

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

## MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Systèmes Dynamiques et Applications

présenté par

BOUDJEMA Ismail

Soutenu le : 23 - 06 - 2014

---

# Existence des ondes progressives dans le cas monostable

---

Soutenu devant le jury composé de :

M. B.ABDELLAOUI	Pr, Université de Tlemcen	Président
M. S.E.MIRI	MCA, Université de Tlemcen	Examineur
M. A.ATTAR	MA, Université de Tlemcen	Examineur
M. T.M.TOUAOULA	Pr, Université de Tlemcen	Encadreur

# Dedicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes parents qui m'ont encouragé durant toutes ces années*

*Toute ma famille et surtout mon frère Ishak*

*Mon très cher ami , Salih Djilali , symbole de tendresse et de fidélité*

*Mes bien chers amis : S.Bekkaoui , N.Ariout*

*Tous les membres du Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées*

*Monsieur Tarik Touaoula , Vous avez cru en moi, vous m'avez épaulé et guidé*

*Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible, je vous dis merci.*

# Remerciements

Je remercie en priorité **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné le courage, et la force de volonté d'achever ce travail.

Je tiens aussi à remercier M. le Professeur B.Abdellaoui, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Je prie M. S.E.Miri, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera ce travail.

Mes remerciements chaleureux à M. T.M.Touaoula, qui m'a beaucoup aidé à la réalisation de ce mémoire, je salut sa gentillesse, son humilité et sa patience à prodiguer des conseils pertinents. Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

# Table des matières

Introduction	5
1 Outils mathématiques	7
2 Quelques exemples analytiques	13
3 Equation de Fisher	18
4 Application à l'épidémiologie	32
Bibliographie	39

# Introduction

La Propagation des ondes, décrite par des équations paraboliques non linéaires, a été considérée pour la première fois dans un document publié par A.N.Kolmogorov, I.G.Petrovskii, et N.S.Piskunov à la fin des années 30. Ces recherches mathématiques ont été soulevées dans le cadre d'un modèle pour la propagation des gènes dominants, un sujet également examiné par R.A.Fisher.

A l'heure actuelle un grand nombre de documents est consacré aux solutions d'ondes des systèmes paraboliques et ce nombre continue d'augmenter.

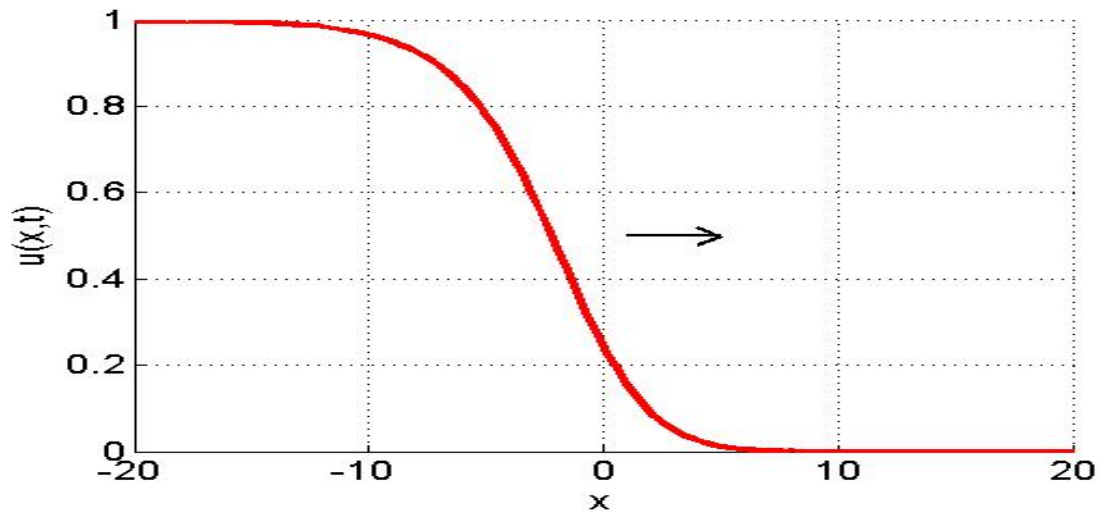
Ces dernières années, on remarque un intérêt grandissant pour les ondes progressives. Cet intérêt a été stimulé par l'observation des ondes dans plusieurs domaines : la croissance des tumeurs, dynamique des populations, écologie, épidémiologie, invasions biologiques, et aussi la propagation des flammes, les ondes chimiques , etc.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons aux équations de réaction-diffusion du type :

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + F(U(t, x)) , t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

où  $F$  est de type monostable , c'est à dire :  $F'(0) > 0, F'(1) < 0$  et  $F > 0$  sur  $(0, 1)$ .

Le but de ce travail est de trouver des solutions de cette forme :



# Chapitre 1

## Outils mathématiques

Nous présentons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire. (voir [3],[5],[7]).

**Définition 1.1.** Une fonction  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est dite lipschitzienne dans un domaine  $D \subset \mathbb{R}^N$  s'il existe une constante  $L$  telle que  $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$  avec  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ .

### **Théorème 1.1. (Existence et unicité)**

Supposons que  $f$  est lipschitzienne, alors pour une condition initiale  $x_0 \in D$  l'équation différentielle autonome  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x)$  a une solution unique  $\phi_t(x_0)$  définie sur l'intervalle maximal d'existence.

**Définition 1.2.** On appelle point d'équilibre tout point  $x^*$  de l'espace des phases tel que  $f(x^*) = 0$ .

**Définition 1.3.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application de classe  $C^1$ , c'est à dire  $f = (f_1, f_2)$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont des applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telles que les dérivées partielles  $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial y}$  existent en tout point  $(x,y)$  et dépendent continûment de  $(x,y)$ .

On appelle **matrice jacobienne** de  $f$  en un point  $(x^*, y^*)$  la matrice suivante

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Si les valeurs propres de la matrice jacobienne sont tous à parties réelles négatives alors l'équilibre  $(x^*, y^*)$  est dit **stable**, sinon il est dit **instable**.

