République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supèrieure et de la Recherche Scientifique

Université d'Abou bakr bel kaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Projet de Licence en Mathématiques

Une certain Discription des Phénomène de turbulance de la mécanique des fluides dans $\mathbb{R}^3$

Préparer par : Meliani BENABDALLAH
Sous l'encadrement de : Mr, Mekki HOUBAD
Année : 2012 - 2013

Dédicace

Au nom du ALLAH le clément et le miséricordieux je dédie ce modeste travail :
Mes chers parents qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser ce travail de recherche dans les meilleures conditions.
A mes proches amis et toute ma grande famille.
Et toute la famille mathématiques ma promotion 2012 - 2013 (spécialité E.D.O).

Introdution

Dans ce document on va étudier les équations d'euler incompréssible dans $\mathbb{R}^3$

$$\partial_t u \;+\; (\; u \cdot \nabla \;)\; u \;\equiv\; 0 \;, \quad \mathrm{div}\; u \;\equiv\; 0 \;. \tag{0.0.1}$$

Le systéme précédemment mentionné est un systéme de Burger multidimensionnelle associée á une condition de divergence nul qui porte sur la solution, tel que $u(\; t, x \;)$ est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$ admet pour composantes des fonctions $u_i(\; t, x \;)$ pour $i = 1 \cdots 3$, tel que

$$\partial_i \;:=\; \frac{\partial}{\partial\, x_i} \;, \quad u \cdot \nabla \;:=\; \sum_{i=1}^{3} u_i\, \partial_i \;, \quad \mathrm{div} \;\;:=\; \sum_{i=1}^{3} \partial_i \;.$$

Le probléme de Cauchy formé par le systéme (0.0.1) et une donnée initiale $u(\; 0, x \;)$ de classe C^1 bornée définie sur la boule de centre zéro et de rayon r et un systéme de type hyperbolique quasi-linéaire il admet une vitesse de propagation $\mathbf{V}$ finie qui peut être estimer par [5]

$$\mathbf{V} \;:= \sup \;\{\; u(\; 0, x \;) \;: \quad x \in \;\Omega_r^0 \;\} \;.$$

et la solution elle propage dans le domaine

$$\Omega_r^T \;:=\; \Big\{\; (\; t, x \;) \;\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \;: \quad |\; x \;| \;+ \mathbf{V}\, t \;\leq\; r \;\Big\} \;.$$

Dans ce document on s'intéresse á un probléme modifier du précédant, on considére $\varepsilon \;\in\,]\; 0, 1\;]$ et on cherche des solution du probléme

$$\partial_t u^\varepsilon \;+\; (\; u^\varepsilon \cdot \;\nabla \;)\; u^\varepsilon \;\equiv\; 0 \;; \quad \mathrm{div}\; u^\varepsilon \;\equiv\; 0 \;. \tag{0.0.2}$$

associé à

$$u^\varepsilon(\; 0, x \;) \;:=\; h^\varepsilon(\; x \;) \;=\; w\big(\; x, \frac{\varphi(\; x \;)}{\varepsilon} \;\big) \;, \tag{0.0.3}$$

définie sur Ω_r^0 et formée par $\varphi \;\in\; C_b^1(\; \Omega_0^r; \mathbb{R} \;)$ et $w \;\in\; C_b^1(\; \Omega_0^r \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^d \;)$ périodique par rapport á sa deuxiéme variable $\theta \;\in\; \mathbb{T}$ (ou $\mathbb{T} \;=\; [0, 1]$ représente le tord), avec la conditions

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, x \;\in\; \Omega_r^0 \;:\; \nabla\varphi(\; x \;) \;\neq\; 0 \;, \\[2ex] \exists\; (\; x, \theta \;) \;\in\; \Omega_r^0 \times \mathbb{T} \;:\; \partial_\theta w(\; x, \theta \;) \;\neq\; 0 \;. \end{array} \right. \tag{0.0.4}$$

Le probléme de Cauchy (0.0.2) - (0.0.3) admet une unique solution sur un domaine de la forme $\Omega_r^{T^\varepsilon}$ avec un temps d'existence $T^\varepsilon \;>\; 0$ [5], mais rien ne garantie que

$$\lim_{\varepsilon \,\to\, 0} T^\varepsilon \;=\; \tilde{T} \;>\; 0 \;, \tag{0.0.5}$$

alors on va cher her les données initiale qui permet d'avoir (0.0.5).

Ce mémoire est basé sur l'article [2]

C.Cheverry and M.Houbad, *A class of large amplitude oscillating solutions for three dimentional Euler equations*, "Communication on Pure and Applied Analysis" Volume **11** Number **5** (2012) 1661 - 1697.

Table des matières

Chapitre 1

Conditions nécessaire et suffisante

1.1 Introduction

Le Dans cette pertie on va exprimer les conditions nécessaires et suffisantes sur la donnée initiale $u^\varepsilon(\ 0, x\ )$ définie par (0.0.3) pour qu'elle soit compatible sur Ω_r^0. Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution du probléme du Burger

$$\partial_t u \ + \ (\ u \cdot \nabla\ )\ u \ \equiv\ 0,$$

soit é divergence nul est donnée dans [4], cette condition elle affirme que la donnée initiale est nécessairement à matrice jacobienne nilpotente. Dans notre cas vu que la dimension de l'espace vaut trois ce la revient é dire que

$$\big(\ D_x\ h^\varepsilon(\ x\ )\ \big)^3 \ \equiv\ 0\ . \tag{1.1.1}$$

Définition 1.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0;\mathbb{R})$ et $w \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T};\mathbb{R}^3)$ deux fonction satisfait les conditions (0.0.4), le couple (φ, w) est dit compatible sur la boule $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ si la famille $\{h^\varepsilon\}_\varepsilon$ associée à (φ, w) définie par (0.0.3) vérifiée la condition (1.1.1)*

