



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique



Université Abou Baker Belkaid Tlemcen
Département de mathématiques

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de licence en mathématiques

Option : Equation différentielle

Thème :

Les Equations De Lotka-Volterra
Pour Les Systèmes
Des Populations

DIRIGÉ PAR :
Mr BENCHAIB

PRÉSENTÉ PAR :
M^{LLE} Abdellaoui Nayla

JUIN 2013

2012

Remerciements

Nous tenons à remercier tout particulièrement notre directeur de thèse, M BENCHAIIB pour ses conseils, sa grande disponibilité, sa gentillesse et son soutien constant pour mener à bien ce travail. Encore merci !

Nous adressons nos remerciements les plus sincères a nos amis, a tous les membres du département de mathématique en particulier le chef de département Mr mebkhout, qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à la réussite de cette formidable année universitaire.

Enfin, nous avons eu la chance d'avoir des parents qui nous ont donné le goût de la connaissance et qui nous ont soutenus dans les moments difficiles. Pour cela, nous leur adressons un grand merci.

2012

Table des matières

Introduction

3

1. L'équation logistique	4
1.1. Croissance exponentielle	4
2. Les systèmes prédateurs proies	5
2.1. Les équations prédateurs proies	5
2.2. Analyse des équations prédateur-proie de Lotka-Volterra	5
2.3. Principe de Volterra	8
2.4. L'équation avec des compétitions internes	9
2.5. Coexistence de prédateurs et proies	10
3. Les équations de Lotka-Volterra pour deux espèces	12
3.1. Linéarisation	12
3.2. Une équation de compétition	13
4. Résolution numérique des équations différentielles ordinaires et la méthode d'Euler	14
4.1. Problème de Cauchy	14
4.2. Méthode d'Euler	15
4.3. Systèmes d'équations différentielles ordinaires	17
4.3.1. Application au problème de Lotka-Volterra	17
5. La simulation numérique avec la méthode d'Euler	17

Références

20

2012

Introduction

Nous avons choisi un travail dans le domaine des équations différentielles. Plus précisément, nous avons étudié les équations de Lotka-Volterra qui décrivent l'évolution des systèmes de populations biologiques.

Dans la première partie de cet article nous présentons le problème de Volterra de base et quelques extensions (sections 1-3). Dans la section 4 nous expliquons, sans aller trop en détails, comment résoudre des équations différentielles ordinaires et ensuite nous décrivons une méthode numérique pour la résolution de ces dernières (la méthode d'Euler). Enfin, dans la section 5, nous montrons les résultats de certaines simulations numériques que nous avons effectuées, concernant le problème de Lotka-Volterra et qui confirment les résultats théoriques décrits dans les sections précédentes.

2012

1 L'équation logistique

1 Croissance exponentielle

- ✓ Soit r le rapport de la croissance d'une population avec générations discrètes. On a donc

$$x' = rx$$

Où x est la densité d'une génération et x' celle de la prochaine.

- κ Si r reste constante, alors la densité après n générations devient $rn x$, où pour $r > 1$ la croissance explose vers l'infini.

- κ Il est clair qu'une telle explosion de population ne se vérifie pas dans la réalité, car différents facteurs interviennent pour limiter la croissance. Avant de considérer les limites de la croissance, on va traiter une multiplication sans restriction des populations ayant des générations continues.

- κ Si $x(t)$ est la taille de la population au temps t , alors

Est la vitesse moyenne de la croissance dans l'intervalle $[t, t+t]$.

- ✓ On peut considérer l'existence de la dérivée par rapport au temps

Qu'on notera $x'(t)$.

- ✓ Le terme peut être considérée comme le taux de croissance de la population ou comme la contribution moyenne d'un individu à sa croissance.

On voit que

Si le taux de croissance est constant, i.e. si

$$x' = rx$$

Alors

Qui donne après intégration

$$\text{Log } x(t) - \log x(0) = rt$$

Ou

$$x(t) = x(0)$$

Pour un modèle continu, on a donc une croissance exponentielle.

2012

2 Les systèmes prédateurs proies

2.1 Les équations prédateurs proies

κ Dans les années après la Première Guerre mondiale, la quantité de poissons prédateurs dans l'Adriatique était beaucoup plus élevée que pendant les années précédentes. En effet, les hostilités entre l'Italie et l'Autriche avaient provoqué une grande diminution de la pêche. Pour essayer de comprendre et expliquer pourquoi ce fait avait favorisé les prédateurs plutôt que les proies, le mathématicien Volterra avait proposé les équations qui sont le sujet de notre mini-projet.

