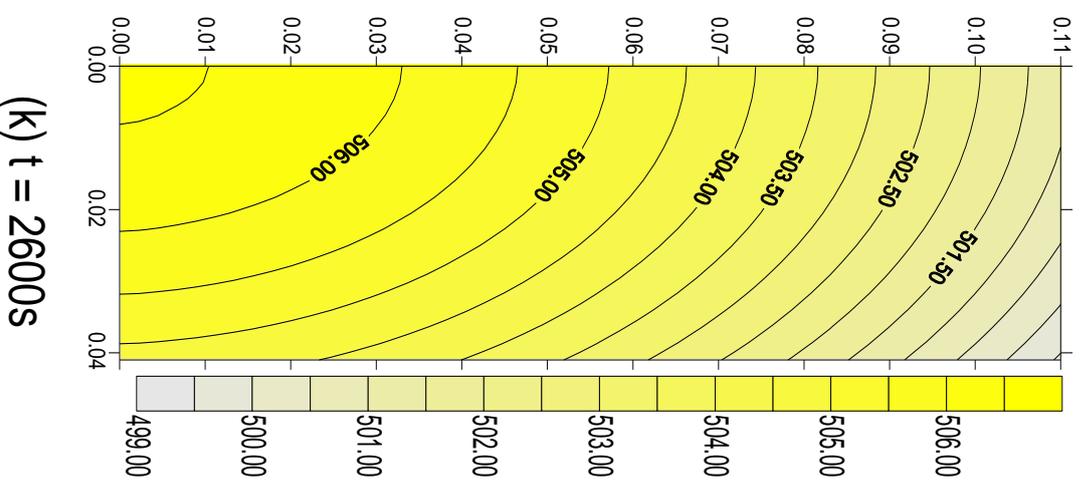
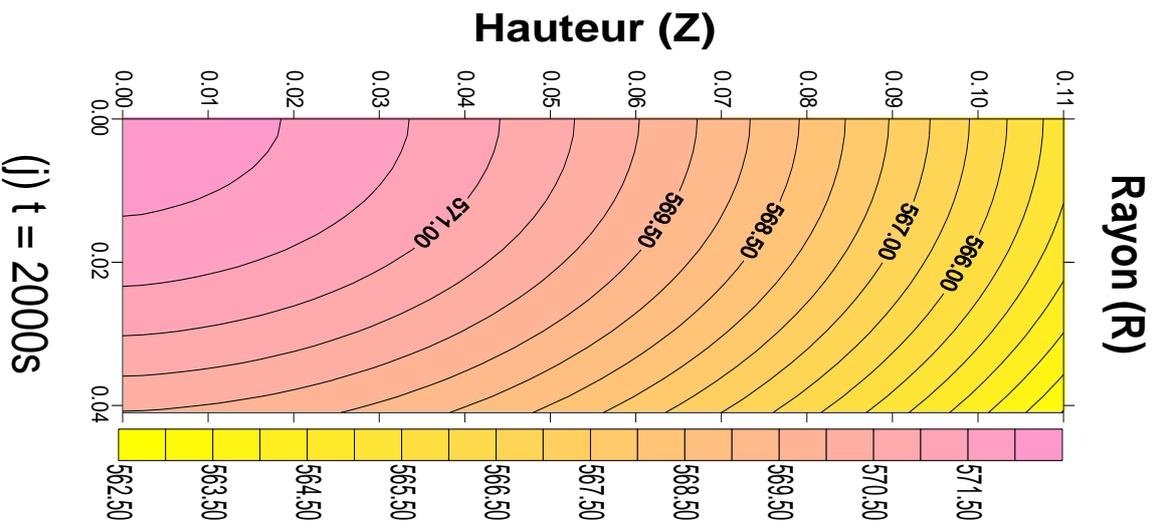
# V.4 Représentation des isothermes

