République Algérienne Démocratique et Populaire
Minister de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen
Faculté de Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de doctorat en mathématique

Spécialité : Géométrie différentielle

Présenté par : HASNI Abdelbasset

Intitulé :

Les géométries de Thurston et la pseudo symétrie d'après R. Deszcz

Soutenue le : 17 Juin 2014

Jury :

DIB Hacen	Prof. à l'université Abou Bakr Belkaid Tlemcen	Président
BENALILI Mohamed	Prof. à l'université Abou Bakr Belkaid Tlemcen	Examinateur
BOILEAU Michel	Prof. à l'université d'Aix-Marseille, Marseille, FRANCE	Examinateur
DJAA Mustapha	Prof. à l'université de Relizane	Examinateur
VRANCKEN Luc	Prof. à l'université de Valenciennes, FRANCE	Examinateur
BELKHELFA Mohamed	Prof. à l'université de Mascara	Directeur de thèse

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse le professeur BELKHELFA Mohamed pour son soutien inconditionnel, sa patience et ses réflexions pertinentes. J'adresse des remerciements tous particuliers aux deux professeurs DIB Hacen et BENALILI Mohamed pour avoir accepter d'être des membres du jury de cette thèse et pour tous les efforts et la patience manifestés de leur part durant les années de mon magister à l'université de Tlemcen. Je remercie très fortement monsieur VRANCKEN Luc pour avoir accepter d'être un examinateur de cette thèse et pour sa disponibilité durant mes visites à l'université de Valenciennes. Je remercie également le professeur BOILEAU Michel pour avoir accepter de faire partie du jury en qualité d'examinateur et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

je tiens aussi à remercier le professeur Leopold Verstraelen, pour ses discussions et suggestions, le laboratoire LAMAV de l'université de Valenciennes(en particulier le groupe Géométrie et analyse globale), pour leurs accueil et disponibilité durant toutes mes visites de recherche pour la préparation de cette thèse, le laboratoire L.P.Q.3M de l'université de Mascara(dont je suis membre), pour avoir assurer le climat et l'environnement favorables aux activités de la recherche scientifique, l'université de Mascara(dont je suis enseignant), pour la qualité humaine de l'ensemble de son personnel et le financement de mes visites de recherches, la Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique, pour les projets PNR(dont je suis membre) mis au point afin de promouvoir la contribution des chercheurs algériens.

Mes vifs remerciements sont également exprimés à l'égard des responsables, personnel et enseignants de la faculté des sciences de l'université de Tlemcen.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont accompagné durant ce voyage appelé la vie, je pense très particulièrement à mes chers parents.

Introduction

Une géométrie modèle de Thurston (G, X) est une variété X connexe et simplement connexe avec un groupe de Lie G des difféomorphismes de X qui agit transitivement sur X avec stabilisateur compact tel que G maximal [1] et il existe une variété M de volume fini modelée [2] par (G, X).

Les géométries modèles de Thurston de dimension trois sont classifiées par W. M. Thurston (voir [12], [45] et [49]) ; cette classification compte huit géométries, à savoir, E^3, S^3, H^3, $H^2 \times E$, $S^2 \times E$, $\widetilde{Sl_2(\mathbb{R})}$, Nil^3(le groupe de Heisenberg de dimension 3) et Sol^3.

R. O. Filipkiewicz a classifié les géométries de Thurston de dimension quatre(voir [22]). Dans cette classification on distingue deux catégories d'espaces, celles qui sont symétriques (E^4, S^4, H^4, $P^2(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$ $S^2 \times S^2$, $S^2 \times E^2$, $S^2 \times H^2$, $E^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $S^3 \times E^1$ et $H^3 \times E^1$) et celles qui ne sont pas symétriques (Nil^4, $Sol^4_{m,n}$, Sol^4_0, Sol^4_1, F^4, $\widetilde{Sl_2(\mathbb{R})} \times E^1$ et $Nil^3 \times E^1$).

C. T. C. Wall a étudié les structures complexes sur les géométries de Thurston de dimension quatre (voir [51] et [52]) ; il a montré que les géométries de Thurston admettant une structure complexe, compatible avec le groupe de difféomorphismes G, sont : $S^2 \times S^2$, $S^2 \times \mathbb{R}^2$, $S^2 \times H^2$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $P^2(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$, $S^3 \times \mathbb{R}$, F^4, $Nil^3 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{Sl_2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, Sol^4_0 et Sol^4_1 ; il a prouvé aussi l'unicité, sauf pour Sol^4_1, qui admet deux structures complexes.

S. Maier a distingué les géométries de Thurston de dimension trois et quatre qui sont conformément plats (voir [36]) ; il a montré que ses géométries ne sont autres que : E^3, H^3, S^3, $S^2 \times E^1$, $H^2 \times E^1$, E^4, H^4, S^4, $S^3 \times E^1$, $H^3 \times E^1$ et $S^2 \times H^2$.

Une variété Riemannienne M est dite localement symétrique si toutes ses réflexions γ_p [3] sont des isométries locales. E. Cartan a montré qu'une variété

1. Maximal dans le sens où tout groupe contenant G et agissant transitivement sur X avec stabilisateur compact n'est autre que G

2. Il existe un sous groupe discret Γ de G tel que $M \cong \Gamma \setminus (G/G_x)$

3. γ_p inverse les géodésiques passant par $p \in M$

Riemannienne est localement symétrique si son tenseur de courbure de Riemann R est parallèle($\nabla R = 0$). Une variété Riemannienne M est semi-symétrique si $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M),\ R(X,Y).R = 0$ où $R(X,Y)$ agit comme dérivation. Chaque variété Riemannienne localement symétrique est semi-symétrique. Z.I. Szabó a classifié les variétés Riemanniennes semi-symétriques(voir [46] et [47]). Une variété Riemannienne M, de dimension $n \geqslant 3$, est dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, s'il existe une fonction $L_R : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $R(X,Y).R = L_R(X \wedge Y).R$ avec $(X \wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$ et $U_R = \{x \in M \mid R - \frac{\tau}{n(n-1)}G \neq 0 \text{ en } x\}$ où τ est la courbure scalaire et $G(X,Y,Z,W) = g((Z \wedge W)Y, X)$. Il est clair que toute variété semi-symétrique est pseudo symétrique($L_R = 0$).

M. Belkhelfa, R. Deszcz et L. Verstraelen ont montré que chaque géométrie de Thurston de dimension trois est pseudo symétrique.

L'objectif de cette thèse est d'étudier la pseudo symétrie des géométries de Thurston de dimension quatre.

Ce travail est réparti de la façon suivante : le premier chapitre est rappel des propriétés et des définitions de bases des variétés Riemanniennes, notamment les différents type de tenseurs ; la notion de la pseudo symétrie, qui est une généralisation de la notion de symétrie, est abordée au deuxième chapitre, qui contient aussi les deux notions de la Ricci pseudo symétrie et de la Weyl pseudo symétrie et leurs liens avec la pseudo symétrie ; le troisième chapitre traite de façon détaillée la notion de la pseudo symétrie holomorphe des variétés Kähleriennes ; quant au quatrième chapitre il fait l'objet des constructions des métriques Riemanniennes des géométries de Thurston de dimension quatre ; le contenu de ce chapitre est essentiel pour aboutir au résultats de notre travail énoncés au dernier chapitre, à savoir, l'étude de la pseudo symétrie et de la pseudo symétrie holomorphe de géométries de Thurston de dimension quatre.

Chapitre 1

Les variétés Riemanniennes

Dans ce chapitre on rappel quelques propriétés et définitions des variétés Riemanniennes nécessaire par la suite. Les références principalement utilisées sont [9], [10] et [30]. Notons que tout les variétés différentiables serons considérées de classe C^∞.

1.1 Espace Tangent

1.1.1 Vecteur tangent

Définition 1.1.1. *Soit M une variété différentiable et $x \in M$. Une application $A_x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ est appelée une dérivation en x, si elle satisfait les règles suivantes : pour tous $f, g \in C^\infty(M)$.*

1. $A_x(f+g) = A_x(f) + A_x(g)$.
2. $A_x(f.g) = A_x(f).g(x) + f(x).A_x(g)$.

L'ensemble de toutes les dérivations en x , s'appelle l'espace tangent de M en x , il est noté T_xM. Par définition un vecteur tangent de M en x est un élément de T_xM.

Remarque 1.1.1.

1. *T_xM est un espace vectoriel de dimension n .*
2. *Soit $\{(U, \varphi)\}$ une carte locale au point $x \in M$ et $\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n)$ les coordonnées locales au voisinage de x. Les n dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ forme une base de T_xM.*
3. *$TM = \bigcup\limits_{x \in M} T_xM$ est appelé le fibré tangent de M.*

4. *On appelle* T_x^*M *l'espace cotangent à* M *en* x. *On sait que localement* $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$ *est une base de* T_xM. *On note par* $(dx^i|_x)$ *sa base dual , nous avons* $\langle dx^i|_x; \frac{\partial}{\partial x^i}|_x\rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ *tel que* δ_i^j *est le symbole de Kröneker défini par* $\begin{cases} \delta_i^j = 1 & si\ i = j \\ \delta_i^j = 0 & si\ i \neq j \end{cases}$.
5. $T^*M = \bigcup\limits_{x\in M} T_x^*M$ *est appelé le fibré cotangent à* M.

1.1.2 Champ de vecteurs

Définition 1.1.2. *Soit* M *une variété différentiable.*

- $\pi : TM \to M$ *la projection de* TM *sur* M *définie par* $\pi(x, X) = x$ *est une application surjective et différentiable.*
- *Une section de* TM *est une application* $X : M \to TM$ *telle que* $\pi \circ X = id_M$.
- *Une telle section de* TM *est appelée champ de vecteurs sur* M. *L'ensemble des champs de vecteurs sur* M *est noté par* $\mathfrak{X}(M)$.

Dans tout qui suit on considère la convention d'Einstein (pour les sommes sans signe de sommation $\sum$).

Définition 1.1.3. *Soit* M *une variété différentiable.*
Le crochet de Lie noté $[,]$ *est définie par* $[X, Y] = XY - YX$ *pour tous* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *et vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $[,]$ *est bilinéaire et antisymétrique.*
2. $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0$ *pour* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

1.2 Tenseurs

1.2.1 Tenseur sur une variété

Définition 1.2.1.

- *Pour tout* $x \in M$ *nous définissons l'espace vectoriel*

$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM \otimes T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM}_{pfois} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes T_x^*M \otimes \cdots \otimes T_x^*M}_{qfois}$$

- *Un élément* $T \in T_x^{(p,q)}M$ *est un tenseur de type* (p,q) *au-dessus de* x*. Dans une base associe à un système de coordonnées,* (x^i) *au voisinage de* x*, il s'écrit comme suit*

  $$T|_x = T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(x)\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}(x)\otimes\cdots\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}(x)\otimes dx^{j_1}|_x\otimes dx^{j_2}|_x\otimes\cdots dx^{j_q}|_x$$

  où, $T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}(x)$ *sont des nombres réels.*
- *On note* $T^{(p,q)}M = \bigcup_{x\in M} T_x^{(p,q)}M$*.*

Définition 1.2.2. *Un champ de tenseur de type* (p,q) *(ou un tenseur sur* M*) est une section de* $T^{(p,q)}M$*. L'ensemble des champs de tenseur de type* (p,q) *est noté par* $\mathfrak{T}^{(p,q)}M$*.*

Exemple 1.2.1.

- *Une fonction sur une variété* M *est un tenseur de type* $(0,0)$
- *Un champ de vecteurs* X *est un tenseur de type* $(1,0)$*.*
- *Une* 1*-forme différentielle* ω *sur une variété* M *est un tenseur de type* $(0,1)$

1.2.2 Métriques Riemanniennes

Définition 1.2.3. *Soit* M *une variété différentiable. Une métrique Riemannienne* g *sur* M *est un tenseur de type* $(0,2)$ *; tel que pour tout* $X \in M$ *l'application* $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ *est une application bilinéaire , symétrique , définie positive.*

M muni la métrique g est appelée variété Riemannienne et noté (M,g) *(ou tout simplement* M *s'il a y pas d'ambiguïté).*

Remarque 1.2.1.
Dans un système de coordonnées locales $(x^1,\ldots,x^n)$*. Les composantes de* g *sont*

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$$

Exemple 1.2.2.

1) $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *est une variété Riemannienne ; où* g_0 *est le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$ *(i.e*
   $g_0(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_i^j$*).*

2) $D^{\mathrm{n}} = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \| < 1\}$ *munie de la métrique hyperbolique g définie par* $g(X,Y) = \frac{4}{(1-\|x\|)^2} g_0(X,Y)$, $X, Y \in T_x\mathbb{R}^n$, $x \in D^{\mathrm{n}}$ *est une variété Riemannienne .*

1.3 Connexion Riemannienne

1.3.1 Connexion linéaire

Définition 1.3.1. *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

telle que pour tous $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, g \in C^\infty(M)$
1) $\nabla_{fX+gX'}(Y) = f\nabla_X(Y) + g\nabla_{X'}(Y)$.
2) $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Y')$.
3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$.

On dit que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante de Y en direction de X.

Définition 1.3.2. *Soit (U, φ) une carte sur une variété différentiable M de dimension n et $\{x^i\}$ les coordonnées associées pour les quelles on note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Les symboles de Christoffel d'une connexion ∇ relativement aux coordonnées $\{x^i\}$ sont les n^3 fonctions $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$ définies par*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Lemme 1.3.1. *Localement, les symboles de Christoffel déterminent entièrement la connexion ∇. Plus précisément, pour $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j \partial_i$*

$$\nabla_X Y = \big(XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\big)\partial_k$$

Preuve . On développe l'expression,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X(Y^j \partial_j) \\
&= Y^j \nabla_X \partial_j + X(Y^j)\partial_j \\
&= Y^j X^i \nabla_{\partial_i}\partial_j + X(Y^j)\partial_j \\
&= Y^j X^i \Gamma_{ij}^k \partial_k + X(Y^k)\partial_k \\
&= \big(XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\big)\partial_k
\end{aligned}$$

■

Exemple 1.3.1. *(Le cas de $\mathbb{R}^n$).*
La connexion standard $\bar{\nabla}$ de $\mathbb{R}^n$ est définie pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ par

$$\bar{\nabla}_X Y := X(Y^j)\partial_j$$

Les composantes du champ résultant sont,

$$(\bar{\nabla}_X Y)^j = X(Y^j) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} = \langle X, gradY^j\rangle = \frac{\partial Y^j}{\partial \overrightarrow{X}}$$

1.3.2 Torsion d'une connexion

Définition 1.3.3. *La torsion d'une connexion est le tenseur de type $(1,2)$ défini par l'expression*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

$T(X,Y)$ est un champ de vecteurs. De la définition, on remarque que $T(X,Y) = -T(Y,X)$ La nullité du tenseur de torsion est équivalente à la relation $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ pour tous i, j, k.

Expression locale de la torsion T d'une connexion ∇ :
pour $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&- Y^j X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= X^i Y^j (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Définition 1.3.4. *Une connexion linéaire ∇ sur une variété M est dite sans torsion si $T = 0$.*

Définition 1.3.5. *Une connexion linéaire ∇ sur une variété M est dite plate si $\nabla = 0$.*

1.3.3 La dérivée covariante d'un tenseur

Définition 1.3.6. *Soit T un tenseur de type $(0,r)$ sur une variété Riemannienne M. La dérivée covariante ∇T du tenseur T est un tenseur de type*

$(0, r+1)$ *défini par*

$$\nabla_X T(Y_1, ..., Y_r) = X(T(Y_1, ..., Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_r)$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.
Pour les composantes $\nabla_m T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ *on a,*

$$\begin{aligned}
\nabla_m T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} &= \partial_m T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \\
&+ \Gamma^{i_1}_{ms} T^{s i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} + \Gamma^{i_2}_{ms} T^{i_1 s \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} + ... + \Gamma^{i_p}_{ms} T^{i_1 i_2 \cdots s}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \\
&- \Gamma^{s}_{m j_1} T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{s j_2 \cdots j_q} - \Gamma^{s}_{m j_2} T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 s \cdots j_q} - ... - \Gamma^{s}_{m j_q} T^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots s}.
\end{aligned}$$

Si le tenseur T *est de type* $(1, r)$ *la dérivée covariante de* T *est définie par*

$$\nabla_X T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla_X T(Y_1, ..., Y_r) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_r)$$

pour tout $X, Y_1, ..., Y_r \in \mathfrak{X}(M)$.

Exemple 1.3.2.

$$(\nabla_X\, g)(Y_1, Y_2) = Xg(Y_1, Y_2) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2)$$

Définition 1.3.7. *On dit qu'un tenseur* T *de type* $(0, r)$ *(ou* $(1, r)$*) est parallèle (par rapport à* ∇*) si* $\nabla T = 0$ *c'est-à-dire* $\nabla_X T = 0$ *pour tout* $X \in \mathfrak{X}(M)$

1.3.4 Connexion Riemannienne

Définition 1.3.8. *On dit qu'une connexion linéaire sur une variété Riemannienne* (M, g) *est métrique ou Riemannienne si* g *est parallèle c'est-à-dire* $\nabla g = 0$.

Définition 1.3.9. *Soit* M *une variété Riemannienne. Il existe une unique connexion* ∇ *sur le fibré tangent* TM *telle que :*

1. ∇ *est sans torsion.*
2. ∇ *est métrique.*

On appelle cette connexion la connexion de Levi-Civita sur M.

Proposition 1.3.1. *Dans un système de coordonnées locales ; les composantes Γ_{ij}^k de la connexion Levi-Civita sont données par*

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij}\right) \tag{1.3.1}$$

avec (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}).

1.4 Les courbures sur une variété Riemannienne

1.4.1 Courbure Riemannienne

Dans tout qui suit on considère que des variétés Riemanniennes munies de la connexion de Levi-Civita.

Définition 1.4.1. *Le tenseur de courbure de Riemann R d'une variété Riemannienne (M, g) est le tenseur, de type $(1,3)$, défini par*

$$\begin{aligned} \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \qquad R(X,Y)Z &:= [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z \end{aligned}$$

Propriétés 1.4.1. *pour tous* $X, Y, Z, \in \mathfrak{X}(M), et f, g, h \in C^\infty$
- $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.
- $R(fX, gY)hZ = fgh\, R(X,Y)Z$

On peut considérer le tenseur de courbure de Riemann comme un tenseur de type $(0,4)$ avec

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(Z,W)Y, X)$$

1.4.2 La courbure en coordonnées

Soit $p \in M$ et $(x^1, ..., x^n)$ un système de coordonnées locales autour de p (i.e au voisinage de p). Pour tout $X = X^i\partial_i$, $Y = Y^i\partial_i$, $W = W^i\partial_i$ et $Z = Z^i\partial_i$ on a

$$R(X,Y)Z = R_{kij}^l\, X^i Y^j Z^k \partial_l$$

$$R(X,Y,Z,W) = R_{ijkl} X^i Y^j Z^k W^l$$

avec $R_{kij}^l = \partial_i(\Gamma_{jk}^l) - \partial_j(\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^n \left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l\right)$ et $R_{ijkl} = g_{im} R_{jkl}^m$

Proposition 1.4.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne R vérifie les propriétés suivantes :*

1. $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$.
2. $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$.
3. *R vérifie l'identité de Bianchi algébrique*
$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$
4. *R vérifie l'identité de Bianchi différentielle*
$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

1.4.3 la courbure de Ricci et la courbure de Weyl

Définition 1.4.2. *On appelle tenseur de courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M^n, g) le tenseur S de type $(0,2)$ donné par*

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= trace(Z \longmapsto R(Z,X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(X,e_i)e_i,Y) \end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, où (e_i) une base orthonormée.

Le tenseur de courbure de Ricci est symétrique, en effet

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(Y,e_i)e_i,X) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,Y)X,e_i) \\ &= S(Y,X) \end{aligned}$$

Définition 1.4.3. *L'opérateur de Ricci $\widetilde{S}$ d'une variété Riemannienne (M^n, g), est défini par $S(X,Y) = g(X, \widetilde{S}Y)$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*

Définition 1.4.4. *On appelle courbure scalaire τ d'une variété Riemannienne M est définie par $\tau = trace(\widetilde{S})$.*

Remarque 1.4.1. *La courbure scalaire peut être exprimer dans système des coordonnées locales $(x^1, \cdots, x^n)$ en fonctions des composantes du tenseur comme suit*

$$\tau = \sum_{i,j} g^{ij} S_{ij}$$

avec (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) et $S_{i,j} = S(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$

Définition 1.4.5. *Le tenseur de courbure de Weyl, noté C, d'une variété Riemannienne M de dimension n est défini par*

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(X \wedge_g \widetilde{S}Y + \widetilde{S}X \wedge_g Y - \frac{\tau}{n-1} X \wedge_g Y)Z$$

avec $(X \wedge_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$

Le tenseur de courbure de Weyl peut être vu comme un tenseur de type $(0,4)$

$$C(X,Y,Z,W) = g(C(Z,W)Y, X)$$

Définition 1.4.6. *[7] Une variété Riemannienne M est dite conformément plate si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V de x telle que la métrique $e^{2f}g$ est plate sur V ; avec g la métrique Riemannienne de M et f une fonction réelle sur V.*

Une variété Riemannienne M de dimension n est conformément plate si est seulement si :

$(n \geqslant 4)$ Le tenseur de courbure de Weyl est nul ([7] page 60).