**Définition 1.4.** Un **flot** dans  $\mathbb{R}^2$  est une application  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de telle sorte que

1.  $\Phi$  est continue
2.  $\Phi(x, 0) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$
3.  $\Phi(\Phi(x, t_1), t_2) = \Phi(x, t_1 + t_2)$

**Définition 1.5.** Un **cycle limite** est une trajectoire fermée isolée.

Une trajectoire **fermée** est une orbite (ie. la solution  $t \rightarrow x(t)$ ) non réduite à un point qui revient à la condition initiale après un certain temps. **Isolée** signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles spiralent autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant.

**Définition 1.6.** Supposons que  $I_x$  est l'intervalle maximal d'existence de la solution.

-La **trajectoire (l'orbite)** d'un point  $X$  est définie par  $\gamma(x) = \{\Phi(x, t) : t \in I_x\}$

-**L'orbite positive** est définie par  $\gamma^+(x) = \{\Phi(x, t) : t > 0\}$

-**L'orbite négative** est définie par  $\gamma^-(x) = \{\Phi(x, t) : t < 0\}$

**Définition 1.7.** L'ensemble  $\omega$ -**limite** d'un point  $x$  est défini par

$$\omega(x) = \{y : \text{il existe une suite } t_n \rightarrow +\infty \text{ de telle sorte que } \Phi(x, t_n) \rightarrow y\}$$

L'ensemble  $\alpha$ -**limite** d'un point  $x$  est défini par

$$\alpha(x) = \{y : \text{il existe une suite } t_n \rightarrow -\infty \text{ de telle sorte que } \Phi(x, t_n) \rightarrow y\}$$



**Définition 1.8.** Un ensemble  $S$  est dit **invariant** par rapport au flot si  $x \in S$  implique que  $\gamma(x) \subset S$

Un ensemble  $S$  est dit **positivement invariant** par rapport au flot si  $x \in S$  implique que  $\gamma^+(x) \subset S$

Un ensemble  $S$  est dit **négativement invariant** par rapport au flot si  $x \in S$  implique que  $\gamma^-(x) \subset S$

**Définition 1.9. (orbite homocline et hétérocline)**

-Une orbite **homocline** est une solution qui converge vers un même équilibre quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .

-Une orbite **hétérocline** est une solution qui converge vers deux équilibres différents lorsque  $t \rightarrow -\infty$  et  $t \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 1.2. (critère de Bendixson)**

Soit  $\dot{x} = f(x)$  un système dynamique dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $f \in C^1(D)$ , où  $D \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert simplement connexe. Si  $\nabla \cdot f$  n'est pas identiquement nul et ne change pas de signe dans  $D$ , alors le système dynamique n'a pas de solution périodique dans  $D$ .

**Théorème 1.3. (critère de Dulac)**

Soit  $\dot{x} = f(x)$  un système dynamique dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $f \in C^1(D)$ , où  $D \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert simplement connexe. S'il existe une fonction  $B \in C^1(D)$  de telle sorte que  $\nabla \cdot Bf$  n'est pas identiquement nul et ne change pas de signe dans  $D$ , alors le système dynamique n'a pas de solution périodique dans  $D$ .

**Théorème 1.4. (Poincaré-Bendixson)**

Soit  $M \subset \mathbb{R}^2$  une région positivement invariante pour le champ de vecteur contenant un nombre fini de points fixes, et soit  $x \in M$  alors une des alternatives suivantes est réalisée :

i)  $\omega(x)$  est un point fixe ;

ii)  $\omega(x)$  est une orbite fermée ;

iii)  $\omega(x)$  se compose d'un nombre fini de points fixes  $x_1, \dots, x_n$ , et des orbites  $\gamma$  tel que  $\alpha(\gamma) = x_i$

et  $\omega(\gamma) = x_j$ .

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u), \text{ dans } \mathbb{R} \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \text{ dans } \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Pour assurer le résultat d'unicité, on suppose que pour certaines constantes  $c_0 > 0, b < (4T)^{-1}$

la solution  $u(x, t)$  satisfait la condition suivante :

$$|u(x, t)| \leq c_0 e^{b|x|^2} \text{ quand } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

On suppose aussi que  $0 < u_0 < 1$ , et que  $u_0$  n'est pas identiquement nulle dans  $\mathbb{R}$ .

### Définition 1.10. (sous- et sur-solutions)

Une fonction  $u_- \in C^2(\mathbb{R} \times (0, T])$  est une **sous-solution** pour le problème (1.1) si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_-}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2} \leq F(u_-), \text{ dans } \mathbb{R} \times (0, T] \\ u_-(x, 0) \leq u_0(x), \text{ dans } \mathbb{R} \\ |u_-(x, t)| \leq c_0 e^{b|x|^2} \text{ quand } |x| \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Une fonction  $u_+ \in C^2(\mathbb{R} \times (0, T])$  est une **sur-solution** pour le problème (1.1) si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_+}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2} \geq F(u_+), \text{ dans } \mathbb{R} \times (0, T] \\ u_+(x, 0) \geq u_0(x), \text{ dans } \mathbb{R} \\ |u_+(x, t)| \leq c_0 e^{b|x|^2} \text{ quand } |x| \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

**Lemme 1.1.** Soit  $u_-$ ,  $u_+$  respectivement une sous- et sur-solution de (1.1); on suppose que  $f(u)$  est localement lipschitzienne et continue dans  $\mathbb{R}$ , uniformément dans  $\mathbb{R} \times (0, T]$ . Alors  $u_+ > u_-$  dans  $\mathbb{R} \times (0, T]$ .

Soit  $u_-$  une sous-solution et  $u_+$  une sur-solution du problème (1.1) de telle sorte que :

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| \leq k \|u_1 - u_2\| \text{ pour } u_- \leq u_2 \leq u_1 \leq u_+, (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T]. \quad (1.5)$$

**Théorème 1.5.** Soit  $u_-, u_+$  une sous et sur-solution de (1.1), et soit  $F$  une fonction satisfaisant (1.5). Alors le problème (1.1) admet une solution unique  $u \in [u_-, u_+]$ .