## V.4.1 Le zinc

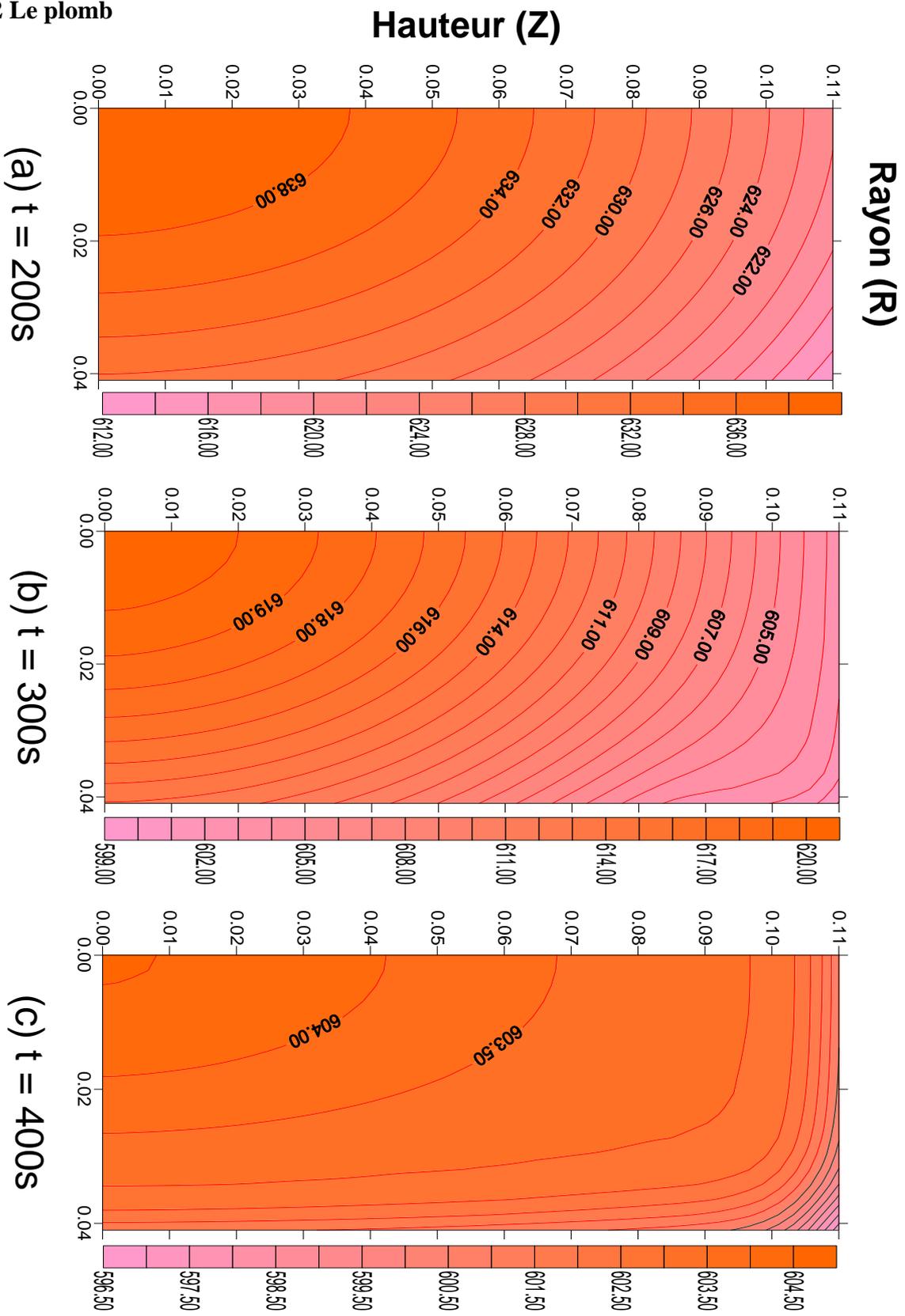


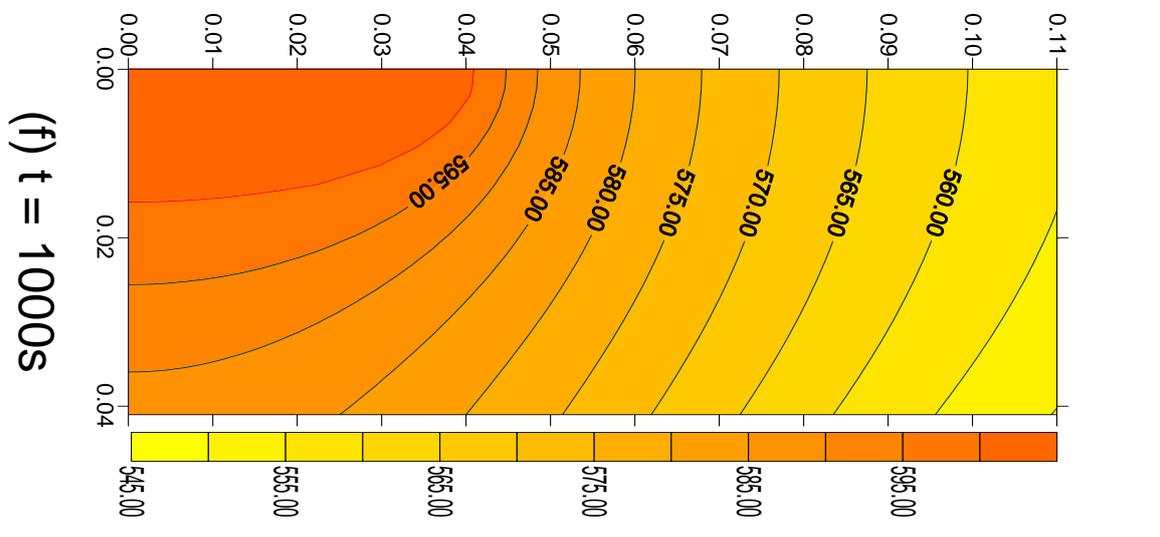