- Il avait supposé que le taux de croissance des populations des proies, en absence de prédateurs, était donné par une constante a
Et qu'il décroissait linéairement en fonction de la densité y des prédateurs. Ceci donne :
 - De plus il avait supposé qu'en absence de proies, le taux de croissance des populations des prédateurs était négatif (ce qui conduit à la disparition de la population) et qu'il croissait linéairement en fonction de la densité x des proies, ceci implique :
- ✓ On peut donc écrire les équations différentielles suivantes :

...(1)

2.2 Analyse des équations prédateur-proie de Lotka-Volterra

❖ On commence cette section en définissant les termes qu'on va utiliser par la suite.

Définition 2.1 Soit $x = x(t)$ une fonction de t , on appelle orbite de x l'ensemble

Définition 2.2 Soit $x = x(t)$ une fonction de t et soit $x' = f(x)$ une équation différentielle qui ne dépend pas de t . On peut avoir trois types de solutions $x(t)$:

- a) si $x(t) = x$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si $x(t)$ est constant, alors x est appelé un point d'équilibre. Ces points sont caractérisés par $f(x) = 0$.
- b) si $x(T) = x$ pour un certain $T > 0$ et $x(t) \neq x$ pour tout $t \in (0, T)$, alors x est appelé point périodique et T est la période. On remarque que tous les autres points sur l'orbite sont périodiques de période T . Le

2012

mouvement décrit ainsi une oscillation périodique infinie.
c) si $t \rightarrow \infty$, $x(t)$ est injective, alors l'orbite ne s'intersecte jamais avec elle même.

κ On considère l'équation (1). On peut déjà en déduire trois solutions :

- i. $x(t) = y(t) = 0$
- ii. $x(t) = 0, y(t) = \dots$
- iii. $y(t) = 0, x(t) = \dots$

κ Cela signifie que

- ✓ si la densité des prédateurs ou des proies est nulle à un certain temps, alors elle est toujours nulle.
- ✓ En absence de proies, les prédateurs s'éteignent ($y(t) \rightarrow 0$, si $t \rightarrow \infty$).
- ✓ En absence de prédateurs, la population des proies explosera ($x(t) \rightarrow \infty$, si $t \rightarrow \infty$).

κ Aux trois solutions (i), (ii) et (iii) correspondent trois orbites :

- i. l'origine (0,0), qui est un point d'équilibre
- ii. l'axe des y positifs
- iii. l'axe des x positifs

κ La réunion des trois orbites forme la frontière du quadrant positif

κ Étant donné que les densités des populations doivent être non négatives, on considère seulement la restriction de (1) sur. Cet ensemble est invariant.

κ La frontière ∂ est invariante

κ et puisque aucune orbite ne peut croiser les autres, l'intérieure int est aussi invariante

κ Il y a un unique point d'équilibre dans int En effet un tel point d'équilibre $F=(,)$ doit satisfaire

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{0} \text{ et, } (-\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{0}. \text{ Or } > \mathbf{0} \text{ et } > \mathbf{0}$$

Impliquent

$$= = .$$

Les Equations De Lotka-Volterra

2012

- Les signes de \dot{x} et \dot{y} dépendent du fait que y soit plus grand ou plus petit que \bar{y} et que x soit plus grand ou plus petit que \bar{x} . Ainsi l'intervalle est divisé en quatre régions I, II, III, IV (voir Fig. 2). F est entouré par des orbites périodiques qui voyagent de I à II, de II à III, etc. . . . dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

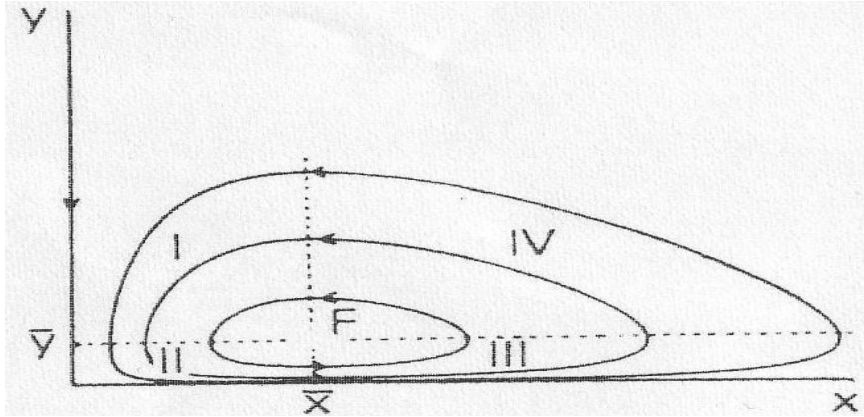


Fig. 2 _

- ✓ En effet, si on multiplie l'équation \dot{x} par $c - dx$, et l'équation \dot{y} par $a - by$ on obtient

Ou

$$\dots(2)$$

On peut réécrire ça différemment. Avec

Et

$$\dots(3)$$

L'équation (2) devient :

Ou encore

Où k est une constante réelle.

