
Analyse probabiliste de la consolidation couplée d'un sol argileux en utilisant Subset

Youcef HOUMADI^{1,2} — Abdelmalek BEKKOUCHE²

¹GeM, UMR CNRS 6183, Univ-Nantes, France. & Univ-Saida, Algérie.

²RISAM, Université Aboubekr Belkaid Tlemcen, BP 230, Algérie.

youcef.houmadi@univ-nantes.fr ; a_bekkouche@mail.univ-tlemcen.dz

RÉSUMÉ. La probabilité de rupture (P_f) d'un problème est généralement calculée à l'aide de la méthode de simulation de Monte Carlo (MCS). Cette méthode est très gourmande en temps de calcul, surtout lorsqu'il s'agit de problèmes ayant des P_f faible. Pour affronter à ce problème et comme alternative à MCS, l'approche de simulation par Subset a été appliquée à la consolidation couplée en deux dimensions (2D). Cette méthode a pour objectif d'effectuer une analyse probabiliste de la consolidation couplée d'un sol hétérogène dont le module de Young (E) est spatialement variable. Dans cette étude, le champ aléatoire a été discrétisé en un nombre fini de variables aléatoires à l'aide de l'expansion de Karhunen-Loeve (KL). Les résultats probabilistes ont montré que P_f calculée par la simulation par Subset est très proche à celui calculé par MCS, mais avec une réduction importante du nombre de simulations (10^3 simulations au lieu de 10^5). L'effet des distances d'autocorrélation horizontale et verticale L_x et L_y de E sur P_f a montré que l'augmentation des L_x et L_y augmente P_f pour les deux cas isotrope et anisotrope, aussi P_f est plus sensible à L_y qu'à L_x . L'effet du $COV(E)$ sur P_f indique que l'augmentation du $COV(E)$ augmente P_f .

ABSTRACT. The probability of failure (P_f) of a problem is usually calculated using the Monte Carlo simulation method (MCS). This method is very time-consuming, especially when the P_f is small. To overcome this problem and as an alternative to MCS, the Subset simulation approach was applied on to study the coupled two-dimensional (2D) consolidation. This method aims at performing a probabilistic analysis of the consolidation coupled of a heterogeneous soil with spatially varying Young's modulus (E). In this study, the random field has been discretized into a finite number of random variables using the Karhunen-Loeve expansion (KL). The probabilistic results have shown that P_f calculated by subset simulation is very close to that calculated by MCS, but with a very substantial reduction in the number of simulations (103 simulations instead of 105). The effect of autocorrelation horizontal and vertical distances L_x and L_y of E on P_f has shown that increasing the distance of autocorrelation increases P_f for both isotropic and anisotropic. Also this study has shown that P_f is more sensitive to L_y than L_x . Finally the effect of $COV(E)$ on P_f indicates that the increase in $COV(E)$ increases the probability of failure.

MOTS-CLÉS : Simulation par Subset, MCS, consolidation couplée, variabilité spatiale.

KEYWORDS: Subset simulation, MCS, Coupled consolidation, spatial variability.

1. Introduction

L'effet de l'incertitude des paramètres du sol et de la surcharge sur le tassement de consolidation a été étudié par plusieurs auteurs. Certains chercheurs (Freeze 1977, Chang 1985, Darrag et Tawil 1993) ont examiné les paramètres incertains comme des variables aléatoires. D'autres ont modélisé les paramètres incertains par des champs aléatoires (Badaoui et al. 2007, Huang et al. 2010). Il convient de souligner que la plupart de ces études utilisent la simulation Monte Carlo (MCS) pour calculer la fonction de distribution de probabilité (PDF) de la réponse du système ou de la probabilité de rupture (P_f). Cette méthode est très gourmande en temps de calcul, surtout lorsqu'il s'agit de problèmes ayant des P_f faible. Pour affronter à ce problème et comme alternative à MCS, l'approche de simulation par Subset (Au et Beck, 2001) dont l'algorithme Metropolis-Hasting modifié par (Santoso et al. 2011) a été appliqué à une étude de consolidation couplée. L'objectif de cette méthode est d'effectuer une analyse probabiliste de consolidation couplée 2D d'un sol hétérogène dont le module de Young (E) est spatialement variable.

Les résultats probabilistes ont montré que la P_f calculée par la simulation par Subset est très proche de celui calculé par MCS, toutefois, une réduction significative du nombre de simulations a été utilisée. Une étude paramétrique de l'effet de la variabilité de E sur P_f a été présentée et discuté ainsi d'autres résultats.