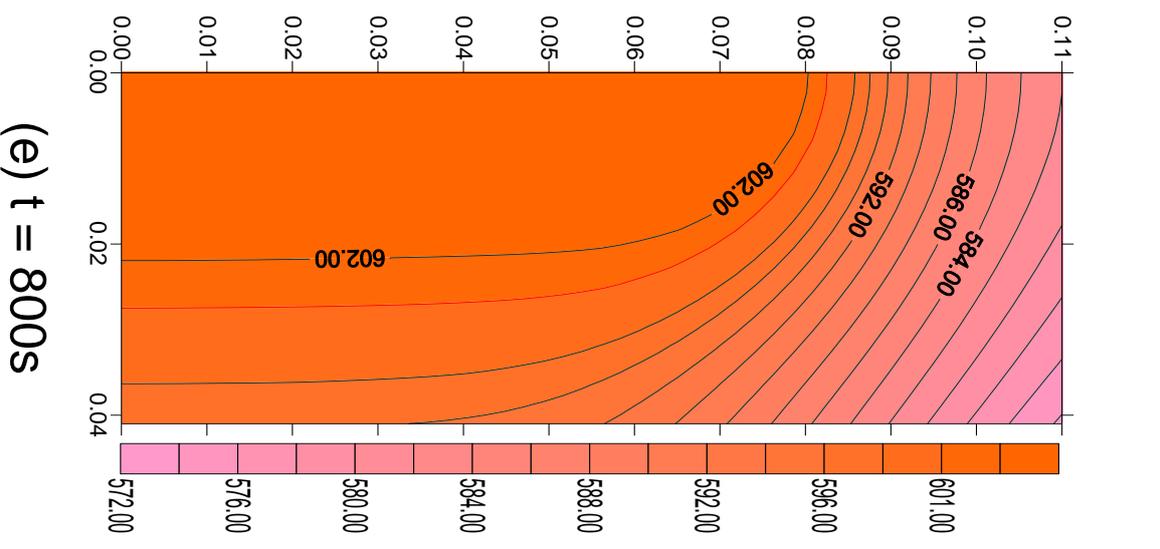
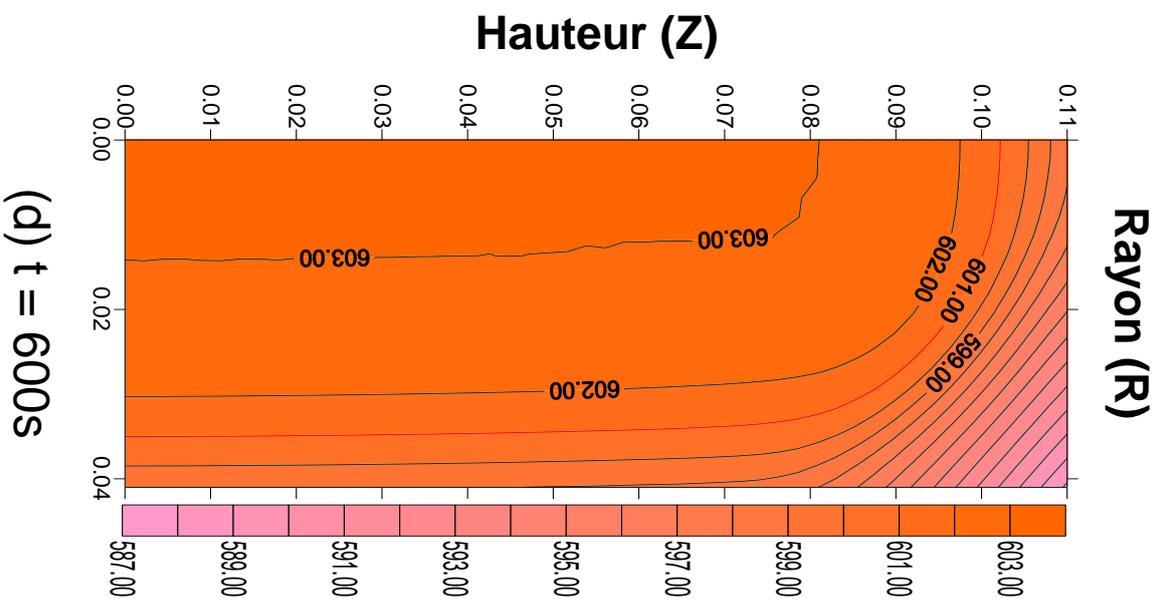