- ❖ La fonction V , définie dans (1), reste constante le long de l'orbite de (1) : elle est appelée **constante de mouvement**.

κ Etant donné que $H(x)$ satisfait

- ✓ alors $H(x)$ atteint son maximum en $x = \bar{x}$; de la même façon $G(y)$ atteint son maximum en $y = \bar{y}$.

2012

- ✓ Ainsi $V(x, y)$ a un unique maximum à l'équilibre $F = ()$. Les ensembles de la forme sont des courbes fermées autour de F . Les solutions doivent rester dans ces ensembles, ainsi elles retournent à leurs points de départ. Les orbites sont donc périodiques.

2.3 Principe de Volterra

- On remarque que les densités des prédateurs et des proies oscillent avec une certaine période. Or l'amplitude et la fréquence de l'oscillation ne dépendent que des conditions initiales. Par contre, la moyenne des densités par rapport au temps reste constante et à l'équilibre correspond à la valeur suivante :

Et

Où T est la période de l'oscillation.

- u Ce résultat est justifié par le calcul suivant :

En partant de l'équation initiale $x' = x(a - by)$ on écrit :

En intégrant on obtient :

I.e.

Comme $x(T)=x(0)$, on conclut que

Avec un raisonnement analogue on montre le résultat pour x .

- Considérons maintenant l'explication de Volterra pour le problème initial, concernant l'augmentation des poissons prédateurs. Pêcher réduit l'augmentation du nombre des proies, ceci signifie que la constante a dans l'équation initiale diminue et devient $a - k$ pour un certain $k > 0$. Au même temps, le taux de diminution de la population des prédateurs devient plus grand (au lieu de c on a $c + m$ avec $m > 0$). Par contre, les constantes d'interaction a et b ne changent pas.
- Pour conclure, la densité des prédateurs devient donc plus petit et celle des proies plus grandes. Si on arrête de pêcher, on constate ainsi une augmentation des prédateurs et une diminution des proies. Ceci explique bien le fait analysé par Volterra.
- On remarque que le principe de Volterra décrit ci-dessus reste aussi valable dans des cas beaucoup plus réalistes. Entre autres, on trouve que l'utilisation d'un insecticide n'a souvent pas des conséquences spécifiques avec le résultat qu'il y a une augmentation des insectes (proies) et une diminution des prédateurs (par exemple oiseaux).

2.4 L'équation avec des compétitions internes

Les Equations De Lotka-Volterra

2012

- Dans les équations différentielles pour le problème de Volterra ci-dessus (voir (1)), on a supposé une croissance exponentielle $x' = ax$ de la population. Ceci est peu réaliste. En utilisant une croissance de type logarithmique $x' = x(a - ex)$, ça devient beaucoup plus probable.

Au lieu de 1 on obtient :

avec $e > 0$ et $f > 0$.

...(4)

- κ De nouveau est invariant. Sa frontière est formée par quatre orbites : les deux points d'équilibre $O = (0;0)$ et $P = ()$ et les deux intervalles $(0;)$ et $()$ des axes des x et y positifs.
- Pour comprendre ce qui se passe dans int, on va s'intéresser aux isoclines. L' x -isocline est l'ensemble où $x' = 0$, c'est-à-dire l'ensemble où le champ vectoriel est vertical : dans int, il s'agit de l'ensemble dans lequel :

...(5)

- De même l' y -isocline est l'ensemble où $y' = 0$, c'est à dire l'ensemble où le champ vectoriel est horizontal : il s'agit de l'ensemble dans lequel :

...(6)