2. Simulation par Subset

La simulation par Subset a été proposé par (Au et Beck, 2001) pour calculer les faibles probabilités de rupture dans le cas où les différents paramètres incertains sont modélisés par des variables aléatoires. L'idée de base de cette simulation est d'exprimer la probabilité de rupture P_f comme un produit des probabilités conditionnelles des différentes étapes. De ce fait l'évaluation de P_f nécessitera un nombre de calculs beaucoup moins important. Le principe est décrit ci-après.

Soit $F_1 \supset \dots \supset F_i \supset \dots \supset F_m = F$ avec m événements inclusivement ordonnés tels que, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $F_i = \{g(\xi) \leq 0\}$, où $\xi_i = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est le vecteur n -dimensionnel des variables aléatoires de base du problème, g_i est une fonction mesurable (Fonction de performance), F_m est l'évènement le plus faible de la famille $\{F_1, \dots, F_m\}$, car $P(F_m) \leq P(F_{m-1}) \leq \dots \leq P(F_1)$, il est choisi pour coïncider avec l'évènement de rupture F du problème, c.-à-d. $F_m = F$.

On a : $F = \prod_{i=1}^m F_i$, aussi de la formule des probabilités conditionnelles il résulte que :

$$P_f = P(F_1) \prod_{i=1}^{m-1} P(F_{i+1}|F_i) \quad [1]$$

La probabilité $P(F_1)$ est la plus grande de toutes les probabilités $P(F_i)$, elle est calculée en utilisant une procédure de Monte-Carlo standard.

Quant aux probabilités conditionnelles $\{P(F_{i+1}|F_i); i = 1, \dots, m-1\}$, elles sont estimées en utilisant une méthode basée sur le principe des Chaines de Markov et Monte Carlo (Monte-Carlo Markov Chain, MCMC), baptisé l'algorithme de Metropolis-Hastings. Pour plus de détails, l'algorithme de Metropolis-Hastings a été détaillé et modifiés par Santos et al. (2011).

4. Théorie de consolidation de Biot en 2D

La théorie de consolidation de Biot (Biot, 1956) tient en compte le couplage entre l'eau et les grains solides (matériau poreux élastique). L'eau interstitielle est couplée avec les grains solides par les conditions d'équilibre et aussi de continuité en supposant un état de déformation plane et des petites déformations. De la continuité, et en supposant l'incompressibilité de l'eau et en introduisant la loi de Darcy dans l'équation de continuité, on obtient:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + k_x \left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} \right) + k_y \left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{M} \frac{\partial u_w}{\partial t} = 0 \quad [2]$$

Où k_x et k_y sont respectivement le coefficient de perméabilité horizontal et vertical. Dans cette étude $k = k_x = k_y$. Avec k est le coefficient de perméabilité isotrope. Il est lié à la conductivité hydraulique k_h par l'expression $k = k_h / \gamma_w$. M est le module de Biot et α est le coefficient de Biot.

Les équations d'équilibre intégrées dans l'équation de continuité et l'équation [2] représentent les deux équations de "Biot" 2D pour un matériau poro-élastique.

4. Expansion de Karhunen-Loeve (K-L)

La méthode d'expansion de Karhunen-Loève (K-L) donne une bonne approximation du champ aléatoire $H(X, \theta)$. Si μ est la moyenne du processus, donc ce dernier est représenté comme suit :

$$H(X, \theta) = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i \xi_i(\theta) \quad [3]$$

Où $\xi_i(\theta)$: variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance unitaire; avec θ indique la nature aléatoire de la quantité correspondante, X est les

coordonnées spatiales dans l'espace physique ; φ_i et λ_i sont respectivement les fonctions propres et les valeurs propres de la fonction d'autocorrélation.

Le champ approximatif aléatoire est défini en tronquant la série ordonnée (prendre la valeur M au lieu de ∞). Le choix du nombre M dépend fortement de la précision souhaitée et aussi de la fonction d'autocorrélation du champ aléatoire ;

Dans ce chapitre, une fonction de covariance exponentielle a été utilisée. L'expression de cette fonction est donnée comme suit :

$$C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_y}\right) \quad [4]$$

où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées de deux points donnés dans un domaine D ; σ est l'écart type du champ aléatoire ; L_x et L_y sont respectivement les distances d'autocorrélation horizontale et verticale.

La variance de l'erreur moyenne de l'approximation est obtenue par le calcul de la variance $H(x, \theta)$ moins le champs $H(x, \theta)$ tronqué à la valeur M.

