Dédicace

A mes parents qui m'ont toujours encouragé dans mes études

A tous ceux qui me sont chers

Remerciement

Nous remercions ALLAH le tout puissant de nous avoir accordé la volonté et le courage pour réaliser notre mémoire.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre profonde gratitude à notre

encadreur, **DAHMANE MOHAMED,** pour les efforts qu 'il a accomplit pour le bon déroulement de notre travail.

Nos remerciements vont aussi à Monsieur **Mabkhout Benmiloude** ; le chef de département des Mathématiques.

Table des Matières

Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à la fonction de Green , ses propriétés et son application à l'éxistence de solutions positives d'un problème aux limites pour équations différentielles ordinaires du deuxième ordre, de la forme:

$$(p) : \begin{cases} (-py\,')' + hy = f(x, y) \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{*}$$

Notre objectif est de détèrminer des conditions suffisantes sur la nonlinéarité f pour assurer l'existence d'au moins d'une solution positive du problème précédent.

L'étude des équations différentielles ordinaires se trouve à l'interface de nombreux problèmes scientifiques.En effet, la plupart des phénomènes de la physique ou des sciences de l'ingénieur sont nonlinéaires et une modélisation par des équations linéaires.

Notons que plusieurs phénomènes physiques ou biologiques sont gouvernés par des équation différentielles, par exemple la diffusion de la chaleur et la concentration chimique en biologie mathémathique .

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres:

Dans le premier chapitre , on présente quelques définitions et aux résultats prémiliminaires utiles pour la suite du travail. Le chapitre deux est réservé la fonction de Green et ses propriétés. Au chapitre trois ,on éxaminera un problème d'ordre deux nonlinéaire. Le dernier est consacré aux exemples d'application. Enfin ,on termine notre mémoire par une brève conclusion .

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces de Banach ordonnés:

Soit E un espace de Banach.

Un ensemble convexe fermé $K \subset F$ est dit un cône si :

i)pour tout $y \in k$ et $y \neq 0$, alors $\alpha y \in K$ pour $\alpha \geq 0$.

ii)$y \in k$ et $-y \in k$, alors $y = 0$.

Notons qu'on a $k \cap (-k) = \{0\}$.

Le cône k définit une relation d'ordre partiel dans l'espace de Banach E.

On écrit $x \leq y$ ou $y \geq x$ si $y - x \in K$.

Les éléments de K est appelés positifs.

L'espace de Banach E est dit espace ordonné par le cône K

1.2 Opérateurs compacts:

Soit A un opérateur linéaire d'un espace de Banach E dans un autre espace de Banach F.

Définition 1.1 *A est compact s'il transforme tout ensemble borné de E dans un ensemble relativement compact de F.*

Remarque 1.1 *Il est évident que tout opérateur linéaire compact est borné.*

D'autre part, on vérifie sans peine que tout opérateur linéaire borné, envoie un ensemble relativement compact dans un ensemble relativement compact. Donc la propriété de compacité est généralement plus forte que la continuité par exemple, l'opérateur identité défini sur un espace de dimention infinie, n'est pas compact, puisqu'il envoie la boule unité dans elle même, or celle-ci n'est pas compacte.

Définition 1.2 *Un opérateur est dit complètement continu, s'il est compact et continu*

Remarque 1.2

T compact $\iff$ $T(C)$ relativement compact.

T continue et compact $\iff$ T complatement continue.

$\overline{T(C)}$ (adhérence) compact $\iff$ $T(C)$relativement compacte.

1.3 Opérateur linéaire intégral:

Soit $By(x) = \int_I k(x,s)y(s)ds$, un opérateur linéaire intégral.

Les propriétés de cet opérateur sont déterminées par les propriétés du noyau $k(x,s)$.

si $k(x,s)$ est continu alors B est complètement continu dans l'espace $C(I)$

1.4 Opérateur de Nemitskii:

L'opérateur de Nemitskii F associé à la fonction $f : (x,y) \to f(x,y)$ est défini par:

$$(Fy)(x) = f(x, y(x)) \text{ pour tout } x \in I.$$

Les propriétés de F sont déterminées par les propriétés de f. Si f est continue alors F est continu et borné dans l'espace des fonctions continues.

1.5 Opérateurs de Hammerstein:

Soit $Ay(x) = \int k(x,s)f(s,y(s))ds$.

on peut mettre A sous la forme : $A = BF$, où :

$$By(x) = \int k(x,s)y(s)ds, \;\; Fy(x) = f(x, y(x)).$$

si f est continue et B est compètement continu, alors A est complètement continu dans l'espace des fonctions continues.
Pour plus de détails consernant les propriétés des opérateurs B, F et A, on peut consulter [2]

1.6 Critère de compacité dans $C([a.b];\mathbb{R})$:

Définition 1.3 *On dit que des fonctions d'un sous-ensemble $M \subset C([a.b];\mathbb{R})$ sont uniformément bornées, s'il existe une constante $a > 0$ telle que $|x(t)| \leq a$ pour tout $x(.)$ de M et quel soit $t \in [a,b]$. [5]*

Définition 1.4 *On dit que des fonctions d'un sous-ensemble $M \subset C([a.b];\mathbb{R})$ sont équicontinues, si pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta > 0$ dépendant uniquement de ε, tel que pour tous $t_1, t_2 \in [0.1]$ satisfaisant à l'inégalité $|t_1 - t_2| < \delta$ et pour toute fonction $x(.)$ de M l'on ait $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.*

Théorème 1.1 *(Arselà)*
Pour qu'un sous-ensemble $M \subset C([a.b];\mathbb{R})$ soit relativement compact . il suffit que les fonctions $x(.)$ de M soient uniformément bornées et équicontinues.