$(n = 3)$ Le tenseur $B = S - \frac{\tau}{4} g$ est un tenseur de Codazzi i.e $\nabla_X B(Y,Z) = \nabla_Y B(X,Z)$, pour tout X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ([7] page 435).

Chapitre 2

La pseudo symétrie au sens de Deszcz

Dans ce chapitre on donne la notions de la pseudo symétrie. les références principales de ce chapitre sont : [33], [53] pour la dérivée covariante et le transport parallèle et pour la pseudo symétrie on a reproduit les définitions , propriétés et preuves de [23].

2.1 Dérivée covariante

Soit $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe dans M un champs de vecteurs V sur c est une application de I vers, le fibré tangent de M, TM qui associe à chaque $t \in I$ un vecteurs $V_t \in T_{c(t)}$.

Soit $t \in I$ et $(x^1, \cdots, x^n)$ un système de coordonnées local au point $c(t)$. La dérivée covariante de V (avec $V_t = \sum_{i=1}^n V^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}(c(t))$) le long de c au point t est définie par

$$\frac{DV}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{dV^j}{dt}(t) + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dU^i}{dt}(t) V^j(t) \right) \right] \frac{\partial}{\partial x^k}(c(t))$$

avec $\frac{dc}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n U^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}(t)$ le vecteur tangent à c au point t.

La dérivée covariante est la seule application linéaire sur les champs de vecteurs le long de une courbe c vérifiant :

1. Pour tout fonction réel f sur I

$$\frac{D(fY)}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t)Y(t) + f(t)\frac{DY}{dt}(t)$$

2. S'il existe un voisinage de t_0 tel que le champ de vecteurs Y est la restriction

à c d'un champ de vecteurs X défini sur un voisinage W de $c(t_0)$ alors

$$\frac{DY}{dt}(t_0) = (\nabla_{\dot{c}(t_0)}X)_{c(t_0)} \qquad \text{où} \quad \dot{c}(t_0) = \frac{dc}{dt}(t_0)$$

2.2 Transport parallèle

Définition 2.2.1. *Un champ de vecteurs X le long de c est dite si sa dérivée covariante le long de c est nulle c'est-à-dire $\frac{dX}{dt}(t) = 0$ $\forall t \in I$*

Proposition 2.2.1. *Soit $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe, de classe $\mathcal{C}^1$, dans M et $t_0 \in I$. Pour tout $v \in T_{c(t_0)}M$, il existe un unique champ de vecteurs X le long de c tel que $X(t_0) = v$.*

Définition 2.2.2. *Le transport parallèle de $c(0)$ à $c(t)$ le long d'une courbe c dans M est l'application linéaire P_t de $T_{c(0)}$ vers $T_{(c(t))}$ qui associe à chaque $v \in T_{c(0)}M$ le vecteur $X_v(t)$, où X_v est le champ de vecteurs parallèle le long de c tel que $X_v(0) = v$.*

Proposition 2.2.2. *Le transport parallèle le long de c est une isométrie de $T_{c(0)}$ vers $T_{(c(t))}$. Plus généralement, si X et Y sont des champs de vecteurs le long de c alors*

$$\frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) = g(\frac{D}{dt}X(t), Y(t)) + g(X(t), \frac{D}{dt}Y(t))$$

2.3 Transport parallèle et la courbure de Riemann

Soit (M, g) une variété Riemannienne et $p \in M$ avec un système de coordonnées local $(x^1, \cdots, x^h, \cdots, x^k, \cdots, x^n)$ au voisinage de p. Changeons les noms des deux coordonnées x^h et x^k par x et y respectivement, et fixons les autres coordonnées autour de p (dans un voisinage de p), notons aussi x et y les coordonnées, au point p, x^h et x^k respectivement. Notons $\vec{x} = \frac{\partial}{\partial x^h}(p) \in T_pM$ et $\vec{y} = \frac{\partial}{\partial x^k}(p) \in T_pM$.

Construisant le parallélogramme $\mathcal{P}$ de sommet p, dont les arrêtes sont obtenues en varions x et y, l'un après l'autre, par une quantité infinitésimale Δx et Δy respectivement. Les vecteurs tangents aux cotés issus de p sont $\vec{x}$ et $\vec{y}$ (Voir Figure 2.1).

En 1918 J. Schouten([44]) à donné l'interprétation géométrique du tenseur de courbure de Riemann R en utilisant le transport parallèle (voir Figure 2.2).

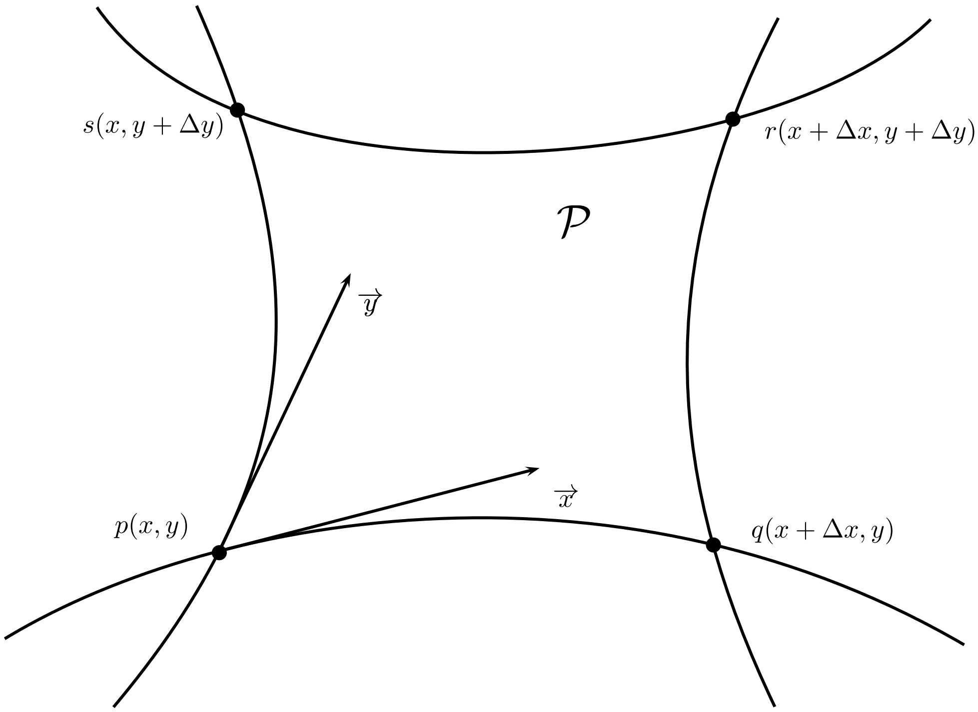

Figure 2.1 – Parallélogramme

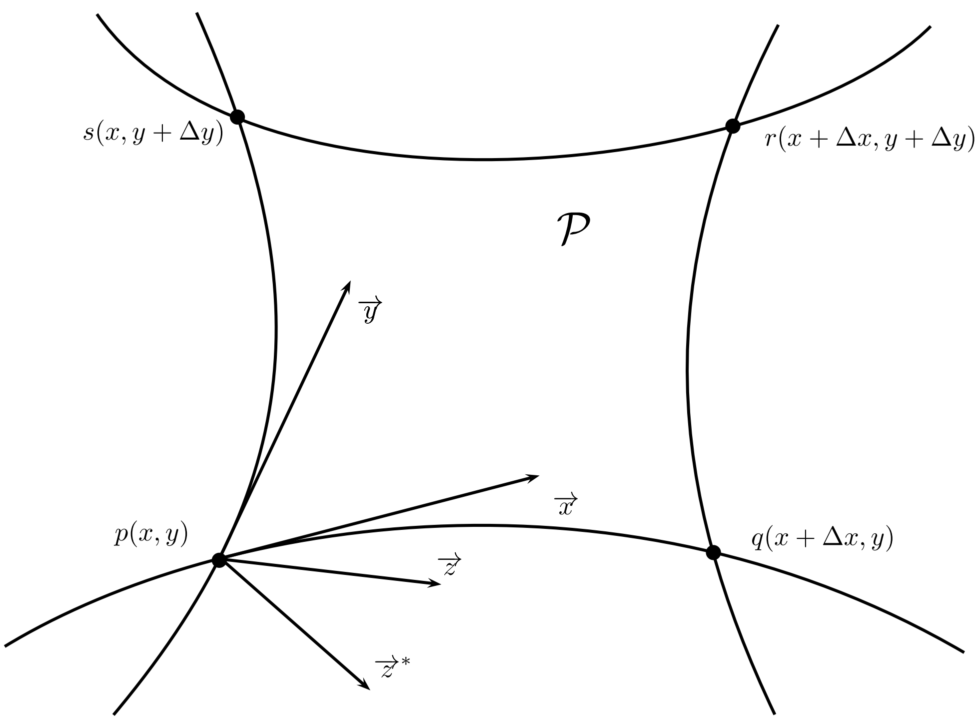

Figure 2.2 – Transport parallèle le long de $\mathcal{P}$

Soit $\vec{z} \in T_pM$, le transport parallèle de $\vec{z}$ le long du parallélogramme $\mathcal{P}$ nous donne $\vec{z^*}$ (Schouten, 1918) avec

$$\vec{z^*} = \vec{z} - (R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z})\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \tag{2.3.1}$$

$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ mesure le changement, en second ordre, du vecteur $\vec{z}$ après son transport parallèle le long du parallélogramme $\mathcal{P}$ de sommet p.

2.4 L'endomorphisme métrique

Définition 2.4.1. *L'endomorphisme métrique $X \wedge Y : TM \to TM$ associe aux deux champs de vecteurs X et Y sur une variété Riemannienne (M, g) est défini par*

$$(X \wedge Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

Supposons que $\vec{x}, \vec{y} \in T_pM$ soient orthogonales et choisissons $\{e_3, \cdots, e_n\}$ tel que $\{\vec{x}, \vec{y}, e_3, \cdots, e_n\}$ soit une base orthonormée de T_pM. Soit $\vec{z} \in T_pM$, on peut exprimer $\vec{z}$ comme suit :

$$\vec{z} = g(\vec{z}, \vec{x})\vec{x} + g(\vec{z}, \vec{y})\vec{x} + \sum_{i=3}^{n} g(\vec{z}, e_i)e_i$$

En effectuant une rotation de la projection de $\vec{z}$ sur le plan $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$, engendré par $\vec{x}$ et $\vec{y}$, d'un angle infinitésimal $\Delta\phi$ sans changer la projection de $\vec{z}$ sur le sous espace vectoriel de T_pM engendré par $\{e_3, \cdots, e_n\}$, on obtient un nouveau vecteur $\vec{\bar{z}}$.

$$\vec{\bar{z}} = \vec{z} - (g(\vec{y}, \vec{z})\vec{x} - g(\vec{x}, \vec{z})\vec{y})\Delta\phi + O^{>1}(\Delta\phi) \tag{2.4.1}$$

Le vecteur $(\vec{x} \wedge \vec{y})\vec{z} = g(\vec{y}, \vec{z})\vec{x} - g(\vec{x}, \vec{z})\vec{y}$ mesure le changement, en premier ordre, du vecteur $\vec{z}$ après une rotation infinitésimale de la projection de $\vec{z}$ sur le plan $\bar{\pi}$ engendré par $\vec{x}$ et $\vec{y}$ au point p. Il est natural de considérer $(\vec{x} \wedge \vec{y})\vec{z}$ comme une normalisateur de $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$.

Définition 2.4.2. *Pour $p \in M$, soit $\pi = \vec{x} \wedge \vec{y}$ le plan engendré par $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tangent à M en p. le nombre réel*

$$k(p, \pi) = \frac{g(R(\vec{x}, \vec{y})\vec{y}, \vec{x})}{g((\vec{x} \wedge \vec{y})\vec{y}, \vec{x})}$$

qui ne dépend que du point p et du plan π est appelé courbure sectionnelle de M en p pour le plan π.

Il est bien connu que le tenseur de courbure est déterminer par la courbure sectionnelle (Cartan). Une variété Riemannienne est dite à courbure sectionnelle constant c si sa courbure sectionnelle $k(p, \pi)$ égale à c pour tout point $p \in M$ et pour tout plan $\pi \subset T_pM$.

Théorème 2.4.1 (de Schur)**.** *Une variété Riemannienne (M, g), de dimension $n > 2$, est à courbure sectionnelle constante si et seulement si sa courbure sectionnelle $k(p, \pi)$ est indépendante du plan $\pi \subset T_pM$ pour tout $p \in M$*

2.5 Le parallélogramme de Levi-Civita

En 1917 Levi-Civita [34] a donné une interprétation géométrique de la courbure sectionnelle d'un plan en un point en terme de la distance de certains géodésique.

Soit $p \in M$ et $\vec{v} \in T_pM$. Déterminons le point q, de la géodésique α passant par p et tangent à $\vec{v}$, tel que q est à une distance infinitésimale A de p. Notons $\vec{w^*} \in T_pM$ le vecteur obtenu par le transport parallèle de $\vec{w}$ de p à q le long de α. Considérons aussi les deux géodésiques, issus de p et q, β_p et β_q qui sont tangentes à $\vec{v}$ et $\vec{v^*}$ respectivement. Fixons $\bar{p} \in \beta_p$ et $\bar{q} \in \beta_q$ à la même distance infinitésimale B de p et q respectivement. Le parallélogramme de sommet p avec les cotés issu de p tangent à $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est complété par la géodésique $\bar{\alpha}$ qui joint $\bar{p}$ et $\bar{q}$. Soit A' la distance géodésique entre $\bar{p}$ et $\bar{q}$ Levi-Civita a prouvé que, en premier ordre d'approximation, la courbure sectionnelle du plan $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$, engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$, peut être exprimer comme suit

$$k(p, \pi) = \frac{A^2 - A'^2}{(ABsin\phi)^2}$$

où ϕ est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$ Pour le cas particulier où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthonormales et $A = B = \varepsilon$ (voir Figure 2.3). La courbure sectionnelle du plan $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$, engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$, est exprimée en terme du carré de Levi-Civita par

$$k(p, \pi) = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}{\varepsilon^4}$$

2.6 Les variétés localement symétriques

Le transport parallèle de deux vecteurs linéairement indépendants le long d'une courbe nous donne à chaque point de cette courbe deux vecteurs linéairement indépendants. Ainsi on peut définir le transport parallèle d'un plan le long

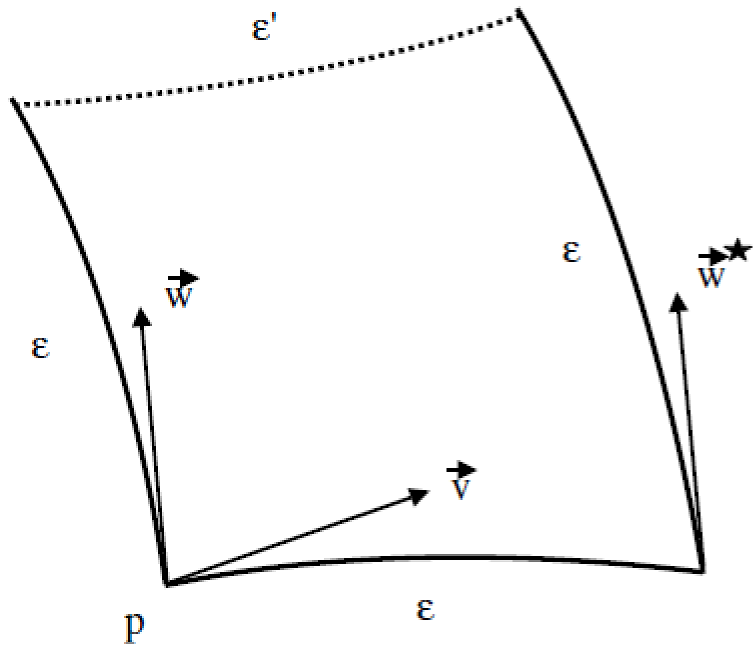

FIGURE 2.3 – Le carré de Levi-Civita

d'une courbe, en fixons une base de plan de départ, et prenons son transport parallèle le plan engendré par les transport parallèle des vecteurs de la base.

Levy [35] a étudié la courbure sectionnelle d'un plan et de son transport parallèle le long des courbes du flot d'un champ de vecteurs X.

Théorème 2.6.1 (Levy). *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbure sectionnelle de tout plan π reste constante le long des courbes du flot d'un champ de vecteurs X quand ce plan π est transporté parallèlement le long des courbes du flot, est que $\nabla_X R = 0$.*

E. Cartan [11] a montré que les variétés Riemanniennes avec un tenseur de Riemann parallèle ($\nabla R = 0$) sont les espaces dite localement symétrique, c'est-à-dire les espaces qui ont la propriété suivante : tout les réflexions γ_p (γ_p inverse les géodésiques passant par p) sont des isométries locales

2.7 Les variétés semi-symétriques

Considérons un parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de sommet $p(x, y)$ et de cotés issus de p tangent à $\vec{x} \in T_pM$ et $\vec{y} \in T_pM$. Soit le plan $\pi \subset T_pM$ tangent à M en p, engendré par les deux vecteurs orthonormales $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Considérons $\vec{v^*}$ et $\vec{w^*}$

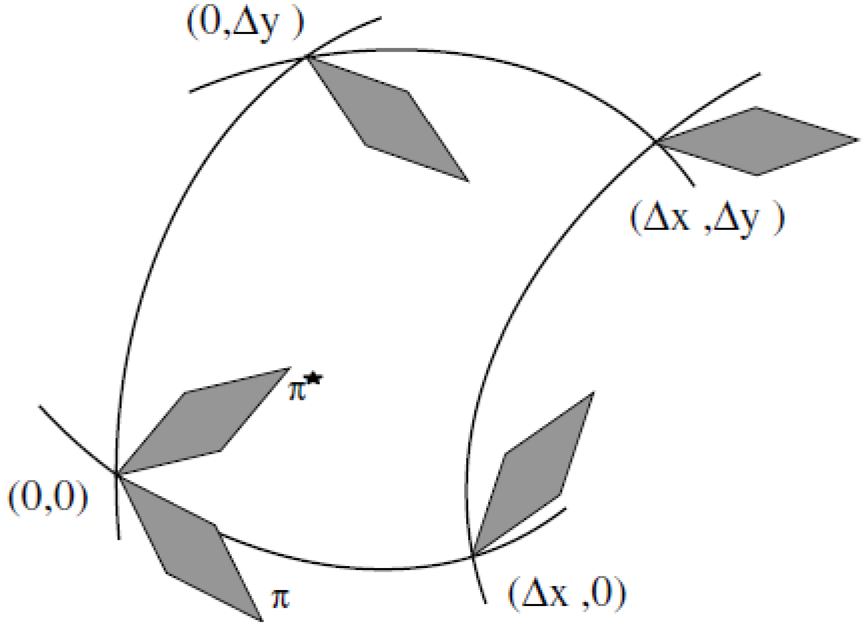

FIGURE 2.4 – Le transport parallèle de π le long de $\mathcal{P}$

les transports parallèles de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ respectivement le long du parallélogramme $\mathcal{P}$ (voir Figure 2.4)

On a (en appliquant (2.3.1))

$$\begin{aligned}\vec{v^*} &= \vec{v} - (R(\vec{x},\vec{y})\vec{v})\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x,\Delta y)\\ \vec{w^*} &= \vec{w} - (R(\vec{x},\vec{y})\vec{w})\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x,\Delta y)\end{aligned}$$

d'où la courbure sectionnelle du plan $\pi^* = \vec{v^*} \wedge \vec{w^*}$, engendré par $\vec{v^*}$ et $\vec{w^*}$, peut être exprimer comme suit

$$k(p,\pi^*) = k(p,\pi) + (R.R)(\vec{v},\vec{w},\vec{w},\vec{v};\vec{x},\vec{y})\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x,\Delta y) \qquad (2.7.1)$$

où le tenseur, de type $(0,6)$, $R.R$ est définie par

$$\begin{aligned}(R.R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= (R(X,Y).R)(X_1,X_2,X_3,X_4)\\ &= -R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,R(X,Y)X_2,X_3,X_4)\\ &\quad - R(X_1,X_2,R(X,Y)X_3,X_4) - R(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4)\end{aligned}$$

Le $(0,6)$-tenseur $R.R$ de M mesure le changement de la courbure sectionnelle en p, pour chaque plan π après un transport parallèle de π le long d'un parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de sommet p.

Définition 2.7.1. *Une variété Riemannienne* (M, g) *est dite semi-symétrique si* $R.R = 0$

Théorème 2.7.1. *[23] Une variété Riemannienne* M *est semi-symétrique si et seulement si sa courbure sectionnelle* $k(p, \pi)$ *est invariante, en approximation de second ordre, après un transport parallèle de chaque plan* π *en chaque point* p *de* M *le long de chaque parallélogramme infinitésimal* Π *de sommet* p.