dans la suite si on considère deux vecteurs $u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ et $v = {}^t(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, et les notations suivante

$$u\cdot v \ :=\ u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3\,, \quad u\otimes v := \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}, \qquad u\wedge v := \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1. *Soit $\varphi \in C^1(\Omega_r^0;\mathbb{R})$ et $w \in C^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T};\mathbb{R}^3)$ satisfant les conditions (0.0.4). Le couple (φ, w) est compatible sur $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ si et seulement si il est solution sur $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ du systéme $\mathcal{S}$ formé par*

$$\nabla\varphi \cdot \partial_\theta w \ \equiv\ 0\,, \tag{1.1.2}$$

$$\nabla\varphi \cdot (D_x w\ \partial_\theta w) \ \equiv\ 0\,, \tag{1.1.3}$$

$$(D_x w)^3 \ \equiv\ 0\,, \tag{1.1.4}$$

$$M\,(D_x w)^2 + D_x w\, M\, D_x w + (D_x w)^2\, M \ \equiv\ 0\,, \quad M := \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi\,. \tag{1.1.5}$$

Preuve *de la Proposition 1.1.* On calcule $D_x h^\varepsilon$ en utilisante la forme (0.0.3) on a

$$D_x h^\varepsilon(x) = (D_x w)\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) + \frac{1}{\varepsilon}\ \partial_\theta w\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) \otimes \nabla\varphi(x)\,.$$

La constrainte (1.1.1) donne

$$\sum_{j=0}^{3}\ \varepsilon^{-j}\ \Xi_j\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) \equiv 0\,, \qquad \Xi_j(x,\theta) \in C^0\big(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}^3)\big)$$

tel que

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= (D_x w)^3 \,, & \Xi_1 &= (D_x w)^2\, M + D_x w\, M\, D_x w + M\,(D_x w)^2 \,, \\ \Xi_3 &= M^3 \,, & \Xi_2 &= M^2\, D_x w + D_x w\, M^2 + M\, D_x w\, M \,. \end{aligned}$$

Vu la périodicité de w par rapport à θ, pour avoir (0.0.3) pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ il est nécessaire et suffisant d'imposer

$$\Xi_j \equiv 0\,, \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,, \qquad \forall\, j \in \{0,1,2,3\}\,. \tag{1.1.6}$$

On va résoudre l'équation (1.1.6) pour certain $r \in \mathbb{R}_+^*$, la condition $\Xi_0 \equiv 0$ et $\Xi_1 \equiv 0$ sont une répétition de (1.1.4) et (1.1.5), et Ξ_3 conduit é à

$$M^3 = (\nabla\varphi \cdot \partial_\theta w)^2\; \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi \;=\; 0\,, \qquad \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi \not\equiv 0\,,$$

vu cette équation en utilisant la relation (0.0.4) on peut avoir (1.1.2). Cette deriére condition permet aussi de conclure que $M^2 \equiv 0$, donc la condition $\Xi_2 \equiv 0$ ce réduit en $M\, D_x w\, M \equiv 0$ d'ou (1.1.3).

□

Vu le systéme $\mathcal{S}$, la contrainte (1.1.4) affirme que le rang de la matrice jacobienne de la fonction w ni pas maximal, il est donc soit zéro qui est un cas trivial, soit un soit deux, on s'intéresse plutôt à ce dernier cas, et on suppose que

$$\text{rg}\; D_x w \;\equiv\; 2\,, \quad \forall\,(\,x,\theta\,) \;\in\; \Omega_r^0\,. \tag{1.1.7}$$

Le théoréme du rang constant [1] donne l'existence de deux fonctions $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$ et une fonction $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\nabla\psi \not\equiv 0\,, \quad \nabla\tilde{\psi} \not\equiv 0\,, \quad \nabla\psi \wedge \nabla\tilde{\psi} \not\equiv 0\,, \quad \partial_\psi \mathbf{W} \not\equiv 0. \tag{1.1.8}$$

et w elle seras définie par

$$w(x,\theta) = \mathbf{W}\big(\tilde{\psi}(x,\theta), \psi(x,\theta), \theta\big), \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,. \tag{1.1.9}$$

Proposition 1.2. *Soit (φ, w) Un couple compatible sur la boule $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$. On fait réduire $r \in \mathbb{R}_+^*$ si nécéssaire alors on a l'existence d'une fonction scalaire $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$ vérifiée*

$$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0\,,$$

et une fonction vectoriel $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$w(x,\theta) = \mathbf{W}\big(\varphi(x), \psi(x,\theta), \theta\big)\,, \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,. \tag{1.1.10}$$

$$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \;\not\equiv\; 0\,, \qquad \partial_\varphi \mathbf{W} \wedge \partial_\psi \mathbf{W} \;\not\equiv\; 0\,. \tag{1.1.11}$$

1.2 Version locale de la Proposition 1.2.

Soit (φ, w) un couple compatible, par un changement de la valeur de la fonction $w(x,\theta)$ par une trasnlation de sa derniére variable en $w(x, \theta - \tilde{\theta})$, cela donne la possibilité de travailler localement au voisinage du point $\theta = 0$, aon note par $\vec{0} = (0,0,0) \in \Omega_r^0 \subset \mathbb{R}^3$, et on va travailler localement au voisinage du point $(\vec{0}, 0) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ et on le note Γ satisfait $(\vec{0}, 0) \in \Gamma \subset \Omega_r^0 \times \mathbb{T}$

$$\Gamma \equiv \Gamma_{r,\tilde{r}}^0 \;:=\; \Omega_r^0 \times]-\tilde{r}\,, \tilde{r}[\,, \qquad (r, \tilde{r}) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[\,.$$

On note par i, j et k des éléments distincts de l'ensemble $\{1,2,3\}$. La condition (1.1.7) donne

$$\nabla w_k(x,\theta) \in Vec\,\langle \nabla w_i(x,\theta), \nabla w_j(x,\theta)\rangle \quad , \qquad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,, \tag{1.2.1}$$

$$\nabla w_i(x,\theta) \wedge \nabla w_j(x,\theta) \neq 0 \quad , \qquad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,. \tag{1.2.2}$$

