REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de licence en Mathématique

Option : *Equation différentielles Ordinaires*

Thème
L'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Présenté par

AISSAOUI Moussa

BEN-AISSA Mohammed El-amine

Encadreur

Mr. DERHAB Mohammed

Année universitaire : 2012 - 2013

Table des Matières

-1.1 Remerciements

Tout d'abord, je remercie DIEU le tout-puissant pour la volonté.la santé et la patience qu'il m'a donnée durant ma vie.

Je tiens à remercier particulièrement M. DERHAB Mohammed ,et je remercie également le chef de département M.MABKHOUT Miloud et le responsable de l'option M.YEBDRI Mustapha pour l'aide et les conseils concernant ce travail.

Je remercie également les membres de nos familles qui nous ont offert soutien moral et financier.

A tous ceux qui nous ont guidés avec gentillesse et efficacité.

-1.2 Dédicace

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux je dédie ce modeste travail à:

Mes chers parents qui ont. toujours. été dévoués pour que je puisse réaliser

Ce travail de recherche dans les meilleures conditions

A mes chers frères, sœurs

A mes proches amis et toute ma grande famille.

Et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion 2012-2013 (spécialité E.D.O).

Introduction

L'objet de ce travail est de donner quelques résultats concernant l'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

Ce travail est divisé en deux chapitres. Dans le premier chapitre, on donne des définitions, des exemples et des propriétés concernant l'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.et dans le deuxième chapitre, on étudie le problème de la transformation de la dérivée fractionnaire d'ordre α positif en une intégrale d'ordre négatif.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1].

Chapitre 0

Intégrale et dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

0.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente quelques résultats concernant l'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

0.2 Définitions et propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

Soit f une fonction réelle, a appartient au domaine de définition de f et α un nombre réelle strictement positif.

Définition 1 *On appelle intégrale fractionnaire de f d'ordre α, et on la note $I_a^{(\alpha)}$, la fonction définie par*

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,$$

où $\Gamma(\alpha)$ *est la fonction Gamma d'Euler définie par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt.$$

Remarque 2 *On peut écrire* $I_a^{(\alpha)}$ *sous la forme suivante*

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)\, dt.$$

Définition 3 *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de* f *d'ordre* α, *et on la note* $D_a^{(\alpha)}$ *la fonction définie par*

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = D^{(n)} I_a^{(n-\alpha)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_a^{(n-\alpha)} f(x),$$

avec n *un entier naturel supérieure strictement à* α.

Remarque 4 *1) La dérivée fractionnaire* $D_a^{(\alpha)}$ *est indépendant de l'entier* n *et se réduit à la dérivée ordinaire pour* α *entier.*
2) Ces fonctions dépendent, en général, de la constante a, *qu'il sera commode de rappeler en indice. Lorsque, dans une question, elle sera fixée une fois pour toutes, nous utiliserons les notations plus simples* f_α *et* $f^{(\alpha)}$ *respectivement pour* $I_a^{(\alpha)} f$ *et* $D_a^{(\alpha)} f$.
Celles-ci permettent de représenter sans ambiguïté, la valeur prise par l'intégrale où la dérivée, quand on donne à x *une valeur particulière.*
3) $f_\alpha(x+h)$ *est différent à* $I_a^{(\alpha)} f(x+h)$, *mais elle est égale à* $I_{a-h}^{(\alpha)} f(x+h)$.
Comme

$$f_\alpha(x+h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x+h} (x+h-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt.$$

Posons

$$t = h + u.$$

Alors

$$dt = du.$$

Par suite

$$\begin{aligned} f_\alpha (x+h) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-h}^{x} (x-u)^{\alpha-1} f(h+u)\, du \\ &= I_{a-h}^{(\alpha)} f(x+h). \end{aligned}$$

4) On pose par convention

$$I^{(0)} f = f_0 = f,$$

et

$$D^{(0)} f = f^{(0)} = f.$$

Exemple 5 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \exp(kx), \ \ k > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(k(x-t)) dt \\ &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-kt)) dt. \end{aligned}$$

Posons

$$y = kt.$$

Alors

$$dy = kdt.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (\frac{y}{k})^{\alpha-1} \exp(-y) \frac{dy}{k} \\
&= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)} (\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} \exp(-y) dy) \frac{k^{-\alpha+1}}{k} \\
&= k^{-\alpha} \exp(kx),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) &= D^{(n)} I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(kx) \\
&= \frac{d^n}{dx^n} I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(kx) = \frac{d^n}{dx^n} k^{\alpha-n} \exp(kx) \\
&= k^{\alpha-n} k^n \exp(kx) = k^{\alpha} \exp(kx).
\end{aligned}$$

C'est d'ailleurs cette dernière relation, extension de l'égalité suivante

$$D^{(n)} \exp(kx) = k^n \exp(kx),$$

avec n *un entier naturel.*

Exemple 6 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}, \; x > a.$$

Dans ce cas on a

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\alpha} dt.$$

Posons

$$t = a + (x-a)v.$$

Alors

$$dt = (x-a)dv.$$

Par suite, il résulte que

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-v)^{\alpha-1} (x-a)^{\alpha} v^{\alpha} (x-a) dv \\ &= \frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} v^{\alpha} dv = \frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \alpha+1), \end{aligned}$$

où β est la fonction Béta d'Euler définie par

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,\ (x, y\ \epsilon \mathbb{R}),$$

et comme

$$\beta(r_1, r_2) = \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_1+r_2)}.$$