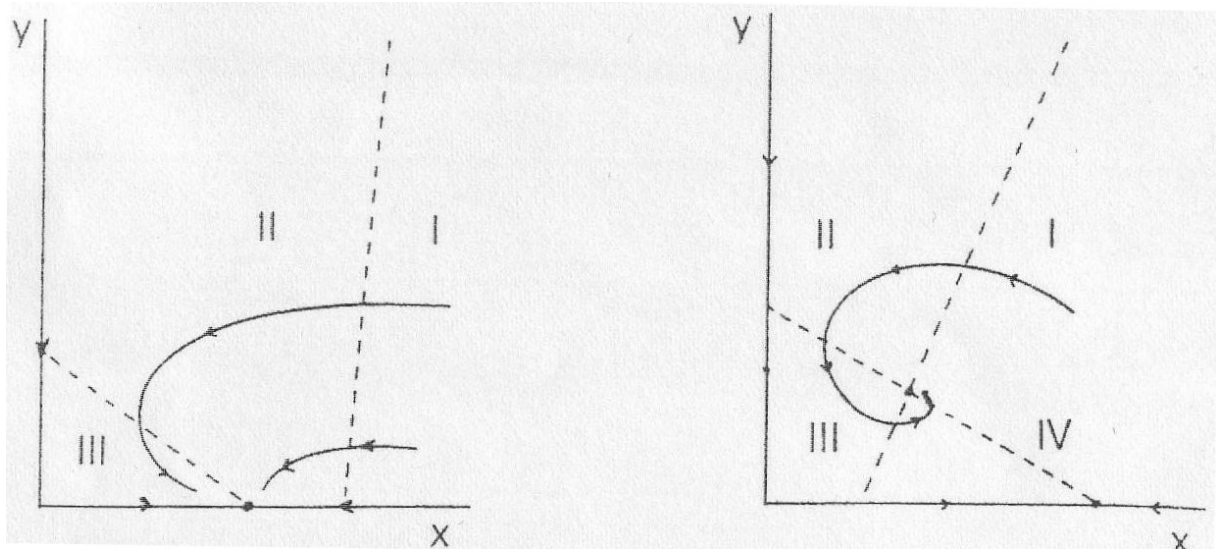


Fig. 3 _ 3.1, 3.2

2012

- En fonction des paramètres, ces lignes peuvent s'intersecter ou pas dans \mathbb{R}^2 . Si elles ne se rencontrent pas, elles divisent \mathbb{R}^2 en trois parties I, II, III (voir Fig. 3.1). Dans I, comme $x' < 0$, le champ vectoriel est va de droite à gauche et donc chaque orbite qui arrive de I entre en II. Dans la région II, on a encore $x' < 0$ et aussi $y' < 0$ et donc le champ vectoriel va de droite à gauche et de haut en bas. Une orbite va donc soit toujours resté dans II et converger vers P , soit entré dans la région III. Dans cette dernière, la direction est vers la droite et vers le bas. Elle est donc invariante et aucune solution ne peut en sortir. Dans ce cas, chaque orbite converge vers P aussi. Les prédateurs vont donc disparaître et la densité des proies va converger vers la limite, qui correspond à la capacité de l'équation logistique $x' = x(a - ex)$ qui, en absence de prédateurs, gouverne leur croissance. Si les isoclines s'intersectent en un certain point $F = (x^*, y^*)$ dans \mathbb{R}^2 , ce point est alors un point d'équilibre. Ses coordonnées sont solutions de 5 et 6. Dans ce cas, \mathbb{R}^2 est divisé en quatre régions I, II, III, IV (voir Fig. 3.2). Les signes de x' et y' suggèrent que les orbites ont un mouvement dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre autour de F . On peut maintenant avoir un mouvement rotationnel, périodique ou convergente vers le point F ou alors un mouvement en spirale qui s'éloigne.

2.5 Coexistence de prédateurs et proies

- Revenons à l'équation (4) et considérons le cas où les isoclines s'intersectent. Alors il existe un point d'équilibre $F = (x^*, y^*)$ int Aux densités correspondantes, on a que les prédateurs et les proies peuvent coexister.
 - La question qui nous intéresse est la suivante : est-ce que cet équilibre est stable ?

α Reprenons la fonction V définie en 3

Avec

et

α La dérivée de la fonction $t \rightarrow V(x(t), y(t))$ est

α Comme x^* et y^* sont des solutions de 5 et de 6, on peut remplacer a par $e+x^*$ et c par $d+fy^*$. Ceci donne :

Les Equations De Lotka-Volterra

2012

α Donc par le théorème de Ljapunov (voir la suite), chaque solution dans int converge vers cet équilibre.