Alors le vecteur $\nabla\varphi(\vec 0)$ ne peut être parralléle simultanément é $\nabla w_i(\vec 0,0)$ et $\nabla w_j(\vec 0,0)$. Par une permutation des coordonnées x_1, x_2 et x_3 en accorde avec les composantes w_1, w_2 et w_3 et on fait diminuer $r\in\mathbb{R}^*_+$ et $\tilde r\in]0,1[$ on a

$$\nabla\varphi \wedge \nabla w_1 \not\equiv 0\,, \qquad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r} \tag{1.2.3}$$

donc les conditions (1.2.1) et (1.2.2) donne

$$\nabla w_3(x,\theta) \in Vec\,\langle \nabla w_1(x,\theta), \nabla w_2(x,\theta)\rangle \quad , \qquad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,, \tag{1.2.4}$$

$$\nabla w_1(x,\theta) \wedge \nabla w_2(x,\theta) \neq 0 \quad , \qquad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,. \tag{1.2.5}$$

(1.2.4) donne : w_3 est fonction de w_1 et de w_2 alors il existe une foncrion $\mathbb{W}_3 \in C^1(\mathbb{R}^2\times]-\tilde r,\tilde r[;\mathbb{R})$ tel que

$$w_3(x,\theta) = \mathbb{W}_3\big(w_1(x,\theta), w_2(x,\theta),\theta\big), \qquad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,. \tag{1.2.6}$$

alors on note

$$\mathbb{W}(w_1,w_2,\theta) = \begin{pmatrix} \mathbb{W}_1(w_1,w_2,\theta) \\ \mathbb{W}_2(w_1,w_2,\theta) \\ \mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta) \end{pmatrix},$$

d'ou

$$w(x,\theta) = \mathbb{W}\big(w_1(x,\theta), w_2(x,\theta),\theta\big), \quad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,. \tag{1.2.7}$$

Lemme 1.2.1. *Soit (φ,w) un couple compatible sur $\Gamma^0_{r,\tilde r}$ satisfait (1.2.4) - (1.2.5). Alors il existe une fonction scalaire $W_2\in C^1(\mathbb{R}^2\times]-\tilde r,\tilde r[;\mathbb{R})$ tel que la second composante w_2 de w peut être mise sous la forme*

$$w_2(x,\theta) = W_2\big(\varphi(x), w_1(x,\theta),\theta\big), \quad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,. \tag{1.2.8}$$

Preuve *du Lemme 1.2.1.* Pour avoir (1.2.8), on montre que

$$\nabla w_2(x,\theta) \in Vec\,\langle \nabla\varphi(x), \nabla w_1(x,\theta)\rangle\,, \quad \forall\,(x,\theta)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,. \tag{1.2.9}$$

On raisonement par absurde, on suppose que (1.2.9) n'est pas vérifiée :

$$\exists\,(x_0,\theta_0)\in \Gamma^0_{r,\tilde r}\,, \qquad \nabla w_2(x_0,\theta_0) \notin Vec\,\langle \nabla\varphi(x_0), \nabla w_1(x_0,\theta_0)\rangle\,. \tag{1.2.10}$$

les deux conditions (1.2.3) et (1.2.10), affirme que les vecteurs $\nabla\varphi(x_0)$, $\nabla w_1(x_0,\theta_0)$ et $\nabla w_2(x_0,\theta_0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Vu Ξ_j et (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) et (1.1.5), on a aprés calcule

$$\big(D_x w + \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi\big)^3 = \sum_{j=0}^{3} \Xi_j = 0\,.$$

Or la matrice

$$D_x w + \partial_\theta w \otimes \nabla\varphi = \begin{pmatrix} {}^t\nabla w_1 + \partial_\theta w_1\, {}^t\nabla\varphi \\ {}^t\nabla w_2 + \partial_\theta w_2\, {}^t\nabla\varphi \\ {}^t\nabla w_3 + \partial_\theta w_3\, {}^t\nabla\varphi \end{pmatrix}$$

est de rang deux, vu (1.2.6), le troisiéme vecteur de cette matrice est de la forme

$$\begin{aligned} \nabla w_3 + \partial_\theta w_3 \ \nabla\varphi \ &= \partial_{w_1}\mathbb{W}_3 \ (\nabla w_1 + \partial_\theta w_1 \ \nabla\varphi) \\ &\quad + \partial_{w_2}\mathbb{W}_3 \ (\nabla w_2 + \partial_\theta w_2 \ \nabla\varphi) + \partial_\theta \mathbb{W}_3 \, \nabla\varphi \, . \end{aligned}$$

est donc il est en combinaison linéaire du premier et du second vecteur d'ou

$$[\ \partial_\theta w_3 \ + \ \alpha\ ]\ (\nabla w_1 + \partial_\theta w_1 \ \nabla\varphi) \ + \ [\ \partial_{w_2}\mathbb{W}_3 \ + \ \beta\ ]\ (\nabla w_2 + \partial_\theta w_2 \ \nabla\varphi) \ + \ \partial_\theta \mathbb{W}_3 \, \nabla\varphi \ = \ 0 \, .$$

Or la famille $\nabla w_1, \nabla w_2, \nabla\varphi$ est une base de $\mathbb{R}^3$ pour $(x,\theta) = (x_0,\theta_0)$ donc

$$(\partial_\theta \mathbb{W}_3)\big(w_1(x_0,\theta_0), w_2(x_0,\theta_0), \theta_0\big) = 0. \qquad , \tag{1.2.11}$$

alors (1.2.11) implique que

$$\partial_\theta w_3 \ = \ \partial_{w_1}\mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta_0) \ \partial_\theta w_1 \ + \ \partial_{w_2}\mathbb{W}_3(w_1,w_2,\theta_0) \ \partial_\theta w_2 \, .$$