Alors, il résulte que

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

C'est à dire

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} (x-a)^{2\alpha}.$$

Proposition 7 *Soient f une fonction intégrable et bornée, et α et $\acute{\alpha}$ deux nombres réels strictement positifs. Alors on a*

$$I_a^{(\acute{\alpha})}[I_a^{(\alpha)} f(x)] = I_a^{(\alpha+\acute{\alpha})} f(x). \quad (1)$$

Preuve: Soient f une fonction intégrable et bornée, et α et $\acute{\alpha}$ deux nombres réels strictement positifs. Alors on a

$$\begin{aligned}
I_a^{(\acute{\alpha})}[I_a^{(\alpha)} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\acute{\alpha}-1} I_a^{(\alpha)} f(x-t)\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\acute{\alpha})} \int_0^{x-a} t^{\acute{\alpha}-1} dt \int_a^{x-t} (x-t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\acute{\alpha})} \int_a^{x} f(u)\, du \int_0^{x-u} t^{\acute{\alpha}-1} (x-u-t)^{\alpha-1}\, dt.
\end{aligned}$$

Posons

$$t = v(x-u).$$

Alors

$$dt = (x-u)dv.$$

Par suite, il résulte que

$$\begin{aligned}
I_a^{(\acute{\alpha})}[I_a^{(\alpha)} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\acute{\alpha})} \int_a^{x} f(u)\, du \int_0^{1} (v(x-u))^{\acute{\alpha}-1} (x-u-v(x-u))^{\alpha-1} (x-u)dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\acute{\alpha})} \int_a^{x} (x-u)^{\alpha+\acute{\alpha}-1} f(u)\, du \int_0^{1} v^{\acute{\alpha}-1} (1-v)^{\alpha-1}\, dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\acute{\alpha})} \int_a^{x} (x-u)^{\alpha+\acute{\alpha}-1} f(u)\, du.\beta(\acute{\alpha},\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\acute{\alpha})} \int_a^{x} (x-u)^{\alpha+\acute{\alpha}-1} f(u)\, du \\
&= I_a^{(\alpha+\acute{\alpha})} f(x).
\end{aligned}$$

■

Remarque 8 *1)On déduit alors de* (1) *que* $I_a^{(\beta)} f(x)$ *admet toutes les dérivées d'ordre entier inférieur à* β*, avec*

$$D^{(p)} I_a^{(\beta)} f(x) = I_a^{(\beta-p)} f(x), \ (p < \beta). \tag{2}$$

Ces dérivées sont continues. Lorsque β est entier la dérivée d'ordre β existe "presque partout"; partout, si f est continue.

2)Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse, et considérons maintenant la dérivée fractionnaire d'ordre α. La relation précédente montre que $D_a^{(\alpha)} f$ ne dépend pas de l'entier n, et se réduit à la dérivée ordinaire lorsque α est entier.

En effet, soit $\alpha \leq \beta$, alors on a

$$D_a^{(\alpha)} I_a^{(\beta)} (x) = D^{(n)} I_a^{(n-\alpha)} I_a^{(\beta)} f (x) = D^{(n)} I_a^{(n+\beta-\alpha)} f (x) ,$$

Comme

$$D^{(n)} I_a^{(n)} f = f.$$

Alors, il résulte que

$$D_a^{(\alpha)} I_a^{(\beta)} f (x) = I_a^{(\beta-\alpha)} f (x) , \ (\alpha \leq \beta), \tag{3}$$

Proposition 9 *Si la dérivée $D_a^{(\alpha)}$ existe en un point x_0, il en est de même de $D_{\acute{a}}^{(\alpha)}$, quel que soit $\acute{a} < x_0$, et on a*

1)

$$I_a^{(n-\alpha)} f (x) = I_{\acute{a}}^{(n-\alpha)} f (x) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{n-\alpha-1} f (t) \, dt,$$

2)

$$D_a^{(\alpha)} f (x) = D_{\acute{a}}^{(\alpha)} f (x) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{\alpha-1} f (t) \, dt,$$

3)

$$I_a^{(\beta)}(1) = \frac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}, \ (\beta \geq 0),$$

4)

$$D_a^{(\alpha)} \frac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}. \tag{4}$$

Preuve: 1) On a

$$\begin{aligned}
I_a^{(n-\alpha)} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\int_a^{\acute{a}} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt + \int_{\acute{a}}^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\acute{a}}^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt \\
&= I_{\acute{a}}^{(n-\alpha)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

2) D'aprés 1), on a

$$\begin{aligned}
D_a^{(\alpha)} f(x) &= D^{(n)} I_a^{(n-\alpha)} f(x) \\
&= D^{(n)} I_{\acute{a}}^{(n-\alpha)} f(x) + D^{(n)} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt \\
&= D_{\acute{a}}^{(\alpha)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

3) Un calcule immédiat donne

$$\begin{aligned}
I_a^{(\beta)}(1) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} [-(x-t)^{\beta}]_a^x = \frac{(x-a)^{\beta}}{\beta\Gamma(\beta)},
\end{aligned}$$

Comme

$$\beta\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta+1).$$

Alors, il résulte que

$$I_a^{(\beta)}(1) = \frac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}, \ (\beta \geq 0),$$

4) On a

$$D_a^{(\alpha)} \frac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} = D^{(n)}.I_a^{(n\ -\alpha)} I_a^{(\beta)}.1 = D^{(n)}.I_a^{(n+\beta-\alpha)} = D^{(n)} \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}.$$

Par suite

$$D_a^{(\alpha)} \frac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.$$

■

Remarque 10 *1)Si on pose $\beta = 0$ dans l'égalité précédent, on obtient*

$$D_a^{(\alpha)}(1) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}.$$

2)On voit que la dérivée d'ordre non entier $D_a^{(\alpha)}$ est en général infinie pour $x = a$.