Proposition 2.7.1. *[23] Le tenseur, de type* $(0, 6)$, $R.R$ *vérifie les propriétés suivantes.*

1. $(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -(R.R)(X_2, X_1, X_3, X_4; X, Y)$
2. $(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = (R.R)(X_3, X_4, X_1, X_2; X, Y)$
3. $(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) + (R.R)(X_1, X_3, X_4, X_2; X, Y) + (R.R)(X_1, X_4, X_2, X_3; X, Y) = 0$
4. $(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) + (R.R)(X_3, X_4, X, Y; X_1, X_2) + (R.R)(X, Y, X_1, X_2; X_3, X_4) = 0$

Démonstration. Les propriétés 1),2) et 3) sont des conséquence direct des propriétés du tenseur de courbure de Riemann R. Pour 4) il suffit de remplacer chaque $R(U, V)W$ dans $R.R$ par son expression dans une base orthonormé $\{E_1, \cdots, E_n\}$. □

Il est claire, d'après ce qui précède, que les variétés de dimension 2 sont semi-symétrique. Pour les dimension plus élevé, la semi-symétrie généralise la symétrie locale, puisque chaque variété localement symétrique est semi-symétrique. L'inverse n'est pas vrai en générale([37],[48]). La classification des variétés Riemanniennes semi-symétriques est donnée par Szabò [46],[47].

2.8 La courbure sectionnelle de Deszcz

Probablement le plus simple $(0, 6)$-tenseur de M, admettant les même propriétés algébriques que $R.R$ est le tenseur de Tachibana $Q(g, R)$, défini par

$$\begin{aligned} Q(g, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) =& ((X \wedge Y).R)(X_1, X_2, X_3, X_4) \\ =& - R((X \wedge Y)X_1, X_2, X_3, X_4) \\ & - R(X_1, (X \wedge Y)X_2, X_3, X_4) \\ & - R(X_1, X_2, (X \wedge Y)X_3, X_4) \\ & - R(X_1, X_2, X_3, (X \wedge Y)X_4) \end{aligned}$$

On a le résultat classique suivant.

Proposition 2.8.1. *(Eisenhart) Une variété Riemannienne M est à courbure constante si et seulement si $Q(g, R) = 0$.*

L'interprétation géométrique de $Q(g, R)$ (voir [23]) se déduit de celle de $(\vec{x} \wedge \vec{y})\vec{z}$. Soit $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e_3}, \cdots, \vec{e_n}\}$ une base orthonormé de T_pM et considérons les deux vecteurs orthonormales $\vec{v}, \vec{w} \in T_pM$. Soit les deux vecteurs $\tilde{\vec{v}}$ et $\tilde{\vec{w}}$ obtenus après une rotation infinitésimale $\Delta\varphi$ de la projection, sur $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$, des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ respectivement.

On a (d'après (2.4.1))

$$\tilde{\vec{v}} = \vec{v} - ((\vec{x} \wedge \vec{y})\vec{v})\Delta\varphi + O^{\geqslant 2}(\Delta\varphi)$$
$$\tilde{\vec{w}} = \vec{w} - ((\vec{x} \wedge \vec{y})\vec{w})\Delta\varphi + O^{\geqslant 2}(\Delta\varphi)$$

En comparons la courbure sectionnelle des plans $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\tilde{\pi} = \tilde{\vec{v}} \wedge \tilde{\vec{w}}$, on obtient

$$k(p, \tilde{\pi}) = k(p, \pi) + Q(g, R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})\Delta\varphi + O^{\geqslant 2}(\Delta\varphi) \qquad (2.8.1)$$

D'une part, la composante $Q(g, R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})$ mesure le changement de la courbure sectionnelle $k(p, \pi)$, en premier ordre d'approximation, après une rotation infinitésimale en p de la projection sur le plan $\pi = \vec{x} \wedge \vec{y}$ (voir [23]). D'autre part $(R.R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})$ mesure le changement de la courbure sectionnelle $k(p, \pi)$ après le transport parallèle du plan π dans un voisinage infinitésimal de p ; donc on peut considérer $Q(g, R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})$ comme un normalisateur de $(R.R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})$.

Définition 2.8.1. *[23] Soit M une variété Riemannienne de dimension $n \geqslant 3$ qui n'est pas à courbure constante et notons U_R l'ensemble de points où le tenseur de Tachibana $Q(g, R)$ est non nul c'est-à-dire $U_R = \{x \in M | Q(g, R) \neq 0\}$. Alors en $p \in U_R$, un plan $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w} \subset T_pM$ est dit en courbure-dépendance ("curvature-dependent") avec le plan $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ si $Q(g, R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}) \neq 0$. Cette définition est indépendante du choix de la base de π et de $\bar{\pi}$.*

Définition 2.8.2. *[23] Pour $p \in U_R$, soient les deux plans $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$, tangent à M en p, en courbure-dépendance. Alors la courbure sectionnelle de Deszcz $L(p, \pi, \bar{\pi})$ du plan π respectivement à $\bar{\pi}$ est définie par*

$$L(p, \pi, \bar{\pi}) = \frac{(R.R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})}{Q(g, R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})}$$

Cette définition est aussi indépendante du choix de la base de π et de $\bar{\pi}$.

L'interprétation géométrique de la courbure sectionnelle de Deszcz peut se faire en utilisant le carré de Levi-Civita([23]). Considérons, en $p \in M$, les deux plans tangent $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$. Soit $\vec{v^*}$ (resp. $\vec{w^*}$) le transport parallèle de $\vec{v}$ (resp. $\vec{w}$) le long d'un parallélogramme infinitésimal de sommet p tangent à $\vec{x}$ et $\vec{y}$ avec les longueurs des cotés issus de p, Δx et Δy respectivement. Construisons les carrées de Levi-Civita en p pour les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{v^*}$, $\vec{w^*}$ respectivement, avec la longueur des trois cotés ε. En général, les longueurs des quatrième cotés ε' et $\varepsilon^{*\prime}$ sont différent. En remplaçons $k(p, \pi)$ et $k(p, \pi^*)$, dans (2.7.1), par leur expressions en termes de carré de Levi-Civita on obtient

$$(R.R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}) \approx \frac{(\varepsilon')^2 - (\varepsilon^{*\prime})^2}{\varepsilon^4} \frac{1}{\Delta x \Delta y}$$

Soient les vecteurs $\vec{\tilde{v}}$ et $\vec{\tilde{w}}$ obtenus après une rotation infinitésimale $\Delta\varphi$ de la projection, sur le plan $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$, des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ respectivement. Notons $\tilde{\pi} = \vec{\tilde{v}} \wedge \vec{\tilde{w}}$ le plan engendré par $\vec{\tilde{v}}$ et $\vec{\tilde{w}}$. Construisons le carré de Levi-Civita en p pour les vecteurs $\vec{\tilde{v}}$ et $\vec{\tilde{w}}$ avec la longueur des trois cotés ε et la longueur du quatrième coté $\tilde{\varepsilon}'$. En remplaçons $k(p, \pi)$ et $k(p, \tilde{\pi})$, dans (2.8.1), par leur expressions en termes de carré de Levi-Civita on obtient

$$Q(g, R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}) \approx \frac{(\varepsilon')^2 - (\tilde{\varepsilon}')^2}{\varepsilon^4} \frac{1}{\Delta\varphi}$$

En calibrons le changement de la courbure sectionnelle après le transport parallèle, le long du parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de paramètres Δx et Δy, avec le changement de la courbure sectionnelle après une rotation infinitésimale, d'angle $\Delta\varphi$, par $\Delta\varphi = \Delta x \, \Delta y$. On obtient une approximation en termes du carré de Levi-Civita, de longueur ε (des trois cotés), de la courbure sectionnelle de Deszcz.

Théorème 2.8.1. *[23] Soit M une variété Riemannienne, $p \in U_R$ et le plan $\pi \subset T_pM$ en courbure-dépendance avec le plan $\bar{\pi} \subset T_pM$. Sous la condition de calibration de transport parallèle infinitésimal avec la rotation infinitésimale, la courbure sectionnelle de Deszcz $L(p, \pi, \bar{\pi})$ peut être exprimer en termes de la longueur du quatrième coté du carré de levi-Civita comme suit :*

$$L(p, \pi, \bar{\pi}) \approx \frac{(\varepsilon')^2 - (\varepsilon^{*\prime})^2}{(\varepsilon')^2 - (\tilde{\varepsilon}')^2}$$

En similitude avec la relation entre le tenseur de courbure de Riemann et la courbure sectionnelle. Il y a la propriété suivante entre le tenseur $R.R$ et la courbure sectionnelle de Deszcz.

Théorème 2.8.2. *[23] En tout point $p \in U_R$, le tenseur $R.R$ de la variété Riemannienne M est déterminé par la courbure sectionnelle de Deszcz de tout les plans en courbure-dépendance $\pi, \bar{\pi} \in T_pM$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un tenseur, de type $(0,6)$, W avec les même propriété algébrique que $R.R$ (proposition 2.7.1) et que pour tout deux plans tangent en p, en courbure-dépendance, $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ on a

$$\frac{(R.R)(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y})}{Q(g,R)(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y})} = \frac{W(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y})}{Q(g,R)(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y})}$$

Il suffit de prouver que

$$\forall \vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4},\vec{x_5},\vec{x_6} \in T_pM, (R.R)(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6}) = W(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6})$$

Soit S le tenseur, de type $(0,6)$, défini par $S = R.R - W$. Il est claire que S a les même propriétés algébriques que $R.R$ et W. De plus, pour tout deux plans tangent en p, en courbure-dépendance, $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$,

$$S(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) = 0 \tag{2.8.2}$$

Quand le plan les deux plans $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ ne sont pas en courbure-dépendance $Q(g,R)(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) = 0$. Comme $Q(g,R)(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y})$ est un polynôme des composantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$, l'ensemble des zéros ne contient pas un ouvert (sinon $Q(g,R)_p = 0$ ce qui contredit $p \in U_R$). par conséquence on peut choisir quatre suite $(\vec{u}_n)$, $(\vec{v}_n)$, $(\vec{x}_n)$ et $(\vec{y}_n)$ avec $\vec{u}_n \longrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}_n \longrightarrow \vec{v}$, $\vec{x}_n \longrightarrow \vec{x}$ et $\vec{y}_n \longrightarrow \vec{y}$ tels que $\pi_n = \vec{u_n} \wedge \vec{v_n}$ et $\bar{\pi}_n = \vec{x_n} \wedge \vec{y_n}$ sont en courbure-dépendance pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après (2.8.2), $S(\vec{u_n},\vec{v_n},\vec{u_n},\vec{v_n};\vec{x_n},\vec{y_n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par passage à la limite on aura $S(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) = 0$. D'ou (2.8.2) sera vérifiée pour tout $\vec{u},\vec{v},\vec{x},\vec{y} \in T_pM$.

D'après (2.8.2) on a pour tout $\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4},\vec{x_5},\vec{x_6} \in T_pM$

$$S(\vec{x_1}+\vec{x_3},\vec{x_2},\vec{x_1}+\vec{x_3},\vec{x_2};\vec{x_5},\vec{x_6}) = 0 \tag{2.8.3}$$

En utilisons (2.8.2) et les propriétés algébrique de S, on obtient

$$S(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_2};\vec{x_5},\vec{x_6}) = 0 \tag{2.8.4}$$

De (2.8.4) et puisque $\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4},\vec{x_5}$ et $\vec{x_6}$ sont arbitraires on aura

$$S(\vec{x_1},\vec{x_2}+\vec{x_4},\vec{x_3},\vec{x_2}+\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6}) = 0 \tag{2.8.5}$$

de (2.8.4) et (2.8.5) et de la linéarité de S on obtient

$$S(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6}) + S(\vec{x_1},\vec{x_4},\vec{x_3},\vec{x_2};\vec{x_5},\vec{x_6}) = 0 \tag{2.8.6}$$

et par conséquence (en utilisant les propriétés algébriques de S)

$$\begin{aligned}(2.8.6) \Leftrightarrow S(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6}) &= -S(\vec{x_1},\vec{x_4},\vec{x_3},\vec{x_2};\vec{x_5},\vec{x_6})\\ &= S(\vec{x_1},\vec{x_4},\vec{x_2},\vec{x_3};\vec{x_5},\vec{x_6})\\ &= -S(\vec{x_1},\vec{x_3},\vec{x_2},\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6})\\ &= S(\vec{x_1},\vec{x_4},\vec{x_4},\vec{x_2};\vec{x_5},\vec{x_6})\end{aligned}$$

puisque $\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4},\vec{x_5}$ et $\vec{x_6}$ sont arbitraires on aura

$$\begin{aligned}S(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6}) &= S(\vec{x_1},\vec{x_3},\vec{x_4},\vec{x_2};\vec{x_5},\vec{x_6}) &(2.8.7)\\ &= S(\vec{x_1},\vec{x_4},\vec{x_2},\vec{x_3};\vec{x_5},\vec{x_6}) &(2.8.8)\end{aligned}$$

en appliquons la propriété 2) de la proposition 2.7.1 à S et de (2.8.7), (2.8.8) on obtient

$$S(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6}) = 0$$

puisque $\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4},\vec{x_5}$ et $\vec{x_6}$ sont arbitraires alors $S = 0$ donc $W = R.R$ sur U_R. □

Corollaire 2.8.1. *[23] Les variétés semi-symétriques sont caractérisées par la nullité de la courbure sectionnelle de Deszcz.*

2.9 Les variétés pseudo symétriques

Définition 2.9.1. *Une variété Riemannienne M, de dimension $n \geqslant 3$, est dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, en un point $p \in U_R$ s'il existe un scalaire L_R tel que, en p, $R.R = L_R\, Q(g,R)$.*

Une variété Riemannienne M, de dimension $n \geqslant 3$, est dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, si elle est pseudo symétrique en tout ses points, c'est-à-dire s'il existe une fonction $L_R : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $R.R = L_R\, Q(g,R)$.

Théorème 2.9.1. *[23] Une variété Riemannienne M de dimension $n \geqslant 3$ est pseudo symétrique, au sens de Deszcz, si et seulement si en tout point $p \in U_R$ les courbures sectionnelles de Deszcz sont les même ; c'est-à-dire pour tout les plans tangent, en p, π et $\bar{\pi}$ en courbure-dépendance $L(p,\pi,\bar{\pi}) = L_R(p)$ pour une certain fonction $L_R : U_R \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Démonstration. Si M est pseudo symétrique ($R.R = L_R\, Q(g,R)$) l'implication est évidente.

Supposons que $L(p,\pi,\bar{\pi}) = L_R(p)$ pour tout les plans, en p, π et $\bar{\pi}$ en courbure-dépendance. Si $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ alors

$$(R.R)(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) = L_R(p)\, Q(g,R)(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y})$$

Le tenseur $T = R.R - L_R(p)\, Q(g,R)$ à les même propriétés algébrique que celle de $R.R$. Pour deux plans $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ en courbure-dépendance on a

$$T(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) = 0$$

Si les deux plans $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ ne sont pas en courbure-dépendance un argument similaire à celle utilisé pour la preuve du théorème 2.8.2 nous donne

$$T(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) = 0$$

d'où pour tout $\vec{u},\vec{v},\vec{x},\vec{y} \in T_pM$

$$T(\vec{u},\vec{v},\vec{u},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) = 0$$

en continuons le même raisonnement comme pour la preuve du théorème 2.8.2 on obtient

$$T(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4};\vec{x_5},\vec{x_6}) = 0 \text{ pour tout } \vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3},\vec{x_4},\vec{x_5},\vec{x_6} \in T_pM$$

Ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2.9.1. *Il est claire que tout variété semi-symétrique est pseudo symétrique. L'inverse n'est pas vrai, par exemple le groupe de Heisenberg avec une métrique invariante à gauche est pseudo symétrique et non semi-symétrique ([3] page 370).*

Théorème 2.9.2. *[14] Soit (M,g) une variété Riemannienne avec le tenseur de courbure de Weyl nul. Alors (M,g) est pseudo symétrique si et seulement si pour tout $x \in M$ l'opérateur de Ricci, en x, $\widetilde{S}_x$ a au plus deux valeurs propres.*

L'étude de la pseudo symétrie de variété avec tenseur de Weyl nul (en particulier les variétés dimension 3) peut se réduire à l'étude spectrale de l'opérateur de Ricci.

2.10 Ricci pseudo symétrie et Weyl pseudo symétrie

Définition 2.10.1. *Soit T un tenseur de type $(0,r)$ sur M. les deux tenseur $R.T$ et $Q(g,T)$, de type $(0,r+2)$, sont définis par*

$$\begin{aligned}(R\cdot T)(X_1,X_2,\dots,X_k;X,Y) &= (R(X,Y)\cdot T)(X_1,X_2,\dots,X_k)\\ &= -T(R(X,Y)X_1,X_2,\dots,X_k)-\cdots\\ &\quad -T(X_1,X_2,\dots,R(X,Y)X_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(g,T)(X_1,X_2,\dots,X_k;X,Y) &= ((X\wedge_g Y)\cdot T)\,(X_1,X_2,\dots,X_k)\\ &= -T((X\wedge_g Y)X_1,X_2,\dots,X_k)-\cdots\\ &\quad -T(X_1,X_2,\dots,(X\wedge_g Y)X_k))\end{aligned}$$

Définition 2.10.2. *Une variété Riemannienne M est dite Ricci semi-symétrique si $R.S=0$. Elle est dite Weyl semi-symétrique si $R.C=0$.*

Définition 2.10.3. *Une variété Riemannienne M est dite Ricci pseudo symétrique s'il existe une fonction L_S sur $U_S=\{x\in M|\ S-\frac{\tau}{n}g\neq 0\ \ en\ x\}$ telle que $R\cdot S=L_SQ(g,S)$ sur U_S. Elle est dite Weyl pseudo symétrique s'il existe une fonction L_C sur $U_C=\{x\in M\,|\,C\neq 0\ \ en\ \ x\}$ telle que $R\cdot C=L_CQ(g,C)$ U_C.*

Remarques 2.10.1.

- *On a $U_S\subset U_R$. De plus tout variété pseudo symétrique est Ricci pseudo symétrique. Mais l'inverse n'est pas, en général, vrai. Par exemple ([2] page 40) tout produit tordu $M_1\times_F M_2$ d'une variété de dimension un $(M_1,\bar g)$ et une variété d'Einstein non pseudo symétrique $(M_2,\tilde g)$, de dimension $n\geqslant 3$, est une variété non pseudo symétrique et Ricci pseudo symétrique. Pour plus d'exemples voir [18].*
- *Il est claire que tout variété Weyl semi-symétrique est Weyl pseudo symétrique. L'inverse n'est pas vrai([2] page 41, [20], [18]).*
- *Tout variété pseudo symétrique est Weyl pseudo symétrique.*
- *Tout variété, de dimension $n\geqslant 5$, non conformément plate et Weyl pseudo symétrique est pseudo symétrique ([28] page 49,[20]). Il existe des variétés de dimension 4 non conformément plate et Weyl pseudo symétriques qui ne sont pas pseudo symétriques ([28] page 49, [17]).*
- *Tout variété, de dimension $n\geqslant 4$, conformément plate est Weyl pseudo symétrique. Il existe des variétés conformément plates qui ne sont pas pseudo*

symétrique ([2] page 41,[14]).

Chapitre 3

Les variétés Kähleriennes

Ce chapitre est consacré aux variétés Kähleriennes (définitions et propriétés) et à la notions de la pseudo symétrie holomorphe de Z. Olszak. Les références principales de ce chapitre sont : [29], [31], [40], [41] et [54].

3.1 Structure complexe sur un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et i le nombre complexe $i^2 = -1$.

$$V^C = \{X + iY \mid X, Y \in V\}$$

est un espace vectoriel complexe appelé complexifié de V avec

$$(a + ib).(X + iY) = (aX - bY) + i(bX + aY)$$
$$(X + iY) + (X' + iY') = (X + X') + i(Y + Y')$$

pour tout $X, X', Y, Y' \in V$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Le conjugué de $Z = X + iY$, noté $\bar{Z}$, est défini par $\bar{Z} = X - iY$. Le conjugué est un endomorphisme linéaire réel de V^C vérifiant $\overline{\lambda\, Z} = \bar{\lambda}\, \bar{Z}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall Z \in V^C$.

Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de l'espace vectoriel réel V alors $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de l'espace vectoriel complexe V^C.

Définition 3.1.1. *Une structure complexe J sur un espace vectoriel réel V est un endomorphisme linéaire sur V vérifiant $J^2 = -Id_V$ où id_V est l'application identité de V.*

Pour tout espace vectoriel V avec une structure complexe J on peut définir le produit par un nombre complexe comme suit

$$(a + i\, b).X = aX + bJX \quad \text{pour tout } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } X \in V$$

Tout espace vectoriel V avec une structure complexe J est un espace vectoriel réel de dimension paire. On fait, puisque $J^2 = -Id_V$ alors $(-1)^{\dim V} = det(-Id_V) = det(J^2) = (det(J))^2 > 0$ donc $\dim V$ est paire.

Exemple 3.1.1. *Sur $\mathbb{R}^{2n}$ on a la structure complexe $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ définie par*

$$J(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) = (y_1, \cdots, y_n, -x_1, \cdots, -x_n)$$

Soit V un espace vectoriel réel avec une structure complexe J on peut prolonger J sur V^C, noté aussi J, par

$$J(X + iY) = JX + iJY$$

On a, évidement, sur $V^C \quad J^2 = -Id_{V^C}$

Pour un espace vectoriel réel de dimension $2n$ avec une structure complexe J. Il existe n éléments $X_1, \cdots, X_n$ de V tels que $\{X_1, \cdots, X_n, JX_1, \cdots, JX_n\}$ forme une base de V.