Définition 2.3 Soit $x' = f(x)$ une équation différentielle ordinaire, indépendante de t , définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et soit $x(t)$ une solution définie pour tout $t \geq 0$ et qui satisfait la condition initiale

$x(0) = x_0$. On définit l' ω -limite de x comme étant l'ensemble des points d'accumulation de $x(t)$, pour $t \rightarrow +\infty$:

$\omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : x(t_k) \rightarrow y \text{ pour une suite } t_k \rightarrow +\infty\}$

Théorème 2.4 (Théorème de Ljapunov) Soit $x' = f(x)$ une équation différentielle ordinaire, indépendante de t , définie sur un certain domaine $G \subset \mathbb{R}^n$. Soit $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ un continu différentiable. Si pour une certaine solution $t \rightarrow x(t)$, la dérivée de $t \rightarrow V(x(t))$ satisfait (ou ≤ 0), alors $\omega(x) \subset G$ est contenu dans l'ensemble $x \in G : (x) = 0$.

- κ Un point d'équilibre z d'une équation différentielle ordinaire $x' = f(x)$ est dit stable si, pour tout voisinage U de z , il existe un voisinage W de z tel que chaque orbite dans W reste toujours dans U (c'est à dire que $x(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$).
- κ Il est dit asymptotiquement stable si en plus, les orbites convergent vers z (c'est-à-dire $x(t) \rightarrow z$ pour tout $x \in W$).
- κ L'ensemble des points x tel que $x(t) \rightarrow z$, quand $t \rightarrow \infty$ est appelé le bassin d'attraction de z . Il s'agit d'un ouvert invariant. S'il est l'espace entier (ou bien seulement l'intérieur de celui-ci), alors z est dit globalement stable.
- ✓ On en déduit que la solution stationnaire F est stable et asymptotiquement stable pour 1, et il est globalement stable pour 4. On remarque que la stabilité asymptotique n'implique qu'une petite perturbation autour de l'état d'équilibre F et sera rapidement amorti par la dynamique de 4.
- ✓ De plus, un petit changement dans le champ vectoriel 4 déplacera légèrement la position du point d'équilibre F mais ne changera pas trop le comportement des orbites, qui continueront être des spirales vers F .

2012

3 Les équations de Lotka-Volterra pour deux espèces

3.1 Linéarisation

- Considérons maintenant le comportement local de la solution de

$$x' = f(x) \quad \dots(7)$$

Dans un voisinage d'un point $z \in \mathbb{R}^n$.

- κ Si z n'est pas un point d'équilibre, il existe un voisinage U de z dans lequel les orbites peuvent être "transformées" en droites parallèles (topologiquement) par une transformation continue. Ceci découle du fait que le premier terme du développement de Taylor de f autour de z est la constante $f(z) \neq 0$. Cependant,
- κ si z est un point d'équilibre, le comportement local est plus difficile à trouver car le terme constant de $f(z)$ disparaît. Le prochain terme, celui linéaire, est donné par la matrice Jacobienne $Dzf = A$ des dérivées partielles de premier ordre :

L'équation linéaire

$$y' = Ay \quad (8)$$

- ✓ peut être résolue explicitement. Lorsque z est hyperbolique, c'est-à-dire quand toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles non nulles, les orbites de 7 dans les voisinages de z ressemblent à celles de 8 dans les voisinages de 0 localement.
- ✓ Linéarisons maintenant 4. Si z est un point fixe hyperbolique de $x \rightarrow f(x)$, i.e si toutes les valeurs absolues des valeurs propres de Dzf sont différentes de 0 où de 1, alors le comportement local de f est le même que celui de sa linéarisation $x \rightarrow Dzf(x)$.
- ✓ En particulier, si toutes les valeurs propres de Dzf sont dans l'intérieur du cercle unité, alors z est un point fixe asymptotiquement stable.

2012

3.2 Une équation de compétition

- ❖ On aimerait modéliser l'interaction entre deux espèces en compétition. Appelons x et y leurs densités, les taux de croissance r_x et r_y sont des fonctions décroissantes en x et en y respectivement, la compétition sera entre et au sein des espèces. Plus simplement, leur décroissance est linéaire. Cela mène à

...(10)

Avec a et f des constantes positives.

- ✓ Les x - et y -isoclines sont données par

$$a - bx - cy = 0$$

$$d - ex - fy = 0$$

Dans int . Ce sont des droites avec une pente négative.