3)Si f admet dans (a, a_1) une dérivée bornée d'ordre entier r, alors toutes les dérivées $D_a^{(\acute{\alpha})}$, $(\acute{\alpha} < r)$ existent et sont continues dans l'intervalle ouvert à gauche de a.

Proposition 11 *Soit r un entier naturel, et supposons que $f^{(r)}$ est intégrable. Alors*

1)

$$f^{(r-1)}(x) = I_a^{(1)} f^{(r)}(x) + f^{(r-1)}(a).$$

2)

$$f(x) = I_a^{(r)} f^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a). \tag{5}$$

3)-

$$D_a^{(\acute{\alpha})} f(x) = I_a^{(r-\acute{\alpha})} f^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^{i-\acute{\alpha}}}{\Gamma(i+1-\acute{\alpha})} f^{(i)}(a). \tag{6}$$

Preuve: 1) Soit r un entier naturel , et supposons que $f^{(r)}$ est intégrable. On a

$$I_a^{(1)} f^{(r)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-t)^0 f^{(r)}(t)dt = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f^{(r)}(t)dt$$

$$I_a^{(1)} f^{(r)}(x) = f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(a), (\text{car:}\Gamma(1) = 1).$$

Donc

$$f^{(r-1)}(x) = I_a^{(1)} f^{(r)}(x) + f^{(r-1)}(a).$$

2) D'après 1°), on a

$$f^{(r-1)}(x) = I_a^{(1)} f^{(r)}(x) + f^{(r-1)}(a),$$

alors

$$I_a^{(1)} f^{(r-1)}(x) = I_a^{(2)} f^{(r)}(x) + I_a^{(1)} f^{(r-1)}(a),$$

c'est-à-dire

$$f^{(r-2)}(x) - f^{(r-2)}(a) = I_a^{(2)} f^{(r)}(x) + (x-a) f^{(r-1)}(a),$$

car

$$I_a^{(1)}(1) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-t)^0 \, dt = (x-a).$$

Ce qui entraîne que

$$f^{(r-2)}(x) = I_a^{(2)} f^{(r)}(x) + (x-a) f^{(r-1)}(a) + f^{(r-2)}(a),$$

par suite

$$I_a^{(1)} f^{(r-2)}(x) = I_a^{(3)} f^{(r)}(x) + I_a^{(1)}(x-a) f^{(r-1)}(a) + I_a^{(1)} f^{(r-2)}(a),$$

c'est-à-dire

$$f^{(r-3)}(x) - f^{(r-3)}(a) = I_a^{(3)} f^{(r)}(x) + f^{(r-1)}(a) \frac{(x-a)^2}{2} + (x-a) f^{(r-2)}(a),$$

car

$$I_a^{(1)}(x-a) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-t)^0 (t-a) dt = \frac{(x-a)^2}{2}.$$

C'est-à-dire

$$f^{(r-3)}(x) = I_a^{(3)} f^{(r)}(x) + f^{(r-1)}(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f^{(r-2)}(a)(x-a) + f^{(r-3)}(a).$$

Ce qui donne

$$f(x) = I_a^{(r)} f^{(r)}(x) + f^{(r-1)}(a)\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} + f^{(r-2)}(a)\frac{(x-a)^{r-2}}{(r-2)!} + .. + f^{(1)}(x)(x-a) + f(a),$$

c'est-à-dire

$$f(x) = I_a^{(r)} f^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-1}\frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

3) En utilisant les relations (3) et (4), on obtient

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = D_a^{(\alpha)} I_a^{(r)} f^{(r)}(x) + D_a^{(\alpha)}(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)).$$

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = D_a^{(\alpha)} I_a^{(\alpha)} I_a^{(-\alpha)} I_a^{(r)} f^{(r)}(x) + D_a^{(\alpha)}(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)).$$

Alors

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = I_a^{(r-\alpha)} f^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-1}\frac{(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)} f^{(i)}(a).$$

■

Remarque 12 *La propriété subsiste quand on remplace r par un nombre non entier α.*

Proposition 13 *1) Supposons que $D_a^{(\alpha)} f$ est bornée dans $(\acute{a}, a_1)$ avec $\acute{a} > a$.*

Désignons par r la partie entière de α, et on a par définition

$$I_a^{(r+1-\alpha)} f(x) = F(x).$$

Alors on a

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = F^{(r+1)}(x).$$

2) On a

$$F(x) = I_{a'}^{(r+1)}F^{(r+1)}(x) + F(a') + \sum_{i=1}^{r} \frac{(x-a')^i}{i!}F^{(i)}(a'), \qquad (7)$$

et

$$F(x) = I_{a'}^{(r+1-\alpha)}f\,(x) + \frac{1}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{a'} (x-t)^{r-\alpha}\,f\,(t)\,dt. \qquad (8)$$

Preuve: 1) Supposons que $D_a^{(\alpha)}f$ est bornée dans (a', a_1) avec $a' > a$.

