
Conception optimale des structures en béton armé soumises à la pénétration d'ions chlorure

Younes Aoues* — **Emilio Bastidas-Arteaga****

* *Laboratoire de Mécanique de Rouen, Département de Génie Civil et Constructions Durables-INSA de Rouen, Avenue de l'Université 76801, Saint Etienne de Rouvray
younes.aoues@insa-rouen.fr*

** *L'UNAM Université, Université de Nantes-Ecole Centrale Nantes - GeM, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, UMR CNRS 6183, 2 rue de la Houssinière, BP 92208 44322 Nantes cedex 3
Emilio.Bastidas@univ-nantes.fr*

RÉSUMÉ. L'optimisation de la conception des structures en béton armé doit tenir compte des incertitudes sur les dimensions géométriques, les propriétés des matériaux, les chargements et les paramètres des modèles de dégradation. L'optimisation fiabiliste vise à établir le meilleur compromis entre les coûts de la conception et la fiabilité d'un dimensionnement. Toutefois, l'optimisation fiabiliste de la conception des structures en béton armé doit intégrer les phénomènes de dégradation qui altèrent les performances mécaniques durant la durée de vie, telle que la corrosion des armatures due à la pénétration des ions chlorure. Dans cette communication, une méthode d'optimisation fiabiliste dépendant du temps est proposée afin de trouver les dimensions optimales d'une poutre en béton armé soumise à différents environnements corrosifs.

ABSTRACT. The design optimization of RC structures should take into account the uncertainties related to all, material properties, geometry, loading and deterioration. The Reliability-Based Design Optimization (RBDO) is developed to design economical and reliable structures. However, the RBDO should consider the degradation phenomena which can significantly influence the long-term performance, such as steel corrosion induced by chloride ingress. In this paper, a time-variant reliability based design optimization is proposed to find the optimal design of a corroded reinforced concrete bridge girder.

MOTS-CLÉS : Fiabilité, taux de franchissement, optimisation, conception, corrosion

KEYWORDS: Reliability, outcrossing rate, optimization, design, corrosion

1. Introduction

Pour les ouvrages en béton armé, la corrosion des armatures est l'une des principales causes de dégradation conduisant à la réduction des performances mécaniques et à l'augmentation du taux de défaillance. Pour cela, la conception des structures en béton armé doit intégrer ces phénomènes par une modélisation fine des mécanismes de dégradation. Cependant, l'utilisation de ces modèles prédictifs dans une approche purement déterministe limite la qualité de la solution fournie aux concepteurs. En effet, la conception des structures en béton armé doit satisfaire les critères de sécurité, en raison de la nature inhérente des incertitudes sur les propriétés mécaniques du béton et de l'acier, les dimensions géométriques, la profondeur de l'enrobage et les chargements appliqués. Ces incertitudes peuvent conduire à un écart significatif entre les performances réelles et espérées. Pour cela, les approches probabilistes sont souvent proposées pour l'analyse des différentes problématiques liées à la dégradation des structures (Vu *et al.*, 2000).

L'optimisation des structures est souvent appliquée pour minimiser les coûts de la conception en assurant la vérification des contraintes mécaniques. Traditionnellement, l'optimisation des structures en béton armé constitue une démarche déterministe qui s'appuie sur les coefficients partiels de sécurité recommandés dans les codes de dimensionnement, tels que les Eurocodes. Ces coefficients sont appliqués pour tenir compte des incertitudes et pour se prémunir des écarts imprévisibles des performances mécaniques. Néanmoins, l'utilisation de ces coefficients partiels de sécurité dans le processus d'optimisation n'assure pas une solution optimale et fiable car ces coefficients sont calibrés pour de larges classes de structures. La démarche rationnelle est l'optimisation fiabiliste qui consiste à considérer les incertitudes dans le processus d'optimisation en s'appuyant sur une modélisation probabiliste des fluctuations des paramètres d'entrée (Ditlevsen *et al.*, 1996). Cette approche a pour objectif d'établir le meilleur compromis entre les coûts de la conception et la fiabilité d'un dimensionnement (Chateaneuf., 2008). Toutefois, les approches d'optimisation fiabiliste sont souvent développées dans le cadre de la fiabilité indépendante du temps. La probabilité de défaillance évolue en fonction du temps en raison des dégradations subies par la structure. L'obtention d'une information plus précise et plus réaliste de la fiabilité de la structure durant sa durée de vie repose sur la théorie de la fiabilité dépendant du temps, qui s'appuie sur la description de la variabilité temporelle par les processus stochastiques. L'optimisation fiabiliste dépendant du temps vise à rechercher la conception optimale vérifiant une fiabilité cible durant toute la durée de vie de l'ouvrage (Aoues *et al.*, 2009).

Dans ce travail nous proposons d'appliquer la méthodologie de l'optimisation fiabiliste dépendant du temps pour la conception des structures en béton armé soumises à un environnement corrosif. L'objectif de l'application est de proposer un dimensionnement optimal d'une poutre pour chaque condition d'exposition conduisant à la corrosion des armatures longitudinales. Le dimensionnement proposé doit vérifier le niveau de fiabilité cible durant toute la durée de vie souhaitée de l'ouvrage.

2. Corrosion des structures en béton armé due à la pénétration d'ions chlorure

La durabilité des structures en béton armé peut être réduite par des processus de dégradation d'origine environnementale et/ou fonctionnelle comme la pénétration des chlorures. La corrosion des armatures commence quand un niveau seuil de chlorures atteint les aciers de renfort. Lorsque la corrosion se déclenche, la durabilité de la structure est affectée par la réduction de la section transversale des armatures, l'éclatement du béton et la perte d'adhérence entre les aciers et le béton. Le temps d'initiation de la corrosion, t_{ini} est le temps nécessaire pour que cette concentration seuil de chlorures atteigne les armatures. Ce temps dépend principalement des propriétés du béton (coefficient de diffusion, degré de fissuration, ...), des caractéristiques du milieu (concentration des chlorures à la surface, température, humidité, ...) et de l'enrobage (Bastidas-Arteaga *et al.*, 2009). Sur la base de la deuxième loi de diffusion de Fick, le temps d'initiation de la corrosion peut se calculer par (Duracrete, 2000) :

$$t_{ini} = \left(\frac{c^2}{4k_e k_t k_c D_0 (t_0)^n} \left[erf^{-1} \left(1 - \frac{C_{cr}}{C_s} \right) \right]^{-2} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad [1]$$

où c est l'enrobage ; k_e est un facteur qui permet de prendre en compte les caractéristiques de l'environnement ($k_e = 0,924$ pour un environnement défini par une zone de marnage et $k_e = 0,676$ pour un environnement atmosphérique), k_t est un facteur défini en fonction de la méthode utilisée pour déterminer le coefficient de diffusion D_0 ($k_t = 1$) ; k_c est un facteur qui prend en compte le temps de cure ($k_c = 0,8$ à 28j) ; t_0 est le temps pour lequel D_0 a été mesuré ; n est le facteur de vieillissement ($n = 0,36$) ; C_{cr} est la concentration seuil d'ions chlorure pour la dépassivation des aciers ; et $erf(\cdot)$ est la fonction d'erreur ; C_s est la concentration d'ions chlorure à la surface, elle est calculée en % de masse de ciment par : $A_{cs}(e/c) + \epsilon_{cs}$, où la relation eau/ciment (e/c) est prise à 0,45 et les paramètres A_{cs} et ϵ_{cs} sont modélisés par des variables aléatoires (tableau 1). Tenant compte des caractéristiques du béton et des facteurs environnementaux, Duracrete (2000) fournit également des modèles probabilistes pour les variables aléatoires données dans l'équation 1.

Après la dépassivation des aciers, la corrosion des armatures est contrôlée par un processus électrochimique bien connu. La corrosion peut se quantifier en termes d'un taux de corrosion, i_{corr} . Ce paramètre mesure la perte de section transversale des aciers. Cette perte de section peut être généralisée ou par piqûres. On s'intéresse ici à la corrosion par piqûres puisqu'elle est caractéristique pour les ouvrages exposés aux ions chlorure. Dans ce cas, la profondeur de la piqûre d_p est calculée par :

$$d_p(t) = d_0 - 0.0116\alpha \int_{t_{ini}}^t i_{corr}(t) dt \quad [2]$$

où $d_p(t)$ est le diamètre résiduel de la barre à l'instant t , d_0 est le diamètre initial de la barre en mm , α est un coefficient qui quantifie le rapport entre la corrosion par piqûres et l'uniforme et $i_{corr}(t)$ est exprimé en $\mu A/cm^2$. L'équation 2 est utilisé pour déterminer la perte de la capacité portante de l'ouvrage produite par la corrosion.

3. Méthodologie d'optimisation fiabiliste dépendant du temps

La formulation de l'optimisation fiabiliste dépendant du temps (TV-RBDO : *Time-variant Reliability-Based Design Optimization*) vise l'obtention d'une conception équilibrée en réduisant l'espérance du coût total, défini en termes du coût initial et du coût de défaillance (Chateaufort, 2008). Cette approche a l'avantage de piloter la recherche de l'optimum par le contrôle des variables dont l'impact sur le coût total est significatif. Ainsi, le rôle des incertitudes est réduit au cours de la procédure d'optimisation.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \mathbb{E}[C_T] &= C_I(\mathbf{d}) + \mathbb{E}[C_F(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t)] \\ \text{sous } P_{f_c} &= \Pr[G(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t) \leq 0] \leq P_f^{cible} ; \quad \forall t \in [0, T_L] \end{aligned} \quad [3]$$

où \mathbf{X} représente des variables aléatoires et/ou des processus stochastiques, \mathbf{d} est le vecteur des variables d'optimisation, $\mathbb{E}[\cdot]$ symbolise l'opérateur d'espérance mathématique, C_I est le coût initial incluant les coûts de construction, de fabrication et de transport ... etc. C_F est le coût de défaillance dû aux pertes liées aux différents dommages induits par la ruine de l'ouvrage (pertes économiques, pertes humaines, ...). La probabilité de défaillance cumulée P_{f_c} sur l'intervalle de durée de vie $[0, T_L]$ doit être inférieure ou égale à une probabilité admissible notée P_f^{cible} . La fonction de performance définit le domaine de sûreté par $G(\mathbf{d}, \mathbf{x}, t) > 0$ et le domaine de défaillance $G(\mathbf{d}, \mathbf{x}, t) < 0$, où \mathbf{x} sont les réalisations du vecteur des variables aléatoires \mathbf{X} .

3.1. Analyse de fiabilité dépendant du temps

L'analyse de fiabilité dépendant du temps a pour objectif d'estimer l'évolution de la probabilité de défaillance en fonction de l'âge de la structure. Cette approche nécessite la modélisation de la variabilité temporelle par la théorie des processus stochastiques. La probabilité de défaillance cumulée sur l'intervalle de durée de vie $[0, T_L]$ est définie par :

$$P_{f_c}(0, T_L) = \Pr[\exists t \in [0, T_L] \mid G(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t) \leq 0] \quad [4]$$

où P_{f_c} est la probabilité de défaillance cumulée sur l'intervalle de la durée de vie $[0, T_L]$. L'estimation de P_{f_c} s'appuie sur les notions de taux de franchissement et des probabilités de défaillance instantanées (Hagen *et al.*, 1991), tel que :

$$\max_{0 \leq t \leq T_L} [P_{f_i}(t)] \leq P_{f_c}(0, T_L) \leq P_{f_i}(0) + \int_0^{T_L} \nu(t) dt \quad [5]$$

La méthode FORM (*First Order Reliability Method*) (Ditlevsen *et al.*, 1996) permet d'approcher la probabilité de défaillance instantanée P_{f_i} à l'instant t par :

$$P_{f_i} = \Pr[G(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t = t_0)] \approx \Phi(-\beta) \quad [6]$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition normale et β est l'indice de fiabilité de *Hasofer-Lind* (Hasofer *et al.*, 1974). L'estimation de $\nu(t)$ peut être effectuée par l'approche PHI2 (Andrieu-Renaud *et al.*, 2004) donnée par l'équation suivante :

$$\nu(t) = \frac{\Phi_2(\beta(t), -\beta(t + \Delta t); \rho_{GG}(t, t + \Delta t))}{\Delta t} \quad [7]$$

où Δt est le pas de discrétisation, ρ_{GG} est le coefficient de corrélation entre les deux états limites, il est fourni par le produit scalaire des deux vecteurs des cosinus directeurs de l'analyse FORM à l'instant t et à l'instant $t + \Delta t$ respectivement.

3.2. L'approche SOTVRA

La formulation de la TV-RBDO telle que formulée dans l'équation 3 consiste à intégrer la limitation de fiabilité dépendant du temps directement dans les contraintes d'optimisation. Cette formulation exige une analyse de fiabilité dépendant du temps à chaque itération de la procédure d'optimisation pour l'évaluation des contraintes fiabilistes et de la fonction objectif, ainsi elle n'est pas seulement coûteuse en temps de calcul mais peut aussi compromettre la convergence de l'algorithme. Une approche découplée appelée SOTVRA (*Sequential Optimization and Time-Variant Reliability Assessment*) est développée (Aoues, 2009). Dans l'approche SOTVRA, le problème de l'optimisation fiabiliste dépendant du temps (TV-RBDO) est découplé en plusieurs cycles d'optimisation déterministe et d'analyse de fiabilité dépendant du temps. L'approche SOTVRA s'appuie sur les étapes suivantes :

- **a)** l'approximation de la fonction du coût total $E[C_T]$ pour réaliser le processus de l'optimisation déterministe.

$$\min_{\mathbf{d}} E[C_T] = C_I(\mathbf{d}) + C_f \sum_{i=1}^{n+1} \frac{[\tilde{P}_{f_c}^k(\mathbf{d}, \gamma \mathbf{x}_k, t_i) - \tilde{P}_{f_c}^k(\mathbf{d}, \gamma \mathbf{x}_k, t_{i-1})]}{(1+r)^{t_i}} \quad [8]$$

$$\text{sous : } \begin{cases} G(\mathbf{d}, \gamma \mathbf{x}_k, t_0) \leq 0 \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, n_h$$

\tilde{P} est la probabilité de défaillance cumulée calculée lors du cycle précédent, h_j sont des contraintes déterministes, r est le taux d'actualisation, \mathbf{x}_k est le vecteur des valeurs caractéristique des variables aléatoires, γ est le vecteur des coefficients de sécurité calibrés sur la base de $\beta_{t=0}^c$ calculé par l'étape suivante :

- **b)** le calcul de l'indice de fiabilité cible à la conception $\beta_{t=0}^c$ qui tient compte de l'évolution de la fiabilité au cours du temps

$$\beta_{t=0}^c = \beta_{t=T_L}^c + \sum_{i=1}^{n+1} (\Phi^{-1}(P_{f_c}(t_{i-1})) - \Phi^{-1}(P_{f_c}(t_i))) \quad [9]$$

où n est le nombre de discrétisations de l'espace temporel nécessaire pour effectuer l'analyse de fiabilité dépendant du temps. Les coefficients de sécurité γ sont ainsi calibrés par l'étape suivante :

• c) la calibration des coefficients de sécurité sur la base de l'indice de fiabilité cible $\beta_{t=0}^c$ est formulée par :

$$\min_{\gamma} G_j(\mathbf{d}, \mathbf{x}_k, \gamma) \quad \text{sous } \|\Phi^{-1}(F_X(\gamma \mathbf{x}_k))\| = \beta_{t=0}^c \quad [10]$$

4. Application numérique

L'objectif de cette application est de proposer un dimensionnement optimal d'une poutre en béton armé en considérant la corrosion des armatures longitudinales. Les variables d'optimisation sont les moyennes des dimensions géométriques ; la section des armatures A_s , la hauteur h et la largeur b (figure 1). Les dimensions géométriques sont recherchées par la minimisation du coût total incluant le coût initial de construction et le coût dû aux risques de défaillance.

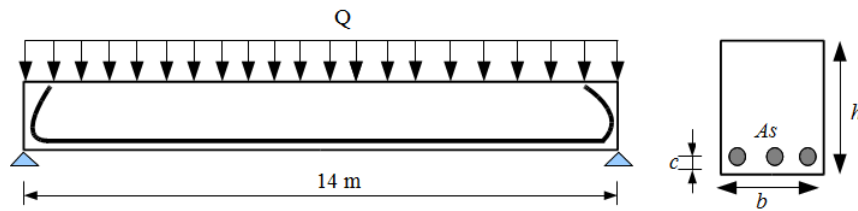


Figure 1. Poutre isostatique de section rectangulaire

La poutre est simplement appuyée et soumise à un chargement d'exploitation réparti Q , modélisé par un processus Gaussien de moyenne $\mu_Q = 35 \text{ kN/m}$ et de coefficient de variation de 0,25. La fonction d'autocorrélation de ce processus stochastique est définie par l'équation $\rho_{SS}(t_1, t_2) = \exp\left[-(t_1 - t_2/L_c)^2\right]$, où L_c est la longueur de corrélation. La figure 2 montre quelques trajectoires du processus gaussien Q pour 3 longueurs de corrélation. Dans la suite de l'application, la valeur prise pour L_c est d'une année.

Le dimensionnement doit vérifier le niveau de fiabilité cible $\beta^{cible} = 3,8$ durant toute la durée de vie souhaitée de 100 ans. Nous supposons que la structure peut être placée dans l'un des deux environnements suivants :

- Un environnement défini par une zone de marnage caractérisée par un taux de corrosion de moyenne $i_{corr} = 3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$.
- Un environnement atmosphérique caractérisé par un taux de corrosion de moyenne $i_{corr} = 1,5 \mu\text{A}/\text{cm}^2$.

Variable et l'unité	Moyenne	CV	Distribution
f_c (MPa)	38	0,15	Lognormale
f_y (MPa)	592	0,10	Lognormale
ρ_b	25	0,10	Normale
c (mm)	40 / 60	0,1	Normale
C_{cr} % masse de ciment	0,5	0,15	Lognormale
D_0 (mm ² /an)	300	0,15	Normale
A_{cs} marnage + éclab. (sans unité)	7.8	0,14	Normale
A_{cs} atmosphérique (sans unité)	2.6	0,17	Normale
ϵ_{cs} marnage + éclab. (sans unité)	0	$\sigma = 1,105$	Normale
ϵ_{cs} atmosphérique (sans unité)	0	$\sigma = 0,405$	Normale
i_{corr} ($\mu\text{A}/\text{cm}^2$) atmosphérique	1,5	0,30	Lognormale
i_{corr} ($\mu\text{A}/\text{cm}^2$) marnage + éclab.	3	0,30	Lognormale
α (sans unité)	5,65	0,22	Gumbel

Tableau 1. Description statistique des variables aléatoires

La résistance en traction de l'acier f_y et la résistance en compression du béton f_c sont modélisées par des variables aléatoires. Les dimensions géométriques h , b et A_s sont des variables aléatoires de coefficient de variation de 3%, telles que leurs moyennes μ_h , μ_b , μ_{A_s} sont des variables d'optimisation. Le tableau 1 présente les caractéristiques statistiques des variables aléatoires considérées. Le choix des variables aléatoires du modèle de corrosion s'appuie sur des valeurs trouvées dans la littérature (Duracrete, 2000). La fonction d'état limite est définie par la résistance à la flexion de la poutre, par :

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{x}, t) = A_s(t)f_y(h-c) \left(1 - \frac{0,59 A_s(t) f_y}{b(h-c)f_c} \right) - M_a(Q, h, b, \rho_b, t) \quad [11]$$

où c est l'enrobage, M_a est le moment appliqué et $A_s(t)$ est la section des armatures longitudinales à l'instant t , elle est déterminée en utilisant le modèle de corrosion exposé ci-dessus. L'approche d'optimisation fiabiliste SOTVRA est appliquée pour trouver les dimensions optimales : la hauteur h , la largeur b , la section des armatures A_s . Le point de départ de l'algorithme d'optimisation est $\mu_h^0 = 50 \text{ cm}$, $\mu_b^0 = 30 \text{ cm}$, $\mu_{A_s}^0 = 64,32 \text{ cm}^2$. L'analyse de fiabilité dépendant du temps est effectuée par un pas de temps de $0,5L_c$, cette valeur permet de garantir une bonne précision (Aoues, 2009). Le taux d'actualisation r est fixé à 2% et le coût de défaillance est pris égal à $10^5 \times C_I$, où C_I est le coût initial de la poutre estimé à partir du coût des armatures, du béton et de la mise en œuvre.

Les résultats du tableau 2 montrent les conceptions optimales de la poutre pour les deux environnements respectifs. En effet, les dimensions optimales de la poutre soumise à une zone de marnage sont plus élevées que celle soumise à un environnement atmosphérique. De plus, un enrobage moyen de 4 cm , tel que recommandé dans les

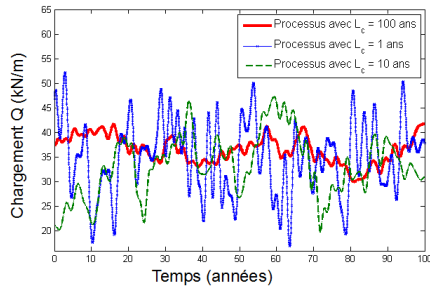


Figure 2. Trajectoires du processus stochastique Q pour quelques valeurs de L_c

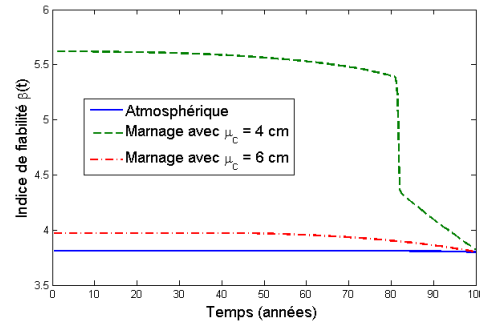


Figure 3. Profils de l'indice de fiabilité des conceptions optimales

	h (cm)	b (cm)	A_s (cm ²)	C_I (k€)	$\mathbb{E}[C_f]$ (k€)	$\mathbb{E}[C_T]$ (k€)	$\beta(t = 100 \text{ ans})$
Marnage avec $\mu_c = 4 \text{ cm}$	74,18	55,63	89,12	4,53	4,72	9,26	3,81
Marnage avec $\mu_c = 6 \text{ cm}$	69,71	52,29	76,25	4,04	2,94	6,99	3,80
Atmosphérique $\mu_c = 4 \text{ cm}$	67,48	50,61	74,04	3,90	2,15	6,05	3,80

Tableau 2. Conceptions optimales de la poutre destinée pour les deux environnements

Eurocodes pour les classes d'exposition XD1, XD2, XD3 parait suffisant pour obtenir une variation faible de l'indice de fiabilité dans l'intervalle $[0, 100 \text{ ans}]$.

La figure 3 montre les profils de l'indice de fiabilité des conceptions optimales de la poutre soumise à un environnement atmosphérique, zone de marnage avec un enrobage moyen de 4 cm et avec un enrobage moyen de 6 cm ,respectivement. Le profil de l'indice de fiabilité $\beta(t)$ de la poutre soumise à un environnement atmosphérique subit une légère variation, l'indice de fiabilité varie entre $\beta(t = 0) = 3,81$ et $\beta(t = 100 \text{ ans}) = 3,80$. En revanche, le profil de l'indice de fiabilité de la poutre soumise à une zone de marnage avec un enrobage moyen de 4 cm subit une variation importante, où l'indice de fiabilité varie entre $\beta(t = 0 \text{ an}) = 5,61$ et $\beta(t = 100 \text{ ans}) = 3,81$. Pour un enrobage moyen de 6 cm, l'indice de fiabilité $\beta(t)$ de la conception optimale correspondante varie légèrement entre $\beta(t = 0) = 3,96$ et $\beta(t = 100 \text{ ans}) = 3,80$. De plus, le coût de construction correspondant est inférieur de 10% au coût de construction d'une poutre avec un enrobage moyen de 4 cm.

5. Conclusion

La recherche de la conception optimale doit tenir compte des dégradations subies qui peuvent augmenter le taux de défaillance et entraîner un coût supérieur aux économies escomptées. Dans ce travail, la recherche du dimensionnement optimal d'une poutre en béton armé dans le cadre de la fiabilité dépendant du temps a été exploré. Le dimensionnement optimal d'une poutre soumise à une zone de marnage est différent de celui d'une poutre soumise à un environnement atmosphérique. L'application a montré le rôle important de l'enrobage dans la réduction des coûts de construction et la variation de l'indice de fiabilité durant la durée de vie de la structure. Une perspective de ce travail est de rechercher l'enrobage optimal minimisant la fonction du coût total et permettant de vérifier une fiabilité cible durant la durée de vie souhaitée.

6. Bibliographie

- Andrieu-Renaud C., Sudret B., Lemaire M., « The PHI2 method : a way to compute time-variant reliability », *Rel. Eng. & Sys. Saf.*, vol. 84, n° 1, p. 75-86, 2004.
- Aoues Y., Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2009.
- Aoues Y., Bastidas-Arteaga E., Chateauneuf A., « Optimal design of corroded reinforced concrete structures by using time-variant reliability analysis. », *In : 10th International Conference on Structural Safety and Reliability ICOSSAR*, Osaka, p. 1580-87, 2009.
- Bastidas-Arteaga E., Schoefs F., Chateauneuf A., Sánchez-Silva M., Capra B., « Probabilistic evaluation of the sustainability of maintenance strategies for RC structures exposed to chloride ingress », *In : proceedings of Fourth International Forum on Engineering Decision Making (IFED) : Long-term Policy Makings for Sustainable Society*, Kanagava, p. 1-16, 2009.
- Chateauneuf. A., *Principles of reliability-based design optimization*, In Y. Tsompanakis & N.D. Lagaros & M. Papadrakakis (eds), *Structural Design Optimization Considering Uncertainties*. Taylor & Francis, 2008.
- Ditlevsen O., Madsen H. O., *Structural reliability method*, New York : John Wiley and Sons, 1996.
- Duracrete, Statistical quantification of the variables in the limit state functions., contract BRPR-CT95-0132, Project BE95-1347 n° Report No. BE95-1347/R7, The European union, BriteEuRam III, 2000.
- Hagen O., Tvedt L., « Vector Process Out-Crossing as Parallel System Sensitivity Measure », *J. Eng. Mech., ASCE*, vol. 117, n° 1, p. 2201-20, 1991.
- Hasofer A., Lind N., « An Exact and Invariant First Order Reliability Format », *J. Eng. Mech., ASCE*, vol. 100, n° 1, p. 111-121, 1974.
- Vu K., Stewart M., « Structural reliability of concrete bridges including improved chloride-induced corrosion models », *Structural Safety*, vol. 22, n° 1, p. 313-333., 2000.