**Définition 1.11.** Une solution de type onde progressive est une solution de la forme  $u(x, t) = v(z) = v(x - ct)$  avec  $c \in \mathbb{R}$  une constante appelée la vitesse de l'onde. Si de plus  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} v(z) = v_{\pm}$  tel que  $v_+ \neq v_-$ , alors elle est dite de type front.

**Remarque 1.1.** Il est légitime de se poser la question suivante : Une équation de diffusion sans réaction (i.e.  $F(u) = 0$ ) peut-elle admettre une onde progressive comme solution ? La réponse est négative; en effet

$$Du''(z) + cu'(z) = 0$$

implique

$$u(z) = A + Be^{-cz/D}$$

avec  $u(-\infty) = 1$  on obtient  $u(z) = 1$  qui n'est pas une onde progressive.

# Chapitre 2

## Quelques exemples analytiques

Ce chapitre est largement inspiré de [6]

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + F(U(t, x)) , & x \in \mathbb{R} , t \geq 0 \\ U(0, x) = U_0(x) , & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $F(U)$  représente le terme de réaction et  $U(t, x) \in \mathbb{R}^+$  est la solution.

Supposons que

$$\begin{cases} U_0(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty \\ U_0(x) \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.2)$$

On cherche une solution de la forme :  $U(t, x) = V(x - ct)$  tel que  $V(-\infty) = 1$  et  $V(+\infty) = 0$

où  $c$  : est une constante positive qui représente la vitesse de l'onde.

En remplaçant  $U(t, x)$  par  $V(x - ct)$  on obtient :

$$\begin{cases} V'' + cV' = -F(V) \\ V(-\infty) = 1, V(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

**Exemple 2.1.** : Pour  $\theta \in (0, 1)$  considérons la fonction

$$F(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq U < \theta \\ \theta(1 - U) & \text{si } \theta < U \leq 1. \end{cases}$$

**Lemme 2.1.** : Il existe une solution unique  $(c^*, V)$  de (2.3) avec  $V(0) = \theta$

et en plus  $V$  est décroissante.

**Démonstration 2.1.** :

1) Pour  $x < 0$  on cherche une solution telle que  $V > \theta$ , l'équation de  $V$  est donnée par :

$$V'' + cV' + \theta(1 - V) = 0, \text{ d'où l'équation caractéristique associée est : } \lambda^2 + c\lambda - \theta = 0,$$

elle admet deux racines :

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4\theta}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4\theta}}{2} > 0.$$

La solution est donnée par :  $V(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} + 1$ , on utilisons les conditions :

$$V(-\infty) = 1 \text{ et } V(0) = \theta, \text{ on aura : } \alpha = 0 \text{ et } \beta = \theta - 1.$$

$$\text{Donc, } V(x) = [(\theta - 1)e^{\lambda_2 x} + 1] > \theta, \forall x < 0.$$

2) Pour  $x > 0$  on cherche une solution telle que  $V < \theta$ , l'équation de  $V$  est donnée par :

$V'' + cV' = 0$ , d'où l'équation caractéristique associée est :  $\lambda^2 + c\lambda = 0$ ,

elle admet deux racines :  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = -c$ .

La solution est donnée par :  $V(x) = \alpha + \beta e^{-cx}$ , en utilisant les conditions :

$V(+\infty) = 0$  et  $V(0) = \theta$ , on aura :  $\alpha = 0$  et  $\beta = \theta$ .

Donc,  $V(x) = [\theta e^{-cx}] < \theta, \forall x > 0$ .

La solution générale est donnée par :

$$V(x) = \begin{cases} (\theta - 1)e^{\lambda_2 x} + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \theta e^{-cx} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Il reste à vérifier que  $V$  est dérivable en  $x = 0$

$$V'(x) = \begin{cases} \lambda_2(\theta - 1)e^{\lambda_2 x} & \text{si } x < 0 \\ -c\theta e^{-cx} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$\lambda_2(1 - \theta) = \theta c$  et  $2 \frac{\partial \lambda_2(c)}{\partial c} = [-1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 4\theta}}] < 0$ , donc  $\exists c^*$  tel que  $\lambda_2(1 - \theta) = \theta c$ .

**Exemple 2.2.** : Pour  $\theta \in (0, 1)$  considérons la fonction

$$F(U) = \begin{cases} (1 - \theta)U & \text{si } 0 \leq U < \theta \\ \theta(1 - U) & \text{si } \theta < U \leq 1. \end{cases}$$

**Lemme 2.2.** : Il existe une vitesse minimale  $c^* = 2\sqrt{1 - \theta}$ , et pour tout  $c \geq c^*$  une unique solution  $(c, V)$  de (2.3) avec  $V(0) = \theta$ , et en plus  $V$  est décroissante.

**Démonstration 2.2.** :

1) Pour  $x < 0$  on cherche une solution telle que  $V > \theta$ , l'équation de  $V$  est donnée par :

$V'' + cV' + \theta(1 - V) = 0$  , d'où l'équation caractéristique associée est :  $\lambda^2 + c\lambda - \theta = 0$ .

elle admet deux racines :

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4\theta}}{2} < 0 , \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4\theta}}{2} > 0.$$

La solution est donnée par :  $V(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} + 1$  , en utilisant les conditions :

$V(-\infty) = 1$  et  $V(0) = \theta$  , on aura :  $\alpha = 0$  et  $\beta = \theta - 1$ .

Donc ,  $V(x) = [(\theta - 1)e^{\lambda_2 x} + 1] > \theta, \forall x < 0$ .

**2)** Pour  $x > 0$  on cherche une solution telle que  $V < \theta$ ; l'équation de  $V$  est donnée par :

$V'' + cV' + (1 - \theta)V = 0$ , d'où l'équation caractéristique associée est :  $\mu^2 + c\mu + (1 - \theta) = 0$ .

Le discriminant :  $\Delta = c^2 - 4(1 - \theta)$ .

si  $\Delta < 0$  on a des cosinus et sinus , et on ne peut pas utiliser  $V(+\infty) = 0$ .