5. Application

5.1. Modèle déterministe

L'application traitée dans cette section est une charge uniforme q reposée sur une couche argileuse hétérogène de 15 m de longueur et de 10 m d'épaisseur (figure.1). L'objectif est de calculer la probabilité pour dépasser un tassement admissible, cette probabilité est appelée la probabilité de rupture. Le paramètre de sol incertain dans cette étude est le Module de Young (E). Ce paramètre a été considéré comme un champ aléatoire log-normale avec une valeur moyenne $\mu=20\text{MPa}$ et un coefficient de variation $\text{COV}(E)=20\%$. Dans cette étude la fonction de performance utilisée pour calculer la probabilité de rupture est définie comme suit : $G = V_{adm} - V$, où V_{adm} est le tassement admissible et V est le tassement moyen. Le modèle déterministe utilisé pour calculer le déplacement vertical V est basé sur le code en différences finis $FLAC^{3D}$.

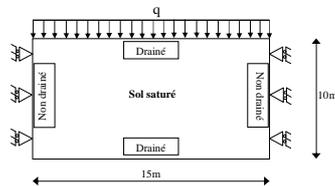


Figure 1. Profil de sol étudié

E	v	k_h	q
[MPa]		[m/s]	[kPa]
20	0.3	10^{-9}	100

Tableau 1. Données utilisées

5.2. Analyse probabiliste

5.2.1. Taille optimale de l'expansion de K-L

Comme mentionné précédemment, la précision du champ aléatoire approximé dépend de la taille de l'expansion KL (c.-à-d. M). La figure 2a présente l'évolution des valeurs propres de la fonction de covariance en les traçant dans un ordre décroissant. La valeur propre s'annule lorsque le nombre de $M \approx 800$ termes à l'exception du cas de ($L_x = L_y = 1m$) où $M \approx 1000$ termes ont été jugé nécessaire de discrétiser le champ aléatoire avec précision. Pour confirmer ce résultat, l'estimation de l'erreur moyenne de variance du champ aléatoire approximé a été présentée dans la figure 2b. Cette figure indique que l'estimation de l'erreur moyenne de variance diminue avec l'augmentation du nombre des termes de l'expansion KL. De cette figure, pour $M = 800$ termes, l'estimation de l'erreur moyenne de variance est inférieure à 6%, sauf pour le cas de $L_x = L_y = 1m$ où $M \approx 1000$ termes ont été nécessaires pour obtenir une erreur moyenne de variance de 12%. Pour les calculs probabilistes présentés dans ce chapitre, le nombre des termes de l'expansion KL sera réglé à $M = 1000$ termes pour le cas $L_x = L_y = 1m$ et $M = 800$ termes pour les autres cas.

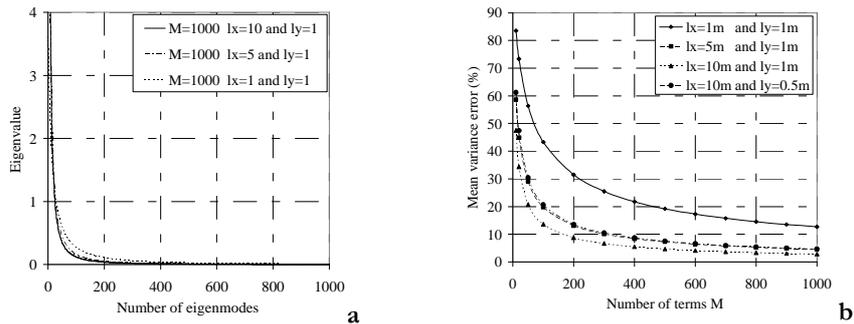


Figure 2. Choix de la taille optimal de l'expansion KL

a. Evolution des valeurs propres en les traçant dans un ordre décroissant **b.** Erreur moyenne de variance en fonction du nombre M

5.2.2. Comparaison entre la simulation par Subset et celle de Monte Carlo (MCS)

Dans cette section, les probabilités de rupture calculée à chaque niveau de la méthode de simulation par Subset ont été comparées à ceux obtenus par la méthode MCS. Pour effectuer cette comparaison, un champ aléatoire avec $L_x = 10m$ et $L_y = 1m$ (appelé ci-après le calcul de référence) a été étudié. Pour chaque niveau j de la simulation par Subset, le seuil de rupture correspondant à C_j a été calculé et présentée dans le tableau (2) pour différentes valeurs du nombre de réalisations N .