Posons

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k)$$
$$\bar{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k)$$

Alors $\{Z_1, \ldots, Z_n, \bar{Z}_1, \cdots, \bar{Z}_n\}$ forme une base de V^C et on a $JZ_k = iZ_k,\ J\bar{Z}_k = -i\bar{Z}_k$

les deux espaces $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$ de V^C sont définis par

$$V^{1,0} = \{Z \in V^C |\ JZ = iZ\}$$

$$V^{0,1} = \{Z \in V^C |\ JZ = -iZ\}$$

On a $V^C = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ et $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$

Pour tout $Z \in V^C$

$$Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ)$$

alors

$$V^{1,0} = \{X - iJX |\ X \in V\}$$
$$V^{0,1} = \{X + iJX |\ X \in V\}$$

Notons V^* le dual de l'espace vectoriel réel V, on peut considérer le complexifié ${V^*}^C$ de V^*. on peut aussi identifier ${V^*}^C$ avec le dual ${V^C}^*$ du complexifié V^C de V.

Une structure complexe J sur V induit une structure complexe, noté aussi J, sur V^* définie par

$$JX^*(X) = X^*(JX) \quad \forall X \in V \, \forall X^* \in V^*$$

On peut décomposer ${V^*}^C$ comme suit

$${V^*}^C = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$$

avec

$$V_{1,0} = \{X^* \in {V^*}^C \mid X^*(X) = 0 \, \forall X \in V^{0,1}\}$$
$$V_{0,1} = \{X^* \in {V^*}^C \mid X^*(X) = 0 \, \forall X \in V^{1,0}\}$$

3.2 Variété presque complexe

Définition 3.2.1. *Soit M une variété différentielle réelle. Une structure presque complexe J sur M est un endomorphisme linéaire sur T_xM pour tout $x \in M$ vérifiant $J^2 = -Id$. Une variété avec une structure presque complexe est dite variété presque complexe.*

Tout variété presque complexe M est de dimension paire.

Pour chaque variété complexe M il y a une façon natural de définir une structure presque complexe sur M. On fait pour un système de coordonnées locales complexes $(z^1, \cdots, z^n)$ au voisinage U de p, avec $z^k = x^k + iy^k, \;\; k = 1, \cdots, n$, on définie l'endomorphisme J par

$$J(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \frac{\partial}{\partial y^k} \;\; , \; J(\frac{\partial}{\partial y^k}) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.2.1}$$

Soit T_p^CM le complexifié de T_pM. On peut prolonger J sur T_p^CM par

$$J(\frac{\partial}{\partial z^k}) = i\frac{\partial}{\partial z^k} \;\; , \; J(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \tag{3.2.2}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}) \;\; , \; \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}) \tag{3.2.3}$$

J ne dépend pas du choix de système de coordonnées c'est-à-dire si $(w^1, \cdots, w^n)$ est système de coordonnées complexe sur U (un voisinage de p) avec

$$w^k = u^k + iv^k \ , \quad k = 1, \cdots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial w^k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u^k} - i\frac{\partial}{\partial v^k}) \ , \ \frac{\partial}{\partial \bar{w}^k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u^k} + i\frac{\partial}{\partial v^k})$$

alors

$$J(\frac{\partial}{\partial w^k}) = i\frac{\partial}{\partial w^k} \ , \ J(\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}$$

Il est claire que $J^2 = -Id$.

Définition 3.2.2. *Soient M et M' deux variétés presque complexes avec les deux structures presque complexes J et J' respectivement. Une application $f : M \to M'$ est dite presque complexe si $J' \circ Df = Df \circ J$ autrement dit*

$$\forall p \in M, \ \forall V \in T_pM \ , \ J'(D_pf(V)) = D_pf(J(V))$$

Proposition 3.2.1. *[54] Soient M et M' deux variétés complexes. une application $f : M \to M'$ est holomorphe si et seulement si f est presque complexe respectivement au deux structures complexes de M et M'.*

Soit M une variété presque complexe avec une structure presque complexe J. $T_x^C M$ est appelé l'espace tangent complexe de M en x. un élément de $T_x^C M$ est appelé vecteur tangent complexe. on a

$$T_x^C = T_x^{1,0}M \oplus T_x^{1,0}M$$

avec $T_x^{1,0}M$ et $T_x^{1,0}M$ sont les espaces propres de J par rapport aux deux valeurs propres i et $-i$ respectivement.

Un vecteur tangent complexe est dit de type $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) s'il appartient à $T_x^{0,1}M$ (resp. $T_x^{1,0}M$).

Un vecteur tangent complexe Z est de type $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) si et seulement si $Z = X - iJX$ (resp. $Z = X + iJX$) pour un certain $X \in T_xM$.

Soit M une variété complexe de dimension réel $2n$ avec la structure complexe naturel J. Soit $(z^1, \cdots, z^n)$ un système de coordonnées complexes. De (3.2.2) on peut voir que $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}\}$ est une base de $T_x^{1,0}M$ et $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\}$ est une base de $T_x^{0,1}M$. Par conséquence $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\}$ est une base de $T_x^C M$.

Notons $T_x^{*C}M$ le complexifié de T_x^*M (le dual de T_xM). Posons $z^j = x^j + iy^j$, $k = 1, \cdots, n$ et

$$dz^j = dx^j + idy^j \ , \ d\bar{z}^j = dx^j - idy^j \tag{3.2.4}$$

$\{dz^1, \cdots, dz^n, d\bar{z}^1, \cdots, d\bar{z}^n\}$ forme une base de $T_x^{*C}M$. De plus

$$dz^j(\frac{\partial}{\partial z^k}) = d\bar{z}^j(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}) = \delta_k^j$$

$$dz^j(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}) = d\bar{z}^j(\frac{\partial}{\partial z^k}) = 0$$

Soit $\mathcal{D}^r(M)$ l'espace des r-formes sur la variété M. Le complexifié $\mathrm{C}^r(M)$ de $\mathcal{D}^r(M)$ est l'espace de tout les $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ où ω_1, $\omega_2 \in \mathcal{D}^r(M)$. On appelle $\omega \in \mathrm{C}^r(M)$ r-forme complexe sur M. Si ω est une r-forme complexe alors ω_x est un élément de $\Lambda^r\, T_x^{*C}M$ pour chaque $x \in M$. $\Lambda^r\, T_x^{*C}M$ est l'ensemble des application multilinéaires alternées de $T_x^CM \times \cdots \times T_x^CM$ vers $\mathbb{C}$. D'un façons analogue on peut définir l'espace des tenseurs complexes sur M comme le complexifié de l'espace des tenseurs réels sur M.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n, on a vu que

$$V^{*C} = V_{1,0} \oplus V_{1,0}$$

Les algèbres extérieures $\Lambda V_{1,0}$ et $\Lambda V_{0,1}$ on peut les considérer comme sous-algèbre de $\Lambda\, V^{*C}$. Soit $\Lambda^{p,q}\, V^{*C}$ le sous espace vectoriel de $\lambda\, V^{*C}$ engendré par $\alpha \wedge \beta$ où $\alpha \in \Lambda^p V_{1,0}$ et $\beta \in \Lambda^q V_{0,1}$. Alors on la décomposition suivante

$$\Lambda\, V^{*C} = \sum_{r=0}^{n} \Lambda^r\, V^{*C} \qquad \text{avec} \qquad \Lambda^r\, V^{*C} = \sum_{p+q=r} \Lambda^{p,q}\, V^{*C}$$

En appliquons cette décomposition pour $T_x^{*C}M$ on obtient

$$\mathrm{C}(M) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}^r(M) = \sum_{p,q=0}^{n} \mathrm{C}^{p,q}(M)\ , \qquad \mathrm{C}^r(M) = \sum_{p,q=r} \mathrm{C}^{p,q}(M)$$

où $\mathrm{C}(M)$ est l'espace de formes complexes sur M. Un élément de $\mathrm{C}^{p,q}(M)$ est dit forme complexe de degré (p, q). Une 1-forme complexe ω est de degré $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) si et seulement si $\omega(Z) = 0$ pour tout z de type $(0, 1)$ (resp. $(1, 0)$).

Soit $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$ une base locale de $\mathrm{C}^{1,0}(M)$ alors son conjugué $\{\bar{\omega}^1, \cdots, \bar{\omega}^n\}$ est une base locale de $\mathrm{C}^{0,1}(M)$. Par conséquence l'ensemble des $\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_p} \wedge$

$\bar{\omega}^{k_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\omega}^{k_q}$ avec $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant n$ et $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_q \leqslant n$ est une base de $\mathrm{C}^{p,q}(M)$

On a

$$\begin{aligned} d\mathrm{C}^{0,0}(M) \subset & \mathrm{C}^{1,0}(M) + \mathrm{C}^{0,1}(M) \\ d\mathrm{C}^{1,0}(M) \subset & \mathrm{C}^{2,0}(M) + \mathrm{C}^{1,1}(M) + \mathrm{C}^{0,2}(M) \\ d\mathrm{C}^{0,1}(M) \subset & \mathrm{C}^{2,0}(M) + \mathrm{C}^{1,1}(M) + \mathrm{C}^{0,2}(M) \end{aligned}$$

De ces inclusion on obtient

$$d\mathrm{C}^{p,q}(M) \subset \mathrm{C}^{p+2,q-1}(M) + \mathrm{C}^{P+1,q}(M) + \mathrm{C}^{p,q+1}(M) + \mathrm{C}^{p-1,q+2}(M) \quad (3.2.5)$$

Définition 3.2.3. *le tenseur de torsion (de Nijenhuis) N, de type $(1,2)$, d'une structure presque complexe J est définie par*

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y] \quad (3.2.6)$$

Théorème 3.2.1 (de Luis Nirenberg)**.** *[38, 54] Pour une variété presque complexe les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *Si Z et W sont deux champs de vecteurs complexes de type $(1,0)$ alors $[Z,W]$ est de même.*
2. *Si Z et W sont deux champs de vecteurs complexes de type $(0,1)$ alors $[Z,W]$ est aussi de type $(0,1)$.*
3. *$d\mathrm{C}^{1,0}(M) \subset \mathrm{C}^{2,0}(M) + \mathrm{C}^{1,1}(M)$, $d\mathrm{C}^{0,1}(M) \subset \mathrm{C}^{1,1}(M) + \mathrm{C}^{0,2}(M)$*
4. *$d\mathrm{C}^{p,q}(M) \subset \mathrm{C}^{p+1,q}(M) + \mathrm{C}^{p,q+1}(M)$ pour $p, q = 0, \cdots, n$*
5. *La structure presque complexe J est sans torsion*

Remarque 3.2.1. *Si la propriété 1) du théorème 3.2.1 est vérifiée on dit que la structure presque complexe J est intégrable. Il est claire (Du théorème 3.2.1) qu'une structure presque complexe est intégrable si et seulement si elle sans torsion (i.e $N = 0$).*

Définition 3.2.4. *Une structure presque complexe J sur une variété M est dite structure complexe si M est une variété complexe avec J la structure presque complexe naturelle de M.*

Théorème 3.2.2. *[54] Soit M une variété presque complexe avec la structure presque complexe J. Alors J est une structure complexe sur M si et seulement J est sans torsion.*

Définition 3.2.5. *Soit J une structure complexe sur M. On définie* $\partial : \mathrm{C}^{p,q}(M) \to C^{p+1,q}(M)$ *et* $\bar{\partial} : \mathrm{C}^{p,q}(M) \to C^{p,q+1}(M)$ *par*

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega \qquad \textit{pour } \omega \in \mathrm{C}^{p,q}(M)$$

puisque $d^2 = 0$ *on obtient* $\partial^2 = 0$, $\bar{\partial}^2 = 0$ *et* $\partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0$.

Définition 3.2.6. *Soit M une variété presque complexe avec la structure presque complexe J. Un champ de vecteurs X est dit automorphisme infinitésimal si* $L_X J = 0$.

Proposition 3.2.2. *[54] Un champ de vecteur X sur une variété presque complexe M est un automorphisme infinitésimal si et seulement si $[X, JY] = J[X, Y]$ pour tout champ de vecteur Y sur M.*

Démonstration. On a

$$(L_X J)Y = L_X(JY) - J(L_X Y) = [X, JY] - J[X, Y]$$

Alors $L_X J = 0$ si est seulement si $[X, JY] = J[X, Y]$ pour tout champ de vecteur Y. □

Proposition 3.2.3. *[54] Soit X un automorphisme infinitésimal pour la structure presque complexe J sur M. Alors JX est aussi un automorphisme infinitésimal si et seulement si $N(X, Y) = 0$ pour tout champ de vecteur Y sur M.*

Démonstration. De la proposition 3.2.2 on a

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y]$$

pour tout champ de vecteurs Y. par conséquence (en appliquons la la proposition 3.2.2 à JX) JX est un automorphisme infinitésimal si et seulement si $N(X, Y) = 0$ pour tout champ de vecteur Y sur M. □

Théorème 3.2.3. *[54] Soit ϕ_t le groupe à un paramètre associé au champ de vecteurs X sur une variété complexe M. Alors X est un automorphisme infinitésimal si et seulement si ϕ_t est un isomorphisme holomorphe pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Définition 3.2.7. *Soit J une structure complexe sur M. Une forme ω de degré $(p, 0)$ est dite holomorphe si* $\bar{\partial}\omega = 0$

Proposition 3.2.4. *[54] Une forme ω est holomorphe si et seulement si ses coefficients sont holomorphes*

Démonstration. Dans un système de coordonnées $(z^1, \cdots, z^n)$, ω peut être exprimer comme suit

$$\omega = \sum f_{j_1 \cdots j_p} dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p}$$

alors $\bar{\partial}\omega = 0$ si et seulement si $\bar{\partial} f_{j_1 \cdots j_p} = 0$.

Comme

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j + \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j$$

avec

$$\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j \qquad \text{et} \qquad \bar{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} dz^j$$

alors ω est holomorphe si et seulement si ses coefficients sont holomorphes. $\square$

Définition 3.2.8. *Un champ de vecteurs Z de type $(1,0)$ sur une variété complexe M est dit holomorphe si Zf est holomorphe pour tout fonction holomorphe localement définie. autrement dit $Z = \sum h^j (\frac{\partial}{\partial z^j})$ est holomorphe si et seulement si pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, h^j est holomorphe.*

Proposition 3.2.5. *[54] Soit M une variété complexe avec une structure presque complexe J. Si X est un automorphisme infinitésimal de J sur M alors $X - iJX$ est un champ de vecteurs holomorphe.*

3.3 Variétés Hermitiennes

Définition 3.3.1. *Soit M une variété presque complexe avec la structure presque complexe J. Une métrique Hermitienne sur M est une métrique Riemannienne g sur M telle que $g(JX, JY) = g(X, Y)$ pour tout les champs de vecteurs X, Y sur M. Une variété presque complexe avec une métrique Hermitienne est dite variété presque Hermitienne.*

Proposition 3.3.1. *[54] Chaque variété presque complexe paracompacte M admit une métrique Hermitienne.*

Démonstration. Puisque M est paracompacte alors M admet une métrique Riemannienne g. par conséquence on peut munir M de la métrique Hermitienne h définie par

$$h(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY)$$

$\square$

On peut prolonger tout métrique Hermitienne g d'une variété presque hermitienne M à un tenseur complexe symétrique, covariant de degré 2, noté aussi g, par

$$g(X+iY, X'+iY') = [g(X,X') - g(Y,Y')] + i[g(X,Y') + g(X',Y)]$$

le tenseur g vérifié les propriétés suivantes :

1. $g(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{g(Z,W)}$ pour tout les champs de vecteurs complexes Z et W.
2. $g(Z, \bar{Z}) > 0$ pour tout champ de vecteur complexe non nul Z.
3. $g(Z, \bar{W}) = 0$ pour tout champ de vecteurs Z de type $(1,0)$ et pour tout champ de vecteurs W de type $(0,1)$.

Inversement, tout tenseur complexe symétrique qui satisfit ces trois propriétés est un prolongement d'un métrique Hermitienne sur M.

Définition 3.3.2. *Soit M une variété presque Hermitienne. La 2-forme fondamentale Φ est définie par*

$$\Phi(X,Y) = g(X,JY)$$

pour tout les champs de vecteurs X, Y sur M où J et g sont la structure presque complexe et la métrique Hermitienne de M respectivement.

Remarque 3.3.1.

- *La 2-forme fondamentale Φ vérifiée $\phi(JX,JY) = \phi(X,Y)$, $\quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*
- *Tout variété presque Hermitienne de dimension $2n$ est orientable. On fait, g est définie positive et J est inversible en tout point de M, alors $\Phi^n = \Phi \wedge \cdots \wedge \Phi$ est non nulle.*

Théorème 3.3.1. *[54] Soit M une variété presque complexe avec la structure presque complexe J. Alors M est une variété complexe si et seulement si M admet une connexion linéaire ∇ sans torsion telle que $\nabla J = 0$.*

Théorème 3.3.2. *[54] Soit M une variété presque Hermitienne avec la structure presque complexe J et la métrique Hermitienne g. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes*

1. *$\nabla J = 0$.*
2. *$\nabla \Phi = 0$.*
3. *J est sans torsion et Φ est fermée.*

3.4 Variétés Kähleriennes

Définition 3.4.1. *Une métrique hermitienne g dans une variété presque complexe M est dite métrique Kählerienne si la 2-forme fondamentale Φ est fermée.*

Une variété presque complexe M avec une métrique Kählerienne est dite variété presque Kählerienne.

Une variété complexe avec une métrique Kählerienne est dite variété Kählerienne.

Soit M une variété Kählerienne de dimension réelle $2n$ avec la structure complexe J est la métrique Kählerienne g. notons R et S le tenseur de courbure de Riemann et le tenseur de Ricci respectivement.

Proposition 3.4.1. *[54] Pour une variété Kählerienne M on a les propriétés suivantes*

1. $R(X,Y)\circ J = J\circ R(X,Y)$ *et* $R(JX,JY) = R(X,Y)$
2. $S(JX,JY) = S(X,Y)$ *et* $S(X,Y) = \frac{1}{2}($ *trace de* $JR(X,JY))$

Proposition 3.4.2. *[54] Soit M une variété Kählerienne de dimensions réelle $2n$. Si M est à courbure sectionnelle constante alors M est plate*

Remarque 3.4.1. *De la proposition 3.4.2 la notion de courbure sectionnelle constante pour les variétés Kähleriennes n'a pas vraiment de sens puisque tout variété Kählerienne de courbure sectionnelle constante est de courbure nulle. Pour cela on a pour les variétés Kähleriennes la notion de courbure sectionnelle holomorphe.*

3.5 Courbure sectionnelle holomorphe

3.5.1 Propriétés algébriques de R sur une variété Kählerienne

Soit V un espace vectoriel réel de dimension $2n$ avec une structure presque complexe J, on considère la forme quadrilinéaire $B : V^4 \to \mathbb{R}$ tel que

(a) $B(X,Y,Z,W) = -B(Y,X,Z,W) = -B(X,Y,W,Z)$

(b) $B(X,Y,Z,W) = B(Z,W,X,Y)$

(c) $B(X,Y,Z,W) + B(X,Z,W,Y) + B(X,W,Y,Z) = 0$

(d) $B(JX,JY,Z,W) = B(X,Y,JZ,JW) = B(X,Y,Z,W)$.

Remarque 3.5.1. *Le tenseur de courbure de Riemann R d'une variété Kählerienne satisfait les conditions (a),(b),(c) et (d)*

Proposition 3.5.1. *[31] Soit B et T deux formes quadrilinéaires sur un espace vectoriel V satisfaisant les conditions ci-dessus (i.e (a),(b),(c) et (d)), si $B(X, JX, X, JX) = T(X, JX, X, JX)$ pour tous $X \in V$,alors, $B = T$*

Soit g un produit Hermitien intérieur sur V. On pose

$$\begin{aligned}B_0(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}\big[&g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) + g(X,JZ)g(Y,JW) \\ &- g(X,JW)g(Y,JZ) + 2g(X,JY)g(Z,JW)\big]\end{aligned}$$

Alors B_0 satisfait les conditions (a),(b),(c) et (d). De plus

$$B_0(X,Y,X,Y) = \frac{1}{4}\big[g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2 + 3(g(X,JY))^2\big]$$

$$B_0(X,JX,X,JX) = g(X,X)^2$$

Soit π un plan dans V et $\{X,Y\}$ une base orthonormée de π. on pose

$$k(p) = B(X,Y,X,Y)$$

$k(\pi)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormée mais elle dépend uniquement du plan π. Si le plan π est invariant par J (i.e $J\pi = \pi$) alors pour tout vecteur unitaire $X \in \pi$, $\{X, JX\}$ est une base orthonormé de π. De la proposition 3.5.1 on obtient

Proposition 3.5.2. *Soit B une forme quadrilinéaire qui satisfait les conditions (a),(b),(c) et (d). Si $k(\pi) = c$ pour tout plan π invariant par J alors, $B = c\,B_0$*

3.5.2 Courbure sectionnelle holomorphe

Définition 3.5.1. *Soit (M, g, J) une variété Kählerienne et R le tenseur de courbure Riemannienne*

(*) *Pour tout plan π de l'espace tangent T_xM ($x \in M$) la courbure sectionnelle $k(x,\pi)$ est donnée par : $k(x,\pi) = g(R(X,Y)Y,X)$ avec $\{X,Y\}$ une base orthonormée de π dans T_xM.*

(**) *Si π est invariant par J (i.e $J\pi = \pi$), la courbure sectionnelle $k(x,\pi)$ est dite holomorphe et par conséquence : $k(x,\pi) = R(X,JX,X,JX) = g(R(X,JX)JX,X)$ pour tout vecteur unitaire $X \in \pi$.*

Remarques 3.5.1.