On suppose que  $\Delta > 0$ , on a deux racines :

$$\mu_1 = \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2} < 0 , \quad \mu_2 = \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2} < 0.$$

La solution est donnée par :  $V(x) = \alpha e^{\mu_1 x} + \beta e^{\mu_2 x}$ , en utilisant la condition :  $V(0) = \theta$  on aura :

$\alpha + \beta = \theta$  , et on remarque que  $V \geq 0$  si  $\beta \geq 0$ .

Donc ,  $V(x) = [\theta e^{\mu_1 x} + \beta(e^{\mu_2 x} - e^{\mu_1 x})] < \theta, \forall x > 0$ .



La solution générale est donnée par :

$$V(x) = \begin{cases} (\theta - 1)e^{\lambda_2 x} + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \theta e^{\mu_1 x} + \beta(e^{\mu_2 x} - e^{\mu_1 x}), & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Il reste à vérifier que  $V$  est dérivable en  $x = 0$

$$V'(x) = \begin{cases} \lambda_2(\theta - 1)e^{\lambda_2 x} & \text{si } x < 0 \\ \mu_1\theta e^{\mu_1 x} + \beta(\mu_2 e^{\mu_2 x} - \mu_1 e^{\mu_1 x}) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$\lambda_2(\theta - 1) = \theta\beta\mu_1 + \beta(\mu_2 - \mu_1)$ , après des simplifications notre résultat est réduit à vérifier que :

$$(\theta - 1)[-c + \sqrt{c^2 + 4\theta}] = 2\beta\sqrt{c^2 - 4(1 - \theta)}.$$

On remarque que pour tout  $c \geq c^*$  le côté gauche est une quantité positive.

Donc, on peut calculer une valeur unique de  $\beta > 0$  qui satisfait cette égalité. Cela correspond à une fonction  $V$  positive et décroissante.

**Remarque 2.1.** Pour les deux exemples précédents, la fonction  $F$  n'est pas de type monostable.

# Chapitre 3

## Equation de Fisher

$$\frac{\partial p}{\partial t} - Kp(1 - p) = D\Delta p.$$

Cette équation établie en 1937 par R.A.Fisher (statisticien britannique) est du type réaction-diffusion. L'inconnue  $p$  est la fréquence d'un gène mutant qui s'étend dans une population sous la forme d'une onde de propagation.  $D$  et  $k$  sont des constantes et  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien.

**Exemple 3.1.** [2] : Considérons l'équation de type réaction-diffusion de Fisher :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = KU(1 - U), \quad 0 \leq U \leq 1. \quad (3.1)$$

Par un changement de variables simple :  $t = K\tau$  et  $x = z\sqrt{\frac{K}{D}}$

l'équation devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U(1 - U) \quad (3.2)$$

Si la solution onde progressive de type front existe , elle a la forme :

$$U(t, x) = W(x - ct) = W(z) , W(-\infty) = 1 \text{ et } W(+\infty) = 0.$$

Alors , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} W'' + cW' + W(1 - W) = 0 \\ W(-\infty) = 1 , W(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Par la méthode du plan de phase , le système (3.3) devient :

$$\begin{cases} W' = V \\ V' = -cV - W(1 - W) \end{cases} \quad (3.4)$$

Les points d'équilibre de ce système sont :  $(W_1^*, V_1^*) = (0, 0)$  ,  $(W_2^*, V_2^*) = (1, 0)$ . Analysons la stabilité de ces points d'équilibre , on suppose que  $c > 0$  , la matrice jacobienne associée au système (3.4) est donnée par :

$$J(W^*, V^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2W^* - 1 & -c \end{pmatrix}$$

1)  $(W^*, V^*) = (0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les racines du polynome caractéristique :  $\lambda^2 + c\lambda + 1$ .

Le discriminant :  $\Delta = c^2 - 4$ .

-si  $\Delta > 0$  i.e.  $c > 2$  on a :

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4}}{2} < 0$$

Donc ,  $(0,0)$  est un noeud stable.

-si  $\Delta = 0$  i.e.  $c = 2$  on a :  $\lambda = -1$

Donc ,  $(0,0)$  est un noeud dégénéré stable.

-si  $\Delta < 0$  i.e.  $c < 2$  on a :

$$\lambda_1 = \frac{-c - i\sqrt{4 - c^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-c + i\sqrt{4 - c^2}}{2}.$$

Donc ,  $(0,0)$  est un foyer stable.

1)  $(W^*, V^*) = (1, 0)$

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les racines du polynome caractéristique :  $\lambda^2 + c\lambda - 1$ .

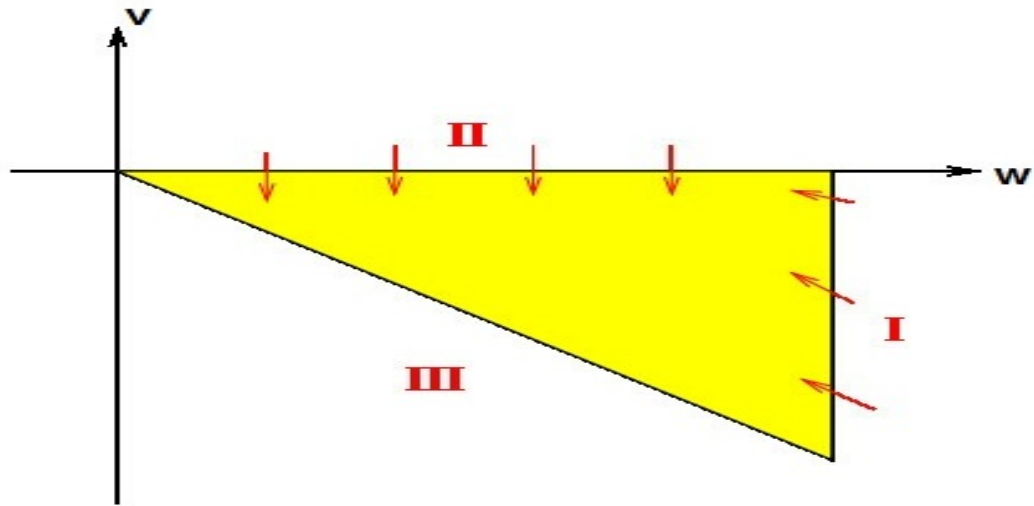
Le discriminant :  $\Delta = c^2 + 4 > 0$

