République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

――――――――――

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE LISENCE EN MATHEMATIQUES

Option : Equation différentielle ordinaire

Sous le thème

Equation de la chaleur de dimension un

Présenté par : -TAOULI MOUNA

-KHAMEZ FATIMA ZAHRA

Encadreur: M.MESSIRDI BACHIR

Année Universitaire

2012-2013

Dédicaces:

Je dédie ce modeste travail à :

Mon père.

Ma très chère mère.

Ma grande famille.

Et à tous ceux qui m'ont aidé et encouragé pour finir ce travail.

Remerciements

Je tiens, à exprimer ma reconnaissance et ma profonde gratitude à Monsieur Miloud Mabkhout, chef de département des Mathématiques à la faculté des sciences de Tlemcen.

Je remercie tout les proffeseurs Mr Dib Mr Boughima Mr Yebdri ,

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur B.Messirdi ,

Table des Matières

Partie I

Introduction

Jusqu'au début du vingtième siécle, le transfert de la chaleur n'était pas connu comme branche de la physique, telles la mécanique, l'électricité etc .... Il faisait uniquement l'objet d'études ponctuelles quand la nécessité se faisait sentir. Ce n'est qu'en 1921 que le premier ouvrage fut imprimé dans ce domaine. Depuis, les lois du transfert de la chaleur ont pris la forrme d'une **doctrine** trés générale, valable à tous les champs d'application des sciences ou ingénieurs, physiciens, chimistes,biologistes en manifestent le besion de leurs connaissances. On distingue trois modes différents du transfert de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement. En pratique ces trois modes sont souvent combinés et constituent les trois fondamentales du transfert de chaleur.

Le développement rapide des technique ces dernières **décennies** fait que le problème du transfert de la chaleur continue d'occuper une place d'actualité dans les domaines des investigations et de la recherche. Il n'est pas à ignorer qu'avec le développement sont apparus de nouveaux paramétres, autres que les caractéristiques thermophysiques des corps concidérés.

- On ne peut parler de transfert de chaleur sans évoquer sa principale constituante qu'est l'équation de la chaleur. Celle-ci ramène le probléme à l'étude de la distribution du champ de la température et de ce fait permet de porter un jugement sur celui-ci, car en définitive en peut appprécier ou estimer n'importe quel transfert d'énergie à travers une distribution de champ de température.

La grand variété des situations, des positions et des problèmes et des hypothèses fait que l'équation de la chaleur devienne un domaine de recherche trés vaste. Elle a fait l'objet de plusieurs travaux et restera dans le futur un champ trés approprié pour les spécialistes en la matiére, sachant que la technologie moderne exige une connaissance précise des phénoménes physiques.

Chapitre 1

Généralités.

Dans ce chapitre nous faisons un bilan d'énergie sur une tranchette pour établir l'équation de la chaleur en dimension 1. Nous nous focalisons sur le mode de transmission de la chaleur appelé la « conduction ».

Nous examinons ensuite des exemples stationnaires en dimension1.

1.1 Différentes mécanismes

On distingue différentes mécanismes de transferts de chaleur conduction, convection, rayonnement.

Nous allons plus précisément étudier dans ce chapitre la « conduction ». La chaleur fournie à un endroit du corps est propagée de proche en proche dans le corps. Dans le cas du gaz. nous avons vu qu'il s'agissait de chocs entre molécules, dans le cas du solide, de vibrations des atomes. Lorsque l'on examine les choses à une échelle bien plus grande que l'écart entre les molécules et que le milieu paraît continu, la température varie en fonction de la position. On n'a plus d'équilibre dans tous le corps comme dans le cas des systèmes minces.

1.2 Lois de conservation, forme générale

Les équations fondamentales de la mécanique des « milieux continus » expriment les lois générales de la physique indépendamment des propriétés ''spéciales" des matériaux. Les lois conservations pour un domaine donné peuvent être en toute généralité écrites sous la forme :

Variation temporelle = terme de flux + création intérieure

Le bilan de n'importe quelle quantité de la physique. La masse, la quantité de mouvement, l'énergie...

$$\frac{d}{dt}\iiint adv = -\iint \overrightarrow{j}.\overrightarrow{ds} + \iiint rdv.$$

- a est la quantité qui est conservée
- $\overrightarrow{j}$ est le flux associé, le signe moins est une convention de définition. On choisit d'orienter les normes des surfaces vers l'extérieur. Donc le produit scalaires $\overrightarrow{j}.\overrightarrow{ds}$ est positif si le flux est dans le sens de la normale. Ce qui veut bien dire que le flux est sortant.
- r est le terme source volumique.

1.3 Forme Globale :

Dans certains cas on peut rester sur une description globale.

Le corps se refroidit lentement, la température du corps est en équilibre continue (il n'y a pas de fortes variation de températures dans le corps).

Nous examinons ce cas plus tard. Nous nous concentrons pour l'instant sur des exemples où il y a une variation assez forte de la température dans l'objet.

1.4 Hypothèse de l'état local associé

Cette hypothèse dite de ''l'état local associé '' va nous être utile pour la suite.Bien que le système soit en déséquilibre au sens de la thermodynamique , chaque unité de volume élémentaire peut être considérée comme approximativement en équilibre du point de vue thermodynamique.

Ce qui veut dire aussi que la mécanique des milieux continus est, non seulement, l'étude des phénomènes à des échelles de longueur plus grandes que les échelles atomiques, mais encore à des échelles de temps plus longues que celles qui permettent à l'assemblée de particules contenues dans ce volume élémentaire de retourner à l'équilibre "thermostatique"(qui est le nouveau nom de la thermodynamique classique).

1.5 Forme locale cas une dimension

Pour fixer les idées ,on commence par le cas unidimensionel ou "une dimension".

Les lois de conservations pour un domaines donné invariant par translation en y et z peuvent être écrites sous la forme :

variation temporelle totale $=$ **(ce qui rentre-ce qui sort) des surfaces + création interieure volu**

où les variations sont prises par unité de longueur en y et z .Faisons un petit dessin pour calculer ce bilan.On suppose que la tranche ne bouge pas. Sur la tranche fixe représentée sur la figure1, par unité de longueur en y et z.

On a:

- pour la conservation de a, une quantité $a(x,t)dxdS$ dans la tranche dx de surfaces dS arbitraire en y, z.

Attention ,on passe d'une dérivée simple car la quantité globale ne dépend que du temps,à une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}$ car la variable d'espace x varie.

Remarque 1.1 *Dérivation de l'équation de la chaleur*

Il existe deux méthodes utilisées pour résoudre pour le débit de l'écoulement de la chaleur à travers un objet. La première méthode est dérivée à partir des propriétés de l'objet. La seconde méthode est dérivée en mesurant le taux de la chaleur l'écoulement à travers les limites de l'objet.