Vu (0.0.4), on a $\partial_\theta w_1(x_0,\theta_0) \neq 0$ ou $\partial_\theta w_2(x_0,\theta_0) \neq 0$. donc on peut supposer que $\partial_\theta w_2(x_0,\theta_0) \neq 0$.
(1.2.11) transforme (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) et (1.1.5). La condition (1.1.2) donne

$$\nabla\varphi \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = -\,\frac{\partial_\theta w_1}{\partial_\theta w_2}\ \nabla\varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}. \tag{1.2.12}$$

la condition (1.1.4) donne

$$(D_x w)^3 = \big[(D_x w)^2 \ \partial_{w_1}\mathbb{W}\big] \otimes \nabla w_1 + \big[(D_x w)^2 \ \partial_{w_2}\mathbb{W}\big] \otimes \nabla w_2 \ \equiv \ 0 \, .$$

Vu (1.2.5) on a

$$(D_x w)^2 \ \partial_{w_1}\mathbb{W} \ \equiv \ 0, \qquad\qquad (D_x w)^2 \ \partial_{w_2}\mathbb{W} \ \equiv \ 0. \tag{1.2.13}$$

on prend $\alpha := {}^t\nabla w_1 \, D_x w \, \partial_{w_1}\mathbb{W}$ et $\beta := {}^t\nabla w_2 \, D_x w \, \partial_{w_1}\mathbb{W}$, on a

$$(D_x w)^2 \ \partial_{w_1}\mathbb{W} \ = \ \alpha \ {}^t(1,0,\partial_{w_1}\mathbb{W}_3) \ + \ \beta \ {}^t(0,1,\partial_{w_2}\mathbb{W}_3) \, .$$

Alors la premiére partie de (1.2.13) affirme que les coefficients α et β sont nul donc

$$\begin{aligned} (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})^2 + (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) \ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) \ &= \ 0 \, , && (1.2.14) \\ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) \ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) \ &= \ 0 \, . && (1.2.15) \end{aligned}$$

Par la même méthode en utilisant cette fois la deuxiéme partie de (1.2.13) on a

$$\begin{aligned} (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) \ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) \ &= \ 0 \, , && (1.2.16) \\ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W})^2 + (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) \ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) \ &= \ 0 \, . && (1.2.17) \end{aligned}$$

Alors il est impossible d'avoir

$$\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} \neq 0. \tag{1.2.18}$$

car si on suppode que (1.2.18) est vrais, alors (1.2.15) et (1.2.16) donne $\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} = 0$ et $\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = 0$, et (1.2.14) - (1.2.17) conduit á $\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} = 0$ et $\nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = 0$. ce qui contredit (1.2.18). D'ou

$$\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} + \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = 0. \tag{1.2.19}$$

La condition (1.2.19) élimine (1.2.15) et (1.2.16), et rendre (1.2.17) équivalente á (1.2.14).

Le traitement de (1.1.4) est le même que celui de (1.2.14) et (1.2.19), car (1.2.14) et (1.2.19) affirme que les vecteurs

$$(\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}, \nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) \in \mathbb{R}^2, \qquad (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}, \nabla w_2 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) \in \mathbb{R}^2$$

sont colinéaire, donc il existe $(\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ tel que

$$\nabla w_1 \cdot (\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0, \qquad \nabla w_2 \cdot (\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0. \tag{1.2.20}$$

Soit (1.1.3) évaluer en (x_0, θ_0), les conditions (1.2.11), (1.2.12) et (1.2.19), transforme (1.1.3) en

$$\Big[2\ \partial_\theta w_1\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) + \partial_\theta w_2\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W}) - \frac{(\partial_\theta w_1)^2}{\partial_\theta w_2}\ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})\Big]\ (\nabla\varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W}) = 0. \tag{1.2.21}$$

Un Produit de (1.2.21) par $\partial_\theta w_2\ (\nabla w_2 \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})$, et vu (1.2.14) et (1.2.19) donne

$$(\nabla\varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})\ (\nabla w_2 \cdot \partial_\theta w)^2 = 0\,. \tag{1.2.22}$$

on multipliant (1.2.21) par $\partial_\theta w_2\ (\nabla w_1 \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W})$ et on utilise (1.2.14) on a

$$(\nabla\varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W})\ (\nabla w_1 \cdot \partial_\theta w)^2 = 0\,. \tag{1.2.23}$$

Deux cas :

$\triangleright 1 \triangleleft$ Le cas $\nabla\varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} \neq 0$. Les équations (1.1.2), (1.2.22) et (1.2.23) affirmant que $\nabla\varphi$, ∇w_1 et ∇w_2 sont dans $(\partial_\theta w^\perp)$. Ce qui est en contradiction avec (1.2.10).

$\triangleright 2 \triangleleft$ Si $\nabla\varphi \cdot \partial_{w_1}\mathbb{W} = 0$. L'équation (1.2.12) donne $\nabla\varphi \cdot \partial_{w_2}\mathbb{W} = 0$, d'ou

$$\nabla\varphi \cdot (\alpha'\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \beta'\ \partial_{w_2}\mathbb{W}) = 0, \quad \forall\,(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2. \tag{1.2.24}$$

Soit $\alpha' = \tilde{\alpha}$ et $\beta' = \tilde{\beta}$, vu la formule de $\mathbb{W}$ et le fait que $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \neq (0,0)$, on a $\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2}\mathbb{W} = {}^t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \star) \neq (0,0,0)$. or (1.2.20) et (1.2.24) (dans le cas ou $\alpha' = \tilde{\alpha}$ et $\beta' = \tilde{\beta}$) donne $\nabla\varphi$, ∇w_1 et ∇w_2 sont dans $(\tilde{\alpha}\ \partial_{w_1}\mathbb{W} + \tilde{\beta}\ \partial_{w_2}\mathbb{W})^\perp$, ce qui contrdit (1.2.10).