Définition 1.5 *Un ensemble C est dit convexe lorsque, pour tout x et y de C, le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans C , i.e. :*

$$\forall \; x \; , \; y \;\; \in \;\; C, \; \forall \; t \;\; \in [0,1] \, , \quad t \; x + (1-t) \, y \in \;\; C$$

1.7 Théorème de point fixe de Kranoselskii:

Dans plusieurs problèmes, on se ramène à étudier des équations de la forme $X = A.X$ où A est un opérateur en général non linéaire.

La résolution de ces équations est équivalente à étudier l'existence de points fixes de l'opérateur A.

Théorème 1.2 *Krasnoselskii [2]*

Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Considérons W_1 , W_2 deux ensembles ouverts et bornés de E tels que $0 \in W_1 \subset \bar{W}_1 \subset W_2$ et $A : K \cap (\bar{W}_2 \setminus W_1) \rightarrow K$ un opérateur complétement continu.

Si ona :

i)$\| Ay \| \leq \| y \|$ pour tout $y \in K \cap \partial W_1$ et$\| Ay \| \geq \| y \|$ pour tout $y \in K \cap \partial W_2$ ou

ii) $\| Ay \| \geq \| y \|$pour tout $y \in K \cap \partial W_1$ et$\| Ay \| \leq \| y \|$ pour tout $y \in K \cap \partial W_2$

Alors A admet au moins un point fixe dans $K \cap (\bar{W}_2 \setminus W_1)$

Remarque 1.3

$\cdot$ $\delta\Omega_i$désigne la frontière de Ω_i $i = 1, 2$

Ce théorème est une généralisation du théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions scalaires. En effet , si on pose $f(y) = \| Ay \| - \| y \|$,alors f est continue et :

si $f(y) \leq 0$ pour $y \leq r_1$ et $f(y) \geq 0$ pour $y \geq r_2$,il existe $y_0 \in [r_1, r_2]$ tel que $f(y_0) = 0$

Chapitre 2

Fonction de Green

Considérons le problème

$$\begin{cases} -(py^{'})^{'} + hy = \sigma(x) & 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Où $\sigma \in C^1(I, \mathbb{R}^+)$ avec $\sigma(x) \neq 0$ pour tout x$\in I = [0,, 1]$ et $p \in C^1(I, \mathbb{R}^+)$, et $h \in C(I, \mathbb{R}^+)$

2.1 Problème homogène

$$\begin{cases} -(py^{'})^{'} + hy = \sigma(x) & 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Cherchons les solutions du problème homogène [3]:

Soit y est une solution de l'équation homogène s'annulant aux éxtrémités de I , et comme y est continue on conclut que le signe de y reste constant sur I.

on a

$$\left(-py\ '\right)' + hy = 0 \implies -(py\ ')' = -hy \implies py' = \int_0^x h\ (s)\, y\ (s)\, ds\ + C_1$$

$$\implies y' = \frac{1}{P\,(x)} \int_0^x h\ (s)\, y\ (s)\, ds + \frac{C_1}{p\,(x)}$$

$$\Longrightarrow y(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{P(s)}\int_0^s h(t)\,y(t)\,dt\right)ds+C_1\int_0^x\frac{dt}{p(t)}+C_2$$

En utilisant une intégration par parties on obtient:

$$y(x)=\left(\int_0^x\frac{dt}{P(t)}\right)\left(\int_0^x h(s)\,y(s)\,ds\right)-\int_0^x\left(\int_0^s\frac{dt}{P(t)}\right)h(s)\,y(s)\,ds+C_1\int_0^x\frac{dt}{p(t)}+C_2$$

on a

$$y(0)=0\Longrightarrow C_2=0$$

$$y(1)=0\Longrightarrow C_1=-\int_0^1 h(s)\,y(s)\,ds+\frac{1}{P}\int_0^1\frac{dt}{p(t)}h(s)\,y(s)\,ds$$

où

$$P=\int_0^1\frac{dt}{p(t)}$$

donc

$$y(x)=\int_0^x\frac{1}{P(S)}\int_0^x h(s)\,y(s)\,ds+C_1\int_0^x\frac{dt}{p(t)}+C_2$$

ie

$$y(x)=-\int_0^1 g(x,s)\,h(s)\,y(s)\,ds$$

où

$$g(x,s)=\begin{cases}\int_0^s\frac{dt}{pt}\int_x^1\frac{dt}{pt} & \text{si } 0\leq x\leq s\leq 1\\ \int_0^x\frac{dt}{pt}\int_s^1\frac{dt}{pt} & \text{si } 0\leq s\leq x\leq 1\end{cases}$$

donc toute solution de problème homogène est une solution de l'équation intégrale