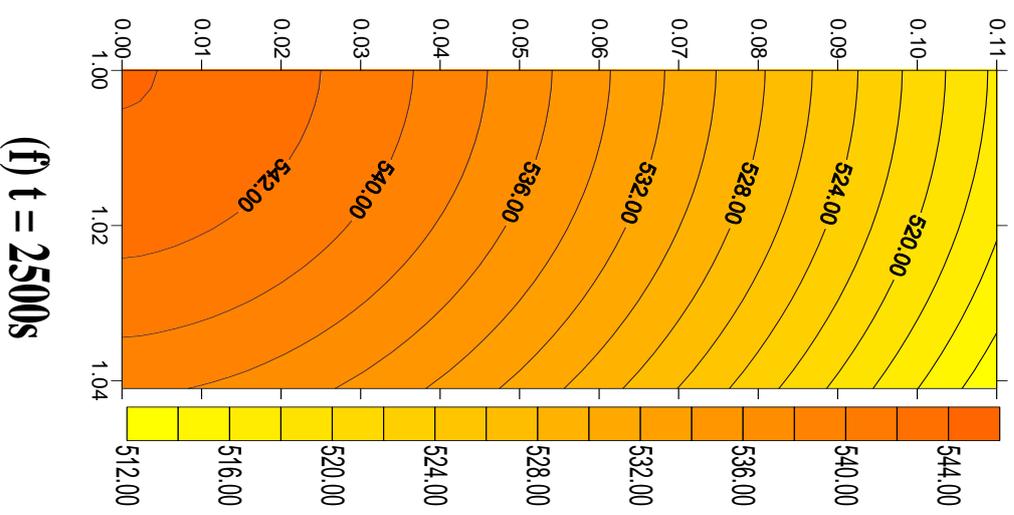
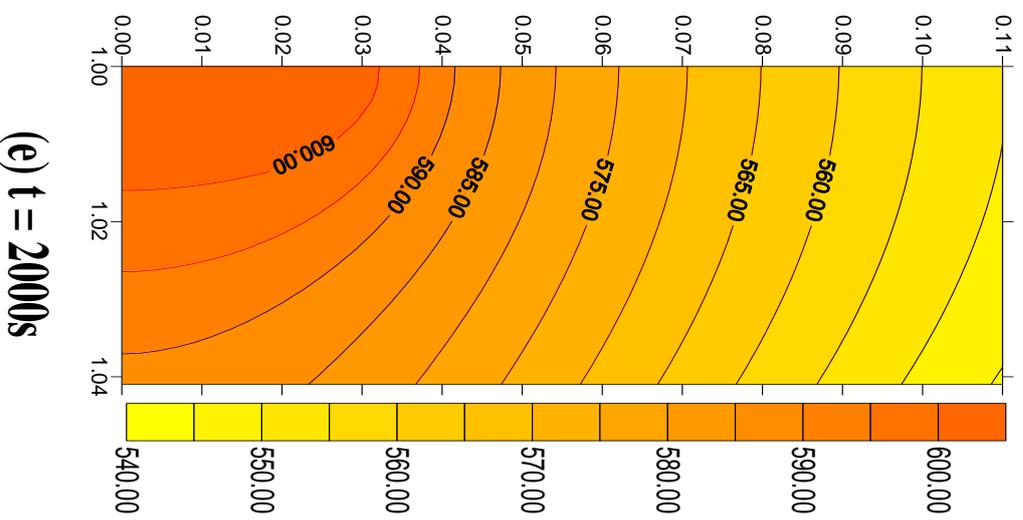
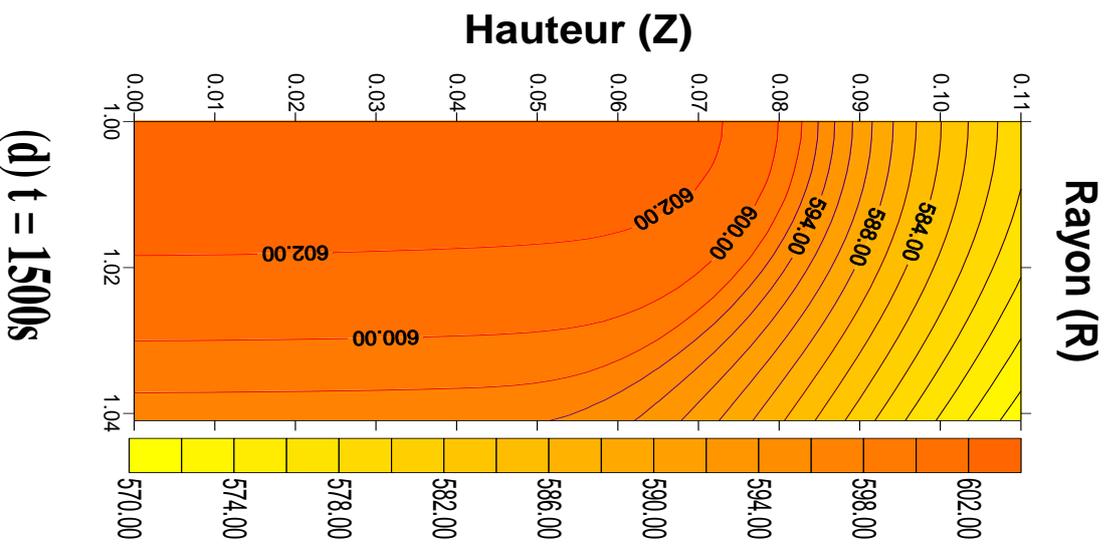