$^\circ\rho$ *est la densité.*

$^\circ u$ *est la température.*

$^\circ$*et* Δv *est un petit volume*

Considérons cette tige mince, fait d'un matériau homogène et parfaitement isolée le long de sa longueur de sorte que la chaleur puisse seulement circuler à travers ses extrémités. Toute position le long de la tige est notée x*, et la longueur de la tige est notée* L *tel que* $0 \leq x \leq L$

Première méthode

Calculs expérimentaux montrent que le Q *chaleur dans* Δv *au temps* t *peut être défini par :*

$$\Delta Q = c\rho u \Delta V. \tag{1.1}$$

où

c *est la chaleur spécifique.*

par conséquent, nous trouvons la température u *est la seule condition qui dépend du temps* t *la position* x *et* y*. ainsi,*

$$\Delta Q = c\rho u(x,t)\Delta V. \tag{1.2}$$

Considérons maintenant une petite section de la tige U *définie comme l'intervalle de* $x = a$ *à* $x = b$ *.*

La section transversale est définie comme S*, et la largeur de cette section est* Δx*. .*

$$\Delta V = S\Delta x.$$

Cela donne Nous pouvons maintenant exprimer la quantité de la chaleur dans la zone de coupe transversale que

$$\Delta Q = c\rho u(x,t)S\Delta x. \tag{1.3}$$

Pour trouver la quantité de chaleur dans la section U *à l'instant* t*, nous prenons l'intégrale de l'intégrale.*

$$Q(t) = \int_a^b c\rho u(x,t)S dx \tag{1.4}$$

Depuis la tige a une épaisseur uniforme, S ne change pas par rapport au temps, et parce que nous traitons avec des matériaux homogènes et $c\rho$ ne changent pas avec le temps. Ainsi, en différenciant nous prenons la partie de u pour trouver le changement de chaleur par rapport au temps.

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \partial x S \tag{1.5}$$

Deuxième méthode:

La deuxième méthode permettant de trouver la variation de la chaleur par rapport au temps est également déterminée expérimentalement, avec une tige semblable à celle de la méthode ci. Le débit de l'écoulement de chaleur à travers U est inversement proportionnelle à la largeur du U , et directement proportionnel à la surface de section transversale. Ce qui est logique, car plus la longueur de la section, plus il faudrait pour que la chaleur de s'écouler à travers elle. Ceci est similaire à l 'aire de la section, si vous avez deux tiges, l'une avec un grand diamètre et une avec un petit diamètre, il prendrait moins de temps que la chaleur de s'écouler à travers la tige de plus grand diamètre que la tige de plus petit diamètre.

En utilisant la propriété que lorsque deux objets de température différente sont placés ensemble (toucher) la chaleur découleront de l'objet plus chaud vers le refroidisseur un. Si la température à $b>$ une chaleur puis découlera $b \to a$.

La combinaison de ces propriétés, nous trouvons.

$$\Delta Q = -C \frac{u(a + \Delta(x,t)) - u(a,t)}{\Delta x} S \tag{1.6}$$

La constante de proportionnalité C est connu que la conductibilité thermique. Cela varie en fonction du type de matière en cours d'évaluation. Pour montrer cela est vrai, nous devons montrer le flux de la chaleur à travers la section U, où les limites de la section sont définis comme :

$$a = x = 0$$

$$b = a + \Delta x$$

Si la température à $u(a+\Delta x,t) > u(a,t)$,alors ΔQ serait négatif qui est logique car la température à b est supérieur à la température à un, de sorte que la chaleur soit circule de B vers A, ce qui la chaleur serait s'écoulant hors de la tige. Laisser $\Delta x \to 0$ dans l'équation (1.6) , la différence quotient s'approche suivant le même raisonnement, nous pouvons montrer que le taux de flux de chaleur à travers U à b est défini comme alors le débit de l'écoulement de chaleur à travers U en $x = a$ est donnée par :

$$-c\frac{\partial u}{\partial x}(a,t)S \tag{1.7}$$

Suivant le même raisonnement, nous pouvons montrer que le taux de flux de chaleur à travers U à b est défini comme:

$$c\frac{\partial u}{\partial x}(b,t)S \tag{1.8}$$

Par conséquent, la quantité de la chaleur que U obtient à l'instanttest donnée par:

$$\frac{dQ}{dt} = c\ [\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(a,t)]\ S \tag{1.9}$$

Si l'on applique le théorème fondamental du calcul de l'équation (9), nous avons

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b \frac{d}{dx}(c\frac{\partial u}{\partial x}S)dx$$

Puisque nous traitons avec des matériaux homogènes avec section transversale constante, nous définissons Cet S à être constante. Par conséquent, l'expression devient:

$$\frac{dQ}{dt} = c\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxS \tag{1.10}$$

En combinant les deux méthodes

Maintenant nous avons deux équations de la vitesse d'écoulement de la chaleur dans et hors de la section U.

premiére méthode

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxS$$

deuxiéme méthode

$$\frac{dQ}{dt} = c\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxS$$

Comme les deux équations modèle le flux de la chaleur à travers une tige, on pose ces équations égales les unes aux autres.

$$c\rho\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}dx\ S = c\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\ S \tag{1.11}$$

Le déplacement de la deuxième équation de l'autre côté et perdre les termes communs,

$$c\rho\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}dx\ S - c\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\ S \quad = 0$$

qui devient:

$$\int_a^b (c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 x}{\partial x^2})dx = 0$$

qui donne:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Mais, l'intégrale ne peut être nulle si l'intégrale est égale à zéro, ce qui donne:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Puis en divisant par le biais de $c\rho$ nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{C}{C\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

La combinaison des constantes dans une expression k, où $k = \frac{C}{c\rho}$ l'équation devient:

Cette équation est plus populairement écrit avec la notation indice comme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.12}$$

$$u_t = ku_{xx} \tag{1.13}$$

Où k est défini comme étant la diffusivité thermique. Nous avons développé l'équation de la chaleur, aussi connue sous le nom de l'équation de diffusion. Ce modèle d'équation du flux de la chaleur à travers une tige en modélisant la température le long de la tige à l'instant t.

- *Il y a un flux rentrant en x qui est J(x,t)(on a* $\overrightarrow{J} = J\ .\overrightarrow{i}$ *) .ce flux rentre à gauche , donc il contribue pour* $j(x,t)dS$ *à l'augmentation de a*

- *Il y a un flux sortant en* $x+dx$ *qui est* $j(x+dx,t)dS$*.ce flux sort à droite , donc il contribue pour* $-j(x+dx,t)dS$ *à la diminution de a*

- *s'il y a création de a ,avec un tau* $r(x)$*. il faut compter* $r(x)dxdS$ *en plus.*

Au total, la variation temporelle de a au point x est:

$$\frac{\partial}{\partial t}a(x,t)dxdS = +j(x,t)dS - j(x+dx,t)dS + r(x,t)dxdS$$

Or,par définition de la dérivée:

$$j(x+\quad dx,t) = j(x) - dx\frac{\partial}{\partial x}j(x,t) + ...$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}a(x,t)dxdS = -\frac{\partial}{\partial x}j(x,t)dxdS + r(x,t)dxdS.$$

Soit la formule finale:

$$\frac{\partial}{\partial t}a(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}j(x,t) + r(x,t).$$

Nous avons appliquer cette expression à l'énergie.

1.6 Application à la conservation de l'énergie:

La quantité a que nous avons introduire peut etre n'importe quelle quantité de la physique, la masse, la quantité de mouvement, l'énergie... Nous allons ici préciser le cas l'énergie dans le cas d'un milieu fixe de densité constante.Dans ce cas on a $a = \rho e$,et si on définit $j = q$ le flux d'énergie.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} e(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t) + r(x,t).$$

On connait l'expression de la capacité calorique qui relie les variations de l'énergie avec les variations de température

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} e(x,t) = \rho . c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)$$

donc

$$\rho . c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t) + r(x).$$

Il faut ensuite exprimer la relation constitutive entre le flux de chaleur q et le champ de température. La source r est une grandeur donnée.