$y(x)=-\int_0^1 g(x,s)\,h(s)\,y(s)\,ds$

la condition sur p montre que $g(x,s)\geq 0\ \ \forall x,s\in I$ et comme $h>0$ sur I et y a un singe constant sur I on aura $y=0$

En effet:

si

$$y\leq 0\Longrightarrow -\int_0^1 g(x,s)\,h(s)\,y(s)\,ds\ \geq 0\Longrightarrow y=0$$

et si

$$y \geq 0 \implies -\int_0^1 g(x,s)\, h\ \ (s)\, y\ \ (s)\, ds\ \leq 0 \implies y = 0$$

donc le problème homogène n'admet que la solution triviale, ce qui assure l'éxistence de la fonction de Green.

2.2 Construction de la fonction de greeen

Soient $y_1(x), y_2(x)$ deux solutions linéairement indépendantes du problème homogène

telles que $y_1(0) = y_2(1)$ [5]

$\alpha y_1(x), \beta y_2(x)$ vérifient les mêmes conditions que $y_1(x), y_2(x)$, où α et β des réels.

Choisissons α, β en fonction de $s \in [0,1]$ de sorte que: $\alpha\ (s)\, y_1\, (s) = \beta\, (s)\, y_2\, (s)$

Considérons maintenant la fonction continue $G(x,s)$ définie par :

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha(s)\, y_1(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq s \leq 1 \\ \beta(s)\, y_2(x) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

on remarque que $\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial x}$ est discontinue au point $x = s$.

$G(x,s)$ n'est pas bien définie car on ne connait pas $\alpha\ (s)$ et $\beta\,(s)$, pour les détèrminer ,on suppose que le saut de $\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial x}$ au point $x = s$

est égale à $\dfrac{-1}{p(s)}$ et le fait que $G\ (x,s)$ est continue .

le saut de $\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial x}$ au point $x = s$ est défini par: $\lim\limits_{x \to s^+} \dfrac{\partial G(x,s)}{\partial x} - \lim\limits_{x \to s^-} \dfrac{\partial G(x,s)}{\partial x}$

donc $\alpha\ (s)\,, \beta\,(s)$ sont détèrminées en résolvant le système:

$$\begin{cases} \alpha(s)\, y_1(s) = \beta(s)\, y_2(s) \\ \beta(s)\, y_2'(s) - \alpha(s)\, y_1'(s) = \dfrac{-1}{p(s)} \end{cases}$$

on trouve

$$\alpha(s) = \frac{-y_2(s)}{p(s)\left[y_1(s)\, y_2'(s) - y_1'(s)\, y_2(s)\right]}$$

$$\beta(s) = \frac{-y_1(s)}{p(s)\left[y_1(s)\, y_2'(s) - y_1'(s)\, y_2(s)\right]}$$

la quantité $y_1(s)\, y_2'(s) - y_1'(s)\, y_2(s) = w(s, y_1, y_2)$ c'est le wronskien dey_1, y_2

donc

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{-y_1(x)\, y_2(s)}{p(s)\, w(s, y_1, y_2)} & 0 \leq x \leq s \leq 1 \\ \dfrac{-y_2(x)\, y_1(s)}{p(s)\, w(s, y_1, y_2)} & 0 \leq s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Montrons que $p(s)\, w(s, y_1, y_2) = cste = k$

comme y_1, y_2 sont deux solutions de l'équation homogène, alors :

on a :

$$\left(-py\,'_1\right)' + hy_1 = 0 \tag{1}$$

$$\left(-py\,'_2\right)' + hy_2 = 0 \tag{2}$$

multiplions (1) par y_2 et (2) par y_1

donc (1)−(2) $\Longrightarrow\ -y_2\left(-py\,'_1\right)' + y_1\left(py\,'_2\right)' = 0$

$$\Longrightarrow\ \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(-y_1(x)\, y\,_2(x)' + y_1(x)'\, y\,_2(x)\right)\right] = 0$$

ie:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\, w(x, y_1, y_2)\right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad p(x)\, w(x, y_1, y_2) = k = cst$$

Finalement $G(x,s)$ est déterminée par:

$$G(x,s) = \frac{-1}{k} \begin{cases} y_1(x)\, y_2(s) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq s \leq 1 \\ y_2(x)\, y_1(s) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2-3}$$

où $k = pw(y_1, y_2) = cst$

La fonction définie par (2-3) est appeleé la fonction de Green associée au problème homogène

$$\begin{cases} \left(-py\,'\right)' + hy = 0 & 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{2-2}$$

à condition que ce problème n'admet que la solution triviale.

D'aprés la définition de $G\ (x,s)$ on peut vérifier qu'elle satisfait aux propriétés suivantes:

(i)$G(x,s)$ est continue $\forall x,s\in I$

(ii)$\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial s}$ est discontinue au point $x=s$ et on a:

$\lim\limits_{x\to s^+}\dfrac{\partial G\ (x,s)}{\partial x}-\lim\limits_{x\to s^-}\dfrac{\partial G\ (x,s)}{\partial x}=\frac{-1}{p(s)}$

(iii)Pour tout s fixé dans $[0,1]$, $G(x,s)$ comme fonction de x , vérifie, l'équation homogène et satisfait les conditions aux limites pour tout $x\neq s$.