### V.4.2 Le plomb



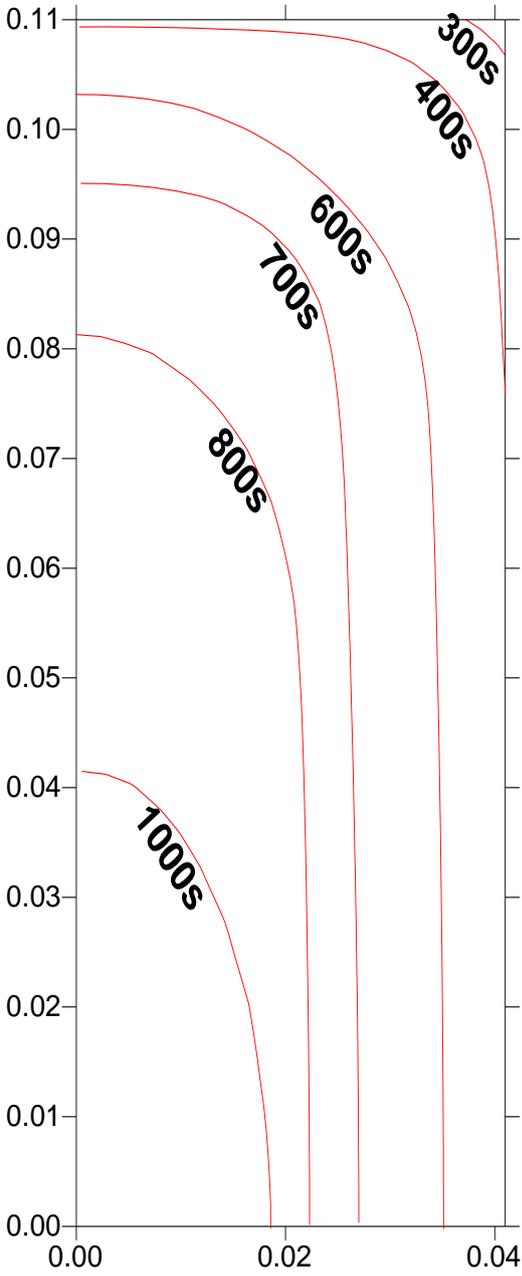




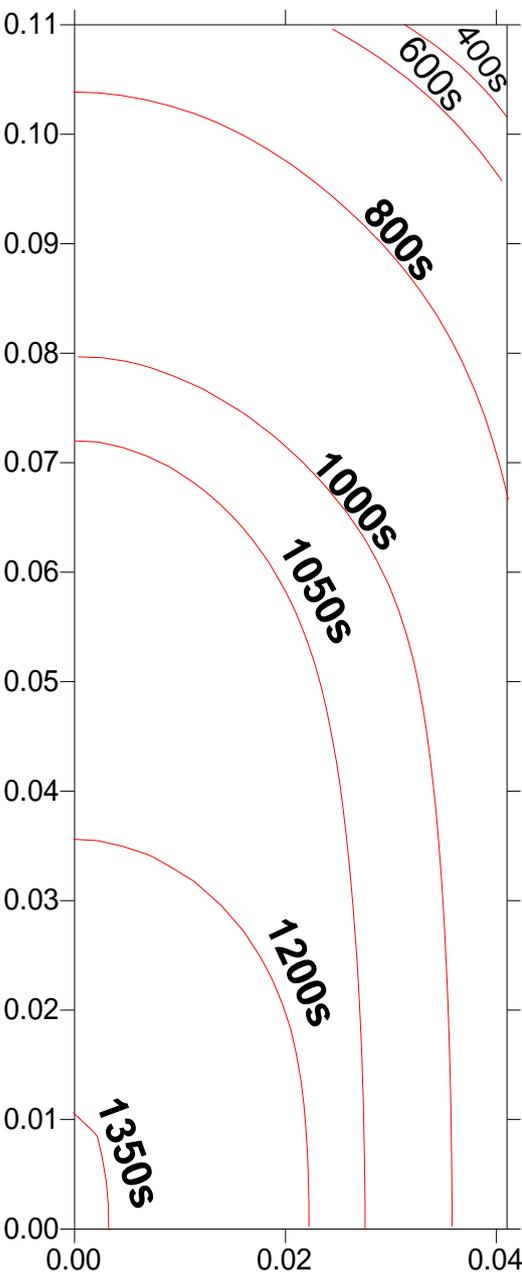
### V.4.3 Commentaire

- Le choix du maillage carré ( $40 \times 110$ ) n'était pas arbitraire il a été choisi après plusieurs essais. Ce maillage remplit les conditions de travail c'est-à-dire l'approche de l'expérimental.
- Les figures précédentes, représentent le comportement des isothermes durant le refroidissement du métal (le zinc et le plomb).
- Plus le temps augmente, plus les isothermes se dirigent vers le sens contraire du rayon et suivant l'axe z, car le flux de chaleur se dirige vers le sens contraire (c'est-à-dire l'extérieur), et ceci est du à la cinétique de refroidissement qui est importante à l'extérieur.

### V.5 Représentation du front de solidification



**Fig(5.5a) Comportement du front de solidification durant le refroidissement du plomb.**



**Fig(5.5b) Comportement du front de solidification durant le refroidissement du zinc.**

## V.5.1 Commentaire

- Les figures (5.5.a,b) précédentes représentent l'évolution du front de solidification pour le zinc ( $T = 691\text{K}$ ) et le plomb ( $T = 601\text{K}$ ) durant la solidification.

- Le temps nécessaire pour que le plomb soit solidifié avoisine 700s.

Le temps nécessaire pour que le zinc soit solidifié avoisine 1000s.

- Cette différence de temps montre bien que le palier de solidification du zinc est assez important par rapport à celui du plomb. Ceci se traduit par la faible diffusivité thermique du plomb par rapport au zinc.
- Les figures confirment le principal défi posé par ce type de problèmes qui réside dans la non linéarité engendrée par la présence de l'interface dont la forme et la position évoluent dans le temps.

*CONCLUSION  
GENERALE ET  
PERSPECTIVES*

## Conclusion générale et perspectives

Lors de cette étude, un code d'analyse rapide du problème de solidification a été développé. Ce code est basé sur la résolution de l'équation de la conduction de chaleur qui régit la solidification interne instationnaire dans le repère relatif.

Aussi une combinaison linéaire de l'équation de conduction est utilisée selon les directions axiale et radiale avec la variation du facteur temps qui rend le problème plus difficile, mais plus fiable et précis du côté résultats.

Le modèle ainsi développé est particulièrement adapté au cas le plus général des dispositifs de moulage ; à savoir, la réalisation de la coulée continue.