On pose

$$I_a^{(r+1-\alpha)}f\,(x) = F(x).$$

Alors

$$D_a^{(r+1)}I_a^{(r+1-\alpha)}f\,(x) = F^{(r+1)}(x),$$

c'est-à-dire

$$D_a^{(r+1)}I_a^{(r+1)}I_a^{(-\alpha)}f\,(x) = F^{(r+1)}(x),$$

comme

$$D_a^{(r+1)}I_a^{(r+1)}f\,(x) = I_a^{(r+1-r-1)}f\,(x) = I_a^{(0)}f\,(x) = f\,(x)\,.$$

alors

$$I_a^{(-\alpha)}f\,(x) = F^{(r+1)}(x),$$

Par suite

$$D_a^{(\alpha)}I_a^{(\alpha)}I_a^{(-\alpha)}f\,(x) = F^{(r+1)}(x),$$

c'est-à-dire

$$D_a^{(\alpha)}f\,(x) = F^{(r+1)}(x).$$

En conclusion, la dérivée de Liouville est donné par la relation,

$$D_a^{(\alpha)}f\,(x) = (\frac{d}{dx})^{r+1}(I_a^{(r+1-\alpha)}f\,(x)),\ \text{où } r = [\alpha].$$

2) On a

$$F(x) = I_a^{(r+1-\alpha)} f\,(x)\,,$$

comme

$$I_a^{(r+1-\alpha)} f\,(x) = I_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} f\,(x) + \frac{1}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{r-\alpha}\, f\,(t)\,dt.$$

Alors

$$F(x) = I_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} f\,(x) + \frac{1}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{r-\alpha}\, f\,(t)\,dt.$$

■

En utilisant les relations (7) et (8),on obtient

$$I_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} f\,(x) = I_{\acute{a}}^{(r+1)} F^{(r+1)}(x) + \sum_{i=1}^{r} \frac{(x-\acute{a})^i}{i!} F^{(i)}(\acute{a}) + g(x),$$

avec

$$g(x) = F(\acute{a}) - \frac{1}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{r-\alpha}\, f\,(t)\,dt.$$

Appliquons l'opérateur $D_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)}$ aux deux membres, on obtient

$$D_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} I_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} f\,(x) = D_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} I_{\acute{a}}^{(r+1)} F^{(r+1)}(x) + D_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} \sum_{i\ =1}^{r} \frac{(x-b)^i}{i!} F^{(i)}(\acute{a}) + D_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} g(x).$$

Par suite, d'après la relation (**??**), on obtient

$$f\,(x) = I_{\acute{a}}^{(\alpha)} F^{(r+1)}(x) + \sum_{i=1}^{r} \frac{(x-\acute{a})^{i+\alpha-r-1}}{\Gamma(i+\alpha-r)} F^{(i)}(\acute{a}) + D_{\acute{a}}^{(r+1-\alpha)} g(x),$$

Comme g admet une dérivée continue, quel que soit $\acute{a} < x \leq a_1$,

$$\acute{g}(x) = -\frac{r-\alpha}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (x-t)^{r-\alpha-1}\, f\,(t)\,dt,$$

dont la valeur absolue satisfait à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
| \quad g'(x) | &= | -\frac{r-\alpha}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_{a}^{a'} (x-t)^{r-\alpha-1} f(t)\, dt \, | \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(r+1-\alpha)} [(x-t)^{r-\alpha}]_{a}^{a'} \\
&< \frac{M}{\Gamma(r+1-\alpha)} (x-a')^{r-\alpha} .
\end{aligned}$$

M désignant le maximum de $| \, f \, |$.

Remarque 14 *On voit que la relation (1) s'applique encore à* $g'(x)$*, il en résulte*

$$I_{a'}^{(\alpha-r)} I_{a'}^{(1)} g'(x) = I_{a'}^{(1)} I_{a'}^{(\alpha-r)} g'(x),$$

et comme $g(a') = 0$ *et*

$$\begin{aligned}
I_{a'}^{(1)} g'(x) &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_{a'}^{x} (x-t)^{0} g'(t) dt \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

Alors, il résulte que

$$I_{a'}^{(\alpha-r)} g(x) = I_{a'}^{(1)} I_{a'}^{(\alpha-r)} g'(x).$$

Proposition 15 *Pour toute* $\alpha > 0$*, on a*

$$D_{a'}^{(r-\alpha+1)} g(x) = I_{a'}^{(\alpha-r)} g'(x).$$

Preuve: Pour toute $\alpha > 0$, on a

$$I_{a'}^{(\alpha-r)} g(x) = I_{a'}^{(1)} I_{a'}^{(\alpha-r)} g'(x).$$

Alors

$$D_{\acute{a}}^{(r-\alpha)} I_{\acute{a}}^{(r-\alpha)} I_{\acute{a}}^{(\alpha-r)} g(x) = I_{\acute{a}}^{(1)} I_{\acute{a}}^{(\alpha-r)} \acute{g}(x),$$

c'est-à-dire

$$D_{\acute{a}}^{(r-\alpha)} g(x) = I_{\acute{a}}^{(1)} I_{\acute{a}}^{(\alpha-r)} \acute{g}(x).$$

Appliquons $\frac{d}{dx}$ aux deux membres, on obtient

$$\frac{d}{dx}(D_{\acute{a}}^{(r-\alpha)} g(x)) = \frac{d}{dx}(I_{\acute{a}}^{(1)} I_{\acute{a}}^{(\alpha-r)} \acute{g}(x)),$$

c'est-à-dire

$$D_{\acute{a}}^{(r-\alpha+1)} g(x) = I_{\acute{a}}^{(\alpha-r)} \acute{g}(x).$$

■

Si on remplace $\acute{g}(x)$ par son expression, on obtient

$$\begin{aligned} D_{\acute{a}}^{(r-\alpha+1)} g(x) &= I_{\acute{a}}^{(\alpha-r)} \acute{g}(x) = -I_{\acute{a}}^{(\alpha-r)} \frac{r-\alpha}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} (u-t)^{r-\alpha-1} f(t)\, dt \\ &= -\frac{r-\alpha}{\Gamma(\alpha-r).\Gamma(r+1-\alpha)} \int_{\acute{a}}^{x} (x-u)^{\alpha-r-1}\, du \int_a^{\acute{a}} (u-t)^{r-\alpha-1} f(t)\, dt \\ &= \frac{r-\alpha}{\Gamma(\alpha-r).\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{\acute{a}} f(t)\, dt \int_{\acute{a}}^{x} (x-u)^{\alpha-r-1} (u-t)^{r-\alpha-1}\, du. \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale suivante