d'ou (1.2.9). □

Proposition 1.3 (version locale de la Proposition 1.2)**.** *On supose (0.0.4) et soient $\tilde{\theta} \in \mathbb{T}$ et (φ, w) un couple compatible sur $\Gamma^{\tilde{\theta}}_{r,\tilde{r}}$. Alors par un choix de $r \in \mathbb{R}^*_+$ et $\tilde{r} \in]0,1[$ et avec une permutation des coordonnées x_1, x_2 et x_3 en accorde avec les composantes w_1, w_2 et w_3 de w, il est possible d'avoir (1.2.3) et la fonction $w(x,\theta)$ peut être mise sous la forme*

$$w(x,\theta) = W\big(\varphi(x), w_1(x,\theta), \theta\big)\,, \qquad (x,\theta) \in \Gamma^{\tilde{\theta}}_{r,\tilde{r}} \tag{1.2.25}$$

avec $W = {}^t(W_1, W_2, W_3) \in C^1(\mathbb{R}^2\times\,] - \tilde{r}, \tilde{r}[; \mathbb{R}^3)$ et ces deux premiére composantes W_1 et W_2 vérifiant

$$W_1(\varphi, w_1, \theta) \;=\; w_1\,, \qquad \forall\,(\varphi, w_1, \theta) \in \mathbb{R}^2\times\,] - \tilde{r}, \tilde{r}[\,, \tag{1.2.26}$$

$$\partial_\varphi W_2(\varphi, w_1, \theta) \;\neq\; 0\,, \qquad \forall\,(\varphi, w_1, \theta) \in \mathbb{R}^2\times\,] - \tilde{r}, \tilde{r}[\,. \tag{1.2.27}$$

Preuve *de la Proposition 1.3.* Oon peut prendre $\tilde{\theta} = 0$. Vu (1.2.8), la fonction w_3 est de la forme

$$w_3(x,\theta) = W_3\big(\varphi(x), w_1(x,\theta), \theta\big), \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Gamma^0_{r,\tilde{r}}$$

tel que $W_3(\varphi, w_1, \theta) := \mathbb{W}_3\big(w_1, W_2(\varphi, w_1, \theta), \theta\big)$. D'ou

$$W_1(\varphi, w_1, \theta) := w_1\,, \qquad \forall\,(\varphi, w_1, \theta) \in \mathbb{R}^2\times\,] - \tilde{r}, \tilde{r}[\,.$$

Ce qui donne (1.2.25) et (1.2.26), vu (1.2.3) pour avoir (0.0.4), le vecteur $\partial_\varphi W \wedge \partial_{w_1} W$ est non nul sur $\mathbb{R}^2\times\,] - \tilde{r}, \tilde{r}[$, ce qui donne que $\partial_\varphi W_2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}^2\times\,] - \tilde{r}, \tilde{r}[$. □

1.3 Preuve de la Proposition 1.2.

Soit (φ, w) un couple compatible et soit (1.1.7) donc

$$dim\, Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle = 2, \qquad \forall\,(x,\theta)\ \in\ \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,. \tag{1.3.1}$$

Uune permutation de x_1, x_2 et x_3 et vu la Proposition 1.3, on a $\nabla\varphi \in Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2\rangle$. Donc $\nabla\varphi$ et dans l'epace $Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle$. alors

$$\nabla\varphi\ \in\ Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle\,, \qquad \forall\,(x,\theta)\ \in\ \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,. \tag{1.3.2}$$

Soit $\theta \in \mathbb{T}$ fixée, et soit une fonction $\Psi_\theta \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ et $r_\theta \in]0, r[$, et on construit

$$\psi_\theta(x,\tilde{\theta})\ :=\ \Psi_\theta(w_1,w_2,w_3)(x,\tilde{\theta})\,, \qquad \forall\,(x,\tilde{\theta}) \in \Omega^0_{r_\theta}\times]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[\,.$$

On peut déduire à partir de la condition (1.3.1) et (1.3.2) l'existence d'une fonction $\Psi_\theta \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ et $r_\theta \in]0, r[$ tel que $\nabla\varphi$indépenddant de $\nabla\psi_\theta$, d'ou

$$Vec\,\langle \nabla\varphi, \nabla\psi_\theta\rangle \equiv Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle\,, \quad \forall\,(x,\theta) \in \Omega^0_{r_\theta}\times]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[\,.$$

Les intervalles $]\theta - r_\theta, \theta + r_\theta[$ avec $\theta \in \mathbb{T}$ forment un recouvrement ouvert de $\mathbb{T}$. Or $\mathbb{T}$ est compact,donc il existe une sous famille finie qui couvre

$$\mathbb{T} \subset \bigcup_{i=1}^{N}]\theta_i - r_{\theta_i}, \theta_i + r_{\theta_i}[\,.$$

On considére maintenant une partition de l'unité formé par des fonction $\{\chi_i\}_{i=1}^N$ tel que $\chi_i \in C^\infty(\mathbb{T};\mathbb{R}_+)$ sont adjustés de tel sorte que

$$supp\,\chi_i \subset]\theta_i - r_{\theta_i}, \theta_i + r_{\theta_i}[\,, \quad \sum_{i=1}^{N} \chi_i \equiv 1\,.$$

On remplace $r \in \mathbb{R}_+^*$ par le minimum des r_{θ_i} (avec $i \in \{1, \cdots, N\}$). Alors, on peut définir la fonction

$$\psi(x,\theta) := \sum_{i=1}^{N} \psi_{\theta_i}(x,\theta)\,\chi_i(\theta)\,.$$

Ce qui donne (1.1.11) avec

$$Vec\,\langle \nabla\varphi, \nabla\psi\rangle \equiv Vec\,\langle \nabla w_1, \nabla w_2, \nabla w_3\rangle\,, \qquad \forall\,(x,\theta) \in \Omega_r^0 \times \mathbb{T}\,. \tag{1.3.3}$$

La condition (1.3.3) affirme que les composantes w_i sont des fonctions de φ, ψ et de θ ce qui donne (1.1.10).