(i)Ces propriétés restent valables pour un problème aux limites d' équations différentielles d'ordre ≥ 2

(ii)Pour notre problème , $G(x,s)$ est symétrique ie $G(x,s)=G(s,x)\ \ \forall x,s\in I.$

-La fonction de Green joue un rôle important dans différentes branches de mathémathiques , par exemple elle est utilisée pour résoudre des problèmes aux limites non homogènes pour des équations différentielles ordinaires et équations aux dérivvées partielles.

2.3 Solution de l'équation non homogène

Montrons que $G(x,s)$ nous sert à détèrminer la solution du problème linéaire (2-2)

Considérons les deux équations$\begin{cases} -(p(x)y^{'}(x))^{'}+h(x)y(x)=\sigma(x) & (1)\\ -(p(x)y'(x))'+h(x)y(x)=0 & (2)\end{cases}$

Dans l'équations (1) , considérons $y(x)$ une solution de (2-2)

et comme $G(x,s)$ vérifie l'équation homogène , on remplace $y(x)=G(x,s)$ dans (2)

on obtient:$\begin{cases} -(p(x)y^{'}(x))^{'}+h(x)y(x)=\sigma(x) & (1)\\ -(p(x)\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial x})'+h(x)G(x,s)=0 \quad \text{pour } s \text{ fixé dans } [0,1] & (2)\end{cases}$

multiplions (1) par $G(x,s)$ et (2) par $-y(s)$, et on obtient

$-G(x,s)(py')'+y(p\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial s})'=G(x,s)\sigma(s)$

ie $\dfrac{d}{ds}[p(s)y(s)\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial S}-G(x,s)y'(s)]=G\,(x,s)\,\sigma(s)$

intégrons de 0 à 1 on obtient :

$[p(s)y(s)\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial s}-G(x,s)y'(s)]_0^1=\int_0^1 G\,(x,s)\,\sigma(s)ds$

compte tenu des conditions aux limites, et le fait que $G(x,s)$ est discontinue au point $x=s$

$$[p(s)[y(s)\frac{\partial G(x,s)}{\partial S}-G(x,s)y'(s)]_0^1=[p(s)[y(s)\frac{\partial G(x,s)}{\partial S}-G(x,s)y'(s)]_0^x$$
$$+[p(s)y(s)\frac{\partial G(x,s)}{\partial S}-G(x,s)y'(s)]_x^1$$

$= [p(x)[y(s)\dfrac{\partial G(x,x-0)}{\partial S} - G(x,s)y'(x)] - [p(x)[y(s)\dfrac{\partial G(x,x+0)}{\partial S} - G(x,s)y'(x)]$
$= p(x)y(x)[\dfrac{\partial G(x,x-0)}{\partial S} - \dfrac{\partial G(x,x+0)}{\partial S}] = p(x)y(x)\frac{1}{p(x)} = y(x)$
Donc la solution du problème linéaire (2-2) est donnée par :

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s)\,\sigma(s)ds$$

La fonction de Green d'un problème d'ordre deux.satisfait autres propriétés supplémentaires importantes.

2.4 Propriétés de la fonction de Green:

i)$G(x,s) \geq 0 \ \forall x, s \in [0,1]$

ii) $G(x,s) \leq G(s,s) \quad \forall x, s \in I$

iii)$\exists y^*(x) \in c^1(I, R^+), M = \inf\limits_{I_0} y^*(x) > 0$,où $I_0 \subsetneq I$ tq $\int_{I_0} G(x,s)\,ds \geq \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall x \in I_0$ tq:

$G(x,s) \geq y^*(x)\,G(s,s) \ \ \forall x \in I \ \ , \forall s \in I$

$G(x,s) \geq M \ G\ (s,s) \ \ \forall x \in I_0, \forall s \in I$

pour démontrer ces propriétés cherchons la fonction de Green du problème:

$$\begin{cases} (-py\ ')' = 0 \\ \ \ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

En appliquant la méthode précédente on trouve:

$$g(x,s) = \frac{1}{P}\begin{cases} \int_0^s \dfrac{dt}{p(t)} \int_x^1 \dfrac{dt}{p(t)} & \text{si} \quad 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ \int_0^x \dfrac{dt}{p(t)} \int_s^1 \dfrac{dt}{p(t)} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

où $P = \int_0^1 \frac{dt}{p(t)}$

La solution du problème (2-2) est donneé par $y(x) = \int_0^1 G\ (x,s)\,\sigma(s)\,ds$, où $G\ (x,s)$ est donnée par (2-3).