Fonction de performance C_j pour chaque niveau j	Nombre de réalisation à chaque niveau (N_s)	
	150	200
C_1	0.0087	0.0085
C_2	0.0059	0.0050
C_3	0.0033	0.0026
C_4	0.0013	0.00033
C_5	0	0

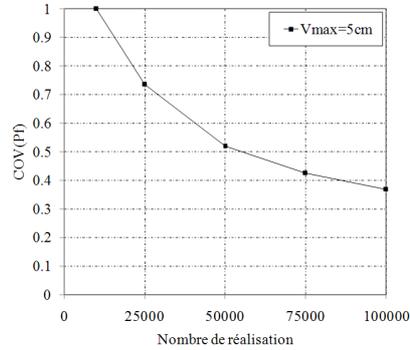


Tableau 2. Evolution de la fonction de performance avec les différents niveaux de Subset et avec N_s pour chaque niveau

Figure 3. Effet du nombre de réalisations sur $COV(P_f)$ calculé par MCS ($V_{max}=5cm$)

Ce tableau indique que le seuil de rupture diminue avec les niveaux successifs jusqu'à atteindre zéro au dernier niveau. Cela signifie que les réalisations générées par la procédure proposée avec succès les progrès vers la surface d'état limite de $G=0$, ce qui indique la validité de la procédure proposée. Pour confirmer à nouveau la validité de l'approche actuelle, une comparaison avec la méthode MCS a été réalisée. Le nombre de réalisations de MCS devrait être suffisant pour un calcul rigoureux de la probabilité de rupture. La précision de MCS peut être estimée en calculant le coefficient de variation de la probabilité de rupture comme suit:

$$COV_{P_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{N \times P_f}} \quad (12)$$

En utilisant cette équation, le coefficient de variation COV_{P_f} de la probabilité de rupture a été calculé et présentée dans la figure. 3. Il a été constaté qu'il diminue avec l'augmentation du nombre de réalisations. Il atteint une valeur du coefficient de variation COV de 36% lorsque le nombre N est égal à 100.000 réalisations. Ainsi, ce nombre N réalisations a été utilisé pour calculer les probabilités de rupture par MCS.

La comparaison entre la méthode de simulation par Subset et la méthode MCS est présentée dans la figure. 4. Dans cette figure, des valeurs différentes du nombre de réalisations (N_s) à chaque niveau de la simulation ont été considérés comme Subset. La probabilité de rupture à tous les niveaux intermédiaires (par exemple au niveau j) est calculée par simulation par Subset en utilisant l'équation. 1. Toutefois, pour calculer la probabilité de rupture au niveau j en utilisant MCS, la fonction de performance doit être égale à C_j . Dans ce cas, le domaine de rupture est défini comme $G \leq C_j$ et dans le domaine de sécurité est défini comme $G > C_j$. La probabilité de rupture peut être calculée comme suit : $P(F_i) = \sum_{k=1}^{N_s} I_{F_i}(S_k)$, avec $k=1$ à N_s .

où $I_f=1$ si s_k est situé dans le domaine de rupture F_j et vice-versa. La figure 4 montre que, pour le cas où $N_s = 150$ réalisations (Figure. 4a), la probabilité de rupture calculée selon la méthode proposée à chaque niveau est différente de celle calculé par MCS. Cette différence est importante pour $N_s=150$ (par niveau) par contre cette différence est négligeable dans la figure. 4b. ceci est due au nombre de réalisation $N_s=200$ (par niveau) qui est suffisant pour calculer probabilité de rupture en question. Il est à noter que Cinq (05) niveau de la simulation par Subset on été jugé nécessaires pour arriver à la surface d'état limite $G = 0$ comme on le voit dans le tableau 2. Par conséquent 1000 réalisations ont été nécessaires pour calculer la probabilité de rupture finale. De la figure. 4, on peut conclure que les 100.000 réalisations nécessaires selon la méthode du MCS peuvent être réduites à seulement 1000 réalisations en appliquant la procédure proposée fondée sur une méthodologie de la simulation par Subset.