Il a été développé également des équations permettant, à l'aide de l'hypothèse d'un nombre de réalisations d'expériences, de calculer à la fois le comportement et la cinématique simplifiée du front de solidification, qui prend en compte les données fournies par le logiciel de conception. Cette dernière démarche assure une liaison très efficace dans le cadre de l'avant-projet de la métallurgie où, dans une première approche d'optimisation.

Les résultats obtenus semblent très cohérents en débit numérique mais également en débit expérimental, ce qui confirme la validité du modèle numérique utilisé pour la simulation des phénomènes de changement de phase, comme le montre les comparaisons qualitatives avec les résultats d'essais.

Dans une première approche, l'équation de la conduction a été discrétisée dans un domaine cylindrique pour analyser le problème de refroidissement. En second lieu, un code de calcul en différences finies a été utilisé, les calculs ont été effectués par un procédé itératif. Après la mise en œuvre du code de calcul, le deuxième pas consiste à valider expérimentalement les résultats simulés. Les mesures des températures durant l'expérience obéissaient à la méthode suivante :

- 1 La mesure de la température du premier thermocouple posé sur l'axe du cylindre ( $r = 0$ ) pour les différentes positions  $z$  suivant la hauteur  $L$ .
- 2 La même logique a été suivie pour les mesures de températures pour les différentes valeurs de  $r$  choisies ( $r = R/3$  ;  $2R/3$  et  $R$ ).
- 3 Cette procédure a été appliquée pour les deux matériaux étudiés.

- 4 Validation des profils radiaux du front de solidification simulés pour les quatre essais avec les profils expérimentaux.
- 5 Validation de l'évolution axiale du front de solidification pour les mêmes essais.
- 6 Les résultats obtenus sont représentés sur plusieurs graphes, sur lesquelles sont mentionnés l'évolution du front de solidification et l'évolution du refroidissement du métal. Les profils de l'évolution de la température en fonction du temps ainsi obtenus, sont comparés avec les résultats expérimentaux.
- 7 Le relevé des températures sur la surface en contact de l'air et sur d'autres points plus profonds (à l'intérieur du moule), a permis d'observer des écarts plus ou moins importants dans chaque cas.