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} > 0.$$

Donc ,  $(1,0)$  est un point selle. On cherche une trajectoire hétérocline de (3.4) reliant le point d'équilibre  $(W, V) = (1, 0)$  (point selle) au point d'équilibre  $(W, V) = (0, 0)$  (noeud stable).

supposons que  $c \geq 2$  , et introduisons une région triangulaire dans le plan de phase de  $(W, V)$

de la manière suivante :



Les trois côtés sont définis comme suit :

(I)  $W = 1$  et  $V < 0$

(II)  $V = 0$  et  $0 < W < 1$

(III)  $V = -\alpha W$  et  $0 < W < 1$

Vérifions maintenant comment le champ de vecteurs se comporte sur les côtés :

(I) : on a

$$\begin{cases} W' = V < 0 \\ V' = -cV > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

i.e. le champ entre dans la région triangulaire.

(II) : on a

$$\begin{cases} W' = 0 \\ V' = -W(1 - W) < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

i.e. le champ entre dans la région triangulaire.

(III) : Considérons le produit scalaire entre le champ de vecteurs et la normale :

$$\begin{pmatrix} V \\ -cV - W(1 - W) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha V - cV - W(1 - W) \quad (3.7)$$

$$= -\alpha^2 W + c\alpha W - W(1 - W) \quad (3.8)$$

$$= -W(\alpha^2 - c\alpha + 1 - W). \quad (3.9)$$

Nous voulons que le champ reste dans la région triangulaire i.e.  $\alpha^2 - c\alpha + 1 - W < 0$ .

D'après l'hypothèse on a :  $0 < W < 1$ , alors

$$\alpha^2 - c\alpha + 1 - W < \alpha^2 - c\alpha + 1$$

Donc, il suffit de choisir un  $\alpha$  satisfaisant :  $\alpha^2 - c\alpha + 1 \leq 0$

le discriminant :  $\Delta = c^2 - 4$ .

Pour  $c > 2$  il existe un  $\alpha$  tel que :  $\alpha^2 - c\alpha + 1 \leq 0$ .

En appliquant le critère de Bendixson, on trouve que :

$$\frac{\partial V}{\partial W} + \frac{\partial[-cV - W(1 - W)]}{\partial V} = -c \neq 0. \quad (3.10)$$

Donc, la seule possibilité est que les trajectoires qui sortent de (1,0) vont aller vers (0,0).

Ce qui correspond à une orbite hétérocline.

**Remarque 3.1.** Pour les équations paraboliques linéaires comme l'équation de diffusion standard, il n'y a pas des solutions de type onde progressive pour cette raison il est nécessaire

d'ajouter un terme non linéaire ; par exemple les équations de réaction-diffusion considérées peuvent présenter de telles solutions. Bien sûr leur forme dépend du terme supplémentaire  $F(U)$ .

Maintenant, on va montrer que la vitesse de l'onde dépend de la condition initiale à l'infini, comme  $U$  est très "petite" on peut négliger le terme  $U^2$ . Donc, l'équation de Fisher devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U.$$

Nous utilisons une condition initiale qui se comporte comme

$$U(x, 0) \sim Ae^{-ax} \quad \text{quand } x \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

où  $a$ ,  $A$  sont des constantes positives. Nous cherchons une solution de type onde progressive pour l'équation linéarisée de la forme suivante :

$$U(x, t) = Ae^{-a(x-ct)}.$$

On la remplace dans l'équation linéaire, on obtient :

$$caAe^{-a(x-ct)} = a^2Ae^{-a(x-ct)} + Ae^{-a(x-ct)}.$$

Ce qui donne une relation entre  $c$  et  $a$  :

$$ca = a^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad c = a + \frac{1}{a}. \quad (3.12)$$

Si  $c$  est considérée comme une fonction de  $a$ , alors pour  $a = 1$  on trouve que  $c_{min} = 2$  (le minimum de cette fonction) ; pour tous les autres  $a > 0$  on a  $c > 2$ .

En effet, la vitesse asymptotique de l'onde pour  $0 < a \leq 1$  est  $c = a + \frac{1}{a}$ .

Mais pour  $a > 1$  on a  $e^{-ax} < e^{-x}$  (pour  $x$  positif), et donc

$$U(x, t) = Ae^{-a(x-ct)} < Ae^{-(x-ct)}$$

$Ae^{-(x-ct)}$  a comme vitesse d'onde  $c = 2$ , donc les fonctions ci-dessous ne peuvent pas se propager plus vite que la "limite supérieure". Deux cas doivent être distingués :

- $0 < a \leq 1 \Rightarrow c = a + \frac{1}{a}$
- $a \geq 1 \Rightarrow c = 2$ .

Ensuite, on va essayer de déterminer le profil de la solution de type onde progressive.

Soit  $s = z/c$ ,  $\varepsilon = 1/c^2$  ; alors la système (3.3) devient :

$$\varepsilon W'' + cW' + W(1 - W) = 0, \text{ avec } W(-\infty) = 1, \quad W(+\infty) = 0. \quad (3.13)$$

Nous cherchons une solution de (3.13) comme une série de perturbation régulière en  $\varepsilon$ , c'est à dire :  $W(s, \varepsilon) = W_0(s) + \varepsilon W_1(s) + \dots$

On la remplace dans (3.13) , on obtient par identification :

$$\varepsilon^0 : W_0' = -W_0(1 - W_0)$$

$$\varepsilon^1 : W_1' + (1 - 2W_0)W_1 = -W_0''.$$

Puisque l'équation (3.13) et la solution de type onde progressive sont invariants par translation



en  $s$ , alors on peut choisir  $s = 0$  comme un point où  $W = 1/2$  pour tous  $\varepsilon$ , c'est à dire :

$$W_0(-\infty) = 1, \quad W_0(+\infty) = 1, \quad W_0(0) = \frac{1}{2}$$

$$W_i(\pm\infty) = 0, \quad W_i(0) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

Par conséquent, nous pouvons résoudre les deux équations précédentes associées à  $W_0$  et  $W_1$  :

$$W_0(s) = \frac{1}{1 + e^s}$$

$$W_1(s) = \frac{e^s}{(1 + e^s)^2} \ln \left( \frac{4e^s}{(1 + e^s)^2} \right)$$

et en revenant à la variable originale  $z$  on obtient :

$$W(z, \varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{z/c}} + \frac{1}{c^2} \frac{e^{z/c}}{(1 + e^{z/c})^2} \ln \left( \frac{4e^{z/c}}{(1 + e^{z/c})^2} \right) + O(c^{-4}).$$

**Remarque 3.2.** La vitesse de propagation de la solution de type onde progressive pour l'équation de Fisher (voir (3.12) avec (3.11)) dépend de la condition initiale quand  $x$  tend vers l'infini. ceci implique que la solution est instable à une perturbation dans un champ très loin.