Par définition $\overrightarrow{q}$ est le vecteur courant de chaleur (ou densité de flus de chaleur). Il est tel que le taux de chaleur reçu par conduction dans le domaine D est égal par définition à:

$$\frac{dq}{dt} = \int_{\partial D} -\overrightarrow{q} . \overrightarrow{n} \, dS.$$

Le signe-résulte de la convention adoptée: car $\overrightarrow{n}$ est la normale extérieur

1.7 Application à la création d'entropie:

Examinons l'équation pour l'entropie, d'abord,nous avons toujours par l'hypothése de l'état local associeé, et en supposant qu'il n'y a aucun travail ni création volumique d'énergie:

$$Tds = de + 0.$$

$$\rho T \frac{\partial}{\partial t} s = \rho \frac{\partial}{\partial t} e(x,t)$$

soit

$$\rho T \frac{\partial}{\partial t} s = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t).$$

Or, un bilan d'entropie entre la tranche x et $x + dx$ donnerait:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} s(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} (\frac{q(x,t)}{T(x,t)}) + \sigma$$

car la chaleur apportée en x est $q(x,t)$ et donc l'entropie apportée $+\frac{q(x,t)}{T(x,t)}$ et celle partant en $x + dx$ et $-\frac{q(x+dx,t)}{T(x+dx,t)}$ et car l'on a définit σ (x,t) qui représente le taux de création d'entropie. Par le second principe $\sigma \rangle 0$. En éliminent $\frac{\partial s}{\partial t}$ entre ces deux équations on obtient:

$$\sigma(x,t) \quad = q \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{T}).$$

En l'écrivant sous la forme de **clausius duhem** simplifiée:

$$q \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{T}) \geq 0 \ ou - q \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{T^2}) \geq 0.$$

On en déduit que si

$$q = -k \frac{\partial}{\partial x} T$$

Alors

$$-q\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{T}) = k(\frac{\partial T}{\partial x})^2$$

Qui doit etre positif,donc la constante k est positif.Cette forme est la forme la plus simple, parmi les formes compliquées pour l'expression du flux de chaleur . C'est la loi de fourier.

La flux de chaleur est bien dans le sens chaud froid.

Chapitre 2

Equation de la chaleur en conduction pure

2.1 Loi constitutive du flux de chaleur

On a vu dans la théorie cinétique que le flux d'énergie dépendait du gradient de la température avec un coefficient proportionnel à la vitesse d'agitation et au libre parcours moyen.

On retrouve donc une expression identique liée au gradient de température avec une démarche comlétement différente. Nous avons établi un résultat pour un gaz, nous montrons ici que ce résultat est indépendant du corps considéré. Tous les matériaux suivent la loi de Fourier (du moins en premiére approximation si on ne chauffe pas de manière trop fort ou de maniére trop rapide).

On en déduit que la forme la plus simple ,parmi les formes compliquées pour l'expression du flux de chaleur est bien:

$$q = -k\frac{\partial}{\partial x}T.$$

C'est la loi Fourier(François Marie Charles Fourier 1772-1837).

• k le coefficient de conductivité thérmique est positif (et comme T est toujours positif).

• q est en fait un vecteur ,ici dans notre cas où il n'y a de variations qu'en x ,le flux est un vecteur dirigé par $\overrightarrow{e_x}$.

$$\overrightarrow{q} = -k(\frac{\partial}{\partial x}T)\overrightarrow{e}_x.$$

2.2 Différentes écritures de l'équation de la chaleur une dimension

L'équation de la chaleur établie à partir des lois de conservation est :

$$\rho.c_p\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}q(x,t) + r(x).$$

compte tenu de la loi de fourier :

$$\rho.c_p\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)) + r(x).$$

ou s'il n'y a pas de sources de chaleur $r = 0$:

$$\rho.c_p\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)).$$

Bien souvent, le coefficient de conduction sera pris constant,mais il peut dépendre de la position (si on met des matériaux différents en contact), et il peut aussi dépendre de la température si on chauffe trop, ou si on veut résoudre de manière très précise.Si on n'est pas dans ces cas, on écrira la forme simplifiée classique:

$$\rho.c_p\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t).$$

On la note aussi parfois avec λplutôt que k:

$$\rho.c_p\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t).$$

Enfin, on note aussi

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t), avec\ a = \frac{k}{\rho.c_p}.$$

Le coefficient α de "diffusivité" (noté aussi a) a les dimentions d'une longueur au carré divisé par un temps $(m^2.s^{-1})$ .L'équation de la chaleur est une équation différentielle aux dérivées partielles.

Il y a deux variables , x et t qui sont deux variables indépendantes.Pour résoudre cette équation, il faut des conditions aux limites, c'est à dire la valeur de la température aus bornes du domaine.

Chapitre 3

Conduction stationnaire pure une dimension

3.1 Equation de la chaleur statoinnaire à une dimension

Rappelons l'équation de la chaleur que nous venons d'établir :

$$\rho.c_p\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial x}T(x,t))+r(x).$$

Les deux variables , x et t sont deux variables indépendantes, il s'agit de ce sue l'on appelle une **"Equation aux Dérivées Partielles "**(EDP, ou pde en anglais).Le fait qu'il y ait deux variables (en fait 4 en réalité : t, x mais aussi $y$et z),complique beaucoup la résolution.On va donc commencer par examiner le cas simple stationnaire.

On appellera solution stationnaire la solution obtenue pour un temps assez long.Pour la solution stationnaire, le temps n'est plus un paramètre.

la température ne varie plus avec le temps.

Ecrivons les équations stationnaires : il s'agit simplement de dire la température ne varie plus avec le temps, c'est à dire :$(\partial/(\partial x))T=0$.

• l'équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source est donc:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}) + r(x).$$

l'équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source et isotrope est donc:

$$0 = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) + r(x).$$

Dans les deux cas, c'est une ésuation différentielle ordinaire.On a besoin de ses conditions aux limites pour la résoudre.

- **conditions aux limites** : il faut connaitre la température aux bornes de l'objet chauffé.C'est normal.La température d'un mur de maison dépend bien de la température extérieure et de la température à l'intérieure de la maison.k

$$-k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = q_p$$

remarquons qu'une paroi adiabatique (on dit aussi athermane) est telle que

$$-k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0$$

sur un plan de symétrie on a aussi,

Conclusion 1 *Nous avons l'équation locale de la chaleur 1D par un bilan sur une tranche infinitésimale. si k le coifficient de conduction de la chaleur de la loi de Fourier en W* m^{-1} $k^{-1}, k/(\rho c_p)$ *la diffusitivité thermique en* $m^{-1}s^{-1}$.

On écrira la forme simplifiée classique lorsque k est constant :

$$\rho.c_p\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t).$$

Il faut donner des conditions aux limites à cette équation . On en a étudié des solutions stationnaires pour des murs enchainés . Pour l'instant nous n'avons présenté que des solutions stationnaires à température ou flux imposé . Cela nous a permis d'introduire la résistance thermique .