- *La courbure sectionnelle holomorphe ne dépend pas du choix de la base.*
- *Si $k(x,\pi)$ est constante pour tout plan π invariant par J dans T_xM pour tous $x \in M$, on dit que la variété Kählerienne M est à courbure sectionnelle holomorphe constante.*

Théorème 3.5.1. *[54] Soit (M,g,J) une variété Kählerienne de dimension $2n$.Si $n > 1$ et $k(x,\pi) = c(x)$ pour tout plan π invariant par J dans T_xM alors,M est à courbure sectionnelle holomorphe constante.*

Théorème 3.5.2. *[54] Une variété Kählerienne M à courbure sectionnelle holomorphe constante c*
si et seulement si,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= -\frac{c}{4}\big[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ\big] \\ &= -\frac{c}{4}\big[(X \wedge_g Y)Z + (JX \wedge_g JY)Z + 2g(X,JY)JZ\big] \end{aligned}$$

avec $\quad X \wedge_g Y = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$

Preuve .
D'aprés les propositions (3.5.1) et (3.5.2), on a

$$R(X,Y,Z,W) = cR_0(X,Y,Z,W)$$

autrement dit

$$
\begin{aligned}
g\big(R(X,Y)Z,W\big) &= \frac{c}{4}\Big[g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) + g(X,JZ)g(Y,JW) \\
&- g(X,JW)g(Y,JZ) + 2g(X,JY)g(Z,JW)\Big] \\
&= \frac{c}{4}\Big[g\big(g(X,Z)Y,W\big) - g\big(g(Y,Z)X,W\big) + g\big(g(X,JZ)Y,JW\big) \\
&- g\big(g(Y,JZ)X,JW\big) + 2g\big(g(X,JY)Z,JW\big)\Big] \\
&= \frac{c}{4}\Big[g\big(g(X,Z)Y,W\big) - g\big(g(Y,Z)X,W\big) - g\big(g(X,JZ)JY,W\big) \\
&+ g\big(g(Y,JZ)JX,W\big) - 2g\big(g(X,JY)JZ,W\big)\Big] \\
&= \frac{c}{4}\Big[g\Big(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - g(X,JZ)JY + g(Y,JZ)JX \\
&- 2g(X,JY)JZ,W\Big)\Big] \\
&= g\Big(\frac{c}{4}\Big(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - g(X,JZ)JY + g(Y,JZ)JX \\
&- 2g(X,JY)JZ\Big),W\Big).
\end{aligned}
$$

Pour tout $W \in \mathfrak{X}(M)$. Par conséquence

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \frac{c}{4}\big[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - g(X,JZ)JY + g(Y,JZ)JX - 2g(X,JY)JZ\big] \\
&= -\frac{c}{4}\big[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ\big]
\end{aligned}
$$

■

3.6 La pseudo symétrie holomorphe

La pseudo symétrie holomorphe a été définie par Olszak [39] et étudiée par Deszcz [18], Hotloś [25] et Jelonek [29].

Définition 3.6.1. *Une variété Kählerienne (M,g,J) est dite pseudo symétrique holomorphe si il existe une fonction f sur M telle que*

$$
R.R(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = f\,\widetilde{Q}(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) \tag{3.6.1}
$$

avec $\widetilde{Q}(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = ((X\wedge_J Y).R)(X_1,X_2,X_3,X_4)$

et $X\wedge_J Y = X\wedge_g Y + JX\wedge_g JY + 2g(X,JY)J$

La fonction f est appelée fonction de structure. Si f est constante la variété pseudo symétrique holomorphe M est dite de type constant.

It est facile de voir (en utilisant la proposition 3.4.1) que pour une variété Kählerienne $J.R = 0$ alors

$$(X \wedge_J Y).R = ((X \wedge_g X) + (JX \wedge_g JY)).R$$

Par conséquence (3.6.1) devient

$$R(X,Y).R = f\,.(((X \wedge_g X) + (JX \wedge_g JY)).R) \tag{3.6.2}$$

Proposition 3.6.1. *Tout variété Kählerienne pseudo symétrique est pseudo symétrique holomorphe.*

Démonstration. Soit M une variété Kählerienne pseudo symétrique, alors il existe une fonction f telle que

$$R(X,Y).R = f\,(X \wedge_g Y).R \tag{3.6.3}$$

Montrons que

$$f\,(X \wedge_g Y).R = \frac{f}{2}\,(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY).R \tag{3.6.4}$$

On fait

$$\begin{aligned} f\,(X \wedge_g Y).R &= R(X,Y).R \\ &= \frac{1}{2}R(X,Y).R + \frac{1}{2}R(X,Y).R \\ &= \frac{1}{2}R(X,Y).R + \frac{1}{2}R(JX,JY).R \\ &= \frac{f}{2}((X \wedge_g Y).R) + \frac{f}{2}(JX \wedge_g JY).R \\ &= \frac{f}{2}(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY).R \end{aligned}$$

De (3.6.3) et (3.6.4) on obtient

$$R(X,Y).R = \frac{f}{2}(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY).R$$

Donc M une variété holomorphiquement pseudo symétrique avec la fonction de structure $\frac{f}{2}$. □

Théorème 3.6.1. *[13] Tout variété Kählerienne (M,g,J) pseudo symétrique, de dimension $n \geqslant 6$, est semi-symétrique*

D'après le théorème précédent pour les variétés Kählerienne de dimension supérieure ou égale à 6 la pseudo symétrie est équivalente à la semi-symétrie. Pour la les variétés Kähleriennes de dimension 4 les deux notions ne sont pas équivalentes.

Proposition 3.6.2. *[40] Il existe une variété Kählerienne, de dimension* 4, *pseudo symétrique qui n'est pas semi-symétrique.*

Chapitre 4

Les métriques Riemanniennes des géométries de Thurston

Le but de cet chapitre est de construire pour chaque géométrie modèle de Thurston (G, X) non symétrique de dimension 4, une métrique invariante par G, et de montrer que cette métrique est hermitienne pour les géométries admettant une structure complexe.

Certaines métriques des géométries de Thurston non symétriques de dimension 4 sont données, explicitement ou implicitement, dans [6], [36], [43], [51] et [52]. On déterminera explicitement pour chaque géométrie modèle de Thurston (G, X) de dimension 4, non symétrique, une métrique Riemannienne g telle que le groupe d'isométries de g est G.

Après un rappel de la définition des géométries de Thurston (G, X) et leur stabilisateurs. On détermine explicitement, dans la première section, les métriques invariantes par G pour les géométries non symétriques. Wall a étudié les structures complexes des géométries de Thurston de dimension 4 ([51], [52]). Dans la dernière section on montre que ses métriques sont hermitiennes.

4.1 Les géométries de Thurston de dimension 3

Définition 4.1.1. *Une géométrie modèle (G, X) est une variété X avec un groupe de Lie G des difféomorphismes de X , tel que :*

a) X est connexe et simplement connexe.

b) L'action de G sur X est transitive avec stabilisateur compact.

c) G est maximal dans le sens où il n'est pas contenu dans un groupe de difféomorphisme de X avec stabilisateur compact.

d) Il existe au moins une variété compact modelée par (G, X).

On dit qu'une variété M est modelée par (G, X) s'il existe un sous groupe discret Γ de G tel que $M \cong \Gamma\backslash(G/G_x)$. Les géométries de Thurston de dimension trois sont classifiées par Thurston (voir [45], [49])

4.2 Les géométries de Thurston de dimension 4

La définition des géométries modèles de dimension 4 c'est la même que pour le dimension 3 sauf que dans la condition d) de la définition 4.1.1 le mot "compact" est remplacé par "volume fini".

R.Filipkiewicz a classifié les géométries de Thurston de dimension 4 (voir [22]) et il a obtenu les géométries modèles suivantes :

1. les espaces produits : $S^2 \times S^2$, $S^2 \times E^2$, $S^2 \times H^2$, E^4, $E^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $S^3 \times E^1$, $H^3 \times E^1$, $\widetilde{Sl_2(\mathbb{R})} \times E^1$, $Nil^3 \times E^1$.
2. Les espaces Riemanniens symétriques irréductibles : S^4, H^4, $P^2(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$.
3. Nil^4 , $Sol^4_{m,n}$, Sol^4_0 , Sol^4_1 et F^4 sont définie par :

Le groupe de Lie nilpotent $Nil^4 = \mathbb{R}^3 \ltimes_U \mathbb{R}$ (produit semidirect de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$)

$$\text{avec } U(t) = exp(t\,L) \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(la loi du groupe Nil^4 est donnée par : $(V, t)\,(V', t') = (V + U(t)V', t + t')$ pour $V, V' \in \mathbb{R}^3$ et $t, t' \in \mathbb{R}$)

Le groupe de Lie résoluble $Sol^4_{m,n} = \mathbb{R}^3 \ltimes_{T_{m,n}} \mathbb{R}$

$$\text{avec } T_{m,n}(t) = exp(t\,C_{m,n}) \text{ et } \ C_{m,n} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

(la loi du groupe $Sol^4_{m,n}$ est donnée par : $(V, t)\,(V', t') = (V + T_{m,n}(t)V', t + t')$ pour $V, V' \in \mathbb{R}^3$ et $t, t' \in \mathbb{R}$)
où $\alpha > \beta > \gamma$ sont des réels , $\alpha + \beta + \gamma = 0$, et e^α, e^β, e^γ sont les racines distincts de $\lambda^3 - m\lambda^2 + n\lambda - 1 = 0$ avec m, n des entiers positifs. Le cas de deux racines égaux, c'est la géométrie Sol^4_0.

Le groupe de Lie résoluble Sol^4_1 est le groupe de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & \alpha & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} /\alpha,\ a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}\ \alpha > 0 \right\}$$

Finalement on a F^4 qui est défini par $G = \mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$ (le produit semidirect est défini par l'action naturelle de $Sl_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$) et $X = \mathbb{R}^2 \times H^2$ ($H^2 = \{\omega \in \mathbb{C} \mid Im(\omega) > 0\}$ le plan hyperbolique).L'action de $\mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2 \times H^2$ est définie par :

pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\omega \in H^2$ et $(V, A) \in \mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(V, A) \cdot (x, y, \omega) = \left(v_1 + ax + by, v_2 + cx + dy, \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \right)$$

Les stabilisateurs de ces géométries sont (Voir [36] page 1166 ou [51] page 270) :

Stabilisateur	Géométrie	Nature de la géométrie
SO_4	S^4, E^4, H^4	courbure constante
U_2 $SO_2 \times SO_2$ SO_3	$P^2(\mathbb{C}), H^2(\mathbb{C})$ $S^2 \times S^2, S^2 \times E^2, S^2 \times H^2, E^2 \times H^2, H^2 \times H^2$ $S^3 \times E^1, H^3 \times E^1$	symétrique
SO_2 $\{1\}$	$\widetilde{Sl_2}(\mathbb{R}) \times E^1, Nil^3 \times E^1, Sol_0^4, F^4$ $Nil^4, Sol_{m,n}^4, Sol_1^4$	non symétrique

Pour savoir plus sur les géométries de Thurston de dimension 4 voir [22], [36], [51] et [52].

4.3 Métrique invariante par le groupe G dans les géométries modèles de Thurston (G, X) de dimension 4

On va déterminer une métrique invariante par le groupe de transformations G pour les géométries modèles (G, X) suivantes : (Nil^4, Nil^4), $(Sol_{m,n}, Sol_{m,n})$, (Sol_1^4, Sol_1^4), $F^4 = (\mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2 \times H^2)$, $(Sol_0^4 \ltimes_\delta SO_2, Sol_0^4)$, $((Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \ltimes SO_2, Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ et $((Nil^3 \times \mathbb{R}) \ltimes SO_2, Nil^3 \times \mathbb{R})$.

Soient (G, X) géométrie modèle et x_0 un point de X. On prend un produit scalaire B dans $T_{x_0}X$ vérifiant

$$B(D_{x_0}l(U), D_{x_0}l(V)) = B(U, V) \quad \forall\, l \in G_{x_0} \ , \forall\, U, V \in T_{x_0}X$$

autrement dit

$$(D_{x_0}l)^t\, B\,(D_{x_0}l) = B \qquad \forall\, l \in G_{x_0} \tag{4.3.1}$$

On ne fait pas de différence entre l'application linéaire (respectivement la forme bilinéaire) et sa matrice dans une base local de coordonnées.

En suite on détermine la métrique g, invariante par G, vérifiant

$$g_{x_0} = B$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} g_{x_0}(U,V) &= U^t\, B\, V \qquad \forall\, U\,, V \in T_{x_0}X \\ g_{h(x_0)}(D_{x_0}h(U), D_{x_0}h(V)) &= g_{x_0}(U,V) \qquad \forall\, h\, \in G\,,\, \forall\, U\,, V \in T_{x_0}X \end{aligned}$$

Pour déterminer cette métrique au point $h(x_0)$ on prend

$$g_{h(x_0)} = \left[(D_{x_0}h)^{-1}\right]^t .B.(D_{x_0}h)^{-1} \tag{4.3.2}$$

Puisque l'action de G sur X est transitive on peut déterminer g_p pour tout point p de X, On fait chaque point p de X peut s'écrire $p = h(x_0)$ pour un certain $h \in G$. De plus la condition (4.3.1) nous assure que la métrique au point $p = h(x_0)$ est indépendante de h, elle ne dépend que de p.

Commençons par les géométries modèles avec stabilisateur réduit à un seul élément à savoir (Nil^4, Nil^4), $(Sol_{m,n}, Sol_{m,n})$, (Sol_1^4, Sol_1^4) .

4.3.1 Nil^4 :

$Nil^4 = \mathbb{R}^3 \ltimes_U \mathbb{R}$

$$\text{avec } U(t) = exp(t\,L) \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$exp(t\,L) = I_3 + t\,L + \frac{t^2}{2}\,L^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit semidirect dans Nil^4 est donné par :

Pour $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $V' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et t, $t' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(V,t)\,(V',t') &= (V + exp(t\,L)V', t+t') \\
&= (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, t+t') \\
&= (\begin{pmatrix} x + x' + t\,y' + (t^2/2)\,z' \\ y + y' + t\,z' \\ z + z' \end{pmatrix}, t+t')
\end{aligned}$$

L'élément neutre de Nil^4 $e = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0)$

On prend la paramétrisation

$$\begin{aligned}
\phi : \quad \mathbb{R}^4 \quad &\longrightarrow \quad Nil^4 \\
(x,y,z,t) \quad &\longrightarrow \quad (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)
\end{aligned}$$

On veux déterminer la matrice d'une métrique g, invariante par G, dans la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$. Pour cela on prend $x_0 = e$ et $B = I_4$ la condition (4.3.1) est vérifiée puisque le stabilisateur est réduit à l'application identité.

Déterminons la métrique au point $p = (\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, s) \in Nil^4$ pour cela il suffit d'appliquer (4.3.2) pour la transformation multiplication à gauche par p

$$\begin{aligned}
L_p : \; Nil^4 \; &\longrightarrow \; Nil^4 \\
q \; &\longrightarrow \; p.q
\end{aligned}$$

Posons $q = (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)$

$$\begin{aligned} L_p(q) &= p.q \\ &= (\begin{pmatrix} u + x + s\,y + (s^2/2)\,z \\ v + y + s\,z \\ w + z \end{pmatrix}, s + t) \end{aligned}$$

et $D_q L_p = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par conséquent $(D_e L_p)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -s & s^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'après (4.3.2)

$$\begin{aligned} g_p &= \left[(D_e L_p)^{-1}\right]^t . I_4 . (D_e L_p)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -s & s^2/2 & 0 \\ -s & 1 + s^2 & -s(1 + (s^2/2)) & 0 \\ s^2/2 & -s(1 + (s^2/2)) & 1 + s^2 + (s^4/4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la métrique au point $(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)$ dans la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$

$$g_{(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)} = \begin{pmatrix} 1 & -t & t^2/2 & 0 \\ -t & 1 + t^2 & -t(1 + (t^2/2)) & 0 \\ t^2/2 & -t(1 + (t^2/2)) & 1 + t^2 + (t^4/4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.2 $Sol^4_{m,n}$:

$$Sol^4_{m,n} = \mathbb{R}^3 \ltimes_{T_{m,n}} \mathbb{R} \quad \text{avec } T_{m,n}(t) = exp(t\,C_{m,n}) \text{ et } \; C_{m,n} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\alpha > \beta > \gamma$ sont des réels , $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et e^{α}, e^{β}, e^{γ} sont les racines de $\lambda^3 - m\lambda^2 + n\lambda - 1 = 0$ avec m, n des entiers positifs.

$$\begin{aligned}
T_{m,n} &= exp(t\, C_{m,n}) \\
&= exp \begin{pmatrix} t\,\alpha & 0 & 0 \\ 0 & t\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & t\,\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{t\,\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\,\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\,\gamma} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(V,t)\,(V',t') &= (V + exp(t\, C_{m,n})V', t+t') \\
&= (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t\,\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\,\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\,\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, t+t') \\
&= (\begin{pmatrix} x + e^{t\,\alpha}x' \\ y + e^{t\,\beta}y' \\ z + e^{t\,\gamma}z' \end{pmatrix}, t+t')
\end{aligned}$$

L'élément neutre de $Sol^4_{m,n}$ $\;e = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0)$

On prend la paramétrisation

$$\begin{aligned}
\phi : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow Sol^4_{m,n} \\
(x,y,z,t) &\longrightarrow (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)
\end{aligned}$$

On veux déterminer la matrice de la métrique g, invariante par G, dans la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$; pour cela on prend $x_0 = e$ et $B = I_4$. La condition (4.3.1) est vérifiée puisque le stabilisateur est trivial .

Déterminons la métrique au point $p = (\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, s) \in Sol^4_{m,n}$, pour cela il suffit d'appliquer (4.3.2) à la multiplication à gauche par p.

Posons $q = (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)$

$$\begin{array}{rcl} L_p(q) & = & p.q \\ & = & (\begin{pmatrix} u + e^{\alpha\, s}x \\ v + e^{\beta\, s}y \\ w + e^{\gamma\, s}z \end{pmatrix}, s + t) \end{array}$$

et $(D_eL_p)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha\, s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta\, s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma\, s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'après (4.3.2)

$$\begin{array}{rcl} g_p & = & \left[(D_eL_p)^{-1}\right]^t .I_4.(D_eL_p)^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} e^{-2\,\alpha\, s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\,\beta\, s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\,\gamma\, s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où la métrique au point $(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)$ dans la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$

$$g_{(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)} = \begin{pmatrix} e^{-2\,\alpha\, t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\,\beta\, t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\,\gamma\, t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.3 Sol_1^4 :

$$Sol_1^4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & \alpha & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / \alpha,\ a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}\ \alpha > 0 \right\}$$

Pour $x, y, z, t, x', y', z', t' \in \mathbb{R}$ et $t,\, t' > 0$

$$\begin{pmatrix}1 & z & y\\ 0 & t & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & z' & y'\\ 0 & t' & x'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & z' + z\,t' & y' + z\,x' + y\\ 0 & t\,t' & t\,x' + x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Si on considère Sol_1^4 comme $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*$

$$(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}, t)(\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}, t') = (\begin{pmatrix}t\,x' + x\\ y' + z\,x' + y\\ z' + z\,t'\end{pmatrix}, t\,t')$$

L'élément neutre de Sol_1^4 $e = (\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, 1)$

On prend la paramétrisation

$$\begin{array}{rccc}\phi: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & Sol_1^4\\ & (x, y, z, t) & \longrightarrow & (\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}, t)\end{array}$$

On veux déterminer la matrice d'une métrique g, invariante par G, dans la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$, pour cela on prend $x_0 = e$ et $B = I_4$.

La condition (4.3.1) est vérifiée puisque le stabilisateur est réduit à l'application identité.

Déterminons la métrique au point $p = (\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}, s) \in Sol_1^4$, pour cela il suffit d'appliquer (4.3.2) à la multiplication à gauche par p

Posons $q = (\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}, t)$

$$\begin{aligned} L_p(q) &= p.q\\ &= (\begin{pmatrix}s\,x + u\\ y + w\,x + v\\ z + w\,t\end{pmatrix}, s\,t)\end{aligned}$$

et $(D_e L_p)^{-1} = \begin{pmatrix}1/s & 0 & 0 & 0\\ -w/s & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -w/s\\ 0 & 0 & 0 & 1/s\end{pmatrix}$

D'après (4.3.2)

$$\begin{aligned} g_p &= \left[(D_eL_p)^{-1}\right]^t .I_4.(D_eL_p)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (1+w^2)/s^2 & -w/s & 0 & 0 \\ -w/s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -w/s \\ 0 & 0 & -w/s & (1+w^2)/s^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la métrique au point $(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)$ dans la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$

$$g_{(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t)} = \begin{pmatrix} (1+z^2)/t^2 & -z/t & 0 & 0 \\ -z/t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z/t \\ 0 & 0 & -z/t & (1+z^2)/t^2 \end{pmatrix}$$

Pour les espaces restants le stabilisateur est SO_2.