Maintenant, on va montrer que la solution de type onde progressive pour l'équation de Fisher est stable.

Soit  $U(x, t) = W(z, t)$  où  $z = x - ct$ ; alors l'équation (3.2) devient :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W(1 - W) + c \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}. \quad (3.14)$$

Soit  $c \geq c_{min} = 2$ , on suppose qu'il existe une solution de type onde progressive de la forme :

$$W(z, t) = W_c(z).$$

Pour étudier la stabilité, on va introduire une petite perturbation  $V(z, t)$  à  $W_c(z)$  :

$$W(z, t) = W_c(z) + V(z, t). \quad (3.15)$$

Pour cette perturbation, on suppose qu'elle est nulle en dehors d'un intervalle fini  $L$ , c'est à dire

$$V(z, t) = 0 \text{ pour } |z| \geq L.$$

Remplaçons (3.15) dans (3.14), on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (1 - 2W_c(z))V(z, t) - V^2(z, t) + c \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Comme  $V(z, t)$  est une perturbation, alors on peut négliger le terme  $V^2$ , i.e.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (1 - 2W_c(z))V(z, t) + c \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (3.16)$$

Cherchons une solution de (3.16) de la forme suivante :

$$V(z, t) = g(z)e^{-\lambda t}.$$

On la remplace dans (3.16) on obtient :

$$g'' + cg' + (\lambda + 1 - 2W_c(z))g = 0 \quad (3.17)$$

comme idée, on va utiliser la transformation de Liouville-Green, i.e.

$$g(z) = h(z)e^{-cz/2}.$$

Remplaçons cette transformation dans (3.17) on aura :

$$h'' + h(\lambda - q(z)) = 0, \quad h(\pm L) = 0 \quad (3.18)$$

où

$$q(z) = 2W_c(z) + \frac{c^2}{4} - 1 \geq 2W_c(z) > 0.$$

Multiplions l'équation (3.18) par  $h(z)$  et intégrons par rapport à  $z$  :

$$\int_{-L}^{+L} \left( h \frac{d^2 h}{dz^2} - qh^2 \right) dz + \lambda \int_{-L}^{+L} h^2 dz = 0.$$

L'intégration par parties, nous donne :

$$\int_{-L}^{+L} h \frac{d^2 h}{dz^2} dz = \underbrace{[h(z)h'(z)]_{-L}^{+L}}_{=0} - \int_{-L}^{+L} (h'(z))^2 dz$$

Ainsi

$$\lambda = \frac{\int_{-L}^{+L} ((h'(z))^2 + qh^2) dz}{\int_{-L}^{+L} h^2 dz} > .0$$

Par conséquent nous obtenons que tous les  $\lambda$  sont positives ,c'est à dire la stabilité asymptotique de la solution du type onde progressive.

**Exemple 3.2.** [1] : Considérons l'équation de type réaction-diffusion suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = F(W) , 0 \leq W \leq 1$$

où  $F$  est une fonction continue différentiable sur  $[0,1]$ , et satisfait les conditions suivantes :

- 1)  $F(W) > 0$  , pour tout  $W \in (0, 1)$
- 2)  $F(0) = F(1) = 0$
- 3)  $F'(0) > 0$  et  $F'(1) < 0$ .

On cherche une solution de la forme :  $W(t, x) = U(x - ct)$  avec  $U(-\infty) = 1$  et  $U(+\infty) = 0$ .

Alors, le système associé à  $U$  est :

$$\begin{cases} U'' + cU' + F(U) = 0 \\ U(-\infty) = 1 , U(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Le système (3.19) est équivalent à :

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = -cV - F(U) \end{cases} \quad (3.20)$$

Les états stationnaires de ce système sont :  $(U_1^*, V_1^*) = (0, 0)$  ,  $(U_2^*, V_2^*) = (1, 0)$ .

Analysons la stabilité de ces états, on suppose que  $c > 0$ , la matrice jacobienne est :

$$J(U^*, V^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F'(U^*) & -c \end{pmatrix}$$

1)  $(U^*, V^*) = (0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F'(0) & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les racines du polynome caractéristique :  $\lambda^2 + c\lambda + F'(0)$ .

Le discriminant :  $\Delta = c^2 - 4F'(0)$ .

• Si  $\Delta > 0$  i.e.  $c > 2\sqrt{F'(0)}$  on a :

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4F'(0)}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4F'(0)}}{2} < 0.$$

Donc,  $(0,0)$  est un noeud stable.

• Si  $\Delta = 0$  i.e.  $c = 2\sqrt{F'(0)}$  on a :  $\lambda = -\sqrt{F'(0)}$ .

Donc,  $(0,0)$  est un noeud dégénéré stable.

• Si  $\Delta < 0$  i.e.  $c < 2\sqrt{F'(0)}$  on a :

$$\lambda_1 = \frac{-c - i\sqrt{4F'(0) - c^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-c + i\sqrt{4F'(0) - c^2}}{2}.$$

Donc,  $(0,0)$  est un foyer stable.

1)  $(U^*, V^*) = (1, 0)$

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F'(1) & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les racines du polynome caractéristique :  $\lambda^2 + c\lambda + F'(1)$ .

Le discriminant :  $\Delta = c^2 - 4F'(1)$ .