Chapitre 4

Loi de fourier

4.1 Historique sur l'analyse de Fourier

Le baron Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre 1768-Paris 1830) était obsédé par l'étude de la chaleur, le sujet "chaud" de l'époque. Il suivit en 1798 l'expédition de Napoléon en Egypte. De retour en France (vers 1801), il concentra son activité sur les mathématiques et enseigna l'analyse à l'Ecole Polytechnique. Vers 1802-1804, il trouva l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides ; en 1807, il mit au point une méthode pour la résoudre : l'analyse de Fourier. Il utilisa sa technique mathématique pour élucider de nombreux exemples de propagation de la chaleur. Il remplaçait une fonction unique, mais difficile à décrire mathématiquement, par une série beaucoup plus maniable de fonctions sinus ou cosinus, dont la somme reconstituait la fonction initiale. L'analyse de Fourier défiait les théories mathématiques auxquelles ses contemporains adhéraient sans réserve. Au début du XIX siécle, nombre de mathématiciens parisiens parmi lesquels Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Legendre (1752-1797), Biot (1744-1862) et Poisson (1781-1840) n'acceptaient pas la conjecture de Fourier. Leon-hard Euler (1707-1783) releva des lacunes dans la théorie de Fourier. Aussi, lorsque Fourier exposa sa conjecture lors d'une réunion de l'Acad´emie des sciences, Lagrange se leva et d´eclara la tenir pour fausse. Mais, l'Acad´emie lui d´ecerna un prix en 1811 pour sa théorie mathématique des lois de propagation de la chaleur et sa vérification expérimentale. Les importantes réserves émises en retardérent la publication jusqu'en 1815. Ce ne fut qu'en

1822 qu'elle parut sous une forme achevée dans son livre "théorie analytique de la chaleur". En dépit de ces objections, la mathématicienne Sophie Germain (1776-1831) et l'ingénieur Claude Navier étendirent la théorie de Fourier à d'autres domaines que la transmission de chaleur. La question de la convergence de la série de Fourier réapparut à la fin du XIX siécle, lors de tentatives pour prédire les mouvements des marées. L'analyse de Fourier reste inapplicable à certaines fonctions inhabituelles par exemple celles qui possédent un nombre infini de sauts infinis sur un intervalle fini.

De vastes domaines nouveaux des mathématiques ont été développés à partir de recherches pour savoir si la série de Fourier de telle ou telle fonction donnée est convergente. Un exemple en est la théorie des fonctions généralisées ou distributions à laquelle s'attachent les noms de George Temple, Jan Mikunski et Laurent Schwartz (1915-). La théorie de Laurent Schwartz nous permet d'utiliser l'analyse de Fourier pour résoudre des équations mettant en jeu des concepts intuitifs tels que point massif, point chargé, dipôle magnétique ou charges concentrées sur une poutre.Aprés environ deux siécles de développement, la théorie de l'analyse de Fourier est à présent solidement structurée et bien comprise.

4.2 Loi de fourier

Considérons un milieu solide D dans lequel une surface élémentaire dS est orientée par sa normale unitaire $\overrightarrow{n}$.

La quantité de chaleur d^2Q qui traverse la surface dS pendant l'intervalle de temps dt dans le sens de la normale$\overrightarrow{n}$ est donnée par la loi de FOURIER :

$$d^2Q = -\lambda.\overrightarrow{\mathrm{grad}\,T}.\overrightarrow{n}.dS.dt$$

où $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,T}$ est le gradient de température défini suivant les trois axes Ox, Oy et Oz par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right\}$$

λ est un coefficient appelé conductivité thermique du matériau (en $W/m.°C$)

On a également :

$$d\Phi = \frac{d^2Q}{dt} = -\lambda.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T.\overrightarrow{n}.dS.dt \qquad \text{(flux de chaleur)}$$

et

$$d\phi = \frac{d^2Q}{dt.dS} = -\lambda.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T.\overrightarrow{n} \qquad \text{(densité de flux de chaleur)}$$

La présence du signe $-$ dans le second membre des relations signifie que le flux de chaleur progresse dans le sens opposé au gradient de température c'est à dire des températures les plus élevées vers les températures les plus basses (ce qui est du bon sens physique)

Si la surface dS est située sur une surface isotherme les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires d'où

$$d^2Q = -\lambda\frac{dT}{dx}dS.dt$$

ou

$$d\Phi = -\lambda\frac{dT}{dx}dS \qquad \phi = -\lambda\frac{dT}{dx}$$

Substances	λ en $W/m°C$
- Gaz à la pression atmosphérique	$0.006 - 0.15$
- Matériaux solides isolants (Laine de verre, polystyréne,liège,amiante...)	$0.025 - 0.18$
- Liquides non métalliques	$0.075 - 0.60$
- Matériaux non métalliques (brique, pierre à bâtir,béton, bois..)	$0.10 - 2.2$
- Métaux liquides	$7.5 - 67$
-Alliages métalliques	$12 - 100$
- Métaux purs	$45 - 365$

4.3 Equation de la chaleur en coordonnées cartisiénnes et cylindriques

4.3.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartisiénnes et cylindriques

Considérons un champ de température $T(x, y, z, t)$ dans un volume Δ limité par une surface $\sum$ d'un corps quelconque de masse volumique ρ , de chaleur massique à volume constant C_v et de conductivité thermique λ (figure 1).En un point M de la surface $\sum$, considérons un élément de surface dS et n le vecteur unitaire de la normale en M orienté vers l'extérieur.

Nous allons par application de la formule de FOURIER calculer la quantité de chaleur d^2Q_1 qui pénètre dans le volume Δ à travers dS pendant l'intervalle de temps dt, donc dans le sens opposé à la normale n. Le signe $-$ disparaît donc de la formule:

$$d^2Q_1 = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}\, T}.\overrightarrow{n}.dS.dt$$

La quantité de chaleur totale qui pénètre dans le volume Δ à travers la surface $\sum$ pendant dt est alors donné par :

$$Q_1 = \int\int_{\sum} \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.\overrightarrow{n}.dS.dt$$

Transformons cette intégrale de surface en une intégrale de volume à l'aide de l'expression:

$$\iiint_{\Delta} \overrightarrow{\text{div}} F.dV = \iint_{\sum} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}.dS$$

on obtient :

$$Q_1 = \iint_{\sum} \lambda \overrightarrow{\text{grad}\, T}.\overrightarrow{n}.dS.dt = \iiint_{\Delta} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}\, T}).dV.dt$$

où dV est un élément de volume pris à l'intérieur de Δ

Calculons maintenant la quantité de chaleur Q_2 créée dans le volume Δ. En effet dans le cas général d'un corps quelconque il peut y avoir création de chaleur dans la masse. Soit

$P(x, y, z, t)$ le flux de chaleur créé par unité de volume. Q_2 est alors donnée par la formule :

$$Q_2 = \iiint P(x, y, z, t).dV.dt$$

Faisons maintenant le bilan énergétique pour le volume Δ, ce qui nous permet d'écrire

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

où Q_3 représentera la quantité de chaleur nécessaire à la variation de température *du* volume Δ.Si $\frac{\partial T}{\partial t} dt$ représente la variation de température du volume dV pendant dt, l'équation de la calorimétrie permet d'écrire :

$$d^2 Q_3 = \rho.c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt.dV$$

et

$$Q_3 = \iiint_{\Delta} \rho.c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt.dV$$

D'ou l'équation de bilan:

$$\iiint_{\Delta} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}\, T}).dV.dt + \iiint_{\Delta} P(x, y, z, t).dV.dt = \iiint_{\Delta} \rho.c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt.dV$$

ou encore:

$$\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) + P(x,y,z,t) = \rho.c_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

et en développant $\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T})$ il vient :

$$\lambda \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} T}) + P(x,y,z,t) + \overrightarrow{\operatorname{grad} \lambda}.\overrightarrow{\operatorname{grad} T} + p = \rho.c_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\lambda \Delta T + \overrightarrow{\operatorname{grad} \lambda}.\overrightarrow{\operatorname{grad} T} + p = \rho.c_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

Formule dans laquelle ΔT est le Laplacien de la température :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} \qquad \text{(en coordonnées cartisiénnes)}$$

L'expression ainsi obtenue représente l'équation de la chaleur régissant les transferts par conduction en régime variable des températures avec création de chaleur dans la masse et une conductivité λ fonction des variables spatiales et éventuellement du temps.