$$\int_{\acute{a}}^{x} (x-u)^{\alpha-r-1} (u-t)^{r-\alpha-1}\, du.$$

Posons

$$v = \frac{x-u}{u-t}.$$

Alors

$$du = -\frac{x-t}{(v+1)^2} dv.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\int_{\acute{a}}^{x}(x-u)^{\alpha-r-1}(u-t)^{r-\alpha-1}\,du &= -\int_{\acute{a}}^{x}\left(x-\frac{vt+x}{v+1}\right)^{\alpha-r-1}\left(\frac{vt+x}{v+1}-t\right)^{r-\alpha-1}\frac{x-t}{(v+1)^2}dv\\ &= -(x-t)^{-1}\int_{\acute{a}}^{x}v^{\alpha-r-1}dv=-\frac{(x-t)^{-1}}{\alpha-r}[v^{\alpha-r}]_{\acute{a}}^{x}\\ &= -\frac{(x-t)^{-1}}{\alpha-r}[(\frac{x-u}{u-t})^{\alpha-r}]_{\acute{a}}^{x}.\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\int_{\acute{a}}^{x}(x-u)^{\alpha-r-1}(u-t)^{r-\alpha-1}\,du=\frac{(x-t)^{-1}}{\alpha-r}(\acute{a}-t)^{r-\alpha}(x-\acute{a})^{\alpha-r}.$$

Par suite, il résulte que

$$D_{\acute{a}}^{(r-\alpha+1)}g(x)=\frac{(x-\acute{a})^{\alpha-r}}{\Gamma(\alpha-r)\Gamma(r+1-\alpha)}\int_{a}^{\acute{a}}(x-t)^{-1}(\acute{a}-t)^{r-\alpha}f(t)\,dt.$$

En conclusion, on a, quel que soit $\acute{a}<x\leq a_1$, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= I_{\acute{a}}^{(\alpha)}D_{a}^{(\alpha)}f(x)+\sum_{i=1}^{r}\frac{(x-\acute{a})^{i+\alpha-r-1}}{\Gamma(i+\alpha-r)}F^{(i)}(\acute{a})\\ &\quad+\frac{(x-\acute{a})^{\alpha-r}}{\Gamma(\alpha-r)\Gamma(r+1-\alpha)}\int_{a}^{\acute{a}}(x-t)^{-1}(\acute{a}-t)^{r-\alpha}f(t)\,dt.\end{aligned}\tag{9}$$

Supposons que $D_a^{(\alpha)}f$ est bornée dans $(\acute{a},a_1)$ avec $\acute{a}<a$.

La relation (9) s'écrit alors

$$f(x)=I_{\acute{a}}^{(\alpha)}D_{a}^{(\alpha)}f(x)+\frac{(x-\acute{a})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{\acute{a}}(x-t)^{-1}(\acute{a}-t)^{-\alpha}f(t)\,dt.$$

Calculons l'intégrale

$$\frac{(x-\acute{a})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{\acute{a}}(x-t)^{-1}(\acute{a}-t)^{-\alpha}f(t)\,dt.$$

Posons

$$t = á - u(x - á).$$

Alors

$$\frac{(x-á)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{á}(x-t)^{-1}(á-t)^{-\alpha}f\left(t\right)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\frac{á-a}{x-á}}(1+u)^{-1}u^{-\alpha}f[á-u(x-á)]du.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle tend vers zéro quand $á$ tend vers a $(x > a)$. De plus la convergence est uniforme dans tout intervalle intérieur à (a, a_1).

On peut donc écrire

$$f\left(x\right) = \lim_{á\to a} I_{á}^{(\alpha)} D_{a}^{(\alpha)} f\left(x\right),$$

c'est-à-dire,

$$f\left(x\right) = I_{a}^{(\alpha)} D_{a}^{(\alpha)} f\left(x\right), \text{ (pour } \alpha\epsilon[0,1]).$$

Proposition 16 *Soit α est supérieur à 1 et non entier. Alors*

$$D_{a}^{(\alpha)} f\left(x\right) = D^{(r)} D_{a}^{(\alpha-r)} f\left(x\right).$$

On ne peut pas d'intégrer $D_{a}^{(\alpha)} f\left(x\right)$ à partir de a. Mais r étant entier, on peut écrire,

$$D_{a}^{(\alpha-r)} f\left(x\right) = I_{a_1}^{(r)} D_{a}^{(\alpha)} f\left(x\right) + \sum_{i=0}^{r-1} A_i \frac{(x-a)^i}{i!},$$

$D_{a}^{(\alpha-r)} f\left(x\right)$ étant nécessairement borné dans $(á, a_1)$, quel que soit $á$, on obtient,

$$f\left(x\right) = I_{a}^{(\alpha-r)} I_{a_1}^{(r)} D_{a}^{(\alpha)} f\left(x\right) + \sum_{i=0}^{r-1} A_i \frac{(x-a)^{i+\alpha-r}}{\Gamma(i+\alpha-r+1)}. \tag{10}$$

Les A_i désignent des constantes.