- ✓ On peut distinguer différents cas :

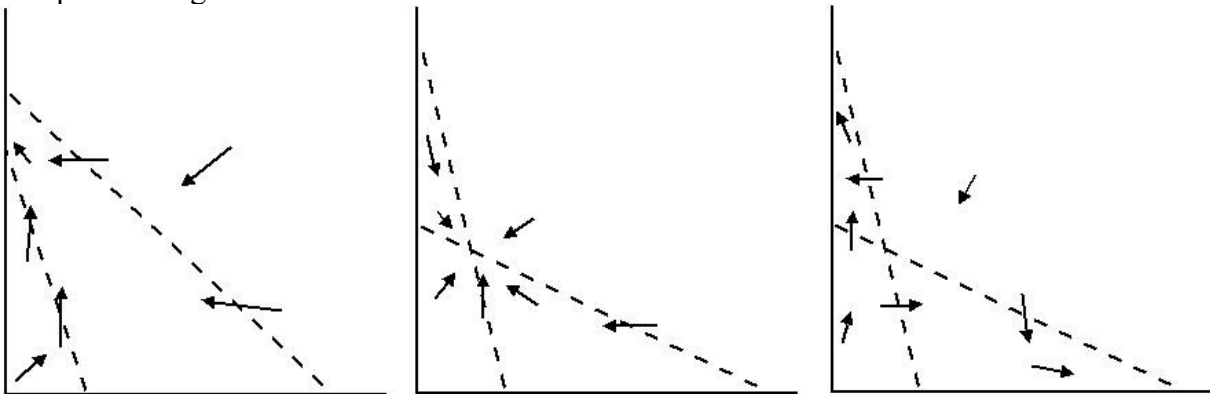


Fig. 4 _ 4.1, 4.2, 4.3

- a) Si les isoclines coïncident, alors int est une constante de mouvement; c'est un cas dégénéré.
- b) Si les isoclines ne s'intersectent pas dans int une des espèces tend à l'extinction (voir Fig. 4.1). L'autre espèce est appelée *dominante* dans ce cas

- ✓ Il reste à considérer le cas d'une unique intersection $\mathbf{F} = (x^*, y^*)$ des isoclines dans int , avec

- ✓ Le Jacobien de (10) en \mathbf{F} est

...(11)

2012

✓ On peut encore distinguer les deux situations suivantes :

a) Si $bf > ce$, alors $af - cd > 0$, $bd - ae > 0$, d'où

Avec les signes de x' et y' dans les régions I, II, III, IV (voir Fig. 4.2), on'en déduit que toutes les orbites dans int convergent vers F . Cela correspond au fait que les valeurs propres de 11 sont négatives. Dans ce cas on parle de coexistence stable.

b) Sinon

Comme on peut voir dans la figure 4.3, toutes les orbites dans la région I convergent vers l'axe des y et celles de la région III vers l'axe des x .

Comme $\det A = (, F$ est un point selle.

4 Résolution numérique des équations différentielles ordinaires et la méthode d'Euler

❖ Dans cette partie on va aborder la résolution numérique du problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires (EDO) en utilisant une technique approximative s'appelant la méthode d'Euler.

Dans tout ce paragraphe, on considère l'équation différentielle

$$y' = f(t, y) \quad \dots(12)$$

Où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue et U est un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

4.1 Problème de Cauchy

- Le problème de Cauchy (aussi appelé problème aux valeurs initiales) consiste à trouver la solution d'une EDO, scalaire ou vectorielle, satisfaisant des conditions initiales

Le problème de Cauchy associé à une EDO du premier ordre s'écrit :

- ✓ Trouver une fonction réelle $y \in C^1(I)$ telle que

où $f(t, y)$ est une fonction donnée à valeur réelle définie sur le produit $S = I] \times]-\infty, +\infty[$ et continue par rapport aux deux variables.

- ✓ Le lemme suivant nous montre que la résolution d'une équation différentielle ordinaire est équivalente à la résolution d'une équation intégrale :

✓ **Lemme 4.1** Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy avec données initiales (t_0, y_0) si et seulement si :

2012

(i) y est continue et $(\forall t \in I) \quad (t \in U) \Rightarrow y(t) \in U$,

(ii) $(\forall t \in I) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

En effet, si y vérifie (i) et (ii) alors y est différentiable et on a $y'(t) = f(t, y(t))$. Inversement, si ces deux relations sont satisfaites, (ii) se déduit par intégration.

4.2 Méthode d'Euler

Définition 4.2 Une méthode numérique pour l'approximation du problème de Cauchy décrit ci-dessus est dite à un pas si $n \geq 0, u_{n+1}$ ne dépend que de u_n . Autrement, on dit que le schéma est une méthode multi-pas (ou à pas multiples).

- On cherche à construire une solution approchée de **12** sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$. On se donne pour cela une subdivision $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_0 + T$.
- Les pas successifs sont notés $h_n = t_{n+1} - t_n, 0 \leq n \leq N - 1$, et on pose $h_{max} = \max(h_0, \dots, h_{N-1})$.