-En coordonnées *cartisiénnes* (x, y, z) :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

-En coordonnées cylindriques (r, z, θ) :

Dans le cas général

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Dans le cas d'une symétrie cylindrique $T = f(r)$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r}$$

-En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

Dans le cas général

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}.\frac{\partial(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

Dans le cas d'une symétrie cylindrique $T = f(r)$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r}$$

Dans le cas d'une symétrie sphérique $T = f(r)$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2}$$

4.3.2 Etablissement de l'équation de la chaleur par écriture d'un bilan en coordonnées cartésiennes

Pour simplifier les calculs nous nous placerons dans l'hypothèse d'un matériau homogène, isotrope où l'on peut supposer que le coefficient λ est égal à une constante indépendante à la fois des variables spatiales et du temps. C'est le cas particulier étudié au paragraphe précédemment.

Considérons un petit élémentparallélépipédique de volume dV(avec $dV = dxdydz$)du matériauprécédemment défini placé dans unchamp de température caractérisé entoutpoint par un vecteur$\overrightarrow{\text{grad}\, T}$ donné.

Soient λ, ρ, et c_v les caractéristiquesthermiques du matériau supposéesconstantes.

Effectuons le bilanénergétique global sur l'élément devolume dV.

Il vient:

$$d^2q_1 + d^2q_2 = d^2q_3$$

avec:

d^2q_1 : quantité de chaleur élémentaire pénétrant dans dV.

d^2q_2 : quantité de chaleur élémentaire crée dans dV.

d^2q_3 : quantité de chaleur élémentaire correspondant à la variation d'énergie interne de dV

Calcul de d^2q_1 :

Considérons les deux faces parallèles perpendiculaires à l'axe des x (figure 2).

Soient **(1)** et **(2)** ces deux faces dans l'ordre des x croissants. Définissons les normales à ces deux faces (par exemple sens positif suivant l'axe des x) et calculons les quantités de chaleur qui les traversent avec les conventions de signe de la loi de Fourier. Il vient:

$$face(1) \qquad d^2q_x = -\lambda(\frac{\partial T}{\partial x})_x dy.dz.dt$$

$$face(2) \quad d^2q_{(x+dx)} = -\lambda(\frac{\partial T}{\partial x})_{x+dx} dy.dz.dt$$

Avec le sens choisi pour les normales aux deux faces d^2q_x est une quantité de chaleur qui pénètre dans dv, $d^2q_x + dx$ est une quantité de chaleur qui sort. Un calcul semblable nous

permet pour les faces (3) et (4) (sens de y croissant) et pour les faces (5) et (6) (sens de z croissant) de calculer les quantités d^2qy et d^2dy+dy et d^2qz et d^2qz+dz . On obtient finalement la quantité de chaleur pénétrant dans dv pendant l'intervalle de temps dt soit d^2q_1.

$$\begin{aligned} d^2q_1 &= \lambda[\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2}].dx.dy.dz.dt \\ &= \lambda.\Delta T.dV.dt \end{aligned}$$

Calcul de d^2q_2

Si on appelle P la puissance créée par unité de volume à l'intérieur du matériau (terme source) on a simplement :

$$d^2q_2 = P.dV.dt$$

Calcul de d^2q_3 :

Si l'élévation de température de dv pendant l'intervalle de temps dt est $\frac{\partial T}{\partial t}dt$ on a comme précédemment :

$$d^2q_3 = \rho.C_v\frac{\partial T}{\partial t}dV dt$$

Bilan énergétique global

$$d^2q_1 + d^2q_2 = d^2q_3$$

ou

$$\lambda.\Delta T.dV.dt + P.dV.dt = \rho.C_v\frac{\partial T}{\partial t}dV dt$$

$$\lambda.\Delta T + P = \rho.C_v\frac{\partial T}{\partial t}$$

On retrouve bien l'expression correspondant au cas particulier traité.

4.3.3 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques ou sphériques

Coordonnées cylindrique

Toutes les expressions précédentes sont valables en coordonnées cylindriques (ϕ, r, z) à condition d'utiliser l'expression convenable du Laplacien qui est dans ce cas :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Dans certains problèmes à symétrie axiale cette expression se simplifie, la température n'étant plus fonction que de la variable spatiale r; $T = f(r,t)$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})$$

A titre d'exercice on peut retrouver l'équation de la chaleur directement en faisant le bilan énergétique non plus sur un élément de volume parallélépipédique ($dV = dxdydz$)mais sur un volume élémentaire caractéristique de l'accroissement des coordonnées curvilignes choisies. On se bornera à étudier un système de révolution $T = f(r,t)$ en supposant que le matériau est homogène, isotrope et que λ est indépendant de la température. La création de chaleur interne est également supposée nulle($P = 0$).

Le volume élémentaire choisi est l'espace compris entre deux cylindres d'axe Oz de rayon r et $r + dr$, limité par deux plans perpendiculaires à Oz. Le flux de chaleur à travers ces

deux derniers plans est nul puisque la température dépend uniquement de r (le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,T}$ est normal à l'axe des z). On calculera donc uniquement la quantité de chaleur pénétrant dans le volume élémentaire dV à travers les deux surfaces latérales.

- Surface interne :

$$dq_r = -\lambda(\frac{\partial T}{\partial r})_r.2\pi.r.h.dt$$

$$dq_{r+dr} = -\lambda(\frac{\partial T}{\partial r + dr})_r.2\pi.(r + dr).h.dt$$

Avec les conventions de signe choisies la quantité de chaleur pénétrant dans dV pendant l'intervalle de temps dt est égale à :

$$dq_r - dq_{r+dr} = \lambda.2\pi.r.h(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2})$$

Cette quantité de chaleur sert à élever la température du volume élémentaire dV de la quantité $\frac{\partial T}{\partial t}.dt$. D'où :

$$\lambda.2\pi.rh(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r})dr.dt = \rho c_v.2\pi.r.h.dr\frac{\partial T}{\partial t}.dt$$

$$a[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}] = \frac{\partial T}{\partial t}$$

en introduisant la diffusivité

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$$

Nous retrouvons bien l'expression de l'équation de la chaleur dans le cas considéré où le Laplacien a été écrit en coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

L'expression générale du Laplacien en coordonnées sphériques se déduit de celui en coordonnées cartésiennes en utilisant les changements de variables suivants:

$x = r \cos\theta \sin\varphi$.

$y = r \sin\theta \sin\varphi$.

$z = r \cos\theta$.

$\mu = \cos\theta$.

Il vient :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

Cette expression se simplifie dans le cas particulier d'un système présentant une symétrie sphérique. La température est alors une fonction qui ne dépend plus des variables ϕ et θ.Elle ne dépend que de la variable r.