Preuve: Soit α est supérieur à 1 et non entier, on a

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = D^{(r)} D_a^{(\alpha-r)} f(x).$$

En intégrant r fois à partie de a_1, on obtient

$$I_{a_1}^{(r)} D_a^{(\alpha)} f(x) = I_{a_1}^{(r)} D^{(r)} D_a^{(\alpha-r)} f(x),$$

d'après la relation (5), on a

$$I_{a_1}^{(r)} D_a^{(\alpha)} f(x) = D_a^{(\alpha-r)} f(x) - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^i}{i!} (D_a^{(\alpha-r)} f(x))^{(i)},$$

alors

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha-r)} f(x) &= I_{a_1}^{(r)} D_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^i}{i!} (D_a^{(\alpha-r)} f(x))^{(i)} \\ &= I_{a_1}^{(r)} D_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_{i=0}^{r-1} A_i \frac{(x-a)^i}{i!}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$I_a^{(\alpha-r)} D_a^{(\alpha-r)} f(x) = I_a^{(\alpha-r)} I_{a_1}^{(r)} D_a^{(\alpha)} f(x) + I_a^{(\alpha-r)} \sum_{i=0}^{r-1} A_i \frac{(x-a)^i}{i!},$$

par suite

$$f(x) = I_a^{(\alpha-r)} I_{a_1}^{(r)} D_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_{i=0}^{r-1} A_i \frac{(x-a)^{i+\alpha-r}}{\Gamma(i+\alpha-r+1)}.$$

Les A_i désignent des constantes. ■

Chapitre 1

Transformation de l'expression de l'intégrale d'ordre α

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le problème de la transformation de la dérivée fractionnaire d'ordre α positif en une intégrale d'ordre négatif.

1.2 Transformation de la dérivée fractionnaire d'ordre α en une intégrale fractionnaire d'ordre négatif

Si on définie la dérivée fractionnaire d'ordre α comme une intégrale d'ordre $-\alpha$, on pose,

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{x-a} t^{-\alpha-1} f(x-t)\, dt, \tag{1.1}$$

ce qui donne une intégrale divergente. (si α est entier le coefficient de cette intégrale $\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$ est d'ailleurs nul).

On peut transformer l'expression de $I_a^{(\alpha)} f(x)$ de façon qu'elle puisse conserver un sens quand on y remplace α par un nombre négatif.

Proposition 17 *Supposons la fonction f définie dans (a, a_1) et prolongée par zéro à gauche de a, avec a étant fixée, on utilisons les notations f_α et $f^{(\alpha)}$.*
Alors on a

$$f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(x-t)\, dt. \tag{1.2}$$

Preuve: Supposons que la fonction f est définie dans (a, a_1) et prolongée par zéro à gauche de a, avec a étant fixée.
D'après la relation (1.1), on a

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)\, dt.$$

C'est-à-dire

$$f_\alpha(x)\, \Gamma(\alpha) = \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)\, dt,$$

par suite

$$f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(x-t)\, dt.$$

■

Posons $t = kt$ avec $k > 0$ dans les deux intégrales de (1.2), on obtient

$$f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-kt\ ) dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(x-kt)\, dt.$$

Soient alors, k_i, C_i $(i = 0, 1, ..., p)$ $2(p+1)$ constantes, les k_i étant positives et croissantes. Alors, il résulte que

$$f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{p} C_i \exp(-k_i t) dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{p} C_i f(x-k_i t)\, dt,$$

c'est-à-dire

$$f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} \psi(t) dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(x,t) dt, \tag{1.3}$$

avec

$$\psi(t)=\sum_{i=0}^{p}C_i\exp(-k_it),\varphi(x,t)=\sum_{i=0}^{p}C_if\left(x-k_it\right). \tag{1.4}$$

Le second membre de (1.4) s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x,t)dt &= \int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{p}C_if\left(x-k_it\right)dt\\ &= \int_0^{\frac{x-a}{k_i}}t^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{p}C_if\left(x-k_it\right)dt+\int_{\frac{x-a}{k_i}}^{\infty}t^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{p}C_if\left(x-k_it\right)dt,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x,t)dt=\int_0^{\frac{x-a}{k_p}}t^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{p}C_if\left(x-k_it\right)dt+\int_{\frac{x-a}{k_p}}^{\frac{x-a}{k_i}}t^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{p}C_if\left(x-k_it\right)dt,$$

si $a\leq x-k_pt$, $\varphi(x,t)$ est définie pour $t>0$.

L'expression de f_α transformée sous la forme (1.3), va nous permettre de considérer la dérivée fractionnaire $f^{\ (\alpha)}$ comme une intégrale d'ordre $-\alpha$, et d'écrire,

$$f^{(\alpha)}\left(x\right)\int_0^{\infty}t^{-\alpha-1}\psi(t)dt=\int_0^{\infty}t^{-\alpha-1}\varphi(x,t)dt. \tag{1.5}$$

Pour la suite de ce chapitre, on a besoin du second théorème de la moyenne qui s'énonce comme suit

Théorème 1.1 *Soient $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ et $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues telle que h est croissante, alors il existe $c\epsilon[a,b]$, telle que*

$$\int_a^b\varphi(t)h(t)dt=\varphi(b)\int_c^b h(t)dt.$$

Proposition 18 *Soient $\alpha>0$, et ψ choisie de manière que l'intégrale du premier membre de la relation (1.5) a un sens et soit différente de zéro et considérons la fonction γ donnée par*

$$\gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{-\alpha-1}\psi(t)dt, \tag{1.6}$$

si cette fonction est définie pour α_0, alors elle est continue pour toute valeur $\alpha \leq \alpha_0$.

Preuve: Soient $\alpha > 0$, et $\psi(t)$ choisie de manière que l'intégrale du premier membre de la relation (1.5) ait un sens et soit différente de zéro.

Les intégrales $\int_0^\varepsilon$ et $\int_l^\infty$ tendent vers zéro avec ε et l^{-1}, uniformément, dans tout intervalle (α_1, α_0).