Le code de calcul réalisé en différences finies, a été appliqué pour le cas d'un moule cylindrique. Le code de calcul a été élaboré avec les conditions suivantes :

- 1 Application pour le zinc et le plomb.
- 2 Maillage du domaine et vérification de sa qualité.
- 3 Calcul de l'équation homogène montrant l'évolution du front de solidification ; ainsi que les écarts importants entre les fronts (il existe un seul front qui se déplace) malgré les faibles différences sur l'équation de la conduction.
- 4 Les valeurs des températures et de la fraction liquide ont été calculées en un régime instationnaire.
- 5 Les résultats obtenus sont très encourageants malgré les difficultés rencontrées au cours des essais et le manque de capteurs de température.

### **Perspectives**

Plusieurs développements futurs basés sur ce code sont donc envisageables :

- A- L'utilisation d'un refroidissement forcé (l'eau ou de l'air ventilé) et la prise en considération de l'épaisseur du moule ( $e = 0,02$  mm) qui permettra d'atteindre une meilleure précision.
- B- L'utilisation d'un calorifugeage (sable du labo) reste toujours nécessaire pour permettre d'observer le ralentissement du déplacement du front de solidification (refroidissement lent).

- C- L'utilisation de deux paramètres  $(r,z)$  en fonction du temps, reste nécessaire mais demeure insuffisant tant que le troisième paramètre (la variation angulaire  $(\Phi)$ ) n'est pas pris en considération dans une étude détaillée où rien n'est négligé.
- D- Pendant la solidification, la conduction du métal augmente pour former un espace d'air à l'interface moule/métal, augmentant ainsi la résistance thermique avec la diminution consécutive de l'écoulement de la chaleur. La connaissance du coefficient transitoire de transfert thermique à l'interface du métal/moule est primordiale dans l'analyse du processus. Le travail peut être complété par l'accomplissement de profils thermiques expérimentaux dans le moule le long du procédé de solidification.
- E- Pour que les relevés des températures soient fiables, il faudrait que la variation de la température par rapport au temps pendant la solidification soit enregistrée par l'intermédiaire d'un enregistreur multi canal, et cela dans le but de diminuer l'intervalle de temps entre les différents relevés. Enfin, je souhaite que ce but a été approché, à tout le moins, à défaut de réussir, j'ai essayé.

*REFERENCE*  
*BIBLIOGRAPHIQUE*

## **REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE**

- [1] MEETING ON HEAT AND MASS TRANSFER. January, 10, 11, 2000; Pune, India.
- [2] Nicholas Zabaraz, "Inverse Problems in Heat Transfert" Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering University,1996.
- [3] K.A.R.Ismail, "Numerical and Experimental Study on the Solidification of PMC around a Vertical Finned Isothermal Cylinder" Depto de Engenharia Térmica e de Fluidos, Campinas, Brazil, 2001.
- [4] Dipendra. B Khillarkar, " Melting of a Phase Change Material in Horizontal Annulis" Depart. Of Chemical Engineering, Mc Gill University, Montrial, Quebec, Canada,1998.
- [5] Tomasz A. Kowalewski, Marek Rebow, "Freezing of Water in the Differentially Heated Cubic Cavity", International Journal of Computational Fluid Dynamics,vol.11, PP. 193-210, 1999.
- [6] T.A. Kowalewski, A. Cybulski, " Experimrntal and Numerical investigations of Naturel Convection in Freezing of Water",Center of Mechanics, IPPT PAN, Polish Academy of Sciences, PL 00-049 Warszawa, 2000
- [7] Marilena Gangi, T A. Kowaleski," Naturel Convection during Ice Formation: Numerical Simulation VS. Experimental Results", Compter Asssted Mechanics and Engineering Sciences, 7: 321-342, 2000.
- [8] Marcelo J. Colaço, Helcio R. B. Orlande, "Inverse Convection Problems in Irregular Geometries",Dep. of Mechanichal and Aerospace Engineering, Box 1901, The University of Texas, Arlington, USA, 2001.
- [9] F. Kavicka J. Stetina, B. Sekanina, P. Ramik, V.Gontarev, " Numerical Analysis of the Influence of Thermophysical Parameters and Boundary Conditions on a Model of Solidification Process", Faculty of Mechanical Engineering, Technical University of Brno,61669 Brno, Czech Republic, Faculty of Natural Sciences and Engineering, University of Ljubljana,1000 Ljubljana, Slovenia, 2001
- [10] Long Sun Chao, Wu Chang Du, " Macr-Micro Modeling of Solidification", Dep of Engineering Science National Cheng Kung University Tainan, Taiwan, R.O.C 1999.