Le Laplacien s'écrit :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}$$

ou

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$$

A titre d'exemple, et comme nous l'avons fait dans le cas des coordonnées cylindriques, on pourrait retrouver directement l'équation de la chaleur en faisant le bilan thermique au niveau d'un volume élémentaire égal à l'espace compris entre deux sphères de rayons respectifs r et $r + dr$.

4.4 Equation de la chaleur en dimension un

L'équation générale de la chaleur exprime une relation entre la fonction température$T$ et les variables x, y, z et t. La solution mathématique de cette équation aux dérivées partielles,

linéaire, du deuxième ordre admet en principe une infinité de solutions. Aussi, sa résolution nécessite la connaissance, d'une part de la condition initiale c'est à dire la répartition initiale

des températures en tout point du milieu $T(x, y, z, 0)$, d'autre part la loi de variation en fonction du temps de la température ou de sa dérivée normale sur la surface S. Ce sont les

Conditions aux limites spatio-temporelles.

Condition initiale:

C'est la répartition de température à l'instant $t = 0$ soit $T_0 = f(x, y, z, 0)$. Généralement cette condition est connue.

Conditions aux limites:

Sur les frontières d'un matériau différents types de conditions aux limites peuvent apparaître dans les problèmes couramment rencontrés en transfert de chaleur.

La température est imposée sur la surface S (problème de Dirichlet):

$T_s = f(M_s, t)$

La densité de flux est imposée en surface (problème de Neumann):

$$\varphi = -\lambda(\frac{\partial T}{\partial t})_s = f(M_s, t).$$

ou $(\frac{\partial T}{\partial n})_s$ est la dérivée normale à la surface.

L'équation de la chaleur en une dimension est donnée par l'équation différentielle partielle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad x \in R, t \succ 0$$

où $c > 0$ est une constante donnée,u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t. L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une ´equation parabolique. En

général, les équations aux dérivées partielles sont classées en trois catégories : elliptique, parabolique et hyperbolique.

Ici,$u = u(x,t)$ est la température dans un conducteur d'une dimension. La valeur de $u(x,t)$ dépend du temps $t \geq 0$ et de la position x. En général, la valeur de $u(x,t)$ en $t = 0$ est donnée.

Nous voulons donc résoudre le probléme de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), x \in R, t \succ 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in R \end{array} \right\}$$

4.5 Description physique:

Considérons une barre de longueur illimitée. Pour décrire l'équation de la chaleur, supposons que le conducteur a une petite section d'aire Δs.

La quantité de chaleur à travers la section au point x est (en accord avec l'expérience) approximativement proportionnelle au gradient $\frac{\partial u}{\partial x}$en x . La quantité de chaleur dans la direction des x croissants pendant un court temps Δt est

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}\Delta s \Delta t$$

où k est une constante strictement positive d´ependant du matériau. Notons que la positivité de k est en accord avec le fait que la chaleur circule du chaud vers le froid. Evidemment,

upposons que u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ ne changent pas rapidement, $k\frac{\partial u}{\partial x}$ est la quantité de chaleur par seconde et par unité d'espace ciculant le long des x dans la direction négative.

Cherchons comment varie au cours du temps la temp´ratureuaux différents points de la barre. Ecrivons l'équation des échanges de chaleur de l'intervalle $[a, b]$. La quantité totale de chaleur sortant de $[a, b]$ au temps Δt est approximativement

$$-k[(\frac{\partial u}{\partial x})(b,t) - (\frac{\partial u}{\partial x})(a,t)]\Delta s \Delta t \tag{4.1}$$

D'un autre côté, supposons que $b - a$ est si petit que $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ est presque constant pour $x \in [a, b]$, l'augmentation de température étant $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$,la même quantité totale de chaleur sortante est approximativement égale à

$$-k_1(b-a)\Delta s \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \tag{4.2}$$

oú k_1 est une constante strictement positive, la chaleur spécifique par unité de volume.

En général, la quantité spécifique c_g est donnée par unité de masse donc si le matériau a la densitéρ alors $k_1 = \rho c_g$ On écrit ensuite que les deux termes **(4.1)** et (4.2) sont égaux, on divise par $\Delta s \Delta t(b - a)$ et on fait tendre $b - a$ vers zéro d'où

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{k_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

4.6 Conducteur circulaire de longueur 2π

Nous discutons maintenant la température dans un conducteur circulaire de longueur 2π ou de façon équivalente le cas oú nous avons une température $u(x, t)$ de période 2π en $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.1 *Soient c une constante strictement positive et f une fonction continue 2π périodique sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $u(x, t), t > 0, x \in \mathbb{R}$ satisfaisant*

$u(x, t)$ est 2π périodique en $x, \forall t > 0; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$, existent comme fonctions continues sur $x \in \mathbb{R}, t > 0$. (1)*

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x;t), t \rangle 0, x \in \mathbb{R}$. (2)*

$\lim\limits_{t \to 0^+} \|u(.,t) - f(.)\|_\infty = 0$ (3)*

La fonction f détermine la température au temps $t = 0$.

Preuve:

Nous commençons par supposer qu'il existe une fonction $u(x,t)$ satisfaisant les conditions mentionnées dans le théoréme pour $t > 0, x \in \mathbb{R}$. Nous explicitons ensuite $u(x,t)$ puis nous

montrons que $u(x,t)$ trouvé satisfait les conditions du théoréme.

Comme $u(x,t)$ converge uniformément vers $f(x)$ quand t tend vers zéro, en notant la série de Fourier de $u(x,t)$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(t)\exp(int)$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) exp(inx)$$

la série de Fourier de f on trouve que $C_n(t)$ tend vers

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\exp(-inx)dy$$

quand t tend vers zéro $\forall n$.

Comme

$$C_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)\exp(-inx)dx$$

en utilisant l'équation de la chaleur, deux intégrations par parties et le fait que u est 2π périodique en x nous obtenons que $c_n(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$C_n'(t) = -n^2 c C_n(t)$$

que nous résolvons

$$C_n(t) = C_n(t_0)\exp(-cn^2(t-t_0)) \qquad , t \geq t_0 \geq 0$$

Comme $C_n(t_0)$ tend vers $\widehat{f}(n)$ quand t_0 tend vers zéro, nous trouvons

$$C_n(t) = \widehat{f}(n)\exp(-cn^2t), t\rangle 0$$

Ainsi,

$$u(x,t) = \sum_n \widehat{f}(n)\exp(-cn^2t)\exp(inx), t\rangle 0, x \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

vérifie l'équation de la chaleur d'oū le (2*) du théoréme 4.1.

Puis;

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_n \exp(in(x-y))\exp(-cn^2t)]f(y)dy \\ &= p_t * f(x,t) \\ &= \int_0^{2\pi} p_t(x-y)f(y)dy,\ t\rangle 0,\ x \in \mathbb{R} \\ p_t(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_n \exp(inx)\exp(-cn^2t),\ t\rangle 0 \end{aligned}$$

Remarque 4.1 *la solution u est de classe $\mathbb{C}_\infty$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ ce qui montre que l'équation de la chaleur a un effet fortement régularisant sur la donnée initiale f.*

Pour démontrer le (3) du théoréme, nous allons écrire $u(x,t)$ d'une aute maniére mais pour cela écrivons d'abord p_t d'une autre maniére.*

Exercice 1 *Si*

$$g(x) = \exp(-ax^2)$$

où $\alpha > 0$ est une constante donnée alors la transformation de Fourier de g est

$$\widehat{g}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(\frac{-x^2}{4a})$$

Lemme 4.1 *Si g est mesurable sur $\mathbb{R}$, si $\dot{g}$ est continue telle que*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g^{'}(x+2\pi n)$$

converge uniformément sur $[0,2\pi]$, si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(x_0+2\pi n)$$

converge en au moins un point x_0 alors

$$\sum_n g(x-2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{g}(n)\exp(inx)$$

a lieu uniformément sur $\mathbb{R}$.