4.3.4 F^4 :

$$X = \mathbb{R}^2 \times H^2 \text{ et } G = \mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ z \in H^2,\ V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{R})$

$$(V,A)(x,y,z) = (v_1 + a\,x + b\,y, v_2 + c\,x + d\,y, \frac{a\,z+b}{c\,z+d})$$

Fixons le point $x_0 = (0,0,i) \in \mathbb{R}^2 \times H^2$.

Le stabilisateur du point x_0 (et donc de tout point de $\mathbb{R}^2 \times H^2$ puisque l'action est transitive) $G_{x_0} = \{0\} \times SO_2 \cong SO_2$

On prend la paramétrisation

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \times H^2 \\ & (x,y,s,t) & \longrightarrow & (x,y,s+i\,t) \end{array}$$

prenons le produit scalaire B dans $T_{x_0}\mathbb{R}^2 \times H^2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

D'abord il faut s'assurer que (4.3.1) est vérifiée.

Soit $h \in G_{x_0}$ comme $SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$h = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right)$$

Posons $z = s + i\,t$

$$\begin{aligned} h.(x, y, s + i\,t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right) (x, y, s + i\,t) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right) (x, y, z) \\ &= ((\cos\theta)\,x + (\sin\theta)\,y, (-\sin\theta)\,x + (\cos\theta)\,y, \frac{(\cos\theta)\,z + \sin\theta}{(-\sin\theta)\,z + \cos\theta}) \end{aligned}$$

on a

$$z = s + i\,t \quad \text{et} \quad \bar{z} = s - i\,t$$

alors

$$\tfrac{\partial}{\partial s} = \tfrac{\partial}{\partial z} + \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{et} \quad \tfrac{\partial}{\partial t} = i\,\tfrac{\partial}{\partial z} - i\,\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{(\cos\theta)\,z + \sin\theta}{(-\sin\theta)\,z + \cos\theta} \right) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(\cos\theta)\,z + \sin\theta}{(-\sin\theta)\,z + \cos\theta} \right) &= \frac{\cos\,\theta(-(\sin\,\theta)\,z + \cos\,\theta) + \sin\,\theta((\cos\,\theta)\,z + \sin\,\theta)}{(-(\sin\,\theta)\,z + \cos\,\theta)^2} \\ &= \frac{1}{(\cos\,\theta - (\sin\,\theta)\,z)^2} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial s}(x_0)\left(\frac{(\cos\theta)\,z+\sin\theta}{(-\sin\theta)\,z+\cos\theta}\right) = \frac{1}{(\cos\,\theta-(\sin\,\theta)\,i)^2}$$
$$= (\cos\,\theta+(\sin\,\theta)\,i)^2$$
$$= \cos(2\theta)+i\,\sin(2\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_0)\left(\frac{(\cos\theta)\,z+\sin\theta}{(-\sin\theta)\,z+\cos\theta}\right) = \frac{i}{(\cos\,\theta-(\sin\,\theta)\,i)^2}$$
$$= i\,(\cos\,\theta+(\sin\,\theta)\,i)^2$$
$$= -\sin(2\theta)+i\,\cos(2\theta)$$

$$D_{x_0}h = \begin{pmatrix} \cos\,\theta & \sin\,\theta & 0 & 0 \\ -\sin\,\theta & \cos\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\,2\theta & -\sin\,2\theta \\ 0 & 0 & \sin\,2\theta & \cos\,2\theta \end{pmatrix}$$
et

$$(D_{x_0}h)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\,\theta & -\sin\,\theta & 0 & 0 \\ \sin\,\theta & \cos\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\,2\theta & \sin\,2\theta \\ 0 & 0 & -\sin\,2\theta & \cos\,2\theta \end{pmatrix}$$

$$\left[(D_{x_0}h)^{-1}\right]^t.B.(D_{x_0}h)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$
$$= \;B$$

D'où la condition (4.3.1) est vérifiée .

Pour déterminer la métrique au point $p = (\alpha, \beta, \sigma + i\,\tau) \in \mathbb{R}^2 \times H^2$ il suffit d'appliquer (4.3.2) pour un élément $k = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$ vérifiant $k.(0,0,i) = (\alpha, \beta, \sigma + i\,\tau)$.

Il est facile de voir que

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & \sigma/\sqrt{\tau} \\ 0 & 1/\sqrt{\tau} \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$$

et que

$$\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{\tau} & \sigma/\sqrt{\tau}\\ 0 & 1/\sqrt{\tau}\end{pmatrix}\right)(0,0,i) = (\alpha,\beta,\sigma+i\,\tau)$$

donc on peut prendre

$$k = \left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{\tau} & \sigma/\sqrt{\tau}\\ 0 & 1/\sqrt{\tau}\end{pmatrix}\right)$$

Soit $q = (x, y, s+it) \in \mathbb{R}^2 \times H^2$

$$\begin{aligned} k.(x,y,s+i\,t) &= \left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{\tau} & \sigma/\sqrt{\tau}\\ 0 & 1/\sqrt{\tau}\end{pmatrix}\right)(x,y,s+i\,t) \\ &= \left(\alpha + (\sqrt{\tau})\,x + (\sigma/\sqrt{\tau})\,y, \beta + (1/\sqrt{\tau})\,x, \frac{\sqrt{\tau}\,(s+i\,t)+\sigma/\sqrt{\tau}}{(1/\sqrt{\tau})}\right) \\ &= \left(\alpha + (\sqrt{\tau})\,x + (\sigma/\sqrt{\tau})\,y, \beta + (1/\sqrt{\tau})\,x, \sigma + \tau\,s + i\,\tau\,t\right) \end{aligned}$$

$$D_q k = \begin{pmatrix}\sqrt{\tau} & \sigma/\sqrt{\tau} & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{\tau} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \tau & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tau\end{pmatrix}$$

en particulier pour $q = x_0$

$$D_{x_0} k = \begin{pmatrix}\sqrt{\tau} & \sigma/\sqrt{\tau} & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{\tau} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \tau & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tau\end{pmatrix}$$

et

$$(D_{x_0} k)^{-1} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{\tau} & -\sigma/\sqrt{\tau} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\tau} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\tau & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/\tau\end{pmatrix}$$

D'après (4.3.2) la métrique au point $p = (\alpha, \beta, \sigma + i\,\tau)$ sera

$$\begin{aligned} g_p &= \left[(D_{x_0}k)^{-1}\right]^t .B.(D_{x_0}k)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}1/\sqrt{\tau} & -\sigma/\sqrt{\tau} & 0 & 0\\ -\sigma/\sqrt{\tau} & (\sigma^2+\tau^2)/\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/(4\,\tau^2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/(4\,\tau^2)\end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la métrique g au point $(x, y, s+i\,t)$

$$g_{(x,y,s+it)} = \begin{pmatrix} 1/t & -s/t & 0 & 0 \\ -s/t & (s^2+t^2)/t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(4\,t^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(4\,t^2) \end{pmatrix}$$

4.3.5 Sol_0^4 :

$$X = Sol_0^4 = \mathbb{R}^3 \ltimes_T \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad T(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\,t} \end{pmatrix}$$

On peut exprimer la loi de Sol_0^4 par

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right)\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, t'\right) = \left(\begin{pmatrix} x + e^t\,x' \\ y + e^t\,y' \\ z + e^{-2\,t}\,z' \end{pmatrix}, t+t'\right) \qquad \forall\, x, y, z, t, x', y', z', t' \in \mathbb{R}$$

et

$$G = Sol_0^4 \ltimes_\delta SO_2$$

avec

$$\delta\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La loi de G peut s'écrire comme suit :
pour $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, t, $t' \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \in SO_2$

$$\left[\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right), \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right]\left[\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, t'\right), \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}\right] =$$

$$\left[\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t\cos\theta & e^t\sin\theta & 0 \\ -e^t\sin\theta & e^t\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\,t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, t+t'\right), \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}\right]$$

et l'action de $Sol_0^4 \ltimes_\delta SO_2$ est définie par

$$\left[\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right), \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right] \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, t'\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t\cos\theta & e^t\sin\theta & 0 \\ -e^t\sin\theta & e^t\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, t+t'\right)$$

L'élément neutre de $Sol_0^4 \quad e = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right)$

Fixons $x_0 = e$, il est facile de voir que $G_{x_0} = \{e\} \times SO_2 \cong SO_2$

On prend la paramétrisation

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & Sol_0^4 \\ & (x,y,z,t) & \longrightarrow & (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t) \end{array}$$

Prenons le produit scalaire $B = I_4$ sur $T_{x_0}Sol_0^4$

D'abord il faut s'assurer que (4.3.1) est vérifiée

Soit $h = \left[\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right), \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right] \in G_{x_0} = \{e\} \times SO_2$

posons $q = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right) \in Sol_0^4$

$$h.q = \left(\begin{pmatrix} (\cos\theta)\,x + (\sin\theta)\,y \\ -(\sin\theta)\,x + (\cos\theta)\,y \\ z \end{pmatrix}, t\right)$$

alors

$$D_q h = \begin{pmatrix} \cos\,\theta & \sin\,\theta & 0 & 0 \\ -\sin\,\theta & \cos\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier pour $q = x_0$

$$D_{x_0}h = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$(D_{x_0}h)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left[(D_{x_0}h)^{-1}\right]^t \, B \, (D_{x_0}h)^{-1} &= \left[(D_{x_0}h)^{-1}\right]^t \, I_4 \, (D_{x_0}h)^{-1} \\ &= I_4 \\ &= B \end{aligned}$$

D'où la condition (4.3.1) est vérifiée .

Pour déterminer la métrique au point $p = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, s \right)$ il suffit d'appliquer (4.3.2) à un élément k de $Sol_0^4 \ltimes SO_2$ vérifiant $k.x_0 = p$ (c'est-à-dire $k. \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, s \right)$)

Il est facile de voir que

$$\left[\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, s \right), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, s \right)$$

donc on peut prendre $k = \left[\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, s \right), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

Soit $q = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right) \in Sol_0^4$

$$\begin{aligned}
k.q &= \left[\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, s\right), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} u + e^s x \\ x + e^s y \\ w + e^{-2\,s} z \end{pmatrix}, s + t\right)
\end{aligned}$$

$$D_q k = \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en particulier pour $q = x_0$

$$D_{x_0} k = \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$(D_{x_0} k)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après (4.3.2) la métrique au point $p = (\alpha, \beta, \sigma + i\,\tau)$ sera

$$\begin{aligned}
g_p &= \left[(D_{x_0} k)^{-1}\right]^t .B.(D_{x_0} k)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-2\,s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\,s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4\,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où la métrique g au point $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right)$

$$g_{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right)} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.6 $Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$:

On a remplacé $\widetilde{Sl_2}(\mathbb{R})$ par $Sl_2(\mathbb{R})$ puisque localement il sont pareils (rappelons que $\widetilde{Sl_2}(\mathbb{R})$ est le revêtement universel de $Sl_2(\mathbb{R})$).

$$X = Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \quad , \quad Sl_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ a\,d - c\,b = 1 \right\}$$

et

$$G = (Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \ltimes SO_2$$

La loi du produit semidirect de G est définie comme suit :
pour $T, T' \in Sl_2(\mathbb{R})$, $t, t' \in \mathbb{R}$ et $S, S' \in SO_2$

$$[(T,t), S]\,[(T',t'), S'] = \left[(T\,S\,T'\,S^{-1}, t+t'), S.S'\right]$$

et l'action de $(Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \ltimes SO_2$ sur $Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ est définie par :

$$[(T,t), S]\,(T',t') = (T\,S\,T'\,S^{-1}, t+t')$$

L'élément neutre de $Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \quad e = (I_2, 0)$

Fixons $x_0 = e$, il est facile de voir que $G_{x_0} = \{e\} \times SO_2 \cong SO_2$

On prend la paramétrisation

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \\ & (x,y,z,t) & \longrightarrow & \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & (1+y\,z)/x \end{pmatrix}, t\right) \end{array}$$

on fait pour chaque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2$ on a $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ (car $a\,d - c\,d = 1$) on a supposé que $a \neq 0$.

Prenons le produit scalaire B sur $T_{x_0}(Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vérifions d'abord que (4.3.1) est satisfaite .

Soit $S = \left[(I_2, 0), \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right] \in G_{x_0} = \{e\} \times SO_2$

Posons $q = \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & (1+y\,z)/x \end{pmatrix}, t\right) \in Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S.q &= \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & (1+y\,z)/x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, t\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \begin{array}{c} x\cos^2\theta + z(\cos\theta\,\sin\theta) \\ +y(\cos\theta\,\sin\theta) + [(1+y\,z)/x]sin^2\theta \end{array} & \begin{array}{c} -x(\cos\theta\,\sin\theta) - z\sin^2\theta \\ +y\cos^2\theta + [(1+y\,z)/x](\cos\theta\,\sin\theta) \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} -x(\cos\theta\,\sin\theta) + z\cos^2\theta \\ -y\sin^2\theta + [(1+y\,z)/x](\cos\theta\,\sin\theta) \end{array} & \begin{array}{c} x\sin^2\theta - z(\cos\theta\,\sin\theta) \\ -y(\cos\theta\,\sin\theta) + [(1+y\,z)/x]\cos^2\theta \end{array} \end{pmatrix}, t\right) \end{aligned}$$

on a

$$D_{x_0}S = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & \cos\theta\,\sin\theta & \cos\theta\,\sin\theta & 0 \\ \\ -2\,\cos\theta\,\sin\theta & \cos^2\theta & -\sin^2\theta & 0 \\ \\ -2\,\cos\theta\,\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquence

$$\begin{aligned} (D_{x_0}S)^t.B.(D_{x_0}S) &= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

(pour les calcul on a utiliser le fait que

$$2\,cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^4\theta+sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2=1)$$

D'où la condition (4.3.1) est vérifiée.

Pour déterminer la métrique en un point $p=\left(\begin{pmatrix}u & v\\ w & (1+v\,w)/u\end{pmatrix},s\right)$ il suffit d'appliquer (4.3.2) à $k\in Sl_2\times\mathbb{R}\ltimes SO_2$ vérifiant $k.x_0=p$.

Il est facile de voir que

$$\left[\left(\begin{pmatrix}u & v\\ w & (1+v\,w)/u\end{pmatrix},s\right),I_2\right](I_2,0)=\left(\begin{pmatrix}u & v\\ w & (1+v\,w)/u\end{pmatrix},s\right)$$

donc on peut prendre $k=\left[\left(\begin{pmatrix}u & v\\ w & (1+v\,w)/u\end{pmatrix},s\right),I_2\right]$

posons $q=\left(\begin{pmatrix}x & y\\ z & (1+y\,z)/x\end{pmatrix},t\right)$

$$\begin{aligned}k.q &= \left(\begin{pmatrix}u & v\\ w & (1+v\,w)/u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & (1+y\,z)/x\end{pmatrix},s+t\right)\\ &= \left(\begin{pmatrix}u\,x+v\,z & u\,y+v\,[(1+y\,z)/x]\\ \\ w\,x+[(1+v\,w)/u]\,z & w\,y+[(1+v\,w)/u][(1+y\,z)/x]\end{pmatrix},s+t\right)\end{aligned}$$

$$(D_{x_0}k)^{-1}=\begin{pmatrix}(1+v\,w)/u & 0 & -v & 0\\ v(1+v\,w)/u^2 & 1/u & -v^2/u & 0\\ -w & 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Cela nous permet de calculer la métrique g au point $p = \left(\begin{pmatrix} u & v \\ w & (1+v\,w)/u \end{pmatrix}, s\right)$

$$g_p = [(D_{x_0}k)^{-1}]^t.B.(D_{x_0}k)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix}(1+v\,w)^2(8\,u^2+5\,v^2)/u^4 \\ +2\,v\,w(1+v\,w)/u^2+5\,w^2\end{matrix} & \begin{matrix}5\,v(1+v\,w)/u^3 \\ +(w/u)\end{matrix} & \begin{matrix}-v(1+v\,w)(9\,u^2+5\,v^2)/u^3 \\ -w(v^2+5\,u^2)/u\end{matrix} & 0 \\ 5\,v(1+v\,w)/u^3+(w/u) & 5/u^2 & -5\,(v^2/u^2)-1 & 0 \\ \begin{matrix}-v(1+v\,w)(9\,u^2+5\,v^2)/u^3 \\ -w(v^2+5\,u^2)/u\end{matrix} & -5\,(v^2/u^2)-1 & 10\,v^2+5\,u^2+5\,(v^4/u^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

D'où la métrique g au point $q = \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & (1+y\,z)/x \end{pmatrix}, t\right)$ sera

$$g_q = \begin{pmatrix} \begin{matrix}(1+y\,z)^2(8\,x^2+5\,y^2)/x^4 \\ +2\,y\,z(1+y\,z)/x^2+5\,z^2\end{matrix} & \begin{matrix}5\,y(1+y\,z)/x^3 \\ +(z/x)\end{matrix} & \begin{matrix}-y(1+y\,z)(9\,x^2+5\,y^2)/x^3 \\ -z(y^2+5\,x^2)/x\end{matrix} & 0 \\ 5\,y(1+y\,z)/x^3+(z/x) & 5/x^2 & -5\,(y^2/x^2)-1 & 0 \\ \begin{matrix}-y(1+y\,z)(9\,x^2+5\,y^2)/x^3 \\ -z(y^2+5\,x^2)/x\end{matrix} & -5\,(y^2/x^2)-1 & 10\,y^2+5\,x^2+5\,(y^4/x^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.3.7 $Nil^3 \times \mathbb{R}$:

$$X = Nil^3 \times \mathbb{R} \quad , \quad Nil^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; / \; x,\, y,\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$G = (Nil^3 \times \mathbb{R}) \ltimes SO_2$

La loi du produit semidirect de G est définie par :

$$\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right), \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right] \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t' \right), \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \right]$$

$$= \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x\, cos\theta + y\, \sin\theta & z - x\, y\, \sin^2\theta + [(y^2 - x^2)/4] \sin 2\,\theta \\ 0 & 1 & -x\, \sin\theta + y\, \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t + t' \right), \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \right]$$

L'action de $G = (Nil^3 \times \mathbb{R}) \ltimes SO_2$ sur $Nil^3 \times \mathbb{R}$ est définie par :

$$\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right), \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right] \left(\begin{pmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t' \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x\, cos\theta + y\, \sin\theta & z - x\, y\, \sin^2\theta + [(y^2 - x^2)/4] \sin 2\,\theta \\ 0 & 1 & -x\, \sin\theta + y\, \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t + t' \right)$$

L'élément neutre de $Nil^3 \times \mathbb{R} \quad e = (I_3, 0)$

Fixons $x_0 = e$, il est facile de voir que $G_{x_0} = \{e\} \times SO_2 \cong SO_2$

On prend la paramétrisation

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & Nil^3 \times \mathbb{R} \\ & (x, y, z, t) & \longrightarrow & \left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right) \end{array}$$

Prenons le produit scalaire $B = I_4$ sur $T_{x_0}(Nil^3 \times \mathbb{R})$

vérifions que la condition (4.3.1) est vérifiée

Soit $h = \left[(I_3, 0), \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right] \in G_{x_0} = \{e\} \times SO_2$

posons $q = \left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t\right)$

$$h.q = \left(\begin{pmatrix} 1 & x\, cos\theta + y\, \sin\theta & z - x\, y\, \sin^2\theta + [(y^2 - x^2)/4]\sin 2\theta \\ 0 & 1 & -x\, \sin\theta + y\, \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t\right)$$

$$D_{x_0}h = \begin{pmatrix} \cos\,\theta & \sin\,\theta & 0 & 0 \\ -\sin\,\theta & \cos\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (D_{x_0}h)^t.B.(D_{x_0}h) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

D'où la condition (4.3.1) est vérifiée .

Pour déterminer la métrique au point $p = \left(\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s\right)$ il suffit d'appliquer (4.3.2) à $k \in (Nil^3 \times \mathbb{R}) \ltimes SO_2$ vérifiant $k.x_0 = p$.

Il est facile de voir que

$$\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s\right), I_2\right]\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s\right)$$

donc on peux prendre $k = \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s\right), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Posons que $q = \left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right)$

$$k.q \;=\; \left(\begin{pmatrix} 1 & x+u & z+u\,y+w \\ 0 & 1 & y+v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s+t \right)$$

$$(D_{x_0}k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après (4.3.2) la métrique g au point p

$$\begin{aligned} g_p &= [(D_{x_0}k)^{-1}]^t.B.(D_{x_0}k)^{-1} \\ &= [(D_{x_0}k)^{-1}]^t.I_4.(D_{x_0}k)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -u & 0 \\ 0 & -u & 1+u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la métrique g au point $\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right)$

$$g_{\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Structures complexes et géométries de Thurston de dimension 4

Wall a prouvé (dans [51]) que les seules géométries de Thurston admettant une structure complexe sont : $S^2 \times S^2$, $S^2 \times \mathbb{R}^2$, $S^2 \times H^2$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $P^(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$, $S^3 \times \mathbb{R}$, F^4, $Nil^3 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{Sl}_2(\mathbb{R}) \ \times \ \mathbb{R}$, Sol_0^4 et Sol_1^4. Il a prouvé aussi l'unicité sauf pour Sol_1^4 il a montré que ce dernier espace admet que deux structures complexes.