On peut vérifier qu'elle vérifie l'équation intégrale:

$y(x) = \int_0^1 g(x,s)\,(s)\,ds - \int_0^1 g(x,s)\,h(s)\,y(s)\,ds$

D'où on trouve une relation entre $G(x,s)\,, g(x,s)$

$G(x,s) = g(x,s) - \int_0^1 g(x,s)\,h(t)\,G(t,s)\,dt \ldots (*)$

2.5 Preuve des propriétés de G(x,s):

i) On fixe $s \in [0,1]\,, G(x,s)$ étant continue sur$[0,1]$ et s'annulant pour $x = 0, x = 1$ donc le signe de $G(x,s)$ restant constant sur $[0,1]$

d'aprés la définition de $g(x,s),\ \ g(x,s) > 0\ \forall x \in [0,1]$

d'aprés la relation (*) on voit que $G(x,s)$ ne peut être pas négative car si $G(x,s)$ est négative alors $g(x,s) - \int_0^1 g(x,s)\,h(t)\,G(t,s)\,dt$ soit positive d'où la contradiction

donc $G(x,s) \geq 0\ \ \forall x,s \in [0,1]$

ii) On a

$$G(x,s) = \frac{-1}{k}\begin{cases} y_1(s)\,y_2(x) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ y_1(x)\,y_2(s) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

on peut choisir y_1, y_2 telles que $k < 0$ ie $w(x, y_1, y_2) < 0$ et d'aprés la positivité de $G(x,s)$ on aura $y_1, y_2 \geq 0$ où $y_1, y_2 \leq 0$

pour fixer les ideés, supposont que $y_1(x) \geq 0, y_2\ (x) \geq 0$

et comme $y_1(0) = 0 \quad \Longrightarrow y_1$ est croissante

$y_2(1) = 0 \quad \Longrightarrow y_2$ est décroissante

$$\text{si} \qquad s \leq x:\ G(x,s) = \frac{-1}{k} y_1(s)\,y_2(x) \leq \frac{-1}{k} y_1(s)\,y_2(s) \quad car \quad y_2 \searrow$$

$$\text{si} \qquad s \geq x: G(x,s) = \frac{-1}{k} y_1(x)\,y_2(s) \leq \frac{-1}{k} y_1(s)\,y_2(s) \quad car \quad y_1 \nearrow$$

donc $G(x,s) \leq G(s,s) \qquad \forall x,s \in I$

iii)Posons $y_0(x) = \int_0^1 G(x,s)\,ds$

pour $x \in]0,1[$ on a $y_0(x) > 0$, donc y_0 admet un maximum global sur $]0,1[$

soit $x_0$qui réalise ce maximum

poson $I_0 = \left[\frac{1-x_0}{2}, \frac{1+x_0}{2}\right] \underset{\neq}{\subset} I$

si $s \leq x$ on a : $\frac{G(x,s)}{G(s,s)} = \frac{y_2(x)}{y_2(s)} \geq \frac{y_2(x)}{y_2(0)}$, car y_2 est décraoissante

d'où $\frac{G(x,s)}{G(s,s)} \geq \frac{1}{y_2(0)} \inf_{I_0} y_2(x)$ pour $x \in I_0$ (i)

si $x \leq s$ on a : $\frac{G(x,s)}{G(s,s)} = \frac{y_1(x)}{y_1(s)} \geq \frac{1}{y_1(1)} y_1(x)$, car $y_1$est croissante

d'où $\frac{G(x,s)}{G(s,s)} \geq \frac{1}{y_1(1)} \inf_{I_0} y_1(x)$ pour $x \in I_0$ (ii)

posons $y^*(x) = \min\left(\frac{1}{y_1(1)} y_1(x), \frac{1}{y_2(0)} y_2(x)\right)$ et $M_0 = \inf_{I_0} y^*(x) = \min\left(\frac{1}{y_1(1)} \inf_{I_0} y_1(x), \frac{1}{y_2(0)} \inf_{I_0} y_2(x)\right)$

de (i) et (ii) on déduit que

$$G(x,s) \geq y^*(x) G(s,s) \quad \forall x \in I \quad , \forall s \in I$$

$$G(x,s) \geq M_0 G(s,s) \quad \forall x \in I_0, \forall s \in I$$

Si on choisit y_1, y_2 tq $k > 0, y_1 < 0, y_2 < 0 \implies -y_1 > 0, -y_2 > 0$ on trouve les memes résultats.

2.6 Propriétés de la solution du problème linéaire:

On a vu que la solution du problème linéaire est donnée par :

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s)\sigma(s)\,ds \implies \max_I y(x) \leq \int_0^1 G(s,s)\sigma(s)\,ds$$

comme $G(x,s) > 0 \ \forall x, s \in]0,1[$, alors $y(x) > 0 \ \ \forall x \in]0,1[$

et comme:

$$\left.\begin{array}{c} y \ \text{ continue sur}[0,1] \\ y \ \text{ dérivable sur }]0,1[\\ y(0) = y(1) = 0 \end{array}\right\} \implies \exists c \in]0,1[\text{tq } y'(c) = 0 \text{ (théorème de Rolle)}$$

ie y admet un extremum sur $]0,1[$ et comme $y > 0$,elle admet un maximum au point $x = c$

ie $y'(x) < 0$ pour $x > c$ et $y'(x) > 0$ pour $x < c$

d'où $y'(0) > 0 > y'(1)$

d'aprés la $2^{éme}$propriété de $G(x,s)$ on a

$$y(x) \leq \int_0^1 G(s,s)\,\sigma(s)\,ds \implies \max_I y(x) \leq \int_0^1 G(s,s)\,\sigma(s)\,ds \tag{iii}$$

et d'aprés la $3^{éme}$propriété de $G(x,s)$ on a :