κ La méthode d'Euler (ou méthode de la tangente) consiste en une solution approchée y affine par morceaux comme suit. Soit $y_n = y(t_n)$. On confond la courbe intégrale sur $[t_n, t_{n+1}]$ avec sa tangente au point (t_n, y_n) :

$$y(t) = y_n + (t - t_n) f(t_n, y_n), \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

κ Partant de la donnée initiale y_0 par récurrence en posant

κ La solution approchée y s'obtient graphiquement en traçant pour chaque n les segments joignant les points $(t_n, y_n), (t_{n+1}, y_{n+1})$. On construit de même une solution approchée sur $[t_0 - T, t_0]$.

Exemple 4.3 Le but est d'illustrer cette méthode avec un petit exemple.

α Pour simplifier les notations, on se restreint toujours au cas des équations unidimensionnelles.

- Soit le problème suivant avec condition initiale donnée

$$y' = f(t, y) = ty, \quad y(0) = 1$$

κ Ce problème a comme solution analytique, ceci nous aide à voir la qualité de l'approximation de la solution numérique.

κ Supposons qu'on veut approximer la valeur de $y(0.4)$.

Les Equations De Lotka-Volterra

2012

κ La méthode d'Euler appliquée à notre équation ci-dessus donne

$$y_{n+1} = y_n + h t_n y_n,$$

Avec valeur initiale $y_0 = 1$. Si on pose $h = 0.2$, on a $t_1 = 0.2$ et $t_2 = 0.4$ et y_2 donne l'estimation de $y(0.4)$. Le tableau suivant nous montre les résultats obtenus :

N	t	y	erreur
0	0	1	0
1	0.2	1.02	0.020
2	0.4	1.043	0.043

κ On fait les mêmes calculs avec $h = 0.1$ et on trouve y_4 comme valeur approximée de $y(0.4)$. Les valeurs numériques sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

N	t	y	erreur
0	0	1	0
1	0.1	1.005	0.005
2	0.2	1.010	0.010
3	0.3	1.030	0.016
4	0.4	1.061	0.022

✓ On constate donc que l'erreur produite par l'approximation devient plus petite si on choisit h petit.

κ La méthode d'Euler n'est qu'un exemple parmi beaucoup. On va encore en introduire deux autres, sans aller en détails. Pour plus d'information, on suggère de voir [2].
En prenant les notations de 12.



γ **La méthode du trapèze (ou de Crank-Nicolson)**

- Cette méthode provient de l'approximation de l'intégrale par la formule de quadrature du trapèze.

γ **La méthode de Heun**

2012



- Cette méthode peut être obtenue à partir de la méthode du trapèze en remplaçant f_{n+1} par $f(t_{n+1}, y_n + hf_n)$ dans la méthode du trapèze ci-dessus.

4.3 Systèmes d'équations différentielles ordinaires

- ❖ Considérons maintenant le système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$z' = F(t, z) \quad \dots(13)$$

Où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle donnée et $z \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur solution qui ne dépend de n constantes arbitraires fixées par les n conditions initiales

$$z(t_0) = z_0$$

- Du point de vue numérique, les méthodes pour le cas scalaire peuvent être étendues aux systèmes.

4.3.1 Application au problème de Lotka-Volterra

- Rappelons le système 10 pour le problème de Lotka-Volterra. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ et posons

- ✓ Si on applique la méthode d'Euler, qui a été introduite ci-dessus, on obtient la formule suivante :

$$v_{n+1} = v_n + hF(v_n)$$

5 La simulation numérique avec la méthode d'Euler

2012

❖ On va maintenant présenter les résultats qu'on a obtenus avec les simulations numériques réalisées en Excel (Visual Basic) se basant sur les éléments théoriques expliqués dans les sections précédentes

- La première simulation effectuée concernant la solution du système 1 confirme bien le résultat attendu (des courbes fermées autour du point d'équilibre). Avec des constantes positives $a = 5, b = 3, c = 3, d = 2$ et le point de départ $x_0 = y_0 = 25$ on a obtenu la graphique suivante :

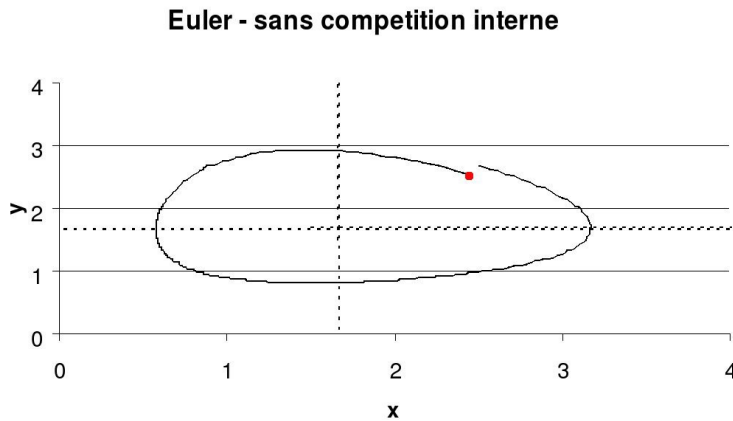


Fig. 5 _

✓ Le point rouge indique le point de départ. La solution est donc périodique autour du point d'équilibre () L'erreur vient de l'approximation obtenue par la méthode d'Euler.