D'où les seules géométries de Thurston non symétriques admettant une structure complexe sont : F^4, $Nil^3 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{Sl}_2(\mathbb{R}) \ \times \ \mathbb{R}$, Sol_0^4 et Sol_1^4.

Pour chaqu'un de ces derniers espaces exprimons les structures complexes dans le système de coordonnées local considérée, en deuxième section, pour la détermination de la métrique Riemannienne.

4.4.1 F^4 :

La structure complexe J s'exprime ainsi :

$$J = \begin{pmatrix} -s/t & (s^2+t^2)/t & 0 & 0 \\ -1/t & s/t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.2 $Nil^3 \times \mathbb{R}$:

J s'exprime ainsi :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.3 $Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$:

J s'exprime ainsi :

$$J = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} -(y/2x)(1+yz) \\ -(xz)/2 \end{array} & 1/2 & (x^2+y^2)/2 & -y/2 \\ \\ \begin{array}{c} -(1+(y^2/(2x^2)))(1+yz) \\ +(y\,z)/2 \end{array} & -y/(2x) & (xy/2)+(y^3/2x) & x/2 \\ \\ \begin{array}{c} -((1+yz)/x^2)(1+(yz)/2) \\ -z^2/2 \end{array} & z/(2x) & \begin{array}{c} (y/x)(1+yz) \\ -(y^2z/(2x))+(xz/2) \end{array} & -(1+yz)/(2x) \\ \\ -(y(1+yz)/x^2)-z & -1/x & ((y^2)/x)+x & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.4 Sol_0^4 :

J s'exprime ainsi :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.5 Sol_1^4 :

Pour Sol_1^4 on a deux structure complexes

$$J_1 = \begin{pmatrix} -z & t & 0 & 0 \\ -(1+z^2)/t & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & -(1+z^2)/t \\ 0 & 0 & t & -z \end{pmatrix}$$

et

$$J_2 = \begin{pmatrix} -z & t & 0 & 0 \\ -(1+z^2)/t & z & 0 & 0 \\ -(1-z^2)/t & -z & z & -(1+z^2)/t \\ z & -t & t & -z \end{pmatrix}$$

4.5 Compatibilité des métriques avec les structures complexes

Pour les espace F^4, $Nil^3 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{Sl_2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, Sol_0^4 on peut vérifier que les métriques qu'on a construit sont Hermitiennes. On fait $J^t.g.J = g$ pour tout ses espaces,où g est la métrique Riemannienne qu'on a construit et J la structure complexe.

Pour Sol_1^4 la métrique qu'on a construit g, noté ici par g_1, est Hermitienne pour la structure complexe J_1 (i.e. $J_1^t.g_1.J_1 = g_1$). On peut construire une métrique Hermitienne par rapport à structure complexe J_2 de Sol_1^4 on utilisant le même procédé. En fait en prendrons

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on obtient la métrique

$$g_2 = \begin{pmatrix} 3(1+z^2)/t^2 & -3z/t & z/t & (1-z^2)/t^2 \\ -3z/t & 3 & -1 & z/t \\ z/t & -1 & 2 & -2z/t \\ (1-z^2)/t^2 & z/t & -2z/t & 2(1+z^2)/t^2 \end{pmatrix}$$

qu'est Hermitienne par rapport à structure complexe J_2.

4.6 Sommaire

On a obtenu pour chaqu'un des espaces suivants : Nil^4 , $Sol^4_{m,n}$, Sol^4_1 , F^4 , Sol^4_0 , $Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ et $Nil^3 \times \mathbb{R}$ une métrique invariante.

$$Nil^4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -t & t^2/2 & 0 \\ -t & 1+t^2 & -t(1+(t^2/2)) & 0 \\ t^2/2 & -t(1+(t^2/2)) & 1+t^2+(t^4/4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sol^4_{m,n} \qquad \begin{pmatrix} e^{-2\,\alpha\, t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\,\beta\, t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\,\gamma\, t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sol^4_1 \qquad \begin{pmatrix} (1+z^2)/t^2 & -z/t & 0 & 0 \\ -z/t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z/t \\ 0 & 0 & -z/t & (1+z^2)/t^2 \end{pmatrix}$$

$$F^4 \qquad \begin{pmatrix} 1/t & -s/t & 0 & 0 \\ -s/t & (s^2+t^2)/t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(4\,t^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(4\,t^2) \end{pmatrix}$$

$$Sol^4_0 \qquad \begin{pmatrix} e^{-2\,t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\,t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4\,t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Nil^3 \times \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}(1+y\,z)^2(8\,x^2+5\,y^2)/x^4 \\ +2\,y\,z(1+y\,z)/x^2+5\,z^2\end{matrix} & \begin{matrix}5\,y(1+y\,z)/x^3 \\ +(z/x)\end{matrix} & \begin{matrix}-y(1+y\,z)(9\,x^2+5\,y^2)/x^3 \\ -z(y^2+5\,x^2)/x\end{matrix} & 0 \\ 5\,y(1+y\,z)/x^3+(z/x) & 5/x^2 & -5\,(y^2/x^2)-1 & 0 \\ \begin{matrix}-y(1+y\,z)(9\,x^2+5\,y^2)/x^3 \\ -z(y^2+5\,x^2)/x\end{matrix} & -5\,(y^2/x^2)-1 & 10\,y^2+5\,x^2+5\,(y^4/x^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.6.1. *On peut Déterminer toutes métriques Riemanniennes (resp. Hermitiennes) invariantes par le groupe G pour chaque géométrie de Thurston, non symétrique, (G, X). Pour cela il suffit de prendre tous les produits scalaires B sur $T_{x_0}X$ vérifiant (4.3.1) (resp. (4.3.1) et la compatibilité avec la structure complexe concernée). On obtient*

Espace	*Métriques Riemanniennes*	*Métriques Hermitiennes*
F^4	$c_1\left(\frac{(dx-sdy)^2}{t}+tdy^2\right) + c_2\left(\frac{ds^2+dt^2}{t^2}\right)$ *avec* $c_1, c_2 > 0$	$c_1\left(\frac{(dx-sdy)^2}{t}+tdy^2\right) + c_2\left(\frac{ds^2+dt^2}{t^2}\right)$ *avec* $c_1, c_2 > 0$
Sol_0^4	$c_1e^{-2t}(dx^2 + dy^2) + c_2e^{4t}dz^2 + 2c_4e^{2t}dzdt + c_3dt^2$ *avec* $c_1, c_2 > 0$ *et* $c_2c_3 - c_4^2 > 0$	$c_1e^{-2t}(dx^2+dy^2)+c_2(e^{4t}dz^2+dt^2)$ *avec* $c_1, c_2 > 0$
$Nil^3 \times \mathbb{R}$	$c_1(dx^2 + (dy - xdz)^2) + c_2dz^2 + 2c_4dzdt + c_3dt^2$ *avec* $c_1, c_2 > 0$ *et* $c_2c_3 - c_4^2 > 0$	$c_1(dx^2+(dy-xdz)^2+dz^2+dt^2)$ *avec* $c_1 > 0$

$Sl_2(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$	$B=\begin{pmatrix}2(c_1+c_2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_1 & c_2 & -c_4\\ 0 & c_2 & c_1 & c_4\\ 0 & -c_4 & c_4 & c_3\end{pmatrix}$ *avec* $c_1>\vert c_2\vert$ *et* $(c_1-c_2)c_3>2c_4^2$	$B=\begin{pmatrix}2(c_1+c_2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_1 & c_2 & 0\\ 0 & c_2 & c_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_1-c_2}{2}\end{pmatrix}$ *avec* $c_1>\vert c_2\vert$
Sol_1^4	$B=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ c_2 & c_5 & c_6 & c_7\\ c_3 & c_6 & c_8 & c_9\\ c_4 & c_7 & c_9 & c_{10}\end{pmatrix}$ *avec* $c_1>0$, $c_1c_5-c_2^2>0$, $c_1(c_5c_8-c_6^2)-c_2^2c_8+2c_2c_3c_6-c_3^2c_5>0$ *et* $\det(B)>0$	*Pour* J_1, $c_5=c_1$, $c_6=c_4$, $c_7=-c_3$, $c_{10}=c_8$ *et* $c_2=c_9=0$. *Pour* J_2, $c_4=c_6+c_8$, $c_5=c_1-2c_6-c_8$, $c_2=c_7=-c_3$, $c_9=0$ *et* $c_{10}=c_8$
$Sol_{m,n}^4$, Nil^4	*idem*	*Il n'y pas de structure complexe*

Chapitre 5

La pseudo symétrie et les géométries de Thurston

5.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de montrer que les géométries modèles de Thurston de dimension 4, qui ne sont pas symétrique, ne sont ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique et de montrer que la géométrie modèle F^4 est holomorphiquement pseudo symétrique.

L'étude de la pseudo symétrie des géométries modèles de Thurston de dimension trois a été fait par Belkhelfa, Deszcz and Verstraelen. Ils ont obtenus le résultat suivant.

Théorème 5.1.1. *[3] Tout géométrie modèle de Thurston de dimension trois est pseudo symétrique.*

Dans [36] Stephan Maier a étudié la platitude conforme (conformal flatness) des géométries modèles de Thurston de dimension trois et quatre. Il a montré que :

En dimension trois :les géométries modèles de Thurston de dimension trois admettant une métrique conformément plate sont :E^3, H^3, S^3, $S^2 \times E^1$ et $H^2 \times E^1$.

En dimension quatre :les géométries modèles de thurston de dimension quatre admettant une métrique conformément plate sont : E^4, H^4, S^4, $S^3 \times E^1$, $H^3 \times E^1$, $S^2 \times H^2$.

5.2 L'étude de la pseudo symétrie des géométries de Thurston de dimension 4

Théorème 5.2.1. *Toutes les géométries modèles de Thurston de dimension quatre qui ne sont pas symétriques ne sont ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique.*

Corollaire 5.2.1. *Toutes les géométries modèles de Thurston de dimension quatre qui ne sont pas symétriques ne sont pas Weyl semi symétrique.*

Remarques 5.2.1.

- *On peut voir, du theorem 5.2.1, que les géométries modèles de Thurston de dimension quatre non symétriques ne sont pas pseudo symétrique (car tout variété pseudo symétrique est Ricci pseudo symétrique).*
- *Le corollaire 5.2.1 est plus général que le résultat de Stephan Maier ([36]). En fait tout espace conformément plat(i.e $C = 0$ pour $\dim M > 3$) est Weyl semi symétrique($R.C = 0$).*

preuve du théorème 5.2.1

On sait que : $S^2 \times S^2$, $S^2 \times E^2$, $S^2 \times H^2$, E^4, $E^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $S^3 \times E^1$, $H^3 \times E^1$, S^4, H^4, $P^2(\mathbb{C})$ et $H^2(\mathbb{C})$ sont des espaces symétriques ([22] page 129).

Pour prouve le théorème 5.2.1 il suffit d'étudier la Ricci pseudo symétrie (resp. Weyl pseudo symétrie) des géométries modèles de Thurston de dimension quatre non symétriques.

Dans tout qui suit on prend le système de coordonnées (x, y, z, t) et on pose

$$e_1 = \partial_x \, , \; e_2 = \partial_y, \; e_3 = \partial_z \, , \; e_4 = \partial_t$$

5.2.1 F^4 :

Pour la paramétrisation $\mathbb{R}^2 \times H^2$

$$\begin{array}{cccc} \varphi \ : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \times H^2 \\ & (x, y, z, t) & \longrightarrow & (x, y, z + it) \end{array}$$

On a la métrique :

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t} & -\dfrac{z}{t} & 0 & 0 \\[2ex] -\dfrac{z}{t} & \dfrac{t^2+z^2}{t} & 0 & 0 \\[2ex] 0 & 0 & \dfrac{1}{4\,t^2} & 0 \\[2ex] 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{4\,t^2} \end{pmatrix}$$

Cette métrique n'est pas Ricci pseudo symétrique. En fait

$$Q(g,S)(e_1,e_3,e_1,e_3) = \frac{-3}{2\,t^3}\ ,\ R.S(e_1,e_3,e_1,e_3) = \frac{3}{2\,t^3}$$

et

$$Q(g,S)(e_1,e_3,e_2,e_4) = 0\ ,\ R.S(e_1,e_3,e_2,e_4) = \frac{-3}{2\,t^2}$$

De plus on peut déduire de

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_3,e_1,e_4) = \frac{-3}{4\,t^3}\ ,\ R.C(e_1,e_2,e_1,e_3,e_1,e_4) = \frac{3}{4\,t^3}$$

et

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_3,e_2,e_3) = 0\ ,\ R.C(e_1,e_2,e_1,e_3,e_2,e_3) = \frac{3}{4\,t^2}$$

que la métrique g n'est pas Weyl pseudo symétrique.

5.2.2 Sol_0^4 :

L'espace Sol_0^4 est le produit semidirect $\mathbb{R}^3 \ltimes_\delta \mathbb{R}$ avec

$$\delta(t)(x,y,z) = (e^t x, e^t y, e^{-2t} z)$$

On prend la métrique $g = e^{-2t}(dx^2+dy^2) + e^{4t}dz^2 + dt^2$

Cette métrique n'est pas Ricci pseudo symétrique. En fait

$$Q(g,S)(e_1,e_4,e_1,e_4) = -6e^{-2t}\ ,\ R.S(e_1,e_4,e_1,e_4) = 6e^{-2t}$$

et

$$Q(g,S)(e_3,e_4,e_3,e_4) = -6e^{4t}\ ,\ R.S(e_3,e_4,e_3,e_4) = 24e^{4t}$$

De plus de

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_3,e_2,e_3) = 3\ ,\ R.C(e_1,e_2,e_1,e_3,e_2,e_3) = 6$$

et

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_4,e_2,e_4) = 3e^{-4t}\ ,\ R.C(e_1,e_2,e_1,e_4,e_2,e_4) = -3e^{-4t}$$

on obtient que la métrique g n'est pas Weyl pseudo symétrique.

5.2.3 Sol_1^4 :

Comme l'espace Sol_1^4 a deux structures complexes J_1 et J_2 (voir page 71) on effectuera la preuve pour le deux métriques compatibles g_1 et g_2 respectivement.

On a

$$g_1 = \begin{pmatrix} (1+z^2)/t^2 & -z/t & 0 & 0 \\ -z/t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z/t \\ 0 & 0 & -z/t & (1+z^2)/t^2 \end{pmatrix}$$

Cette métrique est ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique. En fait

$$Q(g_1,S)(e_1,e_1,e_1,e_2) = \frac{-2z}{t^3}\ ,\ R.S(e_1,e_1,e_1,e_2) = \frac{-z}{2t^3}$$

$$Q(g_1,S)(e_1,e_1,e_3,e_4) = 0\ ,\ R.S(e_1,e_1,e_3,e_4) = \frac{-z}{t^3}$$

et

$$Q(g_1,C)(e_1,e_3,e_1,e_3,e_1,e_2) = \frac{z}{t^3}\ ,\ R.C(e_1,e_3,e_1,e_3,e_1,e_2) = \frac{3z}{4t^3}$$

$$Q(g_1,C)(e_1,e_3,e_1,e_3,e_3,e_4) = \frac{z}{t^3}\ ,\ R.C(e_1,e_3,e_1,e_3,e_3,e_4) = \frac{-z}{2t^3}$$

De même pour la métrique

$$g_2 = \begin{pmatrix} 3(1+z^2)/t^2 & -3z/t & z/t & (1-z^2)/t^2 \\ -3z/t & 3 & -1 & z/t \\ z/t & -1 & 2 & -2z/t \\ (1-z^2)/t^2 & z/t & -2z/t & 2(1+z^2)/t^2 \end{pmatrix}$$

Puisque

$$Q(g_2,S)(e_1,e_1,e_1,e_2) = \frac{-378z}{25t^3}\ ,\ R.S(e_1,e_1,e_1,e_2) = \frac{-1053z}{t^3}$$

$$Q(g_2,S)(e_1,e_1,e_3,e_4) = \frac{-42z}{25t^3}\ ,\ R.S(e_1,e_1,e_3,e_4) = \frac{-576z}{125t^3}$$

et

$$Q(g_2,C)(e_1,e_3,e_1,e_3,e_1,e_2) = \frac{54z}{5t^3}\ ,\ R.C(e_1,e_3,e_1,e_3,e_1,e_2) = \frac{378z}{125t^3}$$

$$Q(g_2,C)(e_1,e_3,e_1,e_3,e_3,e_4) = \frac{12z}{t^3}\ ,\ R.C(e_1,e_3,e_1,e_3,e_3,e_4) = \frac{-1347z}{t^3}.$$

5.2.4 $Nil^3 \times \mathbb{R}$:

Pour $Nil^3 \times \mathbb{R}$ on a la métrique

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette métrique est ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique. En fait

$$Q(g,S)(e_1,e_2,e_1,e_2) = 1\ ,\ R.S(e_1,e_2,e_1,e_2) = \frac{1}{4}$$

$$Q(g,S)(e_1,e_4,e_1,e_4) = \frac{1}{2}\ ,\ R.S(e_1,e_4,e_1,e_4) = 0$$

et

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_3,e_2,e_3) = \frac{-1}{2}\ ,\ R.C(e_1,e_2,e_1,e_3,e_2,e_3) = \frac{-1}{8}$$

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_2,e_4,e_1,e_4) = \frac{1}{2}\ ,\ R.C(e_1,e_2,e_2,e_4,e_1,e_4) = 0$$

5.2.5 Nil^4 :

Pour Nil^4 on prend la métrique

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -t & \dfrac{t^2}{2} & 0 \\ \\ -t & 1+t^2 & -t\left(\dfrac{t^2}{2}+1\right) & 0 \\ \\ \dfrac{t^2}{2} & -t\left(\frac{t^2}{2}+1\right) & 1+t^2+\dfrac{t^4}{4} & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette métrique est ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique. En fait

$$Q(g,S)(e_1,e_2,e_1,e_2) = \frac{-1}{2}\ ,\ R.S(e_1,e_2,e_1,e_2) = \frac{-1}{8}$$

$$Q(g,S)(e_1,e_2,e_2,e_3) = \frac{-t^2}{4}\ ,\ R.S(e_1,e_2,e_2,e_3) = \frac{-t^2}{16} + \frac{1}{8}$$

et

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_2,e_1,e_3) = \frac{1}{2}\ ,\ R.C(e_1,e_2,e_1,e_2,e_1,e_3) = 0$$

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_3,e_1,e_2) = \frac{-1}{4}\ ,\ R.C(e_1,e_2,e_1,e_3,e_1,e_2) = \frac{-1}{16}$$

5.2.6 $Sol_{m,n}$:

Pour $Sol_{m,n}$ on prend la métrique

$$g = \begin{pmatrix} e^{-2t\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t\beta} & 0 & \\ 0 & 0 & e^{-2t\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette métrique est ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique. En fait

$$Q(g,S)(e_1,e_2,e_1,e_2) = (\alpha\gamma + \alpha^2 - \beta\gamma - \beta^2)\, e^{-2t(\beta+\alpha)}$$

$$R.S(e_1,e_2,e_1,e_2) = -\alpha\beta(\alpha\gamma + \alpha^2 - \beta\gamma - \beta^2)\, e^{-2t(\beta+\alpha)}$$

$$Q(g,S)(e_1,e_3,e_1,e_3) = (\alpha\beta+\alpha^2-\beta\gamma-\gamma^2)\,e^{-2t(\gamma+\alpha)}$$
$$R.S(e_1,e_3,e_1,e_3) = -\alpha\gamma(\alpha\beta+\alpha^2-\beta\gamma-\gamma^2)\,e^{-2t(\gamma+\alpha)}$$

et

$$Q(g,C)(e_2,e_3,e_1,e_3,e_2,e_1) = \frac{1}{2}(\gamma\beta+\alpha^2-\alpha\gamma-\beta^2)\,e^{-2t(\gamma+\alpha+\beta)}$$
$$R.C(e_2,e_3,e_1,e_3,e_2,e_1) = -\alpha\beta\frac{1}{2}(\gamma\beta+\alpha^2-\alpha\gamma-\beta^2)\,e^{-2t(\gamma+\alpha+\beta)}$$
$$Q(g,C)(e_2,e_3,e_2,e_1,e_1,e_3) = \frac{-1}{2}(\gamma\beta+\alpha^2-\alpha\beta-\gamma^2)\,e^{-2t(\gamma+\alpha+\beta)}$$
$$R.C(e_2,e_3,e_2,e_1,e_1,e_3) = \alpha\gamma\frac{1}{2}(\gamma\beta+\alpha^2-\alpha\beta-\gamma^2)\,e^{-2t(\gamma+\alpha+\beta)}$$

5.2.7 $Sl_2(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$:

On peut prendre la métrique

$$g = \begin{pmatrix} \begin{array}{c}(\frac{1+yz}{x})^2(8+5\frac{y^2}{x^2})\\ +2y\,z\frac{1+yz}{x^2}+5z^2\end{array} & \begin{array}{c}\frac{5y(1+yz)}{x^3}\\ +\frac{z}{x}\end{array} & \begin{array}{c}-\frac{y(1+yz)}{x}(9+5\frac{y^2}{x^2})\\ -z(\frac{y^2}{x}+5x)\end{array} & 0 \\ \begin{array}{c}\frac{5y(1+yz)}{x^3}\\ +\frac{z}{x}\end{array} & \frac{5}{x^2} & -(\frac{5y^2}{x^2}+1) & 0 \\ \begin{array}{c}-\frac{y(1+yz)}{x}(9+5\frac{y^2}{x^2})\\ -z(\frac{y^2}{x}+5x)\end{array} & -(\frac{5y^2}{x^2}+1) & \begin{array}{c}10\,y^2+5\,x^2\\ +5\frac{y^4}{x^2}\end{array} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette métrique est ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique. En fait

$$Q(g,S)(e_2,e_2,e_1,e_2) = \frac{-30z}{x^3}$$
$$R.S(e_2,e_2,e_1,e_2) = \frac{-45z}{8x^3}$$
$$Q(g,S)(e_2,e_4,e_2,e_4) = \frac{15}{8x^2}$$
$$R.S(e_2,e_4,e_2,e_4) = 0$$

et

$$Q(g,C)(e_2,e_4,e_1,e_3,e_2,e_4) = -\frac{45y}{2x^3}$$
$$R.C(e_2,e_4,e_1,e_3,e_2,e_4) = 0$$

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_2,e_2,e_3) = -\frac{120(1+yz)}{x^4}$$
$$R.C(e_1,e_2,e_1,e_2,e_2,e_3) = -\frac{45(1+yz)}{2x^4}$$

Remarque 5.2.1. *On peut montrer en utilisant les même calculs que toutes les métriques Riemanniennes, invariantes par G, des géométries F^4, $Nil^3 \times \mathbb{R}$ $Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ Sol_0^4 et les métriques Hermitiennes de Sol_1^4 ne sont pas pseudo symétriques. On conjecture que toutes les métrique Riemanniennes de Sol_1^4, $Sol_{m,n}^4$ et Nil^4 ne sont pas pseudo symétriques.*

5.3 La pseudo symétrie holomorphe de F^4

Théorème 5.3.1. *F^4 est holomorphiquement pseudo symétrique de type constant avec $R.R = -\widetilde{Q}(g,R)$*

Dans ([51], theorem 4 page 282), Wall a prouvé que :
$S^2 \times S^2,\ S^2 \times E^2,\ S^2 \times H^2,\ E^2,\ E^2 \times H^2,\ H^2 \times H^2,\ P^2(\mathbb{C}),\ H^2(\mathbb{C})$ and F^4 sont les seules géométries modèles de Thurston de dimension 4 admettant une structure Kählerienne compatible avec le groupe des isométries maximal.