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s)\,\sigma(s)\,ds \geq \int_0^1 y^*(x)\,G(s,s)\,\sigma(s)\,ds \geq y^*(x)\int_0^1 G(s,s)\,\sigma(s)\,ds \quad (iv)$$

et

$$\min_{I_0} y(x) \geq M_0 \int_0^1 G(s,s)\,\sigma(s)\,ds \geq y(x) \tag{v}$$

de (iii),(vi),(v) on aura $y(x) \geq y^*(x) \max_I y(x)$, pour $x \in I$

$$\min_{I_0} y(x) \geq M_0 \max_I y(x)$$

Chapitre 3

Probléme aux limites non linéaire d'ordre2

3.1 Formulation abstraite du problème non linéaire:

Soit $X = C(I, R)$ l'espace de Banach des fonctions continues normé par la norme de la convergence uniforme $\parallel y \parallel_0 = \sup\limits_{x \in I} |y(x)|$ où $I = [0, 1]$[5]

On définit l'opérateur $L : D(L) \subset X \to L^1(I, R)$ par

$Ly = -(py')' + hy$ où $D(L) = X_0 = \{y \in C^2(I, R), y(0) = y(1) = 0\}$

et soit $P = \{y \in X_0, y(x) \geq 0 \quad \forall x \in I\}$ le cône positif dans X

Le problème non homogène linéaire est équivalent à l'équation abstract :$Ly = \sigma$

on a vu qu'il admet une solution unique : $y\left(x\right) = \int_0^1 G\left(x, s\right)\sigma\left(s\right)ds$

ie L^{-1} existe : $L^{-1} : L^1(I, R) \to X_0 = D(L)$

$(L^{-1}\sigma)(x) = \int_0^1 G\left(x, s\right)\sigma\left(s\right)ds$

Lemme 3.1 L^{-1}*est continue et compact :*

preuve

on a $(L^{-1}\sigma)(x) = \int_0^1 G\left(x, s\right)\sigma\left(s\right)ds \leq \int_0^1 G\left(s, s\right)\sigma\left(s\right)ds$

d'où $\parallel L^{-1}\sigma \parallel_0 \leq \max\limits_{s \in I} G\left(s, s\right) \parallel \sigma \parallel_{L^1}$ où $\parallel \sigma \parallel_{L^1} = \int_0^1 \sigma\left(s\right)ds$

ce qui prouve que L^{-1}est borné , donc continu.

Soit $S=\{y\in X, \| y \|_0 \leq r\}$ un ensemble borné de X

on a $(L^{-1}y)(x)=\int_0^1 G(x,s)\, y(s)\, ds \implies | L^{-1}y(x) | \leq \max\limits_{I\times I} G(x,s).r=R$

donc $\| L^{-1}y \| \leq R\ \forall y\in S, \forall x\in I$

ce qui prouve que les fonctions de S sont uniformément bornées

D'autre part :soit $\varepsilon>0$ et $y\in S$

comme $G(x,s)$ est continue sur $I\times I$ qui est compact $\implies$ $G(x,s)$ est uniformément continue

donc $\exists\delta>0$ tq $| G(x_1,s)-G(x_2,s) | \leq \dfrac{\varepsilon}{r}$ |pour $| x_1-x_2 | < \delta$ pour tout s fixé dans I

alors pour $y\in S$ on a: $| L^{-1}y(x_1)-L^{-1}y(x_2) | \leq \int_0^1 | G(x_1,s)-G(x_2,s) || y(s) | \,ds$

$$\leq \frac{\varepsilon}{r} r=\varepsilon$$

ce qui prouve que les fonctions de S sont équicontinues

En vertu du théorème d'Ascoli-Arzelà, $L^{-1}S$ est relativement compact

donc L^{-1}transforme tout ensemble borné à un ensemble relativement compact ie L^{-1}est compact

Et comme L^{-1}est continu, alors on déduit qu'il est complètement continu:

On définit l'opérateur de Nemitskii F associé à f par:

$$F: X\longrightarrow L^1\left(I, R^+\right)$$

$Fy(x)=f(x,y(x))$ pour tout $x\in I$

La continuité de f entraîne que F est continu.

posons

$$T=L^{-1}F: X\longrightarrow X_0$$

$$(Ty)(x)=\int_0^1 g(x,s)\, f(s,y(s))\, ds.$$

T est complètement continu .

Le problème (p) est équivalent à l 'équation abstraite: $y=Ty$

comme $G(x,s)>0$ pour tous $x,s\in(0,1)$,alors un point fixe de T dans le cône K est une solution positive du problème (p) est inversement .

L'éxistence des points fixes est basé sur l'application des théorèmes des points fixes pour les opérateurs positifs complètement continus conservant des cônes.