1.3.1 Conditions de compatibilité sur le triplet $(\varphi, \psi, \mathbf{W})$.

On va donner les conditions nécessaires et suffisantes sur (φ, ψ, W) pour que le couple (φ, w) définie par la Proposition 1.2 soit compatible.

Proposition 1.4. *On suppose (1.1.7), (1.1.10) et (0.0.4). Alors, le couple (φ, w) est compatible sur $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$ si et seulement si on a (1.1.11) complété par le systéme des contraintes*

$$\nabla\varphi\cdot\partial_\theta\mathbf{W} + \partial_\theta\psi\ \nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W}\ \equiv\ 0\,, \tag{1.3.4}$$
$$(\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W})\ (\nabla\psi\cdot\partial_\theta\mathbf{W} + \partial_\theta\psi\ \nabla\psi\cdot\partial_\psi\mathbf{W})\ \equiv\ 0\,, \tag{1.3.5}$$
$$(\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi\mathbf{W})^2 + (\nabla\varphi\cdot\partial_\psi\mathbf{W})\ (\nabla\psi\cdot\partial_\varphi\mathbf{W})\ \equiv\ 0\,, \tag{1.3.6}$$
$$\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi\mathbf{W} + \nabla\psi\cdot\partial_\psi\mathbf{W}\ \equiv\ 0\,. \tag{1.3.7}$$

La condition (1.3.4) c'est une répétition de (1.1.2). La contrainte (1.3.5) découle de (1.1.3) lorsqu'on remplace la matrice $D_x w(x,\theta)$ par

$$D_x w \;=\; \partial_\varphi \mathbf{W} \otimes \nabla\varphi \;+\; \partial_\psi \mathbf{W} \otimes \psi \,. \tag{1.3.8}$$

En utilisant (1.3.8) la relation (1.1.4) ce transforme en

$$(D_x w)^2\, \partial_\varphi \mathbf{W} \otimes \nabla\varphi \,+\, (D_x w)^2\, \partial_\psi \mathbf{W} \otimes \nabla\psi \;=\; 0\,.$$

Vu (1.1.11), les deux vecteurs $\nabla\varphi$ et $\nabla\psi$ sont indépendant, ce qui permet de conclure que

$$(D_x w)^2\, \partial_\varphi \mathbf{W} \;=\; 0\,, \tag{1.3.9}$$
$$(D_x w)^2\, \partial_\psi \mathbf{W} \;=\; 0\,. \tag{1.3.10}$$

(1.3.8) transforme (1.3.9) en

$$(\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W})^2 + (\nabla\psi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W})\,(\nabla\varphi\cdot\partial_\psi \mathbf{W}) \;=\; 0\,, \tag{1.3.11}$$
$$(\nabla\psi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W})\;(\nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W} + \nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W}) \;=\; 0\,. \tag{1.3.12}$$

On fait la même chose pour (1.3.10), on a

$$(\nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W})^2 + (\nabla\psi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W})\,(\nabla\varphi\cdot\partial_\psi \mathbf{W}) \;=\; 0\,, \tag{1.3.13}$$
$$(\nabla\varphi\cdot\partial_\psi \mathbf{W})\;(\nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W} + \nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W}) \;=\; 0\,. \tag{1.3.14}$$

Les deux relations (1.3.6) et (1.3.11) sont similaires, de plus on a

$$\nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W} + \nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W} \equiv 0,$$

La preuve elle ce fait par absurde et de la même maniére que dans la preuve du Lemme 1.2.1. Finalement (1.3.7) rendre (1.3.14) et (1.3.12) juste et (1.3.11) devient équivalente á (1.3.13) et conduit á (1.3.6).

Chapitre 2

Propagation

Soit (φ, w) un couple compatible. La fonctions $w(x,\theta)$ est donnée par (1.1.10) tel que $(\varphi, \psi, \mathbf{W})$ est solution de (1.3.4)-(1.3.5)-(1.3.6)-(1.3.7) et (1.1.11).

Théorème 2.1. *Soit (φ, w) un couple compatible sur $\Omega_r^0 \times \mathbb{T}$. Il exite deux fonctions $\mathbf{W}(\varphi, \psi, \theta) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$ et $\psi(x,\theta) \in \mathcal{C}^1(\Omega_r^0 \times \mathbb{T}; \mathbb{R})$ tel que la fonction $w(x,\theta)$ peut être factorisé sous la forme*

$$w(x,\theta) \;=\; \mathbf{W}\big(\varphi(x), \psi(x,\theta), \theta\big)\,, \qquad \nabla\varphi \wedge \nabla\psi \not\equiv 0\,. \tag{2.0.1}$$

Et il existe $T > 0$ tel que le probléme de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \big(\mathbf{W}(\Phi, \Psi, \theta) \cdot \nabla\big)\Phi = 0\,, & \Phi(0,x) = \varphi(x)\,, \\ \partial_t \Psi + \big(\mathbf{W}(\Phi, \Psi, \theta) \cdot \nabla\big)\Psi = 0\,, & \Psi(0,x,\theta) = \psi(x,\theta)\,, \end{cases} \tag{2.0.2}$$

admet une solution $(\Phi, \Psi)(t,x,\theta)$ dans le domain $\Omega_r^T \times \mathbb{T}$. De plus on a $\partial_\theta \Phi \equiv 0$ et pour toute $\varepsilon \in]0,1]$, l'oscillation

$$u^\varepsilon(t,x) = \mathbf{W}\big(\Phi(t,x), \Psi(t,x,\Phi(t,x)/\varepsilon), \Phi(t,x)/\varepsilon\big), \quad \varepsilon \in]0,1] \tag{2.0.3}$$

est une solution de (0.0.2) dans le domaine Ω_r^T avec la donnée initiale $u^\varepsilon(0,\cdot)$ satisfait (0.0.3).