Comme la première intégrale $\int_0^\varepsilon t^{-\alpha_0-1}\psi(t)dt$ a un sens, alors on a

$$| \int_0^\varepsilon t^{-\alpha_0-1}\psi(t)dt | \leq \eta(\varepsilon),$$

où $\eta(\varepsilon)$ désigne un infiniment petit que l'on peut supposer non décroissant.

D'après le second théorème de la moyenne, on a

$$| \int_{\acute{\varepsilon}}^{\varepsilon} t^{-\alpha-1}\psi(t)dt | = | \int_{\acute{\varepsilon}}^{\varepsilon} t^{\alpha_0-\alpha}t^{-\alpha_0-1}\psi(t)dt | = \varepsilon^{\alpha_0-\alpha} | \int_{\acute{\varepsilon}}^{\varepsilon} t^{-\alpha_0-1}\psi(t)dt |, \ (0 < \acute{\varepsilon} < \acute{\varepsilon} < \varepsilon),$$

et

$$| \int_0^\varepsilon t^{-\alpha-1}\psi(t)dt | \leq 2\eta(\varepsilon)\varepsilon^{\alpha_0-\alpha} \leq 2\eta(\varepsilon).$$

Par suite, il résulte que $\int_0^\varepsilon t^{-\alpha-1}\psi(t)dt$ est uniformément convergente.

D'autre part on a, pour $l > 1$

$$\int_l^\infty t^{-\alpha-1}\psi(t)dt = \int_l^\infty t^{-\alpha-1}\sum_{i=0}^{p} C_i \exp(-k_i t)dt = \sum_{i=0}^{p} C_i \int_l^\infty t^{-\alpha-1}\exp(-k_i t)dt,$$

Comme

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1-\alpha}\exp(-k_i t) = 0.$$

Alors, il résulte que

$$t^{-\alpha-1}\exp(-k_i t) \leq \frac{\varepsilon}{t^2}.$$

Comme $\int_l^\infty \frac{\varepsilon}{t^2}dt$ est convergente, alors il résulte que $\int_l^\infty t^{-\alpha-1}\psi(t)dt$ est uniformément convergente.

En conclusion $\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\psi(t)dt$ est uniformément convergente pour toute valeur $\alpha \leq \alpha_0$ et comme $(\alpha, t) \mapsto t^{-\alpha-1}\psi(t)$ est continue dans chaque ensemble $]0, +\infty[\times[a, b]$ avec $[a, b]$ un compact de $]0, +\infty[$. Alors, il résulte que $\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\psi(t)dt$ est continue pour toute valeur $\alpha \leq \alpha_0$. C'est-à-dire $\gamma(\alpha)$ est continue pour toute valeur $\alpha \leq \alpha_0$. ■

Calculons maintenant $\gamma(\alpha)$ en fonction des constantes k_i et C_i.
Désignons, comme nous le ferons toujours dans la suite, par r la partie entière de α.
Si $\gamma(\alpha)$ a un sens, l'ordre infinitésimal de $\psi(t)$, pour t infiniment petit, qui est entier, est au moins égal à $r + 1$. Ce qui entraîne que

$$\sum_{i=0}^{p} k_i^j C_i = 0, \ (j = 0, 1, ..., r). \tag{1.7}$$

Supposons d'abord $\alpha \neq r$. En intégrant r fois par partie l'intégrale dans l'expression (1.6), on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) &= \tfrac{1}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-r)}\int_0^\infty t^{-\alpha+r}\psi^{(r+1)}(t)dt\\ &= \tfrac{(-1)^{r+1}}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-r)}\int_0^\infty t^{-\alpha+r}\sum_{i=0}^p k_i^{r+1}C_i\exp(-k_it)dt.\end{aligned}$$

On peut maintenant séparer les intégrales. En faisant dans le coefficient de C_i le changement de variable $v = k_it$, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) &= \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-r)}\int_0^\infty (\frac{v}{k_i})^{-\alpha+r}\sum_{i=0}^{p} k_i^{r+1}C_i\exp(-v)\frac{dv}{k_i}\\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-r)}\int_0^\infty (v)^{-\alpha+r}\exp(-v)dt\sum_{i=0}^{p} k_i^{\alpha}C_i,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\gamma(\alpha) = \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-r)}\Gamma(r+1-\alpha)\sum_{i=0}^{p} k_i^{\alpha}C_i,$$

par suite

$$\gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{-\alpha-1}\psi(t)dt = \int_0^\infty t^{-\alpha-1}\sum_{i=0}^{p} C_i\exp(-k_it)dt = \sum_{i=0}^{p} C_i\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\exp(-k_it)dt.$$

Posons le changement de variable

$$u = k_i t,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= \sum_{i=0}^{p} C_i k_i^{\alpha} \int_0^{\infty} u^{-\alpha-1} \exp(-u) dt \\ &= \Gamma(-\alpha) \sum_{i=0}^{p} C_i k_i^{\alpha}, \ (\alpha \neq r). \end{aligned}$$

Pour calculer $\gamma(r)$, on écrit

$$\gamma(\alpha) = \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-r+1)} \Gamma(r+1-\alpha) \sum_{i=0}^{p} \frac{k_i^{\alpha} - k_i^{r}}{\alpha - r} C_i,$$

car

$$\sum_{i=0}^{p} k_i^j C_i = 0, (j = 0, 1, ..., r).$$

En faisant tendre α vers r, on obtient

$$\gamma(r) = \lim_{\alpha \to r} \frac{(-1)^{r+1}}{r(r-1)...1} \sum_{i=0}^{p} \frac{\exp(\alpha \log(k_i) - k_i^r}{\alpha - r} C_i = \lim_{\alpha \to r} \frac{(-1)^{r+1}}{r(r-1)...1} \sum_{i=0}^{p} \log(k_i) \exp(\alpha \log(k_i) C_i,$$

c'est-à-dire

$$\gamma(r) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{i=0}^{p} k_i^r \log(k_i) C_i.$$