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4F'(1)}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4F'(1)}}{2} > 0.$$

Donc ,  $(1,0)$  est un point selle.

supposons que  $c \geq 2\sqrt{F'(0)}$  et considérons une région D définie comme suit :

$D = \{(U, V) / 0 < U < 1 \text{ et } -mF(U) < V < 0\}$  , où m est une constante positive .

Comme F est continue et différentiable , alors il exist une constante k de telle sorte que  $|F'(U)| \leq k$  pour tout  $U \in [0, 1]$ . Nous voulons que le champ de vecteurs reste dans la région D , on pose :

$\phi(U, V) = V + mF(U)$ , alors

$$\begin{aligned} \phi'(U, V) &= V' + mF'(U)U' \\ &= -F(U) - cV + mF'(U)V \\ &= -F(U) + cmF(U) - m^2F'(U)F(U) \\ &\geq -F(U) + cmF(U) - km^2F(U) \\ &= F(U) (-1 + cm - km^2) > 0 \end{aligned}$$

à condition que :  $-1 + cm - km^2 > 0$ , c'est à dire :  $c > 1/m + mk$  .

En particulier si  $k = F'(0)$  et  $m = 1/\sqrt{F'(0)}$  , alors  $\phi'(U, V) > 0$  si  $c > 2\sqrt{F'(0)}$ .

Maintenant , appliquons le critère de Bendixson :

$$\frac{\partial V}{\partial U} + \frac{\partial[-cV - F(U)]}{\partial V} = -c < 0.$$

Donc , la seule possibilité est que les trajectoires qui sortent de  $(1,0)$  vont aller à  $(0,0)$ .

Ce qui correspond à une orbite hétérocline .

# Chapitre 4

## Application à l'épidémiologie

La rage peut infecter tous les animaux à sang chaud, aussi des oiseaux, et également des humains, en touchant leurs système nerveux central. Les vaccins sont disponibles (mais chers) ; mais aucun autre traitement n'est connu.

Les hypothèses du modèle : Il ya deux groupes de renards :

- Renards susceptibles (S), sans diffusion.
- Renards infectés (I), avec diffusion, taux de mortalité constant.
- Renards réfractaires (R) .

Supposons que le taux de transmission de la maladie est proportionnel à leurs densités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial \tau} = -\beta SI \\ \frac{\partial I}{\partial \tau} = \beta SI - \gamma I + D \frac{\partial I^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial R}{\partial \tau} = \gamma I \end{array} \right. \quad (4.1)$$



où  $D$  : est le coefficient de diffusion des renards infectieux. Une épidémie est une onde d'infectés se propageant dans une population de susceptibles (Référence : [1]).

On suppose que :  $S \rightarrow N$  ,  $I \rightarrow 0$  ,  $R \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ .

On pose :

$$\bar{U} = \frac{S}{N} , \bar{V} = \frac{I}{N} , \bar{W} = \frac{R}{N} , t = \beta N \tau , x = \xi \sqrt{\frac{\beta N}{D}}$$

On obtient :

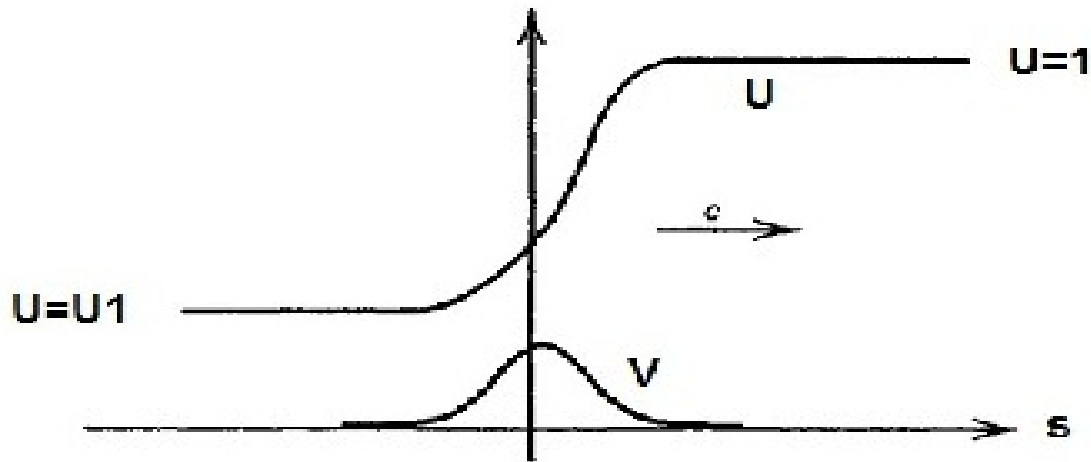
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\bar{U} \cdot \bar{V} \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \bar{U} \cdot \bar{V} - \frac{1}{R_0} \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = \frac{1}{R_0} \bar{V} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où  $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$  , le taux de reproduction de base. c'est à dire : le nombre moyen de nouveaux cas d'infection , engendrés par un individu infectieux (au court de sa période d'infectiosité) , dans une population avec  $(S, I, R) = (N, 0, 0)$ .

Nous cherchons une solution de type onde progressive , c'est à dire de la forme :

$$\bar{U}(x, t) = U(s) = U(x - ct) , \bar{V}(x, t) = V(s) = V(x - ct) , \bar{W}(x, t) = W(s) = W(x - ct)$$

avec :  $U(-\infty) = U_1$  ,  $U(+\infty) = 1$  ,  $V(\pm\infty) = 0$  ,  $W(-\infty) = W_1$  ,  $W(+\infty) = 0$  .



Le système (4.2) devient :

$$\begin{cases} cU' = UV \\ cV' = -UV + \frac{1}{R_0}V - V'' \\ cW' = -\frac{1}{R_0}V \end{cases} \quad (4.3)$$

Divisons les deux dernières équations du système (4.3) par la première , on aura :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dU} = -1 + \frac{1}{R_0U} - \frac{1}{c} \frac{d(V')}{dU} \\ \frac{dW}{dU} = -\frac{1}{R_0U} \end{cases} \quad (4.4)$$

Après l'intégration des deux équations , on obtient :

$$\begin{cases} V = -U + \frac{\log U}{R_0} - \frac{1}{c}V' + A \\ W = -\frac{\log U}{R_0} + B \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration, on suppose que  $V'(\pm\infty) = 0$ .