A partir des propriétés de la fonction de Green, on définit le cône K par :

$$K = \{y \in P; \underset{x \in I_0}{min} y(x) \geq M_0 \parallel y \parallel_0\}$$

Lemme 3.2 *Tconserve le cône K*

preuve

Soit $y \in K$, on a:

$(Ty)(x) = \int_0^1 G(x,s) f\ (s, y(s))\, ds \leq \int_0^1 G(s,s) f\ (s, y(s))\, ds$ pour tout $x \in I$

D'où

$$\parallel Ty \parallel_0 \leq \int_0^1 G(s,s) f\ (s, y(s))\, ds \tag{i}$$

D'autre part,

$Ty(x) \geq M_0 \int_0^1 G(s,s) f\ (s, y(s))\, ds$ pour tout $x \in I_0$

D'où

$$\underset{x \in I_0}{min} Ty(x) \geq M_0 \int_0^1 g(s,s) f\ (s, y(s))\, ds \tag{ii}$$

De (i) et (ii) on aura: $\underset{x \in I_0}{min} Ty(x) \geq M_0 \parallel Ty \parallel_0$

donc $Ty \in K \Longrightarrow T(K) \subset K$.

3.2 Existence de solutions positives:

Théorème 3.1 *Supposons que f satisfait les conditions suivantes:*

(1)

$$\lim_{y \longrightarrow 0^+} \frac{f\ (x,y)}{y} = 0 \tag{H_0}$$

(2)

$$\lim_{y \longrightarrow +\infty} \frac{f\ (x,y)}{y} = \infty \tag{$H\infty$}$$

Alors le problème (p) admet au moins une solution positive.

Preuve [5]

D'aprés H_0 :$\exists r > 0$, $\alpha > 0$ tq: $f\ (x, y) \leq \alpha y$ pour $y \leq r$ pour tout $x \in I$.

Choisissons α tq: $\alpha \int_0^1 G(s,s)\, ds \leq 1$

Posons $\Omega_1 = \{y \in K\ \ .\| y \|_0 < r\ \}$

Pour $y \in K$ avec $\| y \|_0 = r$

on a:

$$(Ty)(x) = \int_0^1 G(x,s)\, f\ (s, y(s))\, ds$$

.

$$\leq .\alpha \| y \|_0 \int_0^1 G(s,s)\, ds$$

et comme

$$\alpha \int_0^1 G(s,s)\, ds \leq 1$$

alors $\| Ty \| \leq \| y \|_0$pour tout y $\in K \cap \partial\Omega_1$

D'autre part, d'aprés H_∞ :

$\exists \bar{R} > 0$, $\exists \beta > 0$ tq: $f\ (x, y) \geq \beta y$,$\forall y \geq \bar{R}$,pour tout $x \in I$

choisissons β tq: $\beta M_0 \int_{I_0} G(\tau, s)\, ds \geq 1$

soit $R > \bar{R}$, $\Omega_2 = \{y \in K, \| y \| < R\ \}$

choisissons $R = \max(2r, \bar{R}/M_0)$

soit $y \in K$ tq: $\| y \| = R$, alors $y(x) \geq M_0 \| y \|_0 = M_0 R$

On a

$$(Ty)(x) = \int_0^1 G(x,s)\, f\ (s, y(s))\, ds$$

$$\geq \beta \int_{I_0} G(x,s)\, y(s)\, ds$$

$$\geq .(\beta M_0 \int_{I_0} G(s,s)\, ds) \| y \|_0$$

$$\geq \| y \|_0$$

donc

$\| Ty \|_0 \geq \| y \|_0$ pour tout $y \in K \cap \partial\Omega_2$

En appliquant le théorème de Krasnosselskii, on déduit que le problème (P) admet au moins une solution $y \in K \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$

Chapitre 4

Exemples

4.1 Exemple1

Considéron le problème suivant:

$$\begin{cases} -y\,'' = y^3 \quad 0 < x < 1 \\ \qquad y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

La solution de ce problème vérifie: $y\ (x) = \int_0^1 G(x,s)\, y^3(s)\, ds$ où
$G(x,s) = \begin{cases} x(1-s) & \text{si} \quad 0 \le x \le s \le 1 \\ s(1-x) & \text{si} \quad 0 \le s \le x \le 1 \end{cases}$

on a

$$G(x,s) \le G(s,s) \le s(1-s)$$

$$y_0(x) = \int_0^1 G(x,s)\,\sigma(s)\,ds = \int_0^x s(1-x)\,dx + \int_x^1 s(1-x)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$$

$$y_0\acute{}(x) \ = \frac{1}{2} - x \implies x_0 = \frac{1}{2}$$

$$I_0 = \left[\frac{1-x_0}{2}, \frac{1+x_0}{2}\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

si $\quad s \leq x \quad$ on a :

$$\frac{G(x,s)}{G(s,s)} = \frac{s(1-x)}{s(1-s)} = \frac{(1-x)}{(1-s)} \geq 1-x$$

si $\quad x \leq s \quad$ on a :

$$\frac{G(x,s)}{G(s,s)} = \frac{s(1-x)}{s(1-s)} = \frac{(1-x)}{(1-s)} \quad \text{tq} \quad 1-s \leq 1 \implies \frac{1}{1-s} \geq 1 \implies \frac{G(x,s)}{G(s,s)} \geq 1-x \geq \inf_{I_0}(1-x)$$