On applique ce lemme avec la fonction g de l'exercice 1 oú $a = \frac{1}{4ct}$, $t\rangle 0$, $c\rangle 0$ d'oú

$$p_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\sum_n \exp(\frac{-1}{4ct}(x-2\pi n)^2)$$

En utilisant deux changements de variable et le fait que f est 2π périodique, nous trouvons

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi ct}\int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{-y^2}{4ct)})f(x+y)dy$$

Posons $\beta = \frac{1}{\sqrt{4ct}}\rangle 0$. Comme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \beta\exp(-\beta^2 y^2)dy = 1$$

on écrit

$$u(x,t) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \beta\exp(-\beta^2 y^2)[f(x+y)-f(x)]dy$$

Lemme 4.2 *La fonction*

$$k_\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\beta\exp(-\beta^2 x^2)$$

est une approximation de l'identité.

Preuve: La fonction k_β vérifie les trois propriétés demandées :

1.$k_\beta(x) \geq 0.$

2.$\int_{\mathbb{R}} k_\beta(x)dx = 1.$

3.$\int_{|x|\geq 0} k_\beta(x)$ tend vers zéro quand β tend vers l'infini $\forall x_0\rangle 0$ par convergence dominée.

Pour montrer que $u(x,t)$ converge uniformément vers $f(x)$ quand t tend vers zéro,c'est-a-dire quand β tend vers l'infini, on utilise le fait que f est continue et le lemme 4.2 c'est-'a-dire pour $\epsilon\rangle 0$ donné,

$$\exists y_{0\rangle 0}\ ,\forall y\ ,|y|\geq y_0, |f(x+y)-f(x)|\leq \frac{\epsilon}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$$

et

$$\exists\beta_0, \int_{|y|\geq y_0} k_\beta(y)dy \leq \frac{\epsilon}{4\left\|f\right\|_\infty}\ ,\forall\beta\geq\beta_0$$

■

4.7 Inforamation sur le comportement de $u(x,t)$ quand t devient grand

D'aprés la formule (4.3)

$$u(x,t)=\widehat{f}(0)+\sum_{n\neq 0} f(n)\exp(-cn^2t)\exp(inx) \tag{4.4}$$

la solution $u(x,t)$ tend vers $\widehat{f}(0)$ quand t tend vers l'infini pour tout x (la convergence est meme uniforme en$x$).

Ce qui est important est de remarquer que $\widehat{f}(x)$ est la moyenne de f car

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)dy$$

donc la température se répartit uniformément quand t est grand.

4.7.1 Un cas de propagation

L'évolution des températures aux divers points d'un anneau de fer a été l'un des premiers phénoménes analysés par la technique de Fourier.Un cas de propagation particuliérement instructif et qui ne présente aucune difficulté de calcul est donc le suivant : on place une flamme sous une région d'un anneau. Lorqu'une partie de l'anneau est chauffé au rouge, on le retire du feu et on l'enfouit dans un sable fin isolant. On mesure alors la répartition des températures tout autour de l'anneau et on évolution dans le temps. Juste aprés le chauffage, la température est irréguliérement répartie : une moitié est uniformément chaude, l'autre uniformément froide et entre-elles,a température décroit brutalement. Pour l'analyse, on déroule l'anneau et on mesure a température en chaque point, pour obtenir une répartition de la température le long du pourtour de l'anneau. Fourier proposa la décomposition de la répartition initiale discontinue en une somme d'un grand nombre (éventuellement infini) de sinusoides, c'est-'a-dire cette répartition est décomposée en plusieurs courbes sinusoidales :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \exp(inx)$$

En additionnant **16** de ces courbes, on obtient une bonne approximation de la température initiale.

A mesure que la chaleur se propage de la région chaude vers la région froide, les températures s'égalisent peu à peu. Bientôt, la distribution de la chaleur sur l'anneau est presque sinusoidale : le graphique représentant la valeur de la température en fonction de la position sur l'anneau a une forme en S, analogue aux fonctions sinus ou cosinus. En-suite, la sinusoide s'applatit graduellement jusqu'à ce que tous les points de l'anneau soient a la meme températaure.

4.7.2 Principes du maximum

Principe du maximum pour $u(x,t)$

Avec la formule (4.4), on a

$$\int_0^{2\pi} p_t(x)dx = 1$$

d'où l'inégalité

$$|u(x,t)| \leq \|f\|_\infty , x \in \mathbb{R}d$$

d'où

$$\|u(.,t)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \ ,\forall t\rangle 0$$

Principe du maximum pour $u(x,t) - \widehat{f}(0)$

On a avec la meme démonstration qu'au paragraphe **(4.7.2)**

$$\left\|u(.,t) - \widehat{f}(0)\right\|_\infty \leq \left\|\widehat{f} - f(0)\right\|_\infty$$

4.7.3 Si f est paire

Proposition 2 *Nous avons l'équivalence suivante :*

f *paire* $\Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \ \ ,\forall t\rangle 0.$

Preuve:

Commençons par démontrer l'implication f paire$\Longleftrightarrow \partial u(0,t) = 0 \ \ ,\forall t\rangle 0.$

Nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{f}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)dy\end{aligned}$$

$$\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(y)\cos(ny)dy \ \ ,n\rangle 1$$

Avec la formule(4.4), nous obtenons

$$u(x,t) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n)\cos(-cn^2t)\cos(nx)$$

donc $\quad \forall t\rangle 0$, $u(x,t)$ est une fonction paire de x et $\frac{\partial u}{\partial x}$ est impaire,$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0=\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)\ ,\forall t\rangle 0$$

Il n'y a pas de flux de chaleur à travers les sections $x=0$ et $x=\pi$.

Réciproquement, montrons que si

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\sum_{1}^{+\infty}[\widehat{f}(n)+\widehat{f}(-n)]\exp(-cn^2t)in$$

qui est nulle par hypothése. Alors

$$\widehat{f}(-n)=\widehat{f}(n)\quad ,\forall n\geq 1$$

et f est paire.

4.7.4 si f est impaire

Proposition 3 *Nous avons les implications suivantes :*

f *est impaire* $\Longrightarrow u(x,t)$*est impaire de* $x,\forall t>0$

$\Longrightarrow u(0,t)=0=u(\pi,t),\forall t>0,$

$\Rightarrow u(0,t)=0,\forall t>0,$

$\Rightarrow f$ *est impaire.*

Preuve:

Supposons que f est impaire. On a $\widehat{f}(0)=0,$

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-n) &= -\widehat{f}(n)\\ &= -\frac{i}{\pi}\int_0^{\mathbb{R}} f(y)\sin(ny)dy \qquad ,n\geq 1\end{aligned}$$

et donc d'aprés la formule (4.4)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 2i \sum_{n\succeq 1} \widehat{f}(n)\exp(-cn^2t)\sin(nx) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\exp(-cn^2t)(\int_0^{\pi} f(y)\sin(ny)dy)\sin(nx) \end{aligned}$$

est une fonction impaire de x , pour tout $t>0$, donc $u(0,t)=0=u(\pi,t)$.