$$\widetilde{\mathbf{W}}(t,x,\theta) \;:=\; \mathbf{W}\big(\Phi(t,x), \Psi(t,x,\theta), \theta\big)$$

est compatible sur $B(0, r - tV[\times \mathbb{T}$. Plus précésiment pour $t \in [0,T]$, on a nécessairement

$$\nabla\Phi \cdot \partial_\theta \mathbf{W} + \partial_\theta \Psi \;\nabla\Phi \cdot \partial_\Psi \mathbf{W} \;\equiv\; 0\,, \tag{2.0.4}$$

$$(\nabla\Phi \cdot \partial_\Psi \mathbf{W})\;(\nabla\Psi \cdot \partial_\theta \mathbf{W} + \partial_\theta \Psi \;\nabla\Psi \cdot \partial_\Psi \mathbf{W}) \;\equiv\; 0\,, \tag{2.0.5}$$

$$(\nabla\Phi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W})^2 + (\nabla\Phi \cdot \partial_\Psi \mathbf{W})\;(\nabla\Psi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W}) \;\equiv\; 0\,, \tag{2.0.6}$$

$$\nabla\Phi \cdot \partial_\varphi \mathbf{W} + \nabla\Psi \cdot \partial_\Psi \mathbf{W} \;\equiv\; 0\,. \tag{2.0.7}$$

Soit (2.0.2). Le résultat standard [5] garantie l'existence locale dans le temps sur $\Omega_r^T \times \mathbb{T}$ avec $T \in \mathbb{R}_+^*$, d'une solution $\mathcal{C}^1-$ pour la premiére partie de (2.0.2). On introduit

$$\mathbf{U}(t,x,\theta) := \mathbf{W}\big(\Phi(t,x,\theta), \Psi(t,x,\theta), \theta\big).$$

A partir de (2.0.2), on a

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = 0\,, \quad \mathbf{U}(0,x,\theta) = \mathbf{W}\big(\varphi(x), \psi(x,\theta), \theta\big) = w(x,\theta)\,. \tag{2.0.8}$$

on intégre (2.0.2) le long des caractéristiques on a

$$\Phi(t,x,\theta) \;=\; \varphi\big(x - t\,\mathbf{U}(t,x,\theta)\big)\;, \qquad \forall\,(t,x,\theta) \in \Omega_r^T \times \mathbb{T}\,, \tag{2.0.9}$$

$$\Psi(t,x,\theta) \;=\; \psi\big(x - t\,\mathbf{U}(t,x,\theta), \theta\big), \qquad \forall\,(t,x,\theta) \in \Omega_r^T \times \mathbb{T}\,. \tag{2.0.10}$$

Lemme 2.0.1. *Les ingrédient φ, ψ et $\mathbf{W}$ vérifiant (1.3.4)-(1.3.5)-(1.3.6)-(1.3.7). Alors $\Phi(t,x,\theta)$ solution de (2.0.2) est tel que $\partial_\theta \Phi \equiv 0$. De plus*

$$y \equiv y(t,x) := x - t\,\mathbf{U}(t,x,\theta)\,, \qquad \Xi(y,\theta) := \big(\varphi(y), \psi(y,\theta), \theta\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}\,,$$

l'expression $\Psi(t,x,\theta)$ obtenu par (2.0.2) est tel que

$$\begin{aligned} \partial_\theta \Psi(t,x,\theta) \;&\equiv\; \partial_\theta \psi(y,\theta) \\ &\quad - t\ \nabla\psi(y,\theta) \cdot \big[\partial_\theta \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big) + \partial_\theta \psi(y,\theta)\ \partial_\psi \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big)\big]\,. \end{aligned} \tag{2.0.11}$$

Preuve ***du Lemme 2.0.1.*** On utilise (2.0.9) et (2.0.10) avec la définition de $\mathbf{U}$ on calcule $\partial_\theta \Phi$ et $\partial_\theta \Psi$

$$\mathcal{M}\ \begin{pmatrix} \partial_\theta \Phi(t,x,\theta) \\ \partial_\theta \Psi(t,x,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\,t\,\nabla\varphi(y)\cdot \partial_\theta \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big) \\ \partial_\theta\psi(y,\theta) - t\ \nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\theta \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big) \end{pmatrix}$$

tel que $\mathcal{M}$ vaut

$$\mathcal{M}(t,y,\theta)\ :=\ \begin{pmatrix} 1 + t\ \nabla\varphi(y)\cdot\partial_\varphi \mathbf{W} & t\ \nabla\varphi(y)\cdot\partial_\psi \mathbf{W} \\ t\ \nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\varphi \mathbf{W} & 1 + t\ \nabla\psi(y,\theta)\cdot\partial_\psi \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathcal{M}$ et les fonctions $\partial_\star \mathbf{W}$ sont calculé en $\Xi(y,\theta)$. Donc vu (1.3.6) et (1.3.7) on a

$$det\,\mathcal{M}(t,y,\theta) = 1.$$

D'ou

$$\begin{aligned} \partial_\theta \Phi(t,x,\theta) \;&=\; -\,t\ \nabla\varphi\cdot(\partial_\theta \mathbf{W} + \partial_\theta\psi\ \partial_\psi \mathbf{W}) \\ &\quad + t^2\ \big[(\nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W})\,(\nabla\varphi\cdot\partial_\psi \mathbf{W}) - (\nabla\varphi\cdot\partial_\theta \mathbf{W})\,(\nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W})\big]\,. \end{aligned}$$

Le côté droite est une fonction de (y,θ), et la condition (1.3.4) ni rien autre que

$$\nabla\varphi(y)\cdot\big[\partial_\theta\psi(y,\theta)\,\partial_\psi \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big) + \partial_\theta \mathbf{W}\big(\Xi(y,\theta)\big)\big]\ =\ 0\,. \tag{2.0.12}$$