$$\frac{G(x,s)}{G(s,s)} = \frac{x}{s} \geq x \geq \inf_{I_0} x$$

$$s \leq 1 \implies \frac{1}{s} \geq 1$$

$$y^* = \min(x, 1-x)$$

$$= \inf y^* = M = \min(\inf(1-x), \inf x)$$

$$= \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$M = \frac{1}{4}$$

$$G(x,s) \geq \frac{1}{4} G(s,s) \qquad \forall s \in I, \forall x \in I_0$$

et on a
$\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f\left(y\right)}{y}=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{y^3}{y}=\lim\limits_{y\to 0^+}y=0$
$\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{f\left(y\right)}{y}=\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{y^2}{y}=\lim\limits_{y\to +\infty}y=+\infty$
Alors ,le problème admet au moins une solution positive.

4.2 Exemple 2

Considéron le problème suivante

$$\left\{\begin{array}{l} -y''+y=y^2e^y \\ y\left(0\right)=y\left(1\right)=0 \end{array}\right. \tag{2-4}$$

La solution de ce problème vérifie: $y\ (x)=\int_0^1 G\left(x,s\right)y^2\left(s\right)e^{y(s)}ds$ où:

$$G\left(x,s\right)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{sh(x)sh(1-s)}{sh(1)} & \text{si} \quad 0\leq x\leq s\leq 1 \\ \dfrac{sh(s)sh(1-x)}{sh(1)} & \text{si} \quad 0\leq s\leq x\leq 1 \end{array}\right.$$

on a $G(x,s)\leq G(s,s)\leq\dfrac{sh(s)sh(1-s)}{sh(1)}$

$$y_0\left(\ x\right)=\int_0^1 G\left(\ x,s\right)ds=\int_0^x\frac{sh(x)sh(1-s)}{sh(1)}ds+\int_x^1\frac{sh(s)sh(1-x)}{sh(1)}ds$$

$$=\coth(1)[sh(1-x)+sh(x)]-1$$

$$y_0'\left(x\right)=\coth(1)[-ch(1-x)+ch(x)]$$

$$y_0'\left(x\right)=0\implies x_0=\tfrac{1}{2}$$

$$I_0=\left[\tfrac{1-x_0}{2},\tfrac{1+x_0}{2}\right]=\left[\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\right]$$

si $\quad s\leq x\ $ on a :

$$\frac{G\left(x,s\right)}{G\left(s,s\right)}=\frac{\dfrac{sh(s)sh(1-x)}{sh(1)}}{\dfrac{sh(s)sh(1-s)}{sh(1)}}=\frac{sh(s)sh(1-x)\ sh(1)}{sh(1)sh(s)sh(1-s)}=\frac{sh(1-x)}{sh(1-s)}\geq\frac{sh(1-x)}{sh(1)}\geq\inf_{I_0}\frac{sh(1-x)}{sh(1)}$$

si $\quad x \leq s$ on a :

$$\frac{G(x,s)}{G(s,s)} = \frac{\frac{sh(x)sh(1-s)}{sh(1)}}{\frac{sh(s)sh(1-s)}{sh(1)}} = \frac{sh(x)}{sh(s)} \geq sh(x) \geq \inf_{I_0} sh(x)$$

$$y^* = \min\left(sh(x), \frac{sh(1-x)}{sh(1)}\right)$$

$$\inf y^* = M = \min(\inf_{I_0} sh(x), \inf_{I_0} \frac{sh(1-x)}{sh(1)})$$

$$= \min(sh(\frac{1}{4}), \frac{sh(\frac{1}{4})}{sh(1)})$$

$$M = \frac{sh(\frac{1}{4})}{sh(1)}$$

$$G(x,s) \geq \frac{sh(\frac{1}{4})}{sh(1)} G(s,s) \qquad \forall s \in I, \forall x \in I_0$$

et on a

$\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{f(y)}{y} = 0 \implies \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{y^2 e^y}{y} = 0$

$\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{f(y)}{y} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y^2 e^y}{y} = +\infty$

Alors , le problème admet au moins une solution positive

Conclusion 1

Dans ce travail, nous avons donné une méthode permettant de construire la fonction de Green d'un problème aux limites d'ordre deux,

Nous avons démontrer ses propriétés, et on a démontré comment la fonction de Green nous sert à exprimer la solution du problème non homgène.

Bibliographie

[1] C.De Costet & P.Habets, *Two-point Boundary Value Problems :Lower and upper solutions, Mathématics in science and Engineering* **205**, Elsevier, Amsterdam **2006**.

[2] M.A Krasnoselskii and P.P.Zabreiko, Geometrical methods of nonlinear Analysis. Springer-Verlag New York **1984**.

[3] A.Dahaoui,et Z.Benramdane , Problème de Sturm-Liouville.Mémoire de licence **2011** univèrsité dé Tlemcen.

[4] Vautier J, Calcul différentiel et intégral. **1998**.

[5] M. Dahmane, Solutions positives d'équations différentielles ordinaires .Thèse de Magistère **1998** univèrsité de Tlemcen .