Ensuite, en appliquant les conditions précédentes (quand  $s \rightarrow \pm\infty$ ), on trouve que :

$A = 1$  ,  $B = 0$ , et par conséquent le système (4.5) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} U' = \frac{1}{c}UV \\ V' = c(-U - W(U) + 1 - V) \\ W = W(U) = -\frac{\log U}{R_0} \end{cases} \quad (4.6)$$

Maintenant , en utilisant la condition quand  $s \rightarrow +\infty$  on obtient :

$$U_1 + W_1 = 1 \text{ avec } 1 - W_1 = \exp(-R_0 W_1)$$

Pour cette dernière équation, on remarque que si  $R_0 < 1$  (c'est à dire on n'a pas d'épidémie)

alors la seule solution est  $W_1 = 0$ , par contre si  $R_0 > 1$  alors il ya une autre solution satisfaisant

$$0 < W_1 < 1 \text{ et } R_0(1 - W_1) = R_0 U_1 < 1 .$$

Prenons  $R_0 > 1$ , alors les seuls points d'équilibre du système (4.6) sont :  $(U_1, 0)$  et  $(1, 0)$  .

D'abord, on commence par étudier la stabilité de ces états, la matrice jacobienne associé au

système (4.6) est donnée par :

$$J(U^*, V^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}V^* & \frac{1}{c}U^* \\ c(-1 + \frac{1}{R_0 U^*}) & -c \end{pmatrix}$$

$$1)(U^*, V^*) = (1, 0)$$

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ c(-1 + \frac{1}{R_0}) & -c \end{pmatrix}$$

La trace  $\text{tr } J(1, 0) = -c < 0$ , le déterminant  $\det J(1, 0) = (R_0 - 1)/R_0 > 0$

et le discriminant  $\Delta = c^2 - 4(R_0 - 1)/R_0$ .

-si  $\Delta > 0$  c'est à dire  $c > 2\sqrt{(R_0 - 1)/R_0}$ , alors  $(1, 0)$  est un noeud stable.

-si  $\Delta = 0$  c'est à dire  $c = 2\sqrt{(R_0 - 1)/R_0}$ , alors  $(1, 0)$  est un noeud dégénéré stable.

-si  $\Delta < 0$  c'est à dire  $c < 2\sqrt{(R_0 - 1)/R_0}$ , alors  $(1, 0)$  est un foyer stable.

$$2)(U^*, V^*) = (U_1, 0)$$

$$J(U_1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}U_1 \\ c(-1 + \frac{1}{R_0U_1}) & -c \end{pmatrix}$$

La trace  $\text{tr } J(U_1, 0) = -c < 0$ , le déterminant  $\det J(U_1, 0) = (R_0U_1 - 1)/R_0 < 0$

et le discriminant  $\Delta = c^2 - 4(R_0U_1 - 1)/R_0 > 0$ .

Donc,  $(U_1, 0)$  est un point selle.

Ensuite, on cherche à démontrer l'existence d'une connection hétérocline entre les deux points d'équilibre  $(1, 0)$  et  $(U_1, 0)$ . Supposons que  $c \geq 2\sqrt{R_0 - 1}$  et considérons une région  $D$  définie de la manière suivante :  $D = \{(U, V) / U_1 < U < 1 \text{ et } 0 < V < \alpha(1 - U - W(U))\}$ , avec  $\alpha > 0$ .

Par la suite, nous démontrons que  $D$  est positivement invariante par le flot de (4.6).

posons :  $\Psi(U, V) = V - \alpha H(U)$  où  $H(U) = 1 - U - W(U)$ .

On remarque que :  $H(U) > 0$  pour tout  $U \in (U_1, 1)$  .

$$\begin{aligned}
\Psi'(U, V) &= V' - \alpha U' H'(U) \\
&= c(H(U) - V) - \alpha \frac{UV}{c} \left(1 - \frac{1}{R_0 U}\right) \\
&= c(H(U) - \alpha H(U)) - \frac{UH(U)}{c} \left(1 - \frac{1}{R_0 U}\right) \alpha^2 \\
&= H(U) \left(c - c\alpha + \frac{U}{c} \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{c R_0}\right) \\
&\leq H(U) \left(c - c\alpha + \frac{(R_0 - 1)}{c R_0} \alpha^2\right)
\end{aligned}$$

Donc, il suffit de choisir un  $\alpha$  tel que :  $c - c\alpha + \frac{(R_0 - 1)}{c R_0} \alpha^2 \leq 0$

le discriminant :  $\Delta = c^2 - 4 \frac{(R_0 - 1)}{R_0}$ .

Pour  $c \geq 2\sqrt{\frac{R_0 - 1}{R_0}}$  il existe un  $\alpha$  satisfaisant :  $c - c\alpha + \frac{(R_0 - 1)}{c R_0} \alpha^2 \leq 0$

Finalement, en appliquant le critère de Dulac :

Soit  $B(U, V) = 1/UV$  , alors :

$$\frac{\partial (B(U, V)UV/c)}{\partial U} + \frac{\partial [cB(U, V)(-U - W(U) + 1 - V)]}{\partial V} = \frac{-cH(U)}{UV^2} < 0$$

Donc , la seule possibilité est que les trajectoires qui sortent de  $(U_1, 0)$  vont aller à  $(1, 0)$ . Ce

qui correspond à une orbite hétérocline .

# Bibliographie

- [1] N. Britton, *Essential mathematical biology* . Springer, 2003.
- [2] C. Kuttler, *Reaction-Diffusion equations with applications* . Universität München, 2011.
- [3] S. Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Mathematica* . Springer, 2007.
- [4] J.D. Murray, *Mathematical Biology I : An Introduction* . Springer, 2002.
- [5] C.V. Pao, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations* . Springer, 1993.
- [6] B. Perthame, *Growth, reaction, movement and diffusion from biology* . Paris 6, 2012.
- [7] V. Volpert, *Dynamique des systèmes non linéaires* . Ecole Centrale de Lyon, 2011.