Remarque 19 *On voit qu'il est possible de choisir $\psi(t)$ de manière que l'intégrale $\gamma(\alpha)$ est convergente et soit différente de zéro.*

Considérons la fonction ψ définie par,

$$\psi(t) = \begin{vmatrix} \exp(-k_0 t) & 1 & k_0 & ... & k_0^{p-1} \\ \exp(-k_1 t) & 1 & k_1 & ... & k_1^{p-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \exp(-k_p t) & 1 & k_p & ... & k_p^{p-1} \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

Alors on a la résultat suivant

Proposition 20 *ψ ne s'annule que pour $t = 0$.*

Preuve: Si l'on avait $\psi(t) = 0$ pour $t \neq 0$, il existerait $p + 1$ constantes, non toutes nulles: $B, A_{0,}A_1, ..., A_{P-1}$, telle que si on pose

$$\varphi(x) = B \exp(-tx) + A_0 + A_1 x + ... + A_{P-1} x^{p-1},$$

alors φ s'annule pour $x = k_0,\ k_1, ...,\ k_p$. Ce qui est impossible car d'après le théorème de Rolle, on a

$$\varphi(k_0) = 0 \text{ et } \varphi(k_1) = 0 \text{ alors il existe } c_1 \text{ telle que } \varphi'(c_1) = 0,$$

$$\varphi(k_1) = 0 \text{ et } \varphi(k_2) = 0 \text{ alors il existe } c_2 \text{ telle que } \varphi'(c_2) = 0,$$

$$\varphi(k_2) = 0 \text{ et } \varphi(k_3) = 0 \text{ alors il existe } c_3 \text{ telle que } \varphi'(c_3) = 0,$$

$$\varphi(k_{p-1}) = 0 \text{ et } \varphi(k_p) = 0 \text{ alors il existe } c_p \text{ telle que } \varphi'(c_p) = 0.$$

Par suite

$$\varphi'(c_i) = 0, \forall i = 1, ..., p,$$

Ce qui entraîne, que

$$\varphi''(\widetilde{c_i}) = 0, \forall i = 1, .., p - 1.$$

De proche en proche, on obtient qu'il existe β telle que

$$\varphi^{(p)}(\beta) = 0.$$

C'est-à-dire

$$B(-t)^p \exp(-tB) = 0.$$

Par suite

$$B = 0.$$

De même

$$\varphi^{(p-1)}(\gamma) = 0,$$

entraîne que

$$A_{p-1} = 0.$$

En utilisant le même raisonnement, on obtient

$$A_{p-3} = A_{p-4} = ... = A_0 = 0.$$

■

Proposition 21 *L'intégrale correspondante $\gamma(\alpha)$ est alors différente de zéro dans tout son domaine d'existence $(-\infty, p)$ ouvert à droite.*
La plus simple des fonctions ψ d'ordre p est donné par,

$$\exp(-t)(1 - \exp(-t))^p = \exp(-t) - C_P^1 \exp(-2t) + C_P^2 \exp(-3t) - ....$$

et dans ce cas on a

$$\varphi(x, t) = f(x - t) - C_p^1 f(x - 2t) + C_p^2 f(x - 3t) - ....$$

Preuve: On a

$$\begin{aligned}
\exp(-t)(1-\exp(-t))^p &= \exp(-t)\sum_{k=0}^{p} C_k^p(-\exp(-t))^k \\
&= \exp(-t)\sum_{k=0}^{p} C_k^p(-1)^k \exp(-kt) \\
&= \exp(-t)[1 - C_k^1\exp(-t) + C_k^2\exp(-2t) + ... + (-1)^p C_k^p \exp(-pt)] \\
&= \exp(-t) - C_k^1\exp(-2t) + C_k^2\exp(-3t) + ... + (-1)^p C_k^p \exp(-(p+1)t).
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\varphi(x,t) &= \sum_{i=0}^{p} C_i f\left(x - k_i t\right) \\
&= C_0 f\left(x-k_0t\right) + C_1 f\left(x-k_1t\right) + ... + C_p f\left(x-k_pt\right) \\
&= C_p^0 f\left(x-k_0t\right) - C_p^1 f\left(x-k_1t\right) + ... + (-1)^p C_p^p f\left(x-k_pt\right).
\end{aligned}$$

Alors, il résulte que

$$\varphi(x,t) = f(x-t) - C_p^1 f(x-2t) + C_p^2 f(x-3t) - ....$$

■

Bibliographie

[1] A.MARCHAUD, mémoire sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles (Thèses françaises de l'entre-deux-guerres, 1927, 90p).

Résumé:

L’objet de ce travail est l'étude des relations entre les propriétés différentielles des fonctions de variables réelles et celles de leurs différences. Il s'agira non seulement des dérivées entières, mais aussi des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville. On utilise des fonctions d'une seule variable.

Abstract:

The purpose of this work is the study of the relationship between the differential properties of functions of real variables and those of their differences. This will not only derived whole, but also fractional derivatives of Riemann-Liouville. Functions of a single variable is used.

ملخص:

الغرض من هذا العمل هو دراسة العلاقة بين الخصائص التفاضلية للوظائف ذات المتغيرات الحقيقية و أوجه الاختلاف فيما بينها. ولا يقتصر الأمر على هذا فقط، بل وأيضا على المشتقات الجزئية من ريمان-يوفيل. حيث يستخدم وظائف ذات متغير واحد.