Si f est impaire alors la température reste nulle au point 0 et π.

Réciproquement, montrons que $si u(0,t)=0, \forall t>0$ alors f est impaire.

Dàprés la formule (4.4)

$$u(0,t)=\widehat{f}(0)+\sum_1^{\infty}[\widehat{f}(n)+\widehat{f}(-n)]\exp(-cn^2t)$$

est nul par hypothése pour tout $t>0$, on trouve en posant $z=exp(-ct)$

$$\widehat{f}(0)+\sum_1^{\infty}[\widehat{f}(n)+\widehat{f}(-n)]\ z^{n^2}=0 \quad ,0\langle z\langle 1$$

et donc

$$\widehat{f}(0)=0 \quad ,$$

$$\widehat{f}(n)+\widehat{f}(-n)=0 \quad ,\forall n\geq 1$$

donc f est impaire.

Tige de longueur finie

L'étude précédente peut paraitre restrictive, mais on peut aussi grâce à elle discuter le comportement de la température dans une tige de longueur finie.

4.7.5 Probléme de Dirichlet:

La température à $t=0$ est donn´ee et vérifie les memes conditions aux deux bouts de la tige.

La température aux deux bouts est égale à la meme valeur $\alpha=0$ pour tout $t>0$. Sans perte de généralité, nous supposons que $\alpha = 0$ et que la longueur de la tige est π. Précisément, nous avons le théoréme suivant :

Théorème 4.2 *Soit la constante* $c > 0$ *donnée. Nous supposons que la fonction* f *donnée est continue sur* $[0, \pi]$ *et satisfait* $f(0) = f(\pi) = 0$.

Alors, il existe un unique $u(x, t), t > 0, 0 \leq x \leq \pi$ *tel que*

1.$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ *existent et sont continues sur* $t > 0, 0 \leq x \leq \pi,$

2.$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c\dfrac{\partial^{2u}}{\partial x^2}(x, t),\ \forall(x, t\forall 0 \leq x \leq \pi, \forall t > 0,$

3.$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad , \forall t > 0,$

4.$\lim\limits_{t \to 0} \|u(., t) - f(.)\|_\infty = 0$

Preuve:

Nous supposons qu'il existe $u(x, t)$ satisfaisant les conditions du théorème. Nous allons construire un prolongement de u à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ Nous étendons $u(x, t)$ et $f(x)$ par imparité sur

$[-\pi, \pi]$ et à tout $\mathbb{R}$ par 2π périodicité. Donc, nous sommes dans la situation du théoréme (1): il existe un unique u satisfaisant 1), 2), 3), 4). Comme f est impaire, nous avons

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \exp(-cn^2 t)(\int_0^\pi f(y) \sin(ny) dy) \sin(nx).$$

4.7.6 Le cas de la condition de Neumann

Une autre possibilité est de ne mettre aucune restriction sur la température initiale f exceptée la continuité sur $[0, \pi]$. Mais, nous supposons que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0 \quad ,\forall t\rangle 0.$$

Supposons encore qu'il existe au moins un $u(x,t)$ satisfaisant toutes les conditions. Nous étendons $u(x,t)$ et $f(x)$ d'abord comme fonctions paires sur $[-\pi,\pi]$ puis comme fonctions 2π périodiques sur $\mathbb{R}$. D'aprés le théoréme 4.2, $u(x,t)$ satisfait les conditons d'existence et est déterminé de façon unique. Comme f est paire, nous obtenons sur $[0,\pi]$.

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(y)dy+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(\int_1^{+\infty} f(y)\cos(ny)dy)\exp(-cn^2t)\cos(nx).$$

4.7.7 Probléme mixte

Nous mentionnons une autre variante dans laquelle nous supposons que $u=0$, $\forall t>0$ en un bout et que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\forall t\rangle 0$$

à l'autre bout.

Sans perte de généralité, nous supposons que la longueur de la tige est $\frac{\pi}{2}$ Alors , $u(x,t)$ doit être d´efini pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et $t>0$ tel que

$$u(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t)=0,\forall t\rangle 0$$

Comme

$$\lim_{t\to 0}\|u-f\|_{\infty}=0$$

la température initiale satisfait $f(0)=0$.

De façon similaire, nous étendons f et u sur [-$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$] par imparité, sur $[-\pi,\pi]$ tel que f et u sont paires par rapport à $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$

4.7.8 Tige infinie

Considérons maintenant une conduction de chaleur dans une tige infinie oú encore la température initiale est donnée.

Théorème 4.3 *Soient* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $c > 0$ *données.*

Alors, il existe un unique $u(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R}$ *tel que* $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *existent en chaque point et satisfont* $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *avec* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *continue en* x *, pour tout* t.

De plus, les transformées de Fourier $\hat{u}$, $\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}$ *existent et* $\hat{u}$ *satisfait* $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}$ *et* $\|u - f\|_1$ *tend vers* 0 *quand* t *tend vers* 0.

Bibliographie

[1] Marguerite GISCLON UMPA, CNRS-UMR no128, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie 69364 LYON CEDEX 07**. France.**

[2] H. Brézis, "Analyse fonctionnelle, Théorie et applications", Masson T. W. KÖrner, "Fourier Analysis", Cambridge University Press Laurent Schwartz, "Méthodes mathématiques pour les sciences physiques", Hermann A. C. Zaanen, "Continuity, Integration and Fourier theory" Springer VerlagPour la science, dossier hors série, janvier 1994, "les mathématiciens"

[3] INSA de LYON Dép. Génie Civil et Urbanisme 3GCU **.**

[4] Le journal de maths des éléves, Volume 1 (1998), No. 4

.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude de l'équation de la chaleur de dimension un dans le quel on a résolu cette dernière avec des méthodes différentes on a aussi faire la dérivée avec deux méthodes différentes et on a utilisé la loi de Fourier pour faire une résolution pour l'équation de la chaleur en dimension un en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

Abstract

In this Work we are interested in the study of the heat equation in one dimension in which it was solved using different methods was also derived with two different methods were used and the law to a resolution Fourier equation for heat in dimension in a Cartesian, spherical and cylindrical coordinats

ملخص

في هذه المذكرة نحن مهتمون بدراسة معادلة الحرارة في بعد واحد التي تم حلها باستخدام طرق مختلفة واستعملنا أيضا في اشتقاقها طريقتين مختلفتين وقد استعملنا قانون فوريه لحل هذه المعادلة في الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية الكروية

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude de l'équation de la chaleur de dimension un dans le quel on a résolu cette dernière avec des méthodes différentes on a aussi faire la dérivée avec deux méthodes différentes et on a utilisé la loi de Fourier pour faire une résolution pour l'équation de la chaleur en dimension un en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

Abstract

In this Work we are interested in the study of the heat equation in one dimension in which it was solved using different methods was also derived with two different methods were used and the law to a resolution Fourier equation for heat in dimension in a Cartesian, spherical and cylindrical coordinats

ملخص

في هذه المذكرة نحن مهتمون بدراسة معادلة الحرارة في بعد واحد التي تم حلها باستخدام طرق مختلفة واستعملنا أيضا في اشتقاقها طريقتين مختلفتين وقد استعملنا قانون فورييه لحل هذه المعادلة في الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية الكروية