Alors F^4 est la seule géométrie modèle de Thurston Kählerian non symétrique. Du theorem 5.3.1 on peut dire que :

Corollaire 5.3.1. *Tout géométrie modèle de Thurston de dimension 4 Kählerienne est holomorphiquement pseudo symétrique .*

Preuve du théorème 5.3.1

Pour F^4 on a la métrique

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{z}{t} & 0 & 0 \\ -\frac{z}{t} & \frac{t^2+z^2}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\,t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\,t^2} \end{pmatrix}$$

et la structure complexe :

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{z}{t} & \frac{z^2+t^2}{t} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{t} & \frac{z}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour tout $i, j, , j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ such that $i < j$, $k < l$, $r < s$ and $i \leqslant k$ on a calculé $R.R(e_i, e_j, e_k, e_l; e_r, e_s)$, $\widetilde{Q}(g, R)(e_i, e_j, e_k, e_l; e_r, e_s)$ et on a obtenu que les seules composantes non nulles sont les suivantes :

$R.R(e_1,e_2,e_1,e_3;e_1,e_4)=\frac{3}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_1,e_3;e_1,e_4)=-\frac{3}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_2,e_1,e_3;e_2,e_3)=\frac{3}{2\,t^2}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_1,e_3;e_2,e_3)=-\frac{3}{2\,t^2}$
$R.R(e_1,e_2,e_1,e_3;e_2,e_4)=-\frac{3\,z}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_1,e_3;e_2,e_4)=\frac{3\,z}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_2,e_1,e_4;e_1,e_3)=-\frac{3}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_1,e_4;e_1,e_3)=\frac{3}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_2,e_1,e_4;e_2,e_3)=\frac{3\,z}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_1,e_4;e_2,e_3)=-\frac{3\,z}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_2,e_1,e_4;e_2,e_4)=\frac{3}{2\,t^2}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_1,e_4;e_2,e_4)=-\frac{3}{2\,t^2}$
$R.R(e_1,e_2,e_2,e_3;e_1,e_3)=-\frac{3}{2\,t^2}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_2,e_3;e_1,e_3)=\frac{3}{2\,t^2}$
$R.R(e_1,e_2,e_2,e_3;e_1,e_4)=-\frac{3\,z}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_2,e_3;e_1,e_4)=\frac{3\,z}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_2,e_2,e_3;e_2,e_4)=\frac{3(z^2+t^2)}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_2,e_3;e_2,e_4)=-\frac{3(z^2+t^2)}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_2,e_2,e_4;e_1,e_3)=\frac{3\,z}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_2,e_4;e_1,e_3)=-\frac{3\,z}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_2,e_2,e_4;e_1,e_4)=-\frac{3}{2\,t^2}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_2,e_4;e_1,e_4)=\frac{3}{2\,t^2}$
$R.R(e_1,e_2,e_2,e_4;e_2,e_3)=-\frac{3(z^2+t^2)}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_2,e_2,e_4;e_2,e_3)=\frac{3(z^2+t^2)}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_3,e_1,e_2;e_1,e_4)=\frac{3}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_3,e_1,e_2;e_1,e_4)=-\frac{3}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_3,e_1,e_2;e_2,e_3)=\frac{3}{2\,t^2}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_3,e_1,e_2;e_2,e_3)=-\frac{3}{2\,t^2}$
$R.R(e_1,e_3,e_1,e_2;e_2,e_4)=-\frac{3\,z}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_3,e_1,e_2;e_2,e_4)=\frac{3\,z}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_4,e_1,e_2;e_1,e_3)=-\frac{3}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_4,e_1,e_2;e_1,e_3)=\frac{3}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_4,e_1,e_2;e_2,e_3)=\frac{3\,z}{2\,t^3}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_4,e_1,e_2;e_2,e_3)=-\frac{3\,z}{2\,t^3}$
$R.R(e_1,e_4,e_1,e_2;e_2,e_4)=\frac{3}{2\,t^2}$ $\qquad\widetilde{Q}(g,R)(e_1,e_4,e_1,e_2;e_2,e_4)=-\frac{3}{2\,t^2}$

donc $R.R=-\widetilde{Q}(g,R)$ et par conséquence F^4 est holomorphiquement pseudo symétrique de type constant.

Remarque 5.3.1. *Dans [41], Olszak a prouvé que tout variété compact holomorphiquement pseudo symétrique de courbure scalaire constante et avec une fonction de structure f positive ($R.R=f\widetilde{Q}(g,R)$) est localement symétrique (i.e $\nabla R=0$). Il a construit des exemples de variétés Kähleriennes non compactes holomorphiquement pseudo symétriques et non semi-symétriques. Les premiers exemples de variétés Kähleriennes compactes simplement connexes holomorphiquement pseudo symétriques et non semi-symétrique sont données par Jelonek [29].*

F^4 est une variété Kählerienne non compacte pseudo holomorphiquement symétrique et non pseudo symétrique de courbure scalaire constante négative et avec une fonction de structure constante négative.

5.4 Conclusion

On a montré que les géométries modèles de Thurston de dimension quatre, qui ne sont pas symétriques (à savoir Nil^4, $Sol^4_{m,n}$, $\widetilde{Sl_2(\mathbb{R})} \times E^1$, $Nil^3 \times E^1$, Sol^4_0, Sol^4_1 et F^4), ne sont pas pseudo symétriques. Parmi ces espace il y a cinq qui ont une structure complexes (à savoir $\widetilde{Sl_2(\mathbb{R})} \times E^1$, $Nil^3 \times E^1$, Sol^4_0, Sol^4_1 et F^4) et parmi ces derniers il y a une seule, à savoir F^4, qui admet une métrique Kählerienne.

On a montré que F^4 est holomorphiquement pseudo symétrique.

En conclusion on peut dire que les géométries de Thurston Kähleriennes sont holomorphiquement pseudo symétriques.

Nous espérons étendre cette étude pour des métriques semi-Riemanniennes en précisant les liens possibles entre d'une part la pseudo symétrie d'une métrique sur X et d'autre part le groupe de difféomorphismes G et le stabilisateur de l'action de G sur X.

Bibliographie

[1] Abdelbasset Hasni and Mohamed Belkhelfa , The study of pseudosymmetry of 4-dimensional Thurston geometries, JP Journal of Geometry and Topology in Volume 13, Number 2, (2013), 153-171.

[2] M.Belkhelfa, *Differential geometry of semi-Riemannian manifolds and submanifolds*, Ph.D Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2001 ;

[3] M.Belkhelfa, R.Deszcz and L.Verstraelen, *Symmetry Properties of 3-dimentional D'Atri Spaces*, kyungpook Math. J. **24** (2006), 367-276.

[4] M.Belkhelfa, R.Deszcz, M.Glogowska, M.Hotloś, D.Kowalczyk and L.Verstraelen, *On some type of curvature conditions*, Banach center Pub. **57**, Inst. of Math. Polish Acad. of Sci., Warszawa, (2002), 179-194.

[5] M.Belkhelfa and A.Hasni, Symmetric properties of Thurston geometry F^4, Proceedings of the Conference RIGA 2011, Mihai, Adela (ed.) et al., Riemannian Geometry and Applications, Bucharest, Romania, (2011), 29-40.

[6] R.Berndt, *Some differential operators in the theory of Jacobi-forms*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, France, IHES/M/84/10, (1984).

[7] Arthur L.Besse, *Einstein manifolds*, Springer, 2008 ;

[8] F. Borghero and R. Caddeo, *Une structure de separabilite et geodesiques dans les huit geometries tridimensionelles de Thurston*, Rend. Mat. Appl. (VII), **9** (1989) 4, 607-624.

[9] P.Buser,*Géométrie Riemannienne*, notes de cours, hiver 2003/2004.

[10] M.P. Do Carmo,*Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, 1993 ;

[11] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.

[12] Y. De Cornulier, *Géométries modèles de dimension trois*, Actes du séminaire de Théorie spectrale et géométrie, Grenoble, Volume 27(2008-2009) 17-43.

[13] F.Defever, R.Deszcz and L.Verstraelen, *On pseudosymmetric para-Kählerian manifolds*, Colloquium Mathematicum, **74** (1997), no.2, 253-260.

[14] J. Deprez, R. Deszcz and L. Verstraelen, *Examples of pseudo-symmetric conformally flat warped products*, Chinese J. Math., **17** (1989), 51-65.

[15] R. Deszcz, *Note on totally umbilical submanifolds manifolds*, Geometry and Topology of Submanifolds, Luminy, **I**, World Sci. Pub., (1987), 89-97.

[16] R. Deszcz, L. Verstraelen, and S. Yaprak, *Pseudo-symmetric hypersurfaces in 4-dimensional spaces of constant curvature*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, **22** (1994), 167-179.

[17] R. Deszcz, *Examples of four-dimensional Riemannian manifolds satisfying some pseudosymmetriy curvature conditions*, Geometry and Topology of Submanifolds, **II**, World Scientific, Singapore, (1990), 134-143.

[18] R. Deszcz, *On pseudo-symmetric spaces*, Bull. Soc. Math. Belg, **44** (1992), 1-34.

[19] R. Deszcz, *On four-dimensional Riemannian warped product manifolds satisfying certain pseudo-symmetry curvature conditions*, Colloq. Math., **62** (1991), 103-120.

[20] R. Deszcz and W. Grycak, *On manifolds satisfying some curvature conditions*, Colloq. Math., **57** (1989), 89-92.

[21] L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1949 ;

[22] R.O.Filipkiewicz, *Four dimensional geometries*, Ph.D thesis, University of warwick, 1983 ;

[23] S.Haesen, L. Verstraelen, *Properties of scalar curvature invariant depending on two planes*, manuscripta math. ; *122* (2007), 59-72.

[24] S.Haesen, L. Verstraelen, *Curvature and symmetries of parallel transport*, Differential Geometry and Topology, Discrete and Computational Geometry, M. Boucetta and J-M. Morvan (Eds), IOS Press, (2005), 197-238.

[25] M.Hotloś, *On holomorphically pseudosymmetric Kählerian manifolds*, Geometry and topology of submanifolds, *VII* (Leuven, 1994/Brussels, 1994), 139-142, WorldSci. Publ., River Edge, NJ, 1995 ;

[26] B. Jahanara, S. Haesen, M. Petrović-Torgašev and L. Verstraelen, *On the Weyl curvature of Deszcz*, Publ. Math. Debrecen, **74** (2009), no. 3-4, 417-431.

[27] B. Jahanara, S. Haesen, Z. Sentürk and L. Verstraelen, *On the parallel transport of the Ricci curvatures* , J. Geom. Phys., **57**, (2007), 1771-1777.

[28] B. Jahanara, *Symmetries in Riemannian geometry*, Ph.D Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2008 ;

[29] W.Jelonek, *Compact holomorphically pseudosymmetric Kählerian manifolds*, Colloq. Math. ; **117** (2009), 243-249.

[30] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential geometry*, **Vol. I**, Interscience Publishers, 1963 ;

[31] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential geometry*, **Vol. II**, Interscience Publishers, 1969 ;

[32] O. Kowalski and M. Sekizawa, *Pseudo-symmetric spaces of constant type in dimension three—non-elliptic spaces*. Bull. Tokyo Gakugei Univ. Sect. IV, **50** (1998), 1-28.

[33] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 2004 ;

[34] T. Levi-Civita *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, Rend. Cir. Mat. Palermo **42** (1917), 173-205.

[35] H. Levy, *Tensors determined by hypersurface in Riemannian space*, Trans. Am. Math. Sco ; **28** (1926), 671-694.

[36] S. Maier, *Conformal flatness and self-duality of Thurston-geometries*, Proc. Am. Math. Soc., **4** (1998), 1165-1172.

[37] K. Nomizu, *On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor*, Tôhoku Math. J., **20** (1968), 46-59.

[38] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 391-404

[39] Z.Olszak, *Bochner flat Kählerian manifolds with a certain conditio on the Ricci tensor*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **63**, (1989), 295-303.

[40] Z.Olszak, *On the existence of pseudosymmetric Kähler manifold*, Colloq. Math., **95** (2003), no. 2, 185-189.

[41] Z.Olszak, *On compact holomorphically pseudosymmetric Kähler manifolds*, Cent. Eur. J. Math., **7** (2009), no. 3, 442-451.

[42] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity*, Academic Press, 1983 ;

[43] V. Patrangenaru, *Classifying* 3 *and* 4 *dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triples*, Pacific Journal of Mathematics, **173** (1996), No. 2, 511-532.

[44] J.A. Schouten,*Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie*, Die direkte Analysis zur neueren Relativit¨atstheorie, Verhan. Konink. Akad. Wet. Amsterdam, **12** (1918), no. 6, 1-95.

[45] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc., **15** (1983), 401-487.

[46] Z.I. Szabó, ıStructure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$, I. The local version , J. Diff. Geom., **17** (1982), 531-582.

[47] Z.I. Szabó, *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$*, II. Global versions*, Geom. Dedicata, **19** (1985), 65-108.

[48] H. Takagi, *An example of a Riemannian manifold satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$ *but not* $\nabla R=0$, Tôhoku Math. J., **24** (1972), 105-108.

[49] W. M. Thurston, *Three-dimensional Geometry and Topology I*, Princeton Math. Series **35** (S. Levy ed.), 1997 ;

[50] L. Verstraelen, *Comments on the pseudo-symmetry in the sense of Deszcz*, Geometry and Topology of Submanifolds, **VI**, eds. F. Dillen et al., World Sc. Publ. Co. Singapore, (1994), 119-209.

[51] C.T.C Wall, *geometries and gemetric structures in real dimension* 4 *and complex dimension* 2, Lecture notes in math. 1167,Springer-Verlag, (1985) 268-292.

[52] C.T.C Wall, *Geometric structures on compact complex analytic surfaces*, Topology, **25** (1986), no. 2, 119-153.

[53] T. J. Willmore, *Riemannian Geometry*,Oxford University press,2002 ;

[54] K. Yano and M Kon , *Structures on manifolds*, World Scientific Publishing, Singapore, 1984 ;

[55] Ş. Yaprak, Pseudosymmetry type curvature conditions on kähler hypersurface, Math. J. Toyama Univ., **18** (1995), 107-136.

ملخص. نقول عن الزوج (G,X) أنه هندسة نموذجية لثرسطون إذا كانت X منوعة مترَابطة و مترَابطة بِبسَاطة وكَانت G زمرة ليي مُؤثِرة علَى X بتعدي, ذات مثبتَات مترَاصة و قصوَى حيث أنه يوجد منوعة M ذَات حجم منته مُقَولبَة حسب (G,X). صَنَفَ ثرسطون الهندسَات النموذجية ذَات البُعد الثَلث. تمَّ تصنيف الهندسَات النموذجية ذَات البُعد الرَابع من قِبل فيليب كيوفيتش. قَام مَاير بدراسة التسطح الإمتثَالي للهندسَات النموذجية لثرسطون. نقول عن منوعة ريمَانية M أَنَها متنَاظر محليًا إِذَا كَان مُوتِر ريمَان مُتَوَازيًا(R=0▼).
نقول عن منوعة ريمَانية M أَنَها نصف متنَاظرة إِذَا حققت R(X,Y).R=0. نقول عن منوعة ريمَانية M أَنَها شبه متنَاظرة, وفقَ معنَى داش, إِذَا وجدت دَالة L_R حيثُ $R(X,Y).R=L_R(X\wedge Y).R$. برهَنَ بلخلفة، دَاش و فرسطرَالن أَنَ كُل الهندسَات النموذجية لثرسطون ذَات البُعد الثَالث شبه متنَاظرة. سنُبرهِن أَنَ الهندسَات النموذجية لثرسطون ذَات البُعد الرابِع, غير المُتنَاظِرة, ليست شبه متنَاظرة وأن F^4, اَلوحيدة من بين الهندسَات الغير متنَاظرة التي تكسب بينة كَالر, هي شبه متنَاظرة هولومورفيكيًا

Résumé: Une géométrie modèle de Thurston *(G, X)* est une variété *X* connexe et simplement connexe avec un groupe de Lie G des difféomorphismes de *X* qui agit transitivement sur X avec stabilisateur compact tel que *G* maximal et il existe une variété *M* de volume fini modelée par *(G,X).* Les géométries modèles de Thurston de dimension trois sont classifies par W. M. Thurston. R. O. Filipkiewicz a classifié les géométries de Thurston de dimension quatre. C. T. C. Wall a étudié les structures complexes sur les géométries de Thurston de dimension quatre. S. Maier a étudié la platitude conforme "conformal flatness" des géométries de Thurston. Une variété Riemannienne M est dite localement symétrique si son tenseur de courbure de Riemann est parallèle ($\nabla R = 0$). Une variété Riemannienne *M* est semi-symétrique si *R(X, Y).R=0*. Une variété Riemannienne *M*, de dimension $n \geq 3$, est dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, s'il existe une fonction L_R tel que $R(X,Y).R=L_R(X\wedge Y).R$. M. Belkhelfa, R. Deszcz et L. Verstraelen ont montré que chaque géométrie de Thurston de dimension trois est pseudo symétrique. On a montré que les géométries modèles de Thurston, non symétriques, ne sont pas pseudo symétriques et que la seule géométrie modèle de dimension quatre Kählérienne et non symétrique, savoir F^4, est holomorphiquement pseudo symétrique.

Abstract : A model geometry of Thurston *(G, X)* is a connected and simply connected manifold X with a Lie group *G* acting transitively on *X* by compact stabilizers, such that *G* maximal and there exists a manifold *M* of finite volume modelled by *(G, X).* W. M. Thurston has classified the 3-dimensional Thurston geometries. R. O. Filipkiewicz has classified the 4-dimensional Thurston geometries. C. T. C. Wall has studied the complex structures on 4-dimensional Thurston geometries. S. Maier has studied the conformal flatness of Thurston geometries. A Riemannian manifold *M* is said to be locally symmetric if the Riemann curvature tensor is parallel ($\nabla R = 0$). A Riemannian manifold *M* is semi-symmetric if *R(X,Y).R=0.* A Riemannian manifold M, of dimension $n \geq 3$, is said to be pseudo symmetric, in the sense of Deszcz, if there exists a function L_R such that $R(X,Y).R=L_R\,(X\wedge Y).R$. M. Belkhelfa, R. Deszcz et L. Verstraelen have proved that every 3-dimensional Thurston geometry is pseudo symmetric. We prove that every 4-dimensional, non symmetric, Thurston geometry is not pseudo symmetric and that the only non symmetric Kählerian 4-dimensional Thurston geometry (i.e. F^4) is holomorphically pseudo symmetric.