- Dans une deuxième simulation on a vérifié la théorie associée au système des deux espèces (cf. 10). En fonction du choix des constantes on obtient un comportement différent (voir dans 3.2). Pour le cas où les isoclines s'intersectent dans un intervalle où il y a deux résultats possibles, illustrés par les deux graphiques ci-dessous.

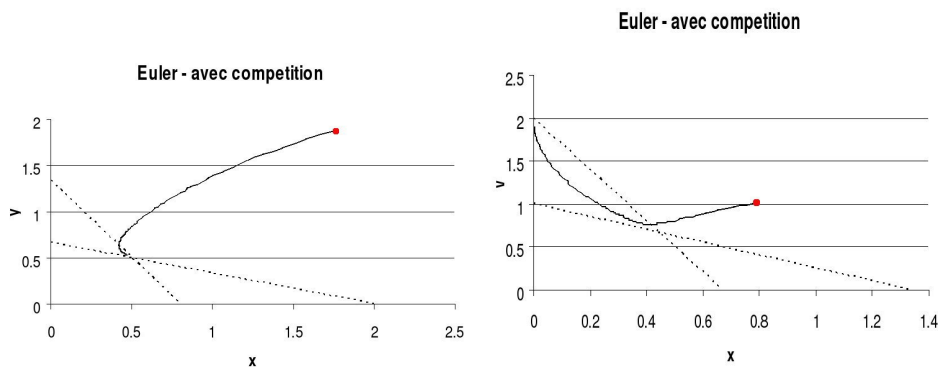


Fig6.1, 6.2

✓ La figure 6.1 nous montre le cas où la solution tombe vers le solution d'équilibre. Avec des constantes $a = 4, b = 5, c = 3, d = 2, e = 1, f = 3$ et le point de départ $x_0 = y_0 = 2$ on obtient pour le point d'équilibre, noté $F = (,)$

Les Equations De Lotka-Volterra

2012

De plus on vérifie :

Car

- ✓ La deuxième possibilité est illustrée par la figure 6.2. Les données dans ce cas sont $a = 4$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 2$, $e = 3$, $f = 1$ et $x_0 = 09$, $y_0 = 11$. On trouve pour le point d'équilibre $F = (,) = ()$

Car

Ceci confirme bien le résultat attendu d'une convergence vers l'axe des y positifs (cf. 3.2).

2012

Références

- [1]. Josef Hofbauer et Karl Sigmund. Evolutionary Games and population Dynamics, Part 1. Cambridge university Press, 1992.
- [2]. Alfio Quateroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri. Méthodes numériques pour le calcul scientifique. Springer-Verlag France, 2000.
- [3]. Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique et équations. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [4]. Lars Eldén et Linde Wittmeyer-Koch. Numerical Analysis - An Introduction. Academic Press, Inc., 1990.

Les Equations De Lotka-Volterra

2012

Résumé

On a étudié le problème de Volterra de base et quelques extensions, ensuite on explique comment résoudre des équations différentielles ordinaires et on décrit une méthode numérique pour la résolution de ces dernières. Enfin on montre les résultats de certaines simulations numériques que nous avons effectuées, concernant le problème de Lotka-Volterra et qui confirment les résultats théoriques décrits dans les sections précédentes.

Abstract

We studied the problem of Volterra base and some extensions, it follows explains how to solve ordinary differential equations and describes a numerical method for solving them. Finally the results of some numerical simulations we have done is shown on the Lotka-Volterra problem and which confirm the theoretical results described in the previous sections.

ملخص

درسنا مشكلة فولتيرا القاعدة وبعض الملحقات، فإنه يتبع يشرح كيفية حل المعادلات التفاضلية العادية ويصف طريقة عددية لحلها. أخيرا وأظهرت نتائج بعض عمليات المحاكاة العددية قمننا به على المشكلة فولتيرا والتي تؤكد النتائج النظرية المذكورة في الأقسام السابقة.