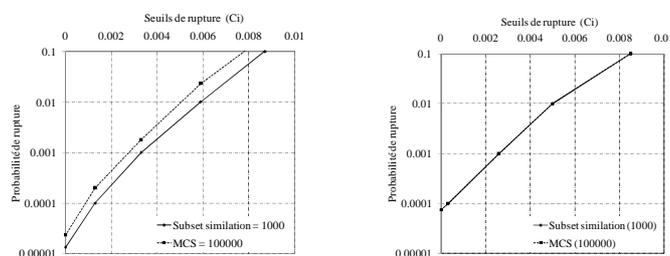


Figure 4. Comparaison entre la probabilité de rupture obtenus dans chaque niveau de la simulation par Subset et celui calculé par la simulation de Monte Carlo ($V_{max}=5cm$)

5.2.3. Etude paramétrique

Dans cette section, une étude paramétrique a été effectuée pour déterminer l'effet de la variabilité du sol (coefficient de variation et les distances d'autocorrélation L_x et L_y du champ aléatoire de E) sur la probabilité de rupture (P_f). La figure 5 présente l'effet de la distance d'autocorrélation sur P_f pour un cas d'un champ aléatoire isotrope ($L_x=L_y$). Cette figure montre aussi la P_f correspondante à un sol homogène.

La figure 5 indique que l'augmentation de la distance d'autocorrélation augmente P_f . Toutefois, diminue le taux de majoration pour les distances d'autocorrélation importantes. C'est parce que le champ aléatoire tend vers le cas d'un sol homogène pour les grandes valeurs des distances d'autocorrélation ($L_x = L_y > 100$). Dans ce cas, le déplacement vertical de la charge uniformément répartie a été jugé trop proche de celui obtenu lors de l'étude d'un sol homogène. Pour des distances d'autocorrélation plus petites, on obtient une hétérogénéité du sol qui se traduit par une variabilité de module de Young sous la charge q . Dans ce cas, la charge q est supportée par certaines zones de fortes valeurs de E et d'autres zones de faibles valeurs de E .

Puisque dans cette étude le déplacement vertical moyen a été calculé, ses valeurs seront plus faible que si on calcul les valeurs maxima et donc des faible P_f .

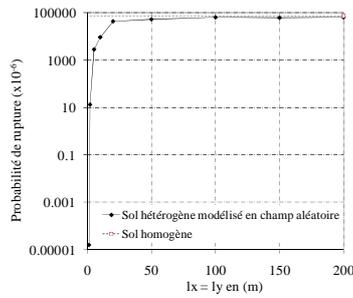


Figure 5. Effet de la distance d'autocorrélation sur la probabilité de rupture dans le cas d'un champ aléatoire isotrope ($V_{max}=5cm$)

Afin d'étudier l'effet de l'anisotropie du champ aléatoire E, la probabilité de rupture a été tracée fonction de la distance d'autocorrélation verticale et horizontale dans les figures. 6 et 7, respectivement.

La figure 6 montre que la probabilité de rupture cesse d'augmenter lorsque les valeurs de $L_y \geq 10m$. Cette observation peut être expliquée par l'épaisseur de la couche du sol étudié qui est égale à 10m, donc lorsque L_y dépasse l'épaisseur de la couche étudiée, la probabilité de rupture devient presque constante.

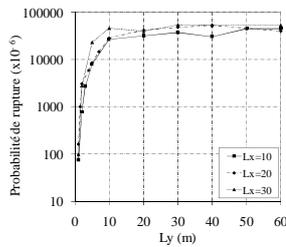


Figure 6. Effet de L_y sur P_f pour différentes valeurs de L_x ($V_{max}=5cm$)

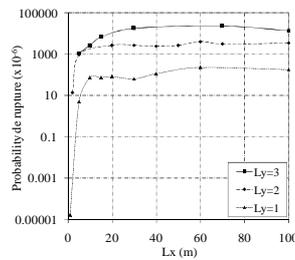


Figure 7. Effet de L_x sur P_f pour différentes valeurs de L_y ($V_{max}=5cm$)

La figure 7 montre que la probabilité de rupture cesse d'augmenter lorsque le rapport de la L_x et L_y est supérieur ou égal à 10. Cette observation peut être expliquée comme suit: La faible valeur de la distance d'autocorrélation (L_x ou L_y) induit une grande hétérogénéité du sol qui se traduit par une grande variabilité du E, sous la charge q. Cette variabilité conduit à un déplacement vertical moyen faible et par conséquent une probabilité de rupture plus petite. Par contre l'augmentation de

la distance d'autocorrélation augmente le déplacement vertical moyen et par conséquent la probabilité de rupture augmente aussi.