Ce qui donne

$$\partial_\theta \Phi(t,x,\theta)\ =\ t^2\ (\nabla\varphi\cdot\partial_\psi \mathbf{W})\ (\nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W} + \partial_\theta\psi\ \nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W})\,.$$

Vu (1.3.5) on a $\partial_\theta \Phi \equiv 0$, d'ou

$$\begin{aligned} \partial_\theta \Psi(t,x,\theta) = \;&\partial_\theta\psi\ +\ t\ \big(\partial_\theta\psi\ \nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W} - \nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W}\big) \\ &+ t^2\ \big[(\nabla\varphi\cdot\partial_\theta \mathbf{W})\,(\nabla\psi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W}) - (\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W})\,(\nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W})\big]\,. \end{aligned}$$

Vu (1.3.6), (1.3.7) et (2.0.12), on a

$$\begin{aligned} \partial_\theta \Psi(t,x,\theta) = \ &\partial_\theta\psi\ \ - t\ \big(\nabla\psi\cdot\partial_\theta \mathbf{W} + \partial_\theta\psi\ \nabla\psi\cdot\partial_\psi \mathbf{W}\big) \\ &- t^2\ (\nabla\varphi\cdot\partial_\varphi \mathbf{W})\ \nabla\psi\cdot\big(\partial_\theta \mathbf{W} + \partial_\theta\psi\ \partial_\psi \mathbf{W}\big)\,. \end{aligned}$$

Or (1.3.5) et (1.3.6) affirme que le terme en facteur de t^2 est nul, ce qui donne (2.0.11). □

Considére l'expression u^ε définie sur Ω_r^T par

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t,x)\ &:=\ \mathbf{U}\Big(t, x, \tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\Big) \\ &=\ \mathbf{W}\Big(\Phi(t,x), \Psi\big(t,x,\tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\big), \tfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon}\Big)\,, \qquad \varepsilon \in]0,1]\,. \end{aligned} \tag{2.0.13}$$

Par construction on a $u^\varepsilon(0,\cdot) \equiv h^\varepsilon(\cdot)$ avec h^ε satisfait (0.0.3). Un calcule directe de (2.0.2) donne que $u^\varepsilon(t,x)$ est une solution de (0.0.2) sur Ω_r^T. On applique le Théorém 2.6 of [4], on a $\big(D_x u^\varepsilon(t,x)\big)^3 \equiv 0$ sur $B(0, r - t\,V)$ pour $t \in [0,T]$. On refait dans le temps $t \in]0,T]$ la procédure du chapitre 1 on peut déduire que la construction (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6) et (1.3.7) ce propage. autrement

Lemme 2.0.2. *Pour $t \in [0,T]$, la solution $\Phi(t,x)$ et $\Psi(t,x,\theta)$ de (2.0.2) sont solution de (2.0.4), (2.0.5), (2.0.6) et (2.0.7).*

L'identité peut être obtenu par (1.3.4)-(1.3.5)-(1.3.6)-(1.3.7) ainsi que (2.0.9), (2.0.10) et du Lemme 2.0.1. Le Théoréme 2.1 est démontré.

Chapitre 3

Oscillations Instantanées

Dans ce chapitre on va donner un exemple des oscilations instantanée, soit la fonction suivante

$$u^\varepsilon(t,x) \;=A_\varepsilon(t,x)\begin{pmatrix}1\\-a-b\\1\end{pmatrix}\;-\;\phi(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon})\begin{pmatrix}1\\-a\\0\end{pmatrix}$$

tel que

$$A_\varepsilon(t,x)\;:=\;A\Big(\varphi(x),\frac{\psi\big(x_3-x_1-t\,\phi\big(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big)\big)}{\varepsilon},\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big)\,.$$

Cette fonction est bien une solution du système d4euler incompréssible, et on remarque que

1. Pour $t\;=\;0$ on a

$$u^\varepsilon(0,x)\;=A_\varepsilon(0,x)\begin{pmatrix}1\\-a-b\\1\end{pmatrix}\;-\;\phi(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon})\begin{pmatrix}1\\-a\\0\end{pmatrix}$$

$$A_\varepsilon(0,x)\;:=\;A\Big(\varphi(x),\frac{\psi\big(x_3-x_1\big)}{\varepsilon},\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big)\,.$$

   Et le calcule fournit que pour ε assez grand on a

$$\partial_{x_3}u^\varepsilon(0,x)\;=\mathcal{O}(\;\frac{1}{\varepsilon}\;)\;.$$

2. Pour $t\;>\;0$. Le calcule fournit que

$$\partial_{x_3}u^\varepsilon(t,x)\;=\mathcal{O}(\;\frac{1}{\varepsilon^2}\;)\;.$$

Cela donne une discription des turbulences, des fluides en mouvement avec des changement brutale de vitesse. On efait ce changement brutale dans la nature qualitatif du fluide renvoyant ($\varepsilon\longrightarrow 0$) à l'image de ce qui seraient les *turbulences*. La justification de tels phénomènes a déjà été entreprise dans [3] en dehors du contexte de divergence nul et dans le cas de dimension deux de l'espace.

Bibliographie

[1] William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, No. 63.

[2] M.Houbad C.Cheverry. A class of large amplitude oscillating solutions for three dimentional euler equations. *Communication on Pure and Applied Analysis*, 11(5) :1661–1697, 2012.

[3] O.Guès C.Cheverry. Couter - examples to concentration - cancellation. *Arch. Ration. Mech. Anal*, (189(3)) :363–424, 2008.

[4] C. Cheverry, O. Guès, and G. Métivier. Large-amplitude high-frequency waves for quasilinear hyperbolic systems. *Adv. Differential Equations*, 9(7-8) :829–890, 2004.

[5] Andrew J. Majda and Andrea L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.