- [11] Marc Médale, Marc jaeger, "Modélisation Par Eléments finis d'Écoulement à Surface Libre avec Changement de Phase Solide-Liquide", Institut Universitaire des systèmes thermiques Industriels, CNRS 6595, France, 1998.
- [12] R.J. FELLER and C. BECKERMANN, "Modeling of Solidification of Metal-Matrix Particulate Composites with Convection", 1999
- [13] Youssef Belhamadia, André Fortin , Eric Chamberland, " Three-dimensional anisotropic mesh adaptation for phase change problems", Département de mathématiques et de statistique, GIREF, Université Laval, Québec, Canada G1K 7P4, 2004.
- [14] K U A N- SHIH Y UAN Wu, V, "An Analytic Solution of Heat Conduction Problem With Phase Change", Department of Biophysics, State University of New York at Buyirlo, Badfalo, New York, U. S. A, 1968.
- [15] Eduardo N. Souza, Noé Cheung, Carlos A. Santos, Amauri. G, "The Variation of the Metal /Mold Heat Transfer Coefficient Along the Cross Section of Cylinder Shaped Casting", Dep of Materials Engineering State University of Compinas, Brazil, 2004.
- [16] Baha'l. Malaeb, "Intedrating Computer Simulation of Solidification in the Design Process of Feeding Systems of Castings", Mechanical Engineering Department University of Beirut, Lebanon, 2000.
- [17] J. Banaszek and Y. Jaluria, T. A. Kowalewski and M. Rebow, " Semi-Implicit FEM Analysis of Natural Convection in Freezing Water", Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Rutgers University, 1999.
- [18] Brian G. Thomas, "Modeling of the Continuous Casting of Steel-Past, Present and Futur", Mechanical and Industrial Engineering Dept. University of Illinois at Urbana Champaign, USA, 2002.
- [19] Brian G. Thomas, "Continuous Casting: Modeling", The Encyclopedia of Advanced Materials, Oxford, UK, vol 2, 2001, 8p.
- [20] Brian G. Thomas, J. k, Brimacombe, "Mathmatical Model of the Thermal Processing of Steel Ingots: PartI. Heat Flow Model", 1999.
- [21] Xiaolong Wu, Randy Clarksean and Yitung Chen, "Design and Analysis for Melt Casting Metallic Fuel Pins", Dept of Mechanical Engineering University of Nevada, Las Vegas, 2002.

- [22] E. Semma, M.El Ganaoui, A Cheddadi, P. Bontoux, "Simulation Numerique de la Convection Thermique en Présence d'une Interface Solide/Liquide en Croissance Dirigée Horizontale", Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Agdal, Rabat, Maroc, 2001.
- [23] Zafer Ilken, Huseyin Guenerhan, "The Relation Between the Results of Cylindrical Heat Conduction Problems with and without Phase Change", Dept of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Bornova, Izmir, Turkey, 1997.
- [24] Abdelaziz Laoudi, "Transfer de Chaleur dans un Matériau à Changement de Phase : Application au Stockage cyclique d'Energie Electrique", Université de Sherbrooke, Département de Génie Mécanique, 1996.
- [25] Rui Xu, "Control of Heat and Fluid Flow in Solidification Processes by an Inverse Method", Faculty of Engineering Lakehead University, Canada, 1999.
- [26] P.D. Patel, AIAA.6,2454, 1968
- [27] M. Necati Ozisik, John Wiley & Sons, "Heat conduction" , Second Edition, 1993.
- [28] André B. De Vriendt, "La Transmission de la Chaleur ", (suite et appendices), Volume I, Tome 2 .
- [29] Sébastien Perron, "Résolution avec la Méthode des Volumes Finis Dirigés de l'équation de la Chaleur pour des Problèmes Diphasiques en 1 D et 2D", Université du Québec à Chicoutimi, Canada, 1998
- [30] Korti A. Nabil. "Modélisation Numérique du Transfert de Chaleur lors de la Solidification des Métaux ", Mémoire de magister, Université Abou Bekr Belkaid, Algérie 2000.
- [31] Journal of International Physics 201 (2004) 753-770. "Three-dimensional anisotropic mesh adaptation for phase change problems". Youssef Belhamadia, André Fortin, Eric Chamberland.
- [32] EIG - CONV-RAY.DOC, " Convection et rayonnement". Lab. Phys. – 01.06.04
- [33] Frank Kreith, Mark S. Bohn, "Principal of Heat Transfer" Fourth Edition. Happer & Row, Publishers, New York, 1986

[34] A. N. Korti, Y. Khadraoui, "Numerical Simulation of the DC Continuous Casting using average Heat Capacity " Faculté des sciences de l'ingénieur, Département de Mécanique, Université de Tlemcen. Scandinavian Journal of Metallurgy 2004 ;33 :347-354.

[35] K. Raznjevic. "Tables et Diagrammes Thermodynamiques", Eyrolles, édition. Paris, 1970.