D'autre part, lorsque la distance d'autocorrélation est très grande dans la direction verticale ou horizontale, le problème devient similaire à celle du champ aléatoire unidimensionnel (1D), pour lequel la probabilité de rupture est plus petite que celui en deux dimensions pour un cas isotrope. Enfin, les figures 6 et 7 montrent que la distance L_y a un impact sur la probabilité de rupture plus important que celui de la distance L_x . Ceci est expliqué par le rôle important joué par l'épaisseur de la couche de sol sur le déplacement vertical contrairement à la largeur du massif de sol.

L'effet du COV(E) sur la probabilité de rupture a été présenté dans le tableau 3. Ce tableau indique que l'augmentation du coefficient de variation de E augmente la probabilité de rupture. Il est à noter que l'augmentation du coefficient de variation du module de Young de 10% à 20% augmente la probabilité de rupture d'une manière très importante (environ 100%). Par contre cette augmentation n'est pas très importante en allant de 20% à 30%. Ce qui explique que la variabilité du module de Young comme champs aléatoire a un impact important sur P_f d'où l'importance des études en tenant compte la variabilité spatiale des propriétés des sols.

COV(E) (%)	Probabilité de rupture		Nombre de simulation
	Champ aléatoire anisotrope ($L_x = L_y/10 = 10\text{m}$)		
15	7.05×10^{-9}		1800
20	7.40×10^{-5}		1000
25	1.84×10^{-3}		600
30	4.85×10^{-3}		600

Tableau 3. Effet du coefficient de variation du Module de Young COV(E) sur la probabilité de rupture ($V_{\max} = 5\text{cm}$)

Il est à noter que le nombre de simulation diminue avec l'augmentation du COV(E). Ceci est dû à la variabilité importante du tassement en surface pour les grandes valeurs du COV(E), donc les valeurs du tassement correspondantes aux valeurs mères pour passer d'un niveau à un niveau suivant de simulation par Subset sont grande (c.-à-d. la fonction d'état limite G tend vers 0). Cependant, le nombre de niveau soit plus petit et par conséquent, le nombre de simulation soit plus faible et vis versa pour les faibles valeurs de COV(E).

6. Conclusion

La probabilité de rupture P_f calculée avec la méthode de simulation par Subset a été comparée avec celle calculé par MCS. S'est avéré que les deux résultats sont très proches avec une réduction importante dans le nombre de réalisation autrement dit un temps de calcul très réduit (1000 calculs déterministe au lieu de 100000 calculs).

L'étude paramétrique effectuée pour analyser l'effet des distances d'autocorrélation L_x et L_y du module de Young a montré que l'augmentation des distances d'autocorrélation augmente la probabilité de rupture pour les deux cas isotrope et anisotrope. Pour des distances autocorrélation grande, la probabilité de rupture a été jugée trop proche de celle d'un sol homogène. Aussi cette étude paramétrique a montré que la probabilité de rupture est plus sensible à L_y qu'à L_x .

Finalement, l'étude de l'effet du COV(E) sur la probabilité de rupture a montré que la diminution du COV(E) réduit la probabilité de rupture d'une manière très importante. D'un autre coté, l'augmentation du COV(E) augmente la probabilité de rupture mais avec un taux plus faible que dans le cas de la diminution du COV(E).

Bibliographie

- Au SK., Beck JL., « Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation », *Prob. Engrg. Mech.* 2001, 16, p. 263-277.
- Badaoui M., Nour A., Slimani A., and Berrah MK., « Consolidation statistics investigation via thin layer method analysis », *Transport in Porous Media*, 67, 2007, 69-91.
- Baecher GB., Christian JT., « *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering* », John Wiley and Sons, London and New York, 2003, p. 605.
- Biot, MA., « General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material », *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 78, 1956, p. 91-96.
- Chang CS., « Uncertainty of one-dimensional consolidation analysis », *Journal of Geotechnical Engineering*, 111(12), 1985, p. 1411-1424.
- Darrag AA., and Tawil MA., « The consolidation of soils under stochastic initial excess pore pressure », *Applied Mathematical Modelling*, 17, 1993, p. 609-612.
- Freeze R. A. « Probabilistic one-dimensional consolidation », *ASCE, Journal of the Geotechnical Engineering division*, 103(GT7), 1977, p. 725-741.
- Huang J., Griffiths D.V., and Fenton G.A., « Probabilistic analysis of coupled soil consolidation », *ASCE, J Geotech Geoenviron Eng*, 136(3), 2010, p. 417-430.
- Santoso A.M., Phoon K.K., and Quek S.T., « Modified Metropolis-Hastings algorithm with reduced chain correlation for efficient subset simulation », *Probabilistic Engineering Mechanics*, Volume 26, Issue 2, 2